УДК 517.5

С.А. Пичугов (Днепропетровский национальный университет железнодорожного транспорта имени академика В. Лазаряна.)

S.A.Pichugov

Кратные модули непрерывности и наилучшие приближения периодических функций в метрических пространствах.

Multiple modules of continuity and best approximations of periodic functions in metric spaces.

It is proved that under the condition $M_\Psi(\frac{1}{2}) < 1$, where M_Ψ is the stretch function Ψ in the space L_Ψ, the Jackson inequalities

$$\sup_n \sup_{f\in L_\Psi, f\neq const} \frac{E_{n-1}(f)_\Psi}{\omega_k(f, \frac{\pi}{n})_\Psi} < \infty,$$

where $E_{n-1}(f)_\Psi$ is the best approximation of f by trigonometric polynomials of degree at most $n-1$, $\omega_k(f,h)_\Psi$ is the modulus of continuity of f of order $k, k \in N$. We study necessary and sufficient conditions on the function f to satisfy the relation $E_{n-1}(f)_\Psi \asymp \omega_k(f, \frac{\pi}{n})_\Psi$.

Доведено, що за умови $M_\Psi(\frac{1}{2}) < 1$, де M_Ψ - функція розтягування Ψ в просторі L_Ψ справедливі нерівності Джексона

$$\sup_n \sup_{f\in L_\Psi, f\neq const} \frac{E_{n-1}(f)_\Psi}{\omega_k(f, \frac{\pi}{n})_\Psi} < \infty,$$

де $E_{n-1}(f)_\Psi$ - найкраще наближення f тригонометричними поліномами ступеня не вище $n-1$, $\omega_k(f,h)_\Psi$ - модуль безперервності f близько $k, k \in N$. Досліджуються необхідні і достатні умови на функцію f для виконання співвідношення $E_{n-1}(f)_\Psi \asymp \omega_k(f, \frac{\pi}{n})_\Psi$.

Доказано, что при условии $M_\Psi(\frac{1}{2}) < 1$, где M_Ψ- функция растяжения Ψ в пространстве L_Ψ, справедливы неравенства Джексона

$$\sup_n \sup_{f\in L_\Psi, f\neq const} \frac{E_{n-1}(f)_\Psi}{\omega_k(f, \frac{\pi}{n})_\Psi} < \infty,$$

где $E_{n-1}(f)_\Psi$ - наилучшее приближение f тригонометрическими полиномами степени не выше $n-1$, $\omega_k(f,h)_\Psi$ - модуль непрерывности f порядка $k, k \in N$. Исследуются необходимые и достаточные условия на функцию f для выполнения соотношения $E_{n-1}(f)_\Psi \asymp \omega_k(f, \frac{\pi}{n})_\Psi$.

1. Введение. Пусть Ω - множество функций $\Psi : R^1_+ \to R^1_+$, являющихся модулем непрерывности, то есть Ψ - непрерывная неубывающая функция,$\Psi(0) = 0$, $\Psi(x + y) \leq \Psi(x) + \Psi(y)$ для всех $x, y \in R^1_+$;

функции $f(x), x \in R^1$, - действительнозначные, имеющие период 2π; $T = [-\pi, \pi]$- основной тор периодов; $L_0 \equiv L_0(T)$ - множество таких функций, которые почти всюду на T конечны и измеримы; для $\Psi \in \Omega$ множество L_Ψ:

$$L_\Psi \equiv L_\Psi(T) = \{f \in L_0 : \|f\|_\Psi = \frac{1}{2\pi} \int_T \Psi(|f(x)|)dx < \infty\},$$

является линейным метрическим пространством с метрикой $\rho(f, g)_\Psi = \|f - g\|_\Psi$.

В частности, с помощью функции $\varphi(t) = t(1+t)^{-1}, \varphi \in \Omega$, в L_0 вводится метрика

$$\rho(f, g)_0 = \int_T \varphi(|f(x) - g(x)|)dx,$$

порождающая сходимость по мере, а в случае $\varphi(t) = t^p, 0 < p < 1$, получаем метрические пространства L_p.

