

## ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ КВАТЕРНИОННЫХ МАТРИЦ В АНАЛИТИЧЕСКОЙ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

С целью построения математических моделей и проведения вычислительных экспериментов предлагается использовать кватернионные матрицы. Приводятся новые формулы матричного представления сложных векторно-скалярных произведений, формулы кривизны, кручения, ориентации натурального триэдра траектории. Показывается применение кватернионных матриц к задаче выбора траектории движения авиационно-космической транспортной системы.

З метою побудови математичних моделей та проведення обчислювальних експериментів пропонується використовувати кватерніонні матриці. Наводяться нові формули матричного представлення складних векторно-скалярних добутків, формули кривини, кручення, орієнтації натурального триєдра траєкторії. Демонструється використання кватерніонних матриць у задачі з вибору траєкторії руху авіаційно-космічної системи.

It is proposed to use quaternionic matrixes with the purpose of the mathematical modeling. A new matrix presentation of complex vectorial-scalar products, a curvature, a spinning and a trajectory trihedron orientation is given. The quaternionic matrixes application for the technical tasks of an aerospace vehicle trajectory selection is demonstrated.

**Введение.** Как отмечалось в [2, 5] механика принадлежит к инженерным наукам, по характеру исследуемых физических явлений и к математическим наукам по применяемым аналитическим подходам. В механике абсолютно твердого тела доминирующим математическим аппаратом является векторное исчисление, в механике деформируемого твердого тела, жидкости, газа и плазмы, релятивистской механике – тензорное исчисление. Методы и подходы вычислительной механики используются непосредственно для решения широкого круга инженерных, технических задач, в частности, механики космического полета, включая навигацию, ориентацию, стабилизацию, устойчивость, управляемость [3, 11], а также в динамике ракетополетителя, самолета, корабля, наземного транспорта и др. [7, 17-21]. Применение компьютерных технологий предполагает введение конкретной системы отсчета и необходимость приведения векторной, тензорной записи алгоритмов решения к координатной, матричной форме [14, 15]. Использование матричного исчисления в вычислительном эксперименте обеспечивает ряд преимуществ, к числу которых относятся возможность непосредственной и достаточно простой реализации на ЭВМ построенных математических моделей, компактность и обзримость вычислительного алгоритма, снижение трудоемкости составления и тестирования вычислительной программы, уменьшение вероятности ошибок, как в расчетном алгоритме, так и в вычислительной программе. В аналитической динамике для решения широкого круга задач динамического проектирования космической, ракетной, авиационной техники, наземного транспорта, робототехники, в гироскопии, виброзащите и т.д. оказывается достаточным использование специального математического аппарата в виде исчисления кватернионных матриц. На некоторые виды кватернионных матриц указывали Р. Беллман [1], А.И. Мальцев

[10]. Кватернионные матрицы использовались в управлении ориентацией [4, 9], в теории конечного поворота твердого тела [13], в теории инерциальной навигации [11], в кинематике и динамике твердого тела [8, 16-18].

Таким образом, математический аппарат кватернионных матриц находит применение не только в аналитической динамике при построении математических моделей, по существу дополняя и заменяя векторное исчисление, но и оказался хорошо адаптированным к современным компьютерным технологиям проведения вычислительных экспериментов по исследованию динамики механических систем в пространственном движении. При этом математические модели и соответствующие им алгоритмы обретают групповую симметрию, инвариантную форму, матричную компактность, универсальность, что ускоряет программирование, облегчает верификацию математической модели и вычислительного процесса, обеспечивает удобство в работе, т.е. повышает производительность интеллектуального труда [2]. В данной работе проводится систематическое обоснование выбора базисных матриц, составляющих исходный, фундаментальный элемент исчисления кватернионных матриц.

**1. Постановка задачи.** На множестве элементов четырехмерного ортонормированного базиса и противоположных элементов построить группу мономиальных  $(1, 0, -1)$ -матриц четвертого порядка. Найти некоммутативные подгруппы, изоморфные группе кватернионов и составляющие базис кватернионных матриц. Кватерниону и сопряженному кватерниону сопоставить изоморфные матрицы.

