

Нелинейная задача связанной потери устойчивости сжатых тонкостенных стержней двутаврового профиля

С.В. Ракша

Днепропетровский государственный технический университет железно-дорожного транспорта

Аннотация — Задача об устойчивости центрально сжатых тонкостенных стержней открытого профиля рассматривается на основе нелинейной теории связанного выпучивания с учетом взаимодействия общей изгибной и двух местных форм. Получены количественные оценки снижения предельного напряжения по сравнению с линейным расчетом для реальных стержней с начальными геометрическими несовершенствами.

ВВЕДЕНИЕ

Использование тонкостенных — холодноформованных, сварных — профилей в строительстве, машиностроении и других отраслях является перспективным и экономически обоснованным направлением благодаря повышенным геометрическим характеристикам (моментам инерции поперечного сечения и др.), по сравнению с прокатными профилями при том же собственном весе. Нормативными документами при расчете сжатых тонкостенных стержней открытого поперечного сечения рекомендуется проверка общей потери устойчивости (изгибной, изгибно-крутильной) и местной потери устойчивости элементов, составляющих профиль стержня.

Анализ нелинейного поведения (связанной потери устойчивости с учетом взаимного влияния общих и местных форм выпучивания) реальных тонкостенных стержней открытого [1-3] и замкнутого [4,5] профиля свидетельствует о недостаточности традиционного подхода к расчету таких конструкций. Стержни с двумя осями симметрии поперечного сечения, кроме того, обладают специфическими особенностями с точки зрения нелинейного расчета (необходимо учитывать не одну, а две местные формы [6]). В данной работе рассматривается задача о связанном выпучивании центрально сжатых тонкостенных стержней двутаврового профиля, имеющих начальные геометрические несовершенства формы. Учитывается нелинейное взаимодействие общей изгибной и двух местных форм потери устойчивости, расчет ведется для упругой области.

1. ЛИНЕЙНЫЙ РАСЧЕТ УСТОЙЧИВОСТИ

Стержень рассматривается как система тонких пластин. Расчет общей формы выполняется на основе теории В.З. Власова. При местной потере устойчивости линии контакта пластин не испытывают перемещений, а в пластинах в докритическом состоянии возникают только продольные напряжения s_x (профиль стержня и принятые обозначения на рис. 1, а). Для каждой из пластин используется дифференциальное уравнение устойчивости (обозначения общепринятые, местная система координат и положительные направления внутренних усилий на рис. 1, б)

$$D(W_{xxxx} + 2W_{xyxy} + W_{yyyy}) + \sigma_x t W_{xx} = 0 \quad (1)$$

Записав решение уравнения (1) в виде

$$w(\xi, \eta) = W(\eta) \sin(\beta \xi),$$

где $\xi = x/L$, $\eta = y/L$, $\beta = m\pi$, m — число продольных полуволи (для коротковолновых местных форм граничные условия на нагруженных краях, как правило, несущественны), из обыкновенного дифференциального уравнения для $W(\eta)$ можно получить решение в виде

$$S = [G] S^0, \quad (2)$$

где $S = (W; W_\eta; M^*; Q^*)^T$ – вектор состояния (в безразмерном виде),
 S^0 – начальное значение вектора S , индекс «Т» обозначает транспонирование;
 $W = w/t$,
 $W_\eta = w_\eta/t$, (w, w_η – прогиб и угол поворота),
 $M^* = M/(EL\delta)$,
 $Q^* = Q/(E\delta)$ ($M \sin \beta\xi$, $Q \sin \beta\xi$ – изгибающий момент и обобщенная поперечная сила,
 $\delta = (t/L)^3 / [12(1-\nu^2)]$,
 ν – коэффициент Пуассона),
 E – модуль упругости;
 $[G]$ – матрица размера (4×4) с элементами $g_{ij}/(\chi_2 - \chi_1)$ (значения g_{ij} приведены в [3],

$$\chi_i = k_i^2 - \nu\beta^2 \quad (i = 1, 2), \quad k_{1,2} = \beta \sqrt{1 \pm \mu}, \quad \mu = \frac{L}{\beta} \sqrt{\frac{\sigma_x t}{D}}.$$