Пусть $T_n(x) = \Sigma_{k=-n}^n c_k e^{ikx}$ - действительнозначный тригонометрический полином степени n,

$$E_n(f)_\Psi = \inf_{\{c_k\}} \|f - T_n\|_\Psi$$

- наилучшее приближение f такими полиномами в пространстве L_Ψ,

$$\Delta_t f(x) = f(x + t) - f(x), \;\; \Delta_t^k = \Delta_t(\Delta_t^{k-1}), \;\; k \in N,$$

$$\omega_k(f, h)_\Psi = \sup_{|t| \leq h} \|\Delta_t^k f\|_\Psi, \;\; h \geq 0$$

- модуль непрерывности порядка k функции f в пространстве L_Ψ (в случае $k = 1$ вместо $\omega_1(f, h)_\Psi$ будем писать $\omega(f, h)_\Psi$).

Рассмотрим задачу о выполнении в пространствах L_Ψ следующих соотношений (неравенств Джексона):

$$\sup_{n>0} \sup_{f \in L_\Psi, f \neq const} \frac{E_{n-1}(f)_\Psi}{\omega_k(f, \frac{\pi}{n})_\Psi} < \infty. \tag{1}$$

В пространствах $L_p, p \in (0, 1)$ при $k = 1$ соотношения (1) доказаны в [1;2], для $k > 1$ - в [3]. В дальнейшем в [4] предложен новый метод доказательства (1) для всех $k \in N$.

При исследовании неравенств (1) в шкале пространств L_Ψ важную роль играет понятие функции растяжения.

Пусть $\beta(t), t \in (0, \infty)$ - произвольная строго положительная всюду конечная функция. Ее функцией растяжения называют [5,гл II, §1] функцию $M_\beta(s), s \in (0, \infty)$,

$$M_\beta(s) := \sup_{t>0} \frac{\beta(st)}{\beta(t)}.$$

Известно [5], что для функции M_β существует число γ_β (нижний показатель растяжения функции β), такое, что $M_\beta(s) \geq s^{\gamma_\beta} \;\; \forall s \in [0, 1]$, и для любого $\varepsilon > 0$ при $0 < s < 1$ с некоторой константой $C_\varepsilon \;\; M_\beta(s) \leq C_\varepsilon s^{\gamma_\beta - \varepsilon}$.

Заметим, что для $\beta \in \Omega$ $\gamma_\beta \in [0,1]$, и в этом случае функция $M_\beta(s)$ в правой окрестности нуля ведет себя следующим образом: либо $M_\beta(s) \equiv 1$ для всех $s \in (0,1]$ (случай $\gamma_\beta = 0$), либо $M_\beta(+0) = 0$(случай $\gamma_\beta > 0$).

В [6] доказано, что в пространстве L_Ψ при $k = 1$ неравенство Джексона (1) выполнено тогда и только тогда, когда $\gamma_\Psi > 0$. Случай $k > 1$ оставался открытым.

В п.2 мы докажем неравенства Джексона (1) в случае $k > 1$ для некоторого класса пространств L_Ψ. В п.3 приведены конструктивные характеристики классов $H_k^\alpha(L_\Psi)$,

$$H_k^\alpha(L_\Psi) = \{f \in L_\Psi : \omega_k(f,h)_\Psi \leq C_f \cdot h^\alpha\}.$$

В п.4 исследуется задача С.Б. Стечкина о точном обращении неравенств Джексона в L_Ψ, то есть необходимые и достаточные условия на функцию f для того, чтоб выполнялось соотношение

$$E_{n-1}(f)_\Psi \asymp \omega_k(f, \frac{\pi}{n})_\Psi.$$

2. **Теорема Джексона в L_Ψ для кратных модулей непрерывности**.

Теорема 1. *Пусть* $\Psi \in \Omega, k = 2, 3, ...$

1. Если $M_\Psi(\frac{1}{2}) < 1$, *то*

$$\sup_n \sup_{f \in L_\Psi, f \neq const} \frac{E_{n-1}(f)_\Psi}{\omega_k(f, \frac{\pi}{n})_\Psi} < \infty. \tag{1}$$

2. Если $\gamma_\Psi = 0$, *то для любой последовательности* $\{\alpha_n\}, \alpha_n > 0, \alpha_n \downarrow 0$

$$\sup_n \sup_{f \in L_\Psi, f \neq const} \frac{E_{n-1}(f)_\Psi}{\omega_k(f, \alpha_n)_\Psi} = \infty. \tag{2}$$

Метод доказательства неравенства Джексона (1) в $L_p, 0 < p < 1$, разработанный в [4], обладает большой общностью. Многие этапы доказательства с естественными изменениями остаются в силе в более общем случае пространств L_Ψ. При этом на разных этапах возникают разные требования на поведение функции Ψ. Мы следуем этому методу доказательства. При изложении, по возможности, ограничиваемся краткими комментариями, акцентируя внимание на те места, где по существу используется специфика метрики L_Ψ, и опускаем технические детали, которые есть в [4], связанные с алгебраическими преобразованиями.