**2. Группа мономиальных  $(1, 0, -1)$ -матриц.** Рассматривается система четырех нормированных и взаимно ортогональных векторов:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

которым сопоставляются элементы конечного множества  $e_1, e_2, e_3, e_4$  (или 1, 2, 3, 4) и противоположные элементы  $e_1^*, e_2^*, e_3^*, e_4^*$  (или  $1^*, 2^*, 3^*, 4^*$ ). Противоположным элементам множества соответствуют противоположные векторы ортонормированного четырехмерного базиса:

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Отметим, что четырехмерным пространством оперирует специальная теория относительности, теория конечного поворота, проективная геометрия.

С помощью введенного множества элементов формируется совокупность четных подстановок четвертой степени, представленных в виде произведения двух транспозиций и тождественных подстановок [6]. Искомые подстановки в развернутой записи имеют вид:

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$B_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4^* \end{pmatrix}, B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3^* \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2^* \end{pmatrix}, B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1^* \end{pmatrix};$$

$$C_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3^* & 4 \end{pmatrix}, C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4^* & 3 \end{pmatrix}, C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1^* & 2 \end{pmatrix}, C_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2^* & 1 \end{pmatrix};$$

$$D_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2^* & 3 & 4 \end{pmatrix}, D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1^* & 4 & 3 \end{pmatrix}, D_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4^* & 1 & 2 \end{pmatrix}, D_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3^* & 2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$F_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1^* & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, F_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2^* & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, F_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3^* & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, F_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4^* & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$R_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3^* & 4^* \end{pmatrix}, R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4^* & 3^* \end{pmatrix}, R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1^* & 2^* \end{pmatrix}, R_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2^* & 1^* \end{pmatrix};$$

$$S_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2^* & 3 & 4^* \end{pmatrix}, S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1^* & 4 & 3^* \end{pmatrix}, S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4^* & 1 & 2^* \end{pmatrix}, S_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3^* & 2 & 1^* \end{pmatrix};$$

$$T_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1^* & 2 & 3 & 4^* \end{pmatrix}, T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2^* & 1 & 4 & 3^* \end{pmatrix}, T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3^* & 4 & 1 & 2^* \end{pmatrix}, T_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4^* & 3 & 2 & 1^* \end{pmatrix};$$

а также противоположные подстановки:

$$\begin{matrix} \overline{A_0}, & \overline{A_1}, & \overline{A_2}, & \overline{A_3}; \\ \overline{B_0}, & \overline{B_1}, & \overline{B_2}, & \overline{B_3}; \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \overline{T_0}, & \overline{T_1}, & \overline{T_2}, & \overline{T_3}. \end{matrix}$$

Каждая из полученных подстановок представляется квадратной мономиальной (1, 0, -1)-матрицей. Полученное таким образом множество мономиальных (1, 0, -1)-матриц в развернутой записи имеет вид:

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$B_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$C_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, C_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

и т.д.

Рассмотренные подстановки четвертой степени и соответствующие им  $(1, 0, -1)$  – мономиальные матрицы образуют мультипликативную группу 64-го порядка и подгруппы 32-го, 16-го, 8-го, 4-го и 2-го порядков. Полученные всевозможные композиции сводятся в таблицы Кэйли [6].

**Некоммутативные подгруппы, изоморфные группе кватернионов.** Путем анализа таблицы умножения группы шестьдесят четвертого порядка выделяются две подгруппы четвертого порядка, семь подгрупп восьмого порядка, двадцать четыре подгруппы шестнадцатого порядка и одна подгруппа тридцать второго порядка. Порядок исходной группы кратен порядку любой из составленных подгрупп, что соответствует теореме Лагранжа [6]. Подгруппы второго порядка в силу их тривиальности не рассматриваются. Подгруппы 4-го порядка являются абелевыми. Отметим, что пять подгрупп восьмого порядка являются абелевыми и две – некоммутативными (отмечены в табл. 1).

Таблица 1.