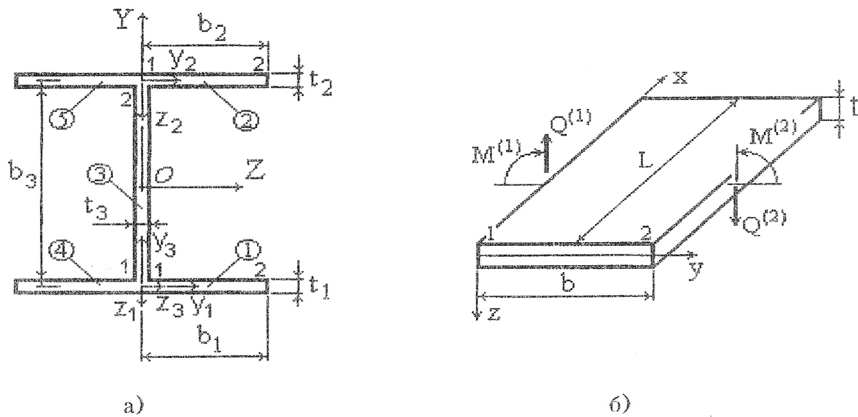


Рис. 1. Профиль стержня и местные оси координат (а) и положительные направления внутренних усилий в пластинах (б)

Решение дифференциального уравнения устойчивости в виде (2) позволяет для каждой из пластин выразить силовые факторы на обоих краях через перемещения и углы поворота. Представив матрицу

$[G]$ в виде

$$[G] = \begin{bmatrix} [G_1] & [G_2] \\ [G_3] & [G_4] \end{bmatrix}, \quad (3)$$

можно записать (в скобках сверху – номер края пластины)

$$\begin{bmatrix} M^* \\ Q^* \end{bmatrix}^{(1)} = [B_1] \begin{bmatrix} W \\ W_\eta \end{bmatrix}^{(1)} + [B_2] \begin{bmatrix} W \\ W_\eta \end{bmatrix}^{(2)};$$

$$\begin{bmatrix} M^* \\ Q^* \end{bmatrix}^{(2)} = [B_3] \begin{bmatrix} W \\ W_\eta \end{bmatrix}^{(1)} + [B_4] \begin{bmatrix} W \\ W_\eta \end{bmatrix}^{(2)},$$

где $[B_1] = -[G_2]^{-1}[G_1]$; $[B_2] = [G_2]^{-1}$; $[B_3] = [G_3] - [G_4][G_2]^{-1}[G_1]$; $[B_4] = [G_4][G_2]^{-1}$.

Для стенки двутавра, у которой оба продольных края сочленены с полками («упруго-заделанные» края), граничные условия имеют вид $W^{(1)} = 0$; $W^{(2)} = 0$. Изгибающие моменты на продольных краях стенки выражаются через углы поворота в соответствии с (4)

$$\begin{aligned} M^{*(1)} &= b^1(1,2)W_{\eta}^{(1)} + b^2(1,2)W_{\eta}^{(2)}; \\ M^{*(2)} &= b^3(1,2)W_{\eta}^{(1)} + b^3(1,2)W_{\eta}^{(2)} \end{aligned} \quad (5)$$

$(b^k(i,j))$ — элементы матриц $[B_k]$.

Для полок - пластин с одним упруго заделанным и другим свободным ненагруженными краями граничные условия имеют вид: $W^{(1)} = 0$; $M^{*(2)} = 0$; $Q^{*(2)} = 0$ и для края «1» получим из (4)

$$M^{*(1)} = h(1,2)W_{\eta}^{(1)} \quad (6)$$

$(\{h_{ij}\})$ — элементы матрицы $[H]$, полученной из выражения $[H] = -[G_4]^{-1}[G_3]$.

В общем случае поперечного сечения двутавра (разная ширина верхней и нижней полки) условия сопряжения соседних пластин (равенство углов поворота и равенство нулю алгебраической суммы изгибающих моментов) составляются для двух линий контакта:

$$\begin{aligned} M_{,1}^{*(1)} + M_{,3}^{*(1)} + M_{,4}^{*(1)} &= 0; & W_{\eta,1}^{(1)} &= W_{\eta,3}^{(1)} = W_{\eta,4}^{(1)}; \\ M_{,2}^{*(2)} + M_{,3}^{*(1)} + M_{,5}^{*(1)} &= 0; & W_{\eta,2}^{(2)} &= -W_{\eta,3}^{(1)} = W_{\eta,5}^{(1)} \end{aligned} \quad (7)$$

(нижний индекс после запятой — номер пластины, см. рис. 1, а).