С помощью функции $\nu(s) : R \to R$, такой, что:

1. $\nu(s) = 1$ для $s \in [-1, 1]$; $\nu(s) = 0$ для $|s| \geq 2$;
2. $\nu(-s) = \nu(s)$;
3. $\nu(s) \in C^\infty(R)$,

определим тригонометрический полином

$$V_n(x) := \sum_{|k| \leq 2n} \nu\left(\frac{k}{n}\right) e^{ikx}$$

степени не выше $2n-1$, который является аналогом классических полиномов Валле Пуссена.

Для произвольного натурального N, $N \geq 3n$,построим на периоде $[0, 2\pi]$ систему равноотстоящих точек $t_j = 2\pi \frac{j}{N}, j = 1, ..., N$, и для $\lambda \in R$ определим полиномиальные операторы $V_{n,\lambda}$:

$$V_{n,\lambda}(f;x) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} f(t_j+\lambda)V_n(x-t_j-\lambda).$$

Если $\gamma_\Psi > 0$, то ([6]) $\|\frac{1}{n}V_n\|_{M_\Psi} \leq C_1\frac{1}{n}$, и если $N \leq C_2 n$, то

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \|V_{n,\lambda}(f)\|_\Psi d\lambda \leq \sum_{j=1}^{N}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Psi(|f(t_j+\lambda)|)\cdot M_\Psi\left(\left|\frac{V_n(x-t_j-\lambda)}{N}\right|\right)dxd\lambda =$$

$$= N\|f\|_\Psi \cdot \left\|\frac{V_n}{N}\right\|_{M_\Psi} \leq C_3\|f\|_\Psi, \qquad (3)$$

то есть при условии $\gamma_\Psi > 0$ нормы операторов $V_{n,\lambda}$ в среднем по сдвигам λ равномерно ограничены по n (если N имеет порядок роста n).

Пусть τ_h - оператор сдвига аргумента на h, то есть $\tau_h g(x) = g(x+h)$. Для операторов A, B через $[A, B]$ обозначим их коммутатор: $[A, B] = AB - BA$.

В дальнейшем положим

$$N = 2d_{2(2n-1)-1}^{\left(\left[\frac{2}{\gamma_\Psi}\right]\right)} + 1,$$

где $d_n^{(l)} = n(l+1) - l$.

При таком выборе N в [8] доказано, что при $\gamma_\Psi > 0$ для любого тригонометрического полинома T_{2n-1} степени не выше $2n-1$ при всех $h \in (0, \frac{2\pi}{N})$ справедливы неравенства

$$\|\Delta_h^k T_{2n-1}\|_\Psi \leq C_4\|\Delta_{\frac{2\pi}{N}}^k T_{2n-1}\|_\Psi. \qquad (4)$$

Лемма 1. *Пусть $\Psi \in \Omega$, и $M_\Psi(\frac{1}{2}) < 1$. Тогда для всех $f \in L_\Psi, n \in N$, справедливы неравенства*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\|[V_{n,\lambda},\tau_h](f,x)\|_\Psi d\lambda dh \leq C_5\omega_k(f, \frac{\pi}{n+1})_\Psi. \qquad (5)$$

Доказательство. При условии $M_\Psi(\frac{1}{2}) < 1$ для любой $\frac{2\pi}{m}$-периодической функции $f \in L_\Psi$ справедливо неравенство [7]

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\|\Delta_h f\|_\Psi dh \leq C_6 m\int_0^{\frac{2\pi}{m}}\|\Delta_h^k f\|_\Psi dh. \qquad (6)$$