Подгруппы мономиальных матриц восьмого порядка

| №<br>п/п | Элементы подгруппы |
|----------|--------------------|
|----------|--------------------|

|    |       |       |       |       |             |             |             |             |
|----|-------|-------|-------|-------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| 1  | $A_0$ | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $\bar{A}_0$ | $\bar{A}_1$ | $\bar{A}_2$ | $\bar{A}_3$ |
| 2* | $A_0$ | $R_2$ | $S_3$ | $T_1$ | $\bar{A}_0$ | $\bar{R}_2$ | $\bar{S}_3$ | $\bar{T}_1$ |
| 3* | $A_0$ | $S_1$ | $T_2$ | $R_3$ | $\bar{A}_0$ | $\bar{S}_1$ | $\bar{T}_2$ | $\bar{R}_3$ |
| 4  | $A_0$ | $T_1$ | $S_2$ | $R_3$ | $\bar{A}_0$ | $\bar{T}_1$ | $\bar{S}_2$ | $\bar{R}_3$ |
| 5  | $A_0$ | $S_1$ | $R_2$ | $T_3$ | $\bar{A}_0$ | $\bar{S}_1$ | $\bar{R}_2$ | $\bar{T}_3$ |
| 6  | $A_0$ | $R_1$ | $T_2$ | $S_3$ | $\bar{A}_0$ | $\bar{R}_1$ | $\bar{T}_2$ | $\bar{S}_3$ |
| 7  | $A_0$ | $R_0$ | $S_0$ | $T_0$ | $\bar{A}_0$ | $\bar{R}_0$ | $\bar{S}_0$ | $\bar{T}_0$ |

Покажем, что полученные некоммутативные подгруппы изоморфны группе кватернионов. Таблицы Кэйли двух некоммутативных подгрупп имеют вид (табл. 2)

Таблица 2

Таблицы умножения некоммутативных подгрупп

|             | $A_0$       | $T_1$       | $R_2$       | $S_3$       | $\bar{A}_0$ | $\bar{T}_1$ | $\bar{R}_2$ | $\bar{S}_3$ |
|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| $A_0$       | $A_0$       | $T_1$       | $R_2$       | $S_3$       | $\bar{A}_0$ | $\bar{T}_1$ | $\bar{R}_2$ | $\bar{S}_3$ |
| $T_1$       | $T_1$       | $\bar{A}_0$ | $\bar{S}_3$ | $R_2$       | $\bar{T}_1$ | $A_0$       | $S_3$       | $\bar{R}_2$ |
| $R_2$       | $R_2$       | $S_3$       | $\bar{A}_0$ | $\bar{T}_1$ | $\bar{R}_2$ | $\bar{S}_3$ | $A_0$       | $T_1$       |
| $S_3$       | $S_3$       | $\bar{R}_2$ | $T_1$       | $\bar{A}_0$ | $\bar{S}_3$ | $R_2$       | $\bar{T}_1$ | $A_0$       |
| $\bar{A}_0$ | $\bar{A}_0$ | $\bar{T}_1$ | $\bar{R}_2$ | $\bar{S}_3$ | $A_0$       | $T_1$       | $R_2$       | $S_3$       |
| $\bar{T}_1$ | $\bar{T}_1$ | $A_0$       | $S_3$       | $\bar{R}_2$ | $T_1$       | $\bar{A}_0$ | $\bar{S}_3$ | $R_2$       |
| $\bar{R}_2$ | $\bar{R}_2$ | $\bar{S}_3$ | $A_0$       | $T_1$       | $R_2$       | $S_3$       | $\bar{A}_0$ | $\bar{T}_1$ |
| $\bar{S}_3$ | $\bar{S}_3$ | $R_2$       | $\bar{T}_1$ | $A_0$       | $S_3$       | $\bar{R}_2$ | $T_1$       | $\bar{A}_0$ |
| *           | $A_0$       | $S_1$       | $T_2$       | $R_3$       | $\bar{A}_0$ | $\bar{S}_1$ | $\bar{T}_2$ | $\bar{R}_3$ |
| $A_0$       | $A_0$       | $S_1$       | $T_2$       | $R_3$       | $\bar{A}_0$ | $\bar{S}_1$ | $\bar{T}_2$ | $\bar{R}_3$ |
| $S_1$       | $S_1$       | $\bar{A}_0$ | $R_3$       | $\bar{T}_2$ | $\bar{S}_1$ | $A_0$       | $\bar{R}_3$ | $T_2$       |
| $T_2$       | $T_2$       | $\bar{R}_3$ | $\bar{A}_0$ | $S_1$       | $T_2$       | $\bar{R}_3$ | $\bar{A}_0$ | $S_1$       |
| $R_3$       | $R_3$       | $T_2$       | $\bar{S}_1$ | $\bar{A}_0$ | $\bar{R}_3$ | $\bar{T}_2$ | $S_1$       | $A_0$       |
| $\bar{A}_0$ | $\bar{A}_0$ | $\bar{S}_1$ | $\bar{T}_2$ | $\bar{R}_3$ | $A_0$       | $S_1$       | $T_2$       | $R_3$       |
| $\bar{S}_1$ | $\bar{S}_1$ | $A_0$       | $\bar{R}_3$ | $T_2$       | $S_1$       | $\bar{A}_0$ | $R_3$       | $\bar{T}_2$ |
| $\bar{T}_2$ | $\bar{T}_2$ | $R_3$       | $A_0$       | $\bar{S}_1$ | $\bar{T}_2$ | $R_3$       | $A_0$       | $\bar{S}_1$ |
| $\bar{R}_3$ | $\bar{R}_3$ | $\bar{T}_2$ | $S_1$       | $A_0$       | $R_3$       | $T_2$       | $\bar{S}_1$ | $\bar{A}_0$ |

