АВТОРЕФЕРАТ

к работе "Асимптотическое представление рядов Дирихле с монотонно изменяющимися коэфициентами".

А.Н.ТВЕРИТИН.

1952г.

А.Н.ТВЕРИТИН.

АВТОРЕФЕРАТ.

к работе "Асимптотическое представление рядов Дирихле с монотонно изменяющимися коэфициентами".
/ работа представляется, как диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук/.

В данной работе рассматриваются некоторые вопросы, связанные с задачей асимптотического представления справа от $x=0$ /слева от $\rho = 1$/ для случая функций-сумм степенных рядов

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-nx} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \rho^n \qquad (1)$$

коэфициенты которых подчинены некоторым определенным условиям монотонности. Соответствующие вопросы рассматриваются также для случая более общих рядов Дирихле вида

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n x} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \rho^{\lambda_n} \qquad (2)$$

Наиболее сильные из известных до сих пор методов, используемых для получения указанного асимптотического представления, связаны обычно с применением теории аналитических функций и выходом в комплексную плоскость, даже в том случае, когда коэфициенты являются вещественными и аргумент принимает только вещественные значения. В связи с этим естественно возникает следующий вопрос. Предположим, что в ряду / 1 /, или / 2 / последовательность коэфициентов является последовательностью вещественных чисел и аргумент x

принимает только вещественные значения.

Нельзя ли указать такой метод построения асимптотического представления рядов вида /1/ или /2/, который, во-первых, был-бы пригоден для достаточно широкого и достаточно важного класса указанных рядов и с другой стороны не требовал бы выхода в комплексную область.

В настоящее время известно несколько методов получения асимптотического представления, не требующих выхода в комплексную область. Метод, связанный с использованием известной теоремы Чезаро, является достаточно общим и во многих случаях сравнительно простым, пока дело идет о построении первого члена асимптотического разложения; однако в большинстве случаев при помощи этого метода можно получить только один первый или несколько первых членов разложения и только в отдельных частных случаях можно получить все бесконечное разложение. Метод, основанный на использовании формулы Пуассона, является сильным методом в частности по отношению к широте области рядов, охватываемых этим методом. Однако, этот последний метод обладает тем недостатком, что не дает в большинстве случаев возможности для фактического вычисления коэффициентов разложения и является в основном методом "доказательства существования" асимптотического представления или разложения определенного аналитического вида.

Авторов в этой работе получены определенные результаты в отношении построения асимптотических представлений и разложений для случая рядов вида /1/ и /2/ с вещественными коэффициентами. Более точно, указанные результаты получены автором для асимптотического представления/разложения/

разности

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-nx} - \int_1^{\infty} a(t) e^{-tx}\, dt \qquad (3)$$

и соответственно

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n x} - \int_1^{\infty} a(t) e^{-\lambda(t) x}\, dt \qquad (4)$$

где $a(t)$ и $\lambda(t)$ некоторые функции вещественного переменного $(1 \leq t < +\infty)$, соответствующим образом построенные. Дело в том, что свойства разности /3/ и соответственно / 4 / связаны только с некоторыми достаточно общими свойствами последовательности a_n / последовательностей a_n и λ_n /, между тем как асимптотическое представление суммы ряда /1/ и интеграла $\int_1^{\infty} a(t) e^{-tx}\, dt$ рассматриваемых отдельно, связаны с более частными свойствами коэффициентов a_n / соответственно для суммы ряда /2/ и интеграла $\int_1^{\infty} a(t) e^{-\lambda(t) x} dt$/.

Полученные автором результаты в основном формулируются в виде шести теорем, из которых наиболее существенными являются / по порядку/ первая, третья и четвертая.

Приведем полную формулировку первой / основной/ теоремы. Изложению этой теоремы посвящены разделы 2/ и 4/ работы.