Обозначим $\Delta_{h,\lambda}$ - оператор разности с шагом h по переменной λ, $\|\cdot\|_{\Psi,\lambda}$-L_Ψ-норму по переменной λ. Так как ([4]) $[V_{n,\lambda}, \tau_h] = \tau_h\Delta_{h,\lambda}V_{n,\lambda}$ и $\Delta_h^k(f(x)\cdot g(x)) = \sum_{i=0}^{k} C_k^i\Delta_h^{k-i}f(x+ih)\Delta_h^i g(x)$, то из (6) следует, что

$$I := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\|[V_{n,\lambda},\tau_h](f,x)\|_\Psi d\lambda dh \leq$$

$$\leq C_6 \cdot N \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \int_0^{t_1} \|\Delta_{h,\lambda}^{2k}(V_{n,\lambda}(f,x))\|_{\Psi,\lambda} dhdx =$$

$$= C_6 \cdot N \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \int_0^{t_1} \|\Sigma_{j=1}^N \Delta_{h,\lambda}^{2k}(f(t_j+\lambda))(\frac{V_n}{N}(x-t_j-\lambda)\|_{\Psi,\lambda} dhdx \leq$$

$$\leq C_6 \cdot N \sum_{i=0}^{2k} M_\Psi(C_{2k}^i) \frac{1}{2\pi} \int_0^{t_1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \|\Delta_{-h}^i V_{n,\lambda} \Delta_h^{2k-i} \tau_h^i(f,x)\|_\Psi d\lambda dh.$$

Функция $V_{n,\lambda}\Delta_h^{2k-i}\tau_h^i(f,x)$ является тригонометрическим полиномом порядка $2n-1$ по переменной x, поэтому в силу выбора N из (4) следует, что

$$\|\Delta_{-h}^i V_{n,\lambda} \Delta_h^{2k-i} \tau_h^i(f,x)\|_\Psi \leq C_4 \|\Delta_{t_1}^i V_{n,\lambda} \Delta_h^{2k-i} \tau_h^i(f,x)\|_\Psi.$$

Отсюда, учитывая (3), получим:

$$I \leq C_6 N \sum_{i=0}^{2k} M_\Psi(C_{2k}^i) C_4 \frac{1}{2\pi} \int_0^{t_1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \|V_{n,\lambda} \tau_h^i \Delta_{t_1}^i \Delta_h^{2k-i}(f,x)\|_\Psi d\lambda dh \leq$$

$$\leq C_7 N \int_0^{t_1} \|\Delta_{t_1}^i \Delta_h^{2k-i} f(x)\|_\Psi dh \leq C_8 \omega_k(f,t_1)_\Psi.$$

Лемма 1 доказана.

Следствие. *В условиях леммы 1 справедливы неравенства*

$$N \int_0^{t_1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \|[V_{n,\lambda} - I, \Delta_h](f,x)\|_\Psi d\lambda dh \leq C_9 \omega_k(f, \frac{2\pi}{n})_\Psi. \tag{7}$$

Доказательство теоремы 1. Для доказательства неравенства Джексона(1) по существу нужно повторить соответствующие выкладки из [4]. Оценка сверху аппроксимации осуществляется с помощью усреднений по сдвигам

$$I_k := \frac{1}{(2\pi)^k} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} \|(I - V_{n,\lambda_1}) \circ (I - V_{n,\lambda_2}) \circ \dots \circ (I - V_{n,\lambda_k})\|_\Psi d\lambda_1 \dots d\lambda_k.$$

Достаточно доказать, что $I_k \leq C_{10} \omega_k(f, \frac{\pi}{n})_\Psi$.

В [7] доказано, что для любой Ψ из Ω и всех $f \in L_\Psi$ и $h > 0$ справедливы неравенства

$$\omega_k(f,h)_\Psi \leq C_{11} \Omega_k(f,h)_\Psi \leq C_{12} \omega_k(f,h)_\Psi,$$

где $\Omega_k(f,h)_\Psi = \frac{1}{h^k} \int_0^h \dots \int_0^h \|\Delta_{\bar{t}}^k f\|_\Psi dt_1 \dots dt_k, \bar{t} = (t_1, \dots t_k)$, $\Delta_{\bar{t}}^k = \Delta_{t_1} \circ \dots \circ \Delta_{t_k}$.