Для равнополочного двутавра (в силу симметрии сечения) условия сопряжения можем записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} 2M_{,1}^{*(1)} + M_{,3}^{*(1)} &= 0; & W_{\eta,1}^{(1)} &= W_{\eta,3}^{(1)}; \\ 2M_{,2}^{*(2)} + M_{,3}^{*(1)} &= 0; & W_{\eta,2}^{(2)} &= -W_{\eta,3}^{(1)}. \end{aligned} \quad (7a)$$

С использованием (5) и (6) получим систему уравнений

$$\begin{cases} [2h_{,1}(1,2) + b_{,3}^1(1,2)]W_{\eta,3}^{(1)} + b_{,3}^2(1,2)W_{\eta,3}^{(2)} = 0; \\ b_{,3}^3(1,2)W_{\eta,3}^{(1)} + [b_{,3}^4(1,2) - 2h_{,2}(1,2)]W_{\eta,3}^{(2)} = 0 \end{cases}, \quad (8)$$

из которой следует характеристическое уравнение, определяющее значения критических напряжений местной формы (после целочисленной минимизации по числу продольных полуволн m):

$$[2h_{,1}(1,2) + b_{,3}^1(1,2)] \cdot [b_{,3}^4(1,2) - 2h_{,2}(1,2)] - b_{,3}^2(1,2) \cdot b_{,3}^3(1,2) = 0. \quad (9)$$

2. СВЯЗАННАЯ ПОТЕРЯ УСТОЙЧИВОСТИ

Нелинейная задача связанного выпучивания решается в рамках первого асимптотического приближения метода В. Койтера [7], т.е. в энергии пренебрегается членами выше третьей степени относительно перемещений и их производных. Для стержней с одной осью симметрии поперечного сечения достаточным является учет взаимовлияния общей и одной местной формы (вследствие несимметричности местной формы). В случае поперечного сечения с двумя осями симметрии необходимо учитывать, наряду с основной местной формой, «вторичную» местную форму, имеющей ту же длину волны, но другой характер симметрии [6]. Наложение двух форм приводит к несимметричности суммарного прогиба и в потенциальной энергии появляется член третьей степени, описывающий «тройное» взаимодействие форм.

В качестве общей формы принимается изгибаемая (эйлерова) форма. Взаимодействие крутильной и местных форм не рассматривается вследствие незначительности эффекта [1,2].

Поле перемещений для каждой из пластин профиля представляется в виде

$$U = \xi_1 U_1 + \xi_2 U_2 + \xi_3 U_3, \quad (10)$$

где $U_i = (u_i, v_i, w_i)$ — i -я собственная форма, причем индекс $i = 1$ соответствует общей форме, $i = 2$ — местной форме с минимальным критическим напряжением (первая местная форма), $i = 3$ — «вторичной» местной форме;
 ξ_i — амплитуды этих форм, которые нормированы условием равенства максимального прогиба толщине пластины (в случае разной толщины полков и стенки — максимальной толщине).

Поле начальных несовершенств принимается в виде аналогичном (10): $U^* = \sum \xi_i^* \cdot U_i$ (ξ_i^* — амплитуда начального прогиба по i -ой форме).

Выражение для потенциальной энергии в первом асимптотическом приближении [7] имеет вид:

$$P = a_0 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 a_i \xi_i^2 \left(1 - \frac{\Lambda}{\Lambda_i} \right) + \frac{1}{3} a_{111} \xi_1^3 + a_{122} \xi_1 \xi_2^2 + a_{133} \xi_1 \xi_3^2 + a_{123} \xi_1 \xi_2 \xi_3 - \sum_{i=1}^3 a_i \xi_i \xi_i^* \left(1 - \frac{\Lambda}{\Lambda_i} \right), \quad (11)$$

где Λ — параметр нагрузки (в качестве которого принимается безразмерное среднее напряжение $\sigma^* = (\sigma_x / E) 10^3$),

Λ_i — критическое значение Λ для i -ой формы.

Коэффициенты a_i, a_{ijk} вычисляются по найденным собственным формам по известным формулам [7]. Равновесные ветви определяются непосредственной минимизацией потенциальной энергии как функции параметров ξ_i ($i = 1 - 3$) при данном Λ . Для предельных точек и точек бифуркации гессиан P обращается в нуль.