ТЕОРЕМА ПЕРВАЯ. Пусть дан ряд

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-nx} \qquad (1) \qquad (x \text{ вещественное } > 0)$$

последовательность коэффициентов которого $a_1, a_2, \ldots, a_n, .$ удовлетворяет следующим условиям монотонности: $\Delta_{p-1} a_n$

монотонно возрастает, уходя в $+\infty$, $\Delta_p a_n$ монотонно убывает, стремясь к нулю $(p \geq 0)$, тогда существует

$$\lim_{x\to 0}\left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-nx} - \int_1^{\infty} a(t) e^{-tx}\, dt\right]. \tag{5}$$

и имеет место равенство

$$\lim_{x\to 0}\left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-nx} - \int_1^{\infty} a(t) e^{-tx}\, dt\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu - \int_1^{n} a(t)\, dt -\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}a_n - \frac{B_2}{2!}a'(n) - \frac{B_3}{3!}a''(n) - \ldots - \frac{B_p}{p!}a^{(p-1)}(n)\right] \tag{6}$$

причем числовой предел выражения, стоящего в правой части также существует. Здесь $B_2, B_3, \ldots B_p$ числа Бернулли. Стоящая здесь под знаком интеграла функция $a(t)$ есть некоторая функция вещественного переменного, подчиненная следующим требованиям 1) $a(t)$ определена для любого $t \geq 1 (1 \leq t < +\infty)$, 2) если $t = n$ целое, то $a(n) = a_n$, 3) $a(t)$ непрерывна и обладает непрерывными производными до порядка $(p+1)$ включительно при любом t $(1 \leq t < +\infty)$, включая также целые значения $t = n$; 4) ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|a_n^{(p+1)}(t)\right|_{макс.} \tag{7}$$

где $\left|a_n^{(p+1)}(t)\right|_{макс}$ обозначает наибольшее значение абсолютной величины $\left|a^{(p+1)}(t)\right|$ в промежутке $[n, n+1]$ является сходящимся. В остальном функция $a(t)$ может быть произвольной.

В правой части равенства /6/ запись через частные значений производных $a'(n), a''(n), \quad a^{(p-1)}(n)$ может быть заменена записью, содержащей значения разностей $\Delta_1 a_n$, $\Delta_2 a_n, \ldots \Delta_{p-1} a_n$. Далее, основной случай теоремы легко обобщается в том отношении, что условие: $\Delta_p a_n$ монотонно убывает, стремясь к нулю, может быть заменено с некоторым несущественным изменением в правой части /6/ условиями а/ $\Delta_p a_n$ монотонно возрастает, сходясь к конечному пределу $c>0$, в/ $\Delta_p a_n$ монотонно убывает, сходясь к положительному пределу d.

Для полной строгости доказательства необходимо еще показать, что всегда можно построить функцию $a(t)$, удовлетворяющую всем поставленным выше условиям. В разделе 3/ работы в частности дается способ фактического построения такой функции $a(t)$.

Из самого способа построения, а также из общих соображений является очевидным, что существует бесконечное количество функций $a(t)$, удовлетворяющих условиям теоремы. При изменении функции $a(t)$, разумеется, меняется правая часть равенства /6/; само же равенство /6/ остается в силе. В частных случаях функцию $a(t)$ можно, разумеется, выбрать некоторым наиболее "удобным" образом.

Если $p=0$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то мы приходим к тривиальному случаю второй теоремы Абеля. Если же $p=0$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, то равенство /6/ принимает форму

$$\lim_{x\to 0}\left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-nx} - \int_1^{\infty} a(t) e^{-tx} dt\right] \quad \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu - \int_1^{n} a(t) dt\right]$$

В последнем случае, несколько изменив формулировку, мы можем принять за функцию $a(t)$ любую непрерывную монотонно убывающую функцию /разумеется, можем для этого случая сохранить и основную формулировку, требующую существования $a'(t)$ повсюду, но не требующую строго монотонного изменения функции $a(t)$ /. Последнее сказанное показывает, что формулированная теорема может быть с одной стороны рассматриваема как определенное обобщение в известном направлении второй теоремы Абеля, а с другой стороны более частную теорему о существовании числового предела в правой части равенства /6/ можно также рассматривать как определенное обобщение известного интегрального признака сходимости рядов. Автор имеет основания предполагать, что указанное обобщение в принятом здесь направлении до сих пор не рассматривалось и приведенная теорема первая / а также и дальнейшие теоремы работы / является новой.