Для доказательства неравенства $I_k \leq C_{13} \Omega_k(f, \frac{\pi}{n})_\Psi$ применяется индукция по k. В случае $k = 1$ при $\gamma_\Psi > 0$ неравенство Джексона доказано в [6], а индуктивный переход основан на неравенстве (7) и алгебраическом соотношении ([4])

$$\Delta_{h_1} \circ \dots \circ \Delta_{h_s} \circ (V_{n,\lambda} - I) = (V_{n,\lambda} - I) \circ \Delta_{h_1} \circ \dots \circ \Delta_{h_s} + \sum_{i=1}^s \Delta_{h_1} \circ \dots \circ [\Delta_{h_i}, V_{n,\lambda} - I] \circ \dots \circ \Delta_{h_s}.$$

Пусть теперь $\gamma_\Psi = 0$. Для доказательства (2) заметим, что $\omega_k(f,\alpha_n)_\Psi \le 2^{k-1}\omega(f,\alpha_n)_\Psi$, поэтому (см.[6])

$$\sup_n \sup_{f\in L_\Psi, f\neq const} \frac{E_{n-1}(f)_\Psi}{\omega_k(f,\alpha_n)_\Psi} \ge \frac{1}{2^{k-1}} \sup_n \sup_{f\in L_\Psi, f\neq const} \frac{E_{n-1}(f)_\Psi}{\omega(f,\alpha_n)_\Psi} = \infty.$$

Теорема 1 доказана.

Замечание. Условие $M_\Psi(\frac{1}{2}) < 1$ является более сильным, чем условие $\gamma_\Psi > 0$. Например, для функции Ψ из Ω, $\Psi(x) = 2x$ для $x \in [0, \frac{1}{2}]$, $\Psi(x) = 1$ для $x \in [\frac{1}{2}, 1]$, и $\Psi(x) = x$ для $x > 1$,будет $\gamma_\Psi = 1$ и $M_\Psi(\frac{1}{2}) = 1$.

В случае $k = 1$ необходимым и достаточным условием для выполнения неравенства Джексона (1) было условие $\gamma_\Psi > 0$ ([6]). При $k > 1$ при доказательстве теоремы 1 в основном использовалось условие $\gamma_\Psi > 0$. Однако неравенство (6) доказано при условии $M_\Psi(\frac{1}{2}) < 1$. Остается открытым вопрос, справедлива ли теорема Джексона при $k > 1$ в пространствах L_Ψ при условии $\gamma_\Psi > 0$?

3. Конструктивная характеристика классов $H_k^\alpha(L_\Psi)$.

В работе [9] в пространстве L_Ψ доказана обратная теорема Джексона в следующей форме.

Теорема 2. *Пусть $\Psi \in \Omega$,$\gamma_\Psi > 0$. Тогда для любого $k \in \boldsymbol{N}$ найдется константа $C = C(k,\Psi)$ такая, что для всех $f \in L_\Psi$ и всех $h \in (0,\pi]$ имеют место неравенства*

$$\omega_k(f,h)_\Psi \le C \sum_{\nu=1}^{[\frac{2\pi}{h}]} \frac{M_\Psi((\nu\frac{h}{2\pi})^k)}{\nu} E_{\nu_{-1}}(f)_\Psi. \tag{8}$$

Так как $M_\Psi(t) \le C(\varepsilon)t^{\gamma_\Psi - \varepsilon}$ при $t \in (0,1]$, то из (8) следует, что

$$\omega_k(f,h)_\Psi \le C_{14} h^{k(\gamma_\Psi-\varepsilon)} \cdot \sum_{\nu=1}^{[\frac{2\pi}{h}]} \nu^{k(\gamma_\Psi-\varepsilon)-1} E_{\nu_{-1}}(f)_\Psi. \tag{9}$$

Пусть $E_{\nu_{-1}}(f)_\Psi \le C_{15}\frac{1}{\nu^\alpha}, \nu \in N$, и $\alpha < k\gamma_\Psi$.

Положим ε настолько малым, чтобы выполнялось условие $\alpha < k(\gamma_\Psi - \varepsilon)$.

Тогда из (9) следует $\omega_k(f,h)_\Psi \le C_{16}h^\alpha$.

Поэтому из теорем 1,2 вытекает следующее следствие.