Известно, что кватернион определяется как гиперкомплексное число:

$1a_0 + ia_1 + ja_2 + ka_3$ , где  $1a_0$  – скалярная,  $ia_1 + ja_2 + ka_3$  – векторная часть кватерниона,

$a_0, a_1, a_2, a_3$  – действительные числа,  $\mathbf{1, i, j, k}$  – элементы базиса. Здесь  $1$  – вещественная единица,  $i, j, k$  трактуются как специальные кватернионы (гиперкомплексные единицы),

либо как базисные векторы трехмерного пространства [3, 11]. Для элементов базиса пространства кватернионов приняты специальные правила умножения:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1; ij = -ji = k; jk = -kj = i; ki = -ik = j.$$

Множество, состоящее из восьми элементов  $1, i, j, k, -1, -i, -j, -k$  (здесь знак минус служит различительным значком), составляет группу кватернионов с известной таблицей умножения (табл. 3) [6].

Таблица 3

Таблица умножения группы кватернионов

| *  | 1 i j k     | -1 -i -j -k |
|----|-------------|-------------|
| 1  | 1 i j k     | -1 -i -j -k |
| i  | i -1 k -j   | -i 1 -k j   |
| j  | j -k -1 i   | -j k 1 -i   |
| k  | k j -i -1   | -k -j i 1   |
| -1 | -1 -i -j -k | 1 i j k     |
| -i | -i 1 -k j   | i -1 k -j   |
| -j | -j k 1 -i   | j -k -1 i   |
| -k | -k j -i -1  | k j -i -1   |

Из сравнения таблиц умножения группы кватернионов и найденных некоммутативных подгрупп восьмого порядка устанавливается их изоморфность.

**4. Кватернионные матрицы.** Порядок сопоставления элементов базиса пространства кватернионов мономиальным  $(1, 0, -1)$ -матрицам рассматриваемых некоммутативных подгрупп не является единственным. Перечень конкретных вариантов сопоставления для двух некоммутативных подгрупп приводится в (табл.4).

Таблица 4

Варианты сопоставления мономиальных матриц элементам базиса кватерниона

| Элемент базиса | Элементы подгрупп |
|----------------|-------------------|
|                |                   |

|          |          |          |          |         |                  |         |                  |
|----------|----------|----------|----------|---------|------------------|---------|------------------|
| <b>1</b> | $A_0$    | $A_0$    | $A_0$    | $\dots$ | $A_0$            | $\dots$ | $A_0$            |
| <b>i</b> | $S_1$    | $T_2$    | $R_3$    | $\dots$ | $\overline{S_1}$ | $\dots$ | $\overline{R_3}$ |
| <b>j</b> | $T_2$    | $R_3$    | $S_1$    | $\dots$ | $\overline{T_2}$ | $\dots$ | $\overline{T_2}$ |
| <b>k</b> | $R_3$    | $S_1$    | $T_2$    | $\dots$ | $\overline{R_3}$ | $\dots$ | $\overline{S_1}$ |
| <b>№</b> | <b>1</b> | <b>2</b> | <b>3</b> | $\dots$ | <b>16*</b>       | $\dots$ | <b>24</b>        |