Что касается самого доказательства теоремы, то доказательство существования числового предела-правой части равенства /6/

$$C_0 = \lim_{n \to \infty}\left[\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu - \int_1^n a(t)dt - \frac{1}{2}a_n - \frac{B_2}{2!}a'(n) - \qquad - \frac{B_p}{p!}a^{(p-1)}(n)\right] \qquad (8)$$

является элементарным. Основное же доказательство существования предела /5/ и /одновременно/ наличия равенства /6/ является достаточно длинным и кропотливым. При доказательстве мы рассматриваем допредельное выражение

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-nx} - \int_1^{\infty} a(t) e^{-tx} dt$$

и преобразуем его известным образом. Главная часть доказательства сводится к установлению того, что можно выбрать такое определенное, хотя бы и очень большое n_1, что выражение

$$\left[\frac{1}{2}a_{n_1}+\frac{B_2}{2!}a'(n_1)+ \quad +\frac{B_p}{p!}a^{(p-1)}(n_1)\right]e^{-n_1x}+\sum_{n=n_1+1}^{\infty}a_ne^{-nx}-\int_{n_1}^{\infty}a(t)e^{-tx}dt \qquad (9)$$

может быть сделано сколь угодно малым, если только $x>0$ достаточно близок к нулю.

Теорема вторая /раздел 5 работы/ рассматривает вопрос о возможности построения конечного отрезка асимптотического разложения вида

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_ne^{-nx}-\int_1^{\infty}a(t)e^{-tx}dt=C_0+C_1x+C_2x^2+ \quad C_Kx^K+x^K\varepsilon_K(x) \qquad (10)$$

/ $\varepsilon_K(x)\to 0$ если $x\to 0$ /. В данном случае достаточные условия формулируются как некоторые условия монотонности, которым должны подчиняться последовательности $a_n, na_n,$ n^Ka_n /точнее, некоторые разности этих последовательностей /.

Выбор функции $a(t)$ при этом является несколько более стесненным, чем в условиях теоремы первой; в частности мы требуем от функции $a(t)$ существования непрерывных производных до порядка $(p+K+1)$ включительно.

При выполнении всех условий теоремы коэффициент C_K определяется по общей формуле

$$C_K=\frac{(-1)^K}{K!}\lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{\nu=1}^{n}\nu^Ka_\nu-\int_1^n t^Ka(t)dt-\frac{1}{2}n^Ka_n-\frac{B_2}{2!}\left[t^Ka(t)\right]'_n-\right.$$

$$\left.-\frac{B_3}{3!}\left[t^Ka(t)\right]''_n-\ldots-\frac{B_{p+K}}{(p+K)!}\left[t^Ka(t)\right]^{(p+K+1)}_n\right\} \qquad (11)$$

/здесь $\left[t^{k} a(t)\right]_{n}^{(l)}$ обозначает значение l-ой производной от функции $t^{k} a(t)$ при $t=n$ /.

Теорема третья /раздела 6 работы/ рассматривает вопрос о возможности построения бесконечного асимптотического разложения. Основное затруднение, возникающее здесь, заключается в построении соответствующей функции $a(t)$, пригодной для построения всего бесконечного разложения в целом, а не только для построения его конечных отрезков, хотя бы и сколь угодно длинных. Полная формулировка соответствующей теоремы следующая.

ТЕОРЕМА ТРЕТЬЯ. Пусть последовательность a_n удовлетворяет следующим условиям I. Начиная с некоторого номера $\Delta_{p-1} a_n$ монотонно возрастает, уходя в $+\infty$; II. Начиная с некоторого номера $\Delta_p a_n$ монотонно убывает и стремится нулю. III. Начиная с некоторого номера $\Delta_p a_n$ является абсолютно монотонной последовательностью. IV. Начиная с некоторого соответствующего номера /который может меняться от условия к условию и даже неограниченно возрастать, если номер условия неограниченно возрастает/ выполняются некоторые условия монотонности для некоторых разностей последовательностей

$$n a_n,\ n^2 a_n,\ \ldots\ n^k a_n, \quad - \quad (k=1,2\ldots)$$

/для каждой последовательности $n^k a_n$ конечное количество условий монотонности/. Если все эти условия являются выполненными, то можно построить такую функцию $a(t)$, что разность /3/ допускает бесконечное асимптотическое разложение

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-nx} - \int_1^{\infty} a(t) e^{-tx} dt \sim c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_k x^k + \ldots \quad (12)$$

причем коэфициенты этого разложения определяются по общей формуле /11/.