Следствие 2. *Пусть $\Psi \in \Omega$, $M_\Psi(\frac{1}{2}) < 1$,$k > 1$,$\alpha < k\gamma_\Psi$. Тогда для функции f следующие два условия эквивалентны:*

1. $\exists K_1 = K_1(f) : \forall n \qquad E_{n-1}(f)_\Psi \le K_1\frac{1}{n^\alpha}$.
2. $\exists K_2 = K_2(f) : \forall h > 0 \qquad \omega_k(f,h)_\Psi \le K_2 h^\alpha$.

При $k = 1$ это утверждение доказано в [9], и в этом случае вместо условия $M_\Psi(\frac{1}{2}) < 1$ достаточно было только условие $\gamma_\Psi > 0$.

4. Точное обращение неравенства Джексона в L_Ψ. При каких условиях на функцию f выполняется соотношение $E_{n-1}(f)_\Psi \asymp \omega_k(f,\frac{\pi}{n})_\Psi$? Задачи о совпадении аппроксимативных и структурных свойств функции в пространстве $C[0,2\pi]$ исследовались в [10;11;12](см. также [13] для пространств $L_p[0,2\pi], p \in [1,\infty]$).

В [14] доказано, что при $p \in [1,\infty]$

$$/E_{n-1}(f)_p \asymp \omega_k(f, \frac{\pi}{n})_p/ \Leftrightarrow /\omega_k(f,h)_p \asymp \omega_{k+1}(f,h)_p/.$$

Аналог этого результата в случае $p \in (0,1)$ доказан в [15]:

$$/E_{n-1}(f)_p \asymp \omega_k(f, \frac{\pi}{n})_p/ \Leftrightarrow /\omega_k(f,h)_p \asymp \omega_r(f,h)_p, r = k + \left[\frac{1}{p}\right]/.$$

Для характеристики поведения функции Ψ наряду с нижним показателем растяжения будем теперь использовать и верхний показатель δ_Ψ, то есть ([5,гл.II,§1]) такой показатель степени, что при всех $t \geq 1$ $M_\Psi(t) \geq t^{\delta_\Psi}$, но для любого $\varepsilon > 0$ с некоторой константой C_ε $M_\Psi(t) \leq C_\varepsilon t^{\delta_\Psi + \varepsilon}$.

Для модуля непрерывности $\omega_k(f,h)_\Psi$ заданной функции f верхний показатель обозначим δ_{ω_k}.

Теорема 3.*Пусть $k \in \boldsymbol{N}$, $\gamma_\Psi > 0$ при $k = 1$ и $M_\Psi(\frac{1}{2}) < 1$ при $k > 1$. Если для $f \in L_\Psi$ $\delta_{\omega_k} < k\gamma_\Psi$, то $\omega_k(f, \frac{\pi}{n})_\Psi \asymp E_{n-1}(f)_\Psi$.*

Теорема 4. *Пусть $k \in N$, $M_\Psi(\frac{1}{2}) < 1$. Тогда для $f \in L_\Psi$*

$$/\omega_k(f, \frac{\pi}{n})_\Psi \asymp E_{n-1}(f)_\Psi/ \Leftrightarrow /\exists s \in \boldsymbol{N}: s > \left(\frac{\delta_\Psi}{\gamma_\Psi} - 1\right) k + \frac{1-\delta_\Psi}{\gamma_\Psi}, \omega_k(f,h)_\Psi \asymp \omega_{k+s}(f,h)_\Psi/.$$

Предварительно докажем следующую лемму.

Лемма 2.*Пусть $N, n \in \boldsymbol{N}, N \geq n; k, l \in \boldsymbol{N}$, и при $k = 1$ $\gamma_\Psi > 0$, при $k > 1$ $M_\Psi(\frac{1}{2}) < 1$. Тогда, если $\delta_{\omega_k} < l\gamma_\Psi$, то для всех $\varepsilon > 0$ таких, что $l(\gamma_\Psi - \varepsilon) - \delta_{\omega_k} - \varepsilon > 0$,*

$$\frac{1}{N} \sum_{\nu=1}^{N} \left(\frac{\nu}{N}\right)^{(\gamma_\Psi - \varepsilon)l - 1} E_{\nu-1}(f)_\Psi \leq C_{17} \left(\frac{n}{N}\right)^{l(\gamma_\Psi - \varepsilon)} \omega_k(f, \frac{1}{n})_\Psi + C_{18} E_{n-1}(f)_\Psi,$$

где константы C_{17},C_{18} не зависят от n и N.