|          |          |          |          |         |                  |         |                  |
|----------|----------|----------|----------|---------|------------------|---------|------------------|
| <b>1</b> | $A_0$    | $A_0$    | $A_0$    | $\dots$ | $A_0$            | $\dots$ | $A_0$            |
| <b>i</b> | $T_1$    | $S_2$    | $R_3$    | $\dots$ | $\overline{T_1}$ | $\dots$ | $\overline{S_2}$ |
| <b>j</b> | $S_2$    | $R_3$    | $T_1$    | $\dots$ | $\overline{R_3}$ | $\dots$ | $\overline{T_1}$ |
| <b>k</b> | $R_3$    | $T_1$    | $S_2$    | $\dots$ | $\overline{S_2}$ | $\dots$ | $\overline{R_3}$ |
| <b>№</b> | <b>1</b> | <b>2</b> | <b>3</b> | $\dots$ | <b>10*</b>       | $\dots$ | <b>24</b>        |

Из этого множества вариантов выбирается, в частности, для первой некоммутативной подгруппы – вариант № 16, а для второй некоммутативной подгруппы – вариант № 10, т.е.

$$1 \leftrightarrow A_0, \quad i \leftrightarrow \text{EMBED Equation.DSMT4}, \quad j \leftrightarrow T_2, \quad k \leftrightarrow \text{EMBED Equation.DSMT4}$$

$$1 \leftrightarrow A_0, \quad i \leftrightarrow \text{EMBED Equation.DSMT4}, \quad j \leftrightarrow \text{EMBED Equation.DSMT4}, \quad k \leftrightarrow S_2$$

Эти варианты сопоставления удовлетворяют критерию упорядоченности, симметрии, отраженной в возможности применения операции транспонирования. Здесь для выделенных базисных матриц представляется целесообразным воспользоваться обозначениями базиса, согласно (табл.5).

Таблица 5

Базисные матрицы, изоморфные элементам кватерниона

| Элементы кватерниона | Базисные матрицы                                                                                       | Обозначения |
|----------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------|
| 1                    | $A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ | $A_0 = E_0$ |

|    |                                                                                                                  |                                                                                                                |                                             |
|----|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------|
| i  | $\bar{T}_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$   | $\bar{S}_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ | $\bar{T}_1 = E_1, \bar{S}_1 = {}^t E_1$     |
| j  | $R_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$         | $T_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$       | $R_2 = E_2, T_2 = {}^t E_2$                 |
| k  | $S_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$         | $\bar{R}_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ | $S_3 = E_3, \bar{R}_3 = {}^t E_3$           |
| -1 | $\bar{A}_0 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ |                                                                                                                | $\bar{A}_0 = I$                             |
| -i | $T_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$         | $S_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$       | $T_1 = {}^t E_1^t, S_1 = E_1^t$             |
| -j | $\bar{R}_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$   | $\bar{T}_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ | $\bar{R}_2 = {}^t E_2^t, \bar{T}_2 = E_2^t$ |
| -k | $\bar{S}_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$   | $R_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$       | $\bar{S}_3 = {}^t E_3^t, R_3 = E_3^t$       |

Эти обозначения отражают возможность преобразования базисных матриц применением вводимых операций транспонирования: полного (перестановка всех строк и столбцов), внешнего (перестановка первой строки и столбца) и внутреннего (перестановка элементов ядра, т.е. исключая первую строку и столбец). Кватерниону и сопряженному кватерниону сопоставляются по две матрицы упорядоченной структуры:

$$\begin{vmatrix} A \\ {}^t A' \\ {}^t A \\ A' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E_0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ E_0 & {}^t E_1' & {}^t E_2' & {}^t E_3' \\ E_0 & {}^t E_1 & {}^t E_2 & {}^t E_3 \\ E_0 & E_1' & E_2' & E_3' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{vmatrix}$$