При использовании схемы эйлеровой стойки для общей формы $a_{111} = 0$. Коэффициенты a_{122} и a_{133} тождественно обращаются в нуль вследствие погашения соответствующих интегралов в энергии, вычисляемых по противоположным полкам. Взаимодействие общей и местных форм в энергии описывается членом $a_{123} \xi_1 \xi_2 \xi_3$. Коэффициент a_{123} отличен от нуля только в том случае, когда суммарная местная форма $\xi_2 U_2 + \xi_3 U_3$ асимметрична относительно оси общего изгиба. Это обстоятельство определяет выбор вторичной местной формы. Вторичная местная форма — это ближайшая после первой местная форма, антисимметричная относительно оси общего изгиба (симметричная относительно плоскости общего изгиба). На рис. 2 показаны профили первых трех местных форм для стержня двутаврового профиля. Если общий изгиб происходит относительно оси OY , то вторичная форма совпадает со второй местной формой (рис. 2, б). Если же общий изгиб происходит относительно оси OZ , то под вторичной должна пониматься третья местная форма (рис. 2, в).

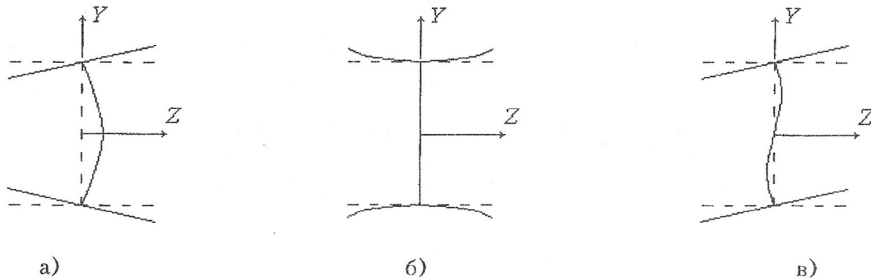


Рис. 2. Профили трех первых местных форм для тонкостенного двутавра

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО АНАЛИЗА

Для центрально сжатого двутавра с параметрами $L/b_1 = 12.5$; $b_3/b_1 = 2$; $t_3/b_3 = 0.0375$; $t_3 = t_1$ построены проекции равновесных ветвей (рис. 3) на плоскости «относительное среднее напряжение (σ/σ_y) — перемещение по общей форме» при различных сочетаниях несовершенств (σ_y — эйлеровы напряжения).

В точке бифуркации (при $\zeta_2^* = 0$) и в предельной точке (при $\zeta_2^* \neq 0$) амплитуда общей формы составляет около двух толщин элементов профиля.

Отметим также существенное влияние амплитуд общей и местной погиби на относительные предельные напряжения.

Выполнены расчеты общей, местной и связанной потери устойчивости для стержней равнополочного двутаврового профиля. На рис. 4 для двутавра с одинаковой толщиной стенки и полок представлены безразмерные напряжения $\sigma^* = (\sigma_i/E)10^3$ для изгибной, крутильной и двух местных форм в зависимости от гибкости стержня λ . Цифрами обозначены кривые безразмерных предельных напряжений (связанного выпучивания) при различных сочетаниях общей и местной начальной погиби (1 - $\zeta_1^* = 0.5$; $\zeta_2^* = 0$; 2 - $\zeta_1^* = 0.5$; $\zeta_2^* = 0.1$; 3 - $\zeta_1^* = 1.0$; $\zeta_2^* = 0.5$).

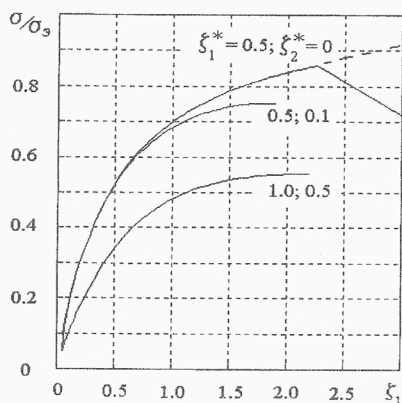


Рис. 3. Проекция равновесной ветви на плоскость $(\sigma/\sigma_3 - \zeta_1^*)$

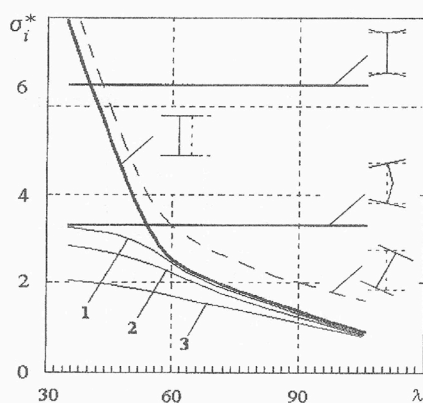


Рис. 4. Безразмерные напряжения общего, местного и связанного выпучивания для двутавра с параметрами $b_3/b_1 = 2$, $t_3/b_3 = 0.0375$, $t_3 = t_1$