Далее для краткости для данной функции f обозначим $e_\nu := E_\nu(f)_\Psi$, $\omega_k(h) := \omega_k(f,h)_\Psi$.

Доказательство леммы 2.

$$\frac{1}{N} \sum_{\nu=1}^{N} \left(\frac{\nu}{N}\right)^{l(\gamma_\Psi - \varepsilon) - 1} e_{\nu-1} = \frac{1}{N}(\sum_{\nu=1}^{n-1} + \sum_{\nu=n}^{N}) \left(\frac{\nu}{N}\right)^{l(\gamma_\Psi - \varepsilon) - 1} e_{\nu-1} =: A + B.$$

так как $\{e_{\nu-1}\} \downarrow$, то

$$B \leq e_{n-1} \cdot \frac{1}{N^{l(\gamma_\Psi - \varepsilon)}} \sum_{\nu=n}^{N} \nu^{l(\gamma_\Psi - \varepsilon) - 1} \leq C_{18} e_{n-1}.$$

Для оценки A используем теорему Джексона и определение δ_{ω_k}: при $\nu < n$

$$e_{\nu-1} \leq C_{19} \omega_k(\frac{1}{\nu}) \leq C_{20} \omega_k(\frac{1}{n})(\frac{n}{\nu})^{\delta_{\omega_k} + \varepsilon},$$

$$A \leq C_{20} \omega_k(\frac{1}{n}) \frac{1}{N} \sum_{\nu=1}^{n-1} (\frac{\nu}{N})^{l(\gamma_\Psi - \varepsilon) - 1} (\frac{n}{\nu})^{\delta_{\omega_k} + \varepsilon} =$$

$$C_{20}\omega_k(\frac{1}{n})\frac{n^{\delta_{\omega_k}+\varepsilon}}{N^{l(\gamma_\Psi-\varepsilon)}}\Sigma_{\nu=1}^{n-1}\nu^{l(\gamma_\Psi-\varepsilon)-(\delta_{\omega_k}+\varepsilon)-1}\le C_{17}(\frac{n}{N})^{l(\gamma_\Psi-\varepsilon)}\omega_k(\frac{1}{n}).$$

Лемма 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. Положим в лемме 2 $l=k$ и применим обратную теорему Джексона в форме (9):

$$\omega_k(\frac{2\pi}{n})=\omega_k(\frac{2\pi}{N}\cdot\frac{N}{n})\le C_{21}(\frac{N}{n})^{\delta_{\omega_k}+\varepsilon}\cdot\frac{1}{N}\sum_{\nu=1}^{N}(\frac{\nu}{N})^{k(\gamma_\Psi-\varepsilon)-1}e_{\nu-1}\le$$

$$\le C_{21}(\frac{N}{n})^{\delta_{\omega_k}+\varepsilon}(C_{17}(\frac{n}{N})^{k(\gamma_\Psi-\varepsilon)}\omega_k(\frac{2\pi}{n})+C_{18}e_{n-1})=$$

$$C_{21}(\frac{n}{N})^{k(\gamma_\Psi-\varepsilon)-(\delta_{\omega_k}+\varepsilon)}\omega_k(\frac{2\pi}{n})+C_{22}(\frac{N}{n})^{\delta_{\omega_k}+\varepsilon}e_{n-1}. \qquad (10)$$

Заметим, что константы C_{21} и C_{22} не зависят от n и N.

Положим $N=n\cdot r, r\in\mathbf{N}$, и выберем r настолько большим, чтобы выполнялось условие

$$C_{21}\left(\frac{1}{r}\right)^{k(\gamma_\Psi-\varepsilon)-(\delta_{\omega_k}+\varepsilon)}<\frac{1}{2}.$$

Тогда из (10) следует, что $\omega_k(\frac{\pi}{n})\le C_{23}e_{n-1}$.

Теорема 3 доказана.