В развернутой записи получим соответственно:

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ -a_1 & a_0 & -a_3 & a_2 \\ -a_2 & a_3 & a_0 & -a_1 \\ -a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix}; \quad {}^t A = \begin{pmatrix} a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ a_1 & a_0 & -a_3 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_0 & -a_1 \\ a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix};$$

$${}^t A^t = \begin{pmatrix} a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ a_1 & a_0 & a_3 & -a_2 \\ a_2 & -a_3 & a_0 & a_1 \\ a_3 & a_2 & -a_1 & a_0 \end{pmatrix}; \quad A^t = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ -a_1 & a_0 & a_3 & -a_2 \\ -a_2 & -a_3 & a_0 & a_1 \\ -a_3 & a_2 & -a_1 & a_0 \end{pmatrix}.$$

**5. Транспонирование.** Составленные матрицы обладают очевидной упорядоченностью, так как преобразуются одна в другую применением предложенных операций полного, внешнего и внутреннего транспонирования. Матрица  ${}^t A$  образуется из матрицы  $A$  в результате перестановки первой строки и первого столбца, матрица  ${}^t A^t$  является транспонированной по отношению к матрице  $A$ , а матрица  $A^t$  - транспонированной по отношению к  ${}^t A$ , т.е. имеет место следующие правила транспонирования:

$$\begin{aligned} {}^t(A)^t &= {}^t A^t, & {}^t({}^t A) &= {}^t A, & (A)^t &= A^t, \\ {}^t({}^t A^t)^t &= A, & {}^t({}^t A^t) &= A^t, & ({}^t A^t)^t &= {}^t A, \\ {}^t({}^t A)^t &= A^t, & {}^t({}^t A) &= A, & ({}^t A)^t &= {}^t A^t, \\ {}^t(A^t)^t &= {}^t A, & {}^t(A^t) &= {}^t A^t, & (A^t)^t &= A. \end{aligned}$$

**6. Апробация кватернионных матриц.** Введенные кватернионные матрицы представляют в эквивалентной записи основные операции векторной алгебры в частном случае, когда скалярная часть кватерниона равна нулю. Нетрудно убедиться в справедливости следующих соответствий скалярно-векторных произведений нескольких векторов и мультипликативных композиций кватернионных матриц:

- для двух векторов  $\bar{a}, \bar{b}$

$$\left\| \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{0} \right\| \leftrightarrow \frac{1}{2} (A_0 + A_0^t) \cdot b_0, \quad \left\| \frac{0}{\bar{a} \times \bar{b}} \right\| \leftrightarrow \frac{1}{2} (A_0 - A_0^t) \cdot b_0;$$

- для трех векторов  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$

$$\left\| \frac{\bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c})}{0} \right\| \leftrightarrow \frac{1}{4} (A_0 + A'_0) (B_0 - B'_0) \cdot c_0, \left\| \frac{0}{\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c})} \right\| \leftrightarrow \frac{1}{4} (A_0 - A'_0) (B_0 - B'_0) \cdot c_0;$$

- для четырех векторов  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}$

$$\left\| \frac{\bar{a} \cdot [\bar{b} \times (\bar{c} \times \bar{d})]}{0} \right\| \leftrightarrow \frac{1}{8} (A_0 + A'_0) (B_0 - B'_0) (C_0 - C'_0) \cdot d_0,$$

$$\left\| \frac{0}{\bar{a} \times [\bar{b} \times (\bar{c} \times \bar{d})]} \right\| \leftrightarrow \frac{1}{8} (A_0 - A'_0) (B_0 - B'_0) (C_0 - C'_0) \cdot d_0,$$

$$\left\| \frac{0}{(\bar{a} \times \bar{b}) \times (\bar{c} \times \bar{d})} \right\| \leftrightarrow \frac{1}{8} [(A_0 + A'_0) (B_0 + B'_0) - (B_0 + B'_0) (A_0 + A'_0)] (C_0 - C'_0) \cdot d_0,$$

и другие соответствия.