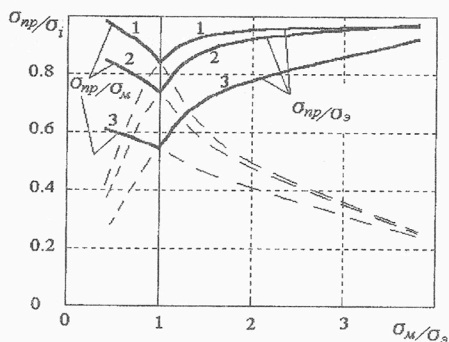


Рис. 5. Относительные предельные напряжения при различных соотношениях линейных критических напряжений

Максимальное снижение предельных напряжений наблюдается для стержня равноустойчивого в линейном расчете по общей изгибной и местной формам (при $\lambda \approx 54$).

Полученные результаты подтверждаются зависимостями относительных предельных напряжений σ_{pr}/σ_3 и σ_{pr}/σ_m от соотношения критических напряжений местной и изгибной форм потери устойчивости σ_m/σ_3 , представленными на рис. 5 (цифрами обозначены различные сочетания несовершенств, см. выше).

При реальной начальной погиби (кривые 1 и 2) максимальное снижение предельных напряжений для равноустойчивого стержня составляет 15...25 %. При «больших» местных дефектах пластинчатых элементов, составляющих профиль (кривая 3), предельные напряжения составляют менее 60 % от критических напряжений, полученных в линейном расчете.

Для более общего анализа выполнены расчеты связанной потери устойчивости сжатых стержней двутаврового профиля с постоянной относительной толщиной стенки $b_3/t = 50$ и различными значениями отношения b_1/b_3 . Длина стержней подбиралась таким образом, чтобы обеспечивалась равноустойчивость по изгибной и первой местной формам. В таблице 1 приведены результаты расчетов для некоторых из рассмотренных вариантов, в т.ч.: гибкость стержня λ ; безразмерные критические напряжения линейного расчета – изгибные σ^* , первой местной формы $\sigma_{*m}^{(1)}$ и вторичной местной $\sigma_{*m}^{(2)}$; безразмерные предельные напряжения σ_{np}^* ; количество продольных полуволн местной формы m ; относительные предельные напряжения σ_{np}/σ_s при двух сочетаниях начальной погиби. Снижение предельных напряжений соответствует ранее отмеченным значениям.

Таблица 1. Результаты линейного и нелинейного расчетов для равноустойчивого двутавра ($t_3=t_1$)

b_1/b_3	λ	Линейный расчет			Нелинейный расчет			
					$\zeta^*(0.5; 0)$		$\zeta^*(0.5; 0.1)$	
		σ^*	$\sigma_{*m}^{(1)} (m)$	$\sigma_{*m}^{(2)}$	σ_{np}^*	σ_{np}/σ_s	σ_{np}^*	σ_{np}/σ_s
0.2	73.9	1.805	1.805 (6)	11.54	1.663	0.921	1.58	0.875
0.4	87.1	1.303	1.303 (12)	2.885	1.15	0.88	1.01	0.777
0.6	118.5	0.702	0.702 (20)	1.282	0.631	0.898	0.544	0.774
0.8	153.1	0.421	0.421 (29)	0.721	0.384	0.912	0.327	0.777

Интересно оценить эффект взаимодействия форм потери устойчивости для равноустойчивого двутавра в случае удвоенной толщины стенки (например, двутавр, составленный из двух гнутых швеллеров, $b_3/t = 25$). Результаты расчетов (табл. 2) свидетельствуют о существенном снижении предельных напряжений (до 45 %) при тех же начальных несовершенствах, т.е. о более выраженном влиянии связанности форм.