Разрешающая задачу функция $a(t)$ может быть в частности построена следующим образом. Поскольку последовательность $\Delta_p a_n$ является абсолютно монотонной, то существует неубывающая функция $\sigma(\xi)$, решающая проблему моментов

$$\Delta_p a_n = \int_0^1 \xi^{n-1}\, d\sigma(\xi) \qquad (13)$$

Исходя из равенства /13/ и суммируя „p" раз, мы приходим к соответствующей формуле для a_n. Заменяя в последней формуле для a_n букву n через t мы получаем функцию

$$a(t) = a_1 + (t-1)\Delta_1 a_1 + \frac{(t-1)(t-2)}{2!}\Delta_2 a_1 + \ldots + \frac{(t-1)(t-2)\ldots(t-p+1)}{(p-1)!}\Delta_{p-1} a_1 +$$
$$+ \int_0^1 \Big\{ \frac{(t-1)(t-2)\ldots(t-p+1)}{(p-1)!\,(1-\xi)} - \frac{(t-1)(t-2)\ldots(t-p+2)}{(p-2)!\,(1-\xi)^2} + \ldots + (-1)^{p-1}\frac{t-1}{(1-\xi)^{p-1}} +$$
$$+ (-1)^p \frac{1-\xi^{t-1}}{(1-\xi)^p} \Big\}\, d\sigma(\xi) \qquad (14)$$

Функция $a(t)$, которая дается формулой /14/ и является искомой, что доказывается в работе. Совершенно очевидно, что функция $a(t)$, определяемая /14/, не является единственной пригодной функцией; зная одну функцию, являющуюся решением, мы можем построить бесконечное количество функций также являющихся решениями. Очевидно так же, что в частных случаях решение может быть получено более простым и естественным способом.

Теорема четвертая /раздел 7/ дает обобщение первой теоремы на более общий случай рядов Дирихле вида /2/. При этом для коэфициентов a_n предполагается выполненными те же условия монотонности, что в случае теоремы первой и кроме того предполагается выполненным еще дополнительное условие: $/\Delta_{p+1} a_n/$

монотонно убывает, стремясь к нулю; в частном случае теоремы мы требуем выполнения также условия: $|\Delta_{p+2}\, a_n|$ монотонно убывает. Что же касается показателей λ_n то для них предполагается выполненным следующее. а/ λ_n монотонно возрастает, уходя в $+\infty$; $\Delta_1 \lambda_n$ изменяется монотонно, сохраняя знак,... $\Delta_q \lambda_n$ изменяется монотонно, сохраняя знак. При этом, кроме того, предполагается выполненным неравенство

$$|\Delta_q \lambda_n| \le d_q n^{\lambda - q} \qquad (15)$$

где λ некоторый постоянный показатель, а d_q некоторая постоянная.

б/ Выполняется неравенство

$$q \geqslant p+1 \qquad (16)$$

/в частном случае оно заменяется более сильным $(q \geqslant p+2)$

в/ Начиная с некоторого определенного номера, выполняется неравенство

$$\cancel{\lambda_n > \mathcal{D}_1^{\lambda}} \quad \lambda_n > \mathcal{D} \cdot n^{\lambda} \qquad (17)$$

где $\mathcal{D}$ некоторая положительная постоянная.

Если все указанные условия являются выполненными, то существует

$$\lim_{x \to 0} \left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n x} - \int_1^{\infty} a(t) e^{-\lambda(t) x}\, dt \right] \qquad (18)$$

и имеет место равенство

$$\lim_{x \to 0} \left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n x} - \int_1^{\infty} a(t) e^{-\lambda(t) x}\, dt \right] = \lim_{n \to \infty} \left[\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu - \int_1^{n} a(t)\, dt - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} a_n - \frac{B_2}{2!} a'(n) - \qquad - \frac{B_p}{p!} a^{(p-1)}(n) \right] \qquad (19)$$

причем выражение, стоящее в правой части /19/, не зависит от показателей $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$, а только от коэфициентов

$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$

и является тем же самым, что и для случая ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-nx}$.

Здесь $\lambda(t)$ есть некоторая функция вещественного переменного, подчиненная некоторым достаточно общим условиям, из которых укажем на следующие. 1/ $\lambda(t)=\lambda_n$ если $t=n$

2/ $\lambda(t)$ обладает непрерывными производными до порядка q включительно. Другие условия, которым подчинена $\lambda(t)$ выражаются в виде некоторых неравенств, связанных с неравенством /15/ с одной стороны и /17/ с другой.