Доказательство теоремы 4. Импликация $\Rightarrow$ очевидным образом справедлива (причем для любого $s\in\mathbf{N}$):

$$\omega_k(\frac{\pi}{n})\asymp e_{n-1}\le C_{24}\omega_{k+s}(\frac{\pi}{n})\le C_{25}\omega_k(\frac{\pi}{n}).$$

Докажем обратное утверждение. Достаточно показать, что $\delta_{\omega_{k+s}}<(k+s)\gamma_\Psi$, тогда по теореме 3

$$\omega_k(\frac{\pi}{n})\asymp\omega_{k+s}(\frac{\pi}{n})\asymp e_{n-1}. \qquad (11)$$

Из определения верхнего показателя растяжения видно, что если $\omega_k(h)\asymp\omega_{k+s}(h)$, то $\delta_{\omega_k}=\delta_{\omega_{k+s}}$. Значит справедливость (11) гарантируется условием $\delta_{\omega_k}<(k+s)\gamma_\Psi$.

В [7] доказано, что для любой $f\in L_\Psi, \Psi\in\Omega$, всех $k,n\in N$ и $h>0$

$$\omega_k(f,nh)_\Psi\le C(k)\cdot n\cdot M_\Psi(n^{k-1})\omega_k(f,h)_\Psi.$$

Отсюда следует оценка сверху для значений δ_{ω_k}:

$$\delta_{\omega_k}\le(k-1)\delta_\Psi+1.$$

Поэтому для выполнимости (11) достаточно выбрать значение s так, чтобы

$$(k-1)\delta_\Psi+1<(k+s)\gamma_\Psi.$$

Теорема 4 доказана.

Література

[1] *Иванов В.И.* Прямые и обратные теоремы теории приближения в метрике L_p для $0 < p < 1$ // Мат. заметки.— 1975.—**18**, №5.—С.641-658.

[2] *Стороженко Э.А., Кротов В.Г., Освальд П.* Прямые и обратные теоремы типа Джексона в пространствах $L_p, 0 < p < 1$ // Мат.сб.— 1975. — **98**,№3 — С.395-415.

[3] *Стороженко Э.А., Освальд П.* Теорема Джексона в пространствах $L_p(R^k), 0 < p < 1$ // Сиб.мат.журн.— 1978. — **19**,№4 — С.888-901.

[4] *Руновский К.В.* О приближении семействами линейных полиномиальных операторов в пространствах $L_p, 0 < p < 1$ // Мат. сб.—1994. — **185**,№8—С.81-102.

[5] Крейн С.Г., Петунин Ю.И., Семенов Е.М. Интерполяция линейных операторов.—М.: Наука,1978. — 400 с.

[6] *Пичугов С. А.* О теореме Джексона для периодических функций в метрических пространствах с интегральной метрикой.II // Укр. мат. журн. — 2011. — **63**, №11. - С. 1524-1533.

[7] *Пичугов С. А.* Некоторые свойства модулей непрерывности периодичности периодических функций в метрических пространствах. // Укр. мат. журн. — 2016. — **68**, №12. - С. 1657-1664.

[8] *Пичугов С. А.* Неравенства типа Никольского-Стечкина для приращений тригонометрических полиномов в метрических пространствах. // Укр. мат. журн.—2017. — **69**, №5. - С. 711-716.

[9] *Пичугов С. А.* Обратные теоремы Джексона в пространствах с интегральной метрикой. // Укр. мат. журн. —2012. — **64**, №3. - С. 351-362.

[10] *Стечкин С. Б.* О порядке наилучших приближений непрерывных функций // Докл. АН СССР. — 1949. — **65**, №2. — С.135-137.

[11] *Стечкин С. Б.* О порядке наилучших приближений непрерывных функций // Изв. АН СССР. Сер.мат.— 1951. — **15**, №3. — С.219-242.

[12] *Бари Н.К., Стечкин С. Б.* Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Тр.Моск. мат.о-ва. — 1956. — **5**. — С.483-522.

[13] Тиман А.Ф. Теория приближений функций действительного переменного.- М.: Физматгиз.1960. — 624 с.

[14] *Rathore R.K.S.* The problem of A.F. Timan on the precise oredes of decrease of the best approximations // J.Approxim. Theory. — 1994. — **77**. — P.153-166.

[15] *Коломойцев Ю.С.* О модулях гладкости и мультипликаторах Фурье в $L_p, 0 < p < 1$ // Укр. мат. журн. —2007. — **59**, №9. - С. 1221-1238.