Таблица 2. Результаты линейного и нелинейного расчетов равноустойчивого двутавра, составленного из двух швеллеров ($t_3=2t_1$)

b_1/b_3	λ	Линейный расчет			Нелинейный расчет			
					$\zeta^*(0.5; 0)$		$\zeta^*(0.5; 0.1)$	
		σ^*	$\sigma_{*m}^{(1)} (m)$	$\sigma_{*m}^{(2)}$	σ_{np}^*	σ_{np}/σ_s	σ_{np}^*	σ_{np}/σ_s
0.2	41.3	5.775	5.775 (3)	11.54	4.28	0.741	3.81	0.659
0.4	63.2	2.474	2.474 (12)	2.885	1.7	0.687	1.368	0.553
0.6	94.4	1.107	1.107 (21)	1.282	0.84	0.759	0.655	0.592
0.8	125.5	0.627	0.627 (30)	0.721	0.502	0.8	0.385	0.614

Наглядно нелинейный эффект связанности форм для равноустойчивого двутавра иллюстрирует представленная на рис. 6 зависимость $\sigma_{np}/\sigma_s = f(\zeta_1^*, \zeta_2^*)$ – «поверхность чувствительности к несовершенствам».

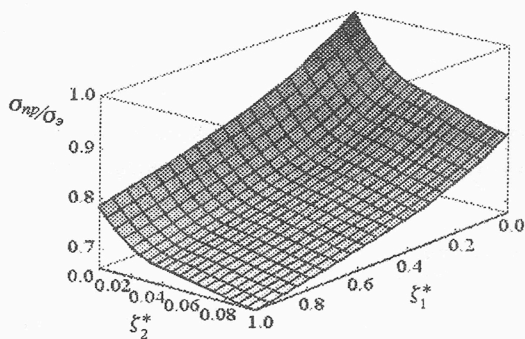


Рис. 6. Поверхность чувствительности к несовершенствам для равноустойчивого двутавра: $L/b_1 = 12.5$; $b_3/b_1 = 2$; $t_3/b_3 = 0.0375$; $t_3 = t_1$

Как видно, общая погибь ξ_1^* порядка толщины профиля и несовершенство местной формы ξ_2^* , составляющее $1/10$ от ξ_1^* , примерно в равной степени снижают относительное предельное напряжение.

ВЫВОДЫ:

1. Нелинейное взаимодействие общей изгибной и местной форм выпучивания сжатых тонкостенных стержней двутаврового профиля приводит к снижению предельных напряжений на 15...25 % при одинаковой толщине элементов профиля и на 20...45 % для составного сечения их двух гнутых швеллеров.
2. При расчете устойчивости реальных стержней необходимо учитывать действительные параметры начальных несовершенств формы.
3. В нормах расчета тонкостенных стержней целесообразно нормировать не только общую погибь, но и местные несовершенства (не более $0,1t$).

ЛИТЕРАТУРА

1. Grimaldi A., Pignataro M. Postbuckling behavior of thin-walled open cross-section compression members // J. Struct. Mech.- 7 (2), 1979.- P. 143-159.
2. Pignataro M., Luongo A., Rizzi N. On the effect of the local overall interaction on the postbuckling of uniformly compressed channels // Thin-Walled Structures.- 3, 1985.- P. 293-321.
3. Маневич А. И., Ракша С. В. Местное и связанное выпучивание тонкостенных стержней при сжатии и изгибе в двух плоскостях // Polish-Ukrainian Transaction.- 4, v.1, Part 2, Warsaw-Dnepropetrovsk, 1996.- С. 270-275.
4. Sridharan S., Ali M. A. Interactive buckling in thin-walled beam columns // J. of Engng. Mech., ASCE.- 111, № 12, 1985.- P. 1470 - 1486.
5. Маневич А. И., Ракша С. В. Связанная потеря устойчивости сжатых тонкостенных стержней закрытого поперечного сечения // Прикл. механика.-1993.- 29, № 2.- С. 62 - 68.
6. Koiter W.T., Neut A. van der. Interaction between local and overall buckling of stiffened compression panels // Thin-Walled Structures.- 1980: part.1.- P. 51 - 66; part 2.- P. 66 - 86.
7. Койтер В. Т. Устойчивость и закритическое поведение упругих систем // Механика: Период сб. перев. иностр. статей.- 1960.- № 5.- С. 99 -110.