Сам способ доказательства рассматриваемой теоремы заключается в том, что мы доказываем равенство пределов /18 и /5/, причем существование предела /5/ и его числовое значение уже считаются известными. Что касается самого способа доказательства равенства пределов /18/ и /5/, то оно проводится следующим образом. В наших условиях мы имеем право написать формулу Пуассона для случая обоих рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n x} \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-nx}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n x} = -\frac{1}{2} a_1 e^{-\lambda_1 x} + \int_1^{\infty} a(t) e^{-\lambda(t) x} dt + 2\sum_{m=1}^{\infty} \int_1^{\infty} a(t) e^{-\lambda(t) x} \cos 2\pi m t \, dt \qquad (20a)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-nx} = -\frac{1}{2} a_1 e^{-x} + \int_1^{\infty} a(t) e^{-tx} dt + 2\sum_{m=1}^{\infty} \int_1^{\infty} a(t) e^{-tx} \cos 2\pi m t \, dt \qquad (20b)$$

Произведя вычитание, находим, что равенство пределов /18/ и /5/ будет доказано, если мы установим, что существует предел

$$\lim_{x\to 0}\sum_{m=1}^{\infty}\left[\int_1^{\infty} a(t)e^{-\lambda(t)x}\cos 2\pi mt\,dt-\int_1^{\infty} a(t)e^{-tx}\cos 2\pi mt\,dt\right] \qquad (21)$$

и этот предел равен нулю.

Существование и равенство нулю предела /21/ обосновывается при помощи следующей леммы, представляющей самостоятельный интерес и, повидимому, являющейся новой.

ЛЕММА. Если выполнены все условия, указанные в формулировке рассматриваемой теоремы, то интеграл

$$\int_1^{\infty} a(t)e^{-\lambda(t)x}\cos 2\pi t\,dt \qquad (22) \qquad (x>0)$$

сходится к определенному конечному пределу при $x\to 0$ причем этот предел не зависит от выбора функции $\lambda(t)$ и следовательно равен

$$\lim_{x\to 0}\int_1^{\infty} a(t)e^{-tx}\cos 2\pi t\,dt$$

Доказательство леммы является элементарным, но достаточно кропотливым. Подобная лемма имеет, очевидно, место также и для случая интеграла

$$\int_1^{\infty} a(t)e^{-\lambda(t)x}\cos 2\pi mt\,dt$$

После того, как указанная лемма является доказанной, доказательство законности почленного перехода к пределу в ряде /21/ уже затруднений не представляет.

Теорема пятая обобщает теорему вторую на случай рядов вида /2/, а теорема шестая подобным образом теорему третью. Таким образом, при выполнении определенных условий можетонности мы имеем возможность написать конечный отрезок разложения

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n x} - \int_1^{\infty} a(t) e^{-\lambda(t) x} dt = c_0 + c_1 x + \quad + c_k x^k + x^k \varepsilon_k(x) \qquad (23)$$

а при выполнении некоторых условий /основными из которых являются требования абсолютной монотонности некоторой разности $\Delta_p a_n$ и некоторой разности $\Delta_{e+1} \lambda_n$ /бесконечное разложение

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n x} - \int_1^{\infty} a(t) e^{-\lambda(t) x} dt \sim c_0 + c_1 x + \ldots + c_k x^k + \qquad (24)$$

причем коэфициент c_k определяется по общей формуле

$$c_k = \frac{(-1)^k}{k!} \lim_{n\to\infty} \Big\{ \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu^k a_\nu - \int_1^n [\lambda(t)]^k a(t) dt - \frac{1}{2} \lambda_n^k a_n -$$

$$- \frac{B_2}{2!} \Big[[\lambda(t)]^k a(t)\Big]_n' - \quad - \frac{B_{p_k}}{(p_k)!} \Big[[\lambda(t)]^k a(t)\Big]_n^{(p_k+1)} \Big\} \qquad (25)$$

где p_k некоторое определенное целое число.

Полученные автором формулы для коэфициентов c_k /формулы/11/ и /25/ / дают возможность в определенных случаях написать выражения для коэфициентов c_k в "замкнутой" форме, а также дают возможность произвести точный или приближенный числовой подсчет этих коэфициентов.

В качестве примеров /раздел 8/ подробно рассматриваются случаи рядов. 1/ $\sum_{n=1}^{\infty} n^\beta e^{-n^\alpha x}$, где β любое вещественное, α любое вещественное положительное.

2/ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n+a}$ где, „a" любое вещественное положительное / „a" может быть также комплексным с положительной вещественной частью /.

А.ТВЕРИТИН.

А. Тверитин