*Пример* Для иллюстрации применения приведенных соответствий рассматривается кинематическая задача о выборе траектории движения многофазовой авиационно-космической транспортной системы [12]. Создание полностью многофазовой авиационно-космической транспортной системы в Украине требует решения ряда специальных проблем, одной из которых являются территориальные ограничения. Традиционные траектории полёта ракетно-космических систем в виде пологих линий в плоскости стрельбы оказываются неприемлемыми в силу невозможности обеспечения отчуждаемых территорий. Применение авиационно-космической системы, где в качестве первой ступени используется самолёт-носитель АН-225, второй ступени – воздушно-космический самолёт с гиперзвуковым прямоточным воздушно-реактивным двигателем, позволяет реализовать принципиально новые траектории выведения полезной нагрузки в виде спирали-винтовой линии, приведенной на рис. 1.

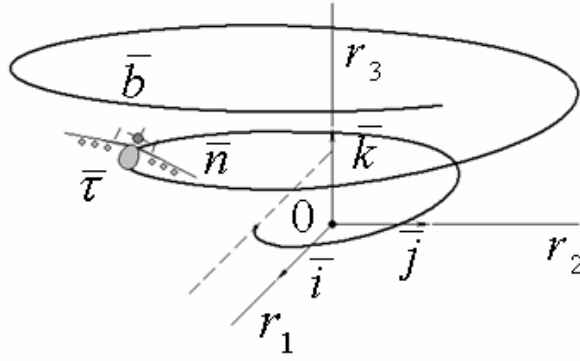


Рис. 1

Пусть пространственная траектория задана в неподвижной системе координат наземного комплекса (авиабаза) годографом

$$\bar{r} = \bar{i}(\rho_0 + \rho_1 t + \rho_2 t^2 + \rho_3 t^3) \cos \omega t + \bar{j}(\rho_0 + \rho_1 t + \rho_2 t^2 + \rho_3 t^3) \sin \omega t + \bar{k}(h_0 + h_1 t + h_2 t^2 + h_3 t^3)$$

где  $\omega, \rho_i, h_i (i = 0, 1, 2, 3)$  – варьируемые параметры траектории, определяемые по заданным краевым условиям и очевидной зависимости:  $\omega t_k = 2\pi n$ , в которой  $n$  – количество витков,  $t_k$  – время разделения ступеней.

В качестве исходных данных используются следующие кинематические параметры траектории:  $H(0)$  и  $L(0)$  – высота и расстояние от авиабазы в горизонтальной плоскости до точки входа первой ступени на спирале-винтовую траекторию,  $H(t_k)$  и  $L(t_k)$  – высота и расстояние от авиабазы в горизонтальной плоскости до точки разделения ступеней,  $v(0)$  и  $w(0)$  – горизонтальная и вертикальная составляющие скорости самолёта-носителя в начальной точке спирале-винтовой траектории,  $v(t_k)$  и  $w(t_k)$  – горизонтальная и вертикальная составляющие скорости самолёта-носителя в момент отделения воздушно-космического самолёта.

По заданным исходным данным составляются две независимые системы алгебраических уравнений относительно варьируемых параметров искомой траектории – линейная и нелинейная. Эти системы допускают аналитическое решение (методом Жордана-Гаусса) в виде

$$h_0 = H(0), \quad h_1 = w(0),$$

$$h_2 = 3 \frac{H(t_k) - H(0)}{t_k^2} - \frac{w(t_k) + 2w(0)}{t_k}, \quad h_3 = \frac{w(t_k) + w(0)}{t_k^2} - 2 \frac{H(t_k) - H(0)}{t_k^3},$$

$$\rho_0 = L(0), \quad \rho_1 = \sqrt{v^2(0) - \omega^2 L^2(0)},$$

$$\rho_2 = 3 \frac{L(t_k) - L(0)}{t_k^2} - 2 \frac{\sqrt{v^2(0) - \omega^2 L^2(0)}}{t_k} - \frac{\sqrt{v^2(t_k) - \omega^2 L^2(t_k)}}{t_k},$$

$$\rho_3 = \frac{\sqrt{v^2(t_k) - \omega^2 L^2(t_k)}}{t_k^2} + \frac{\sqrt{v^2(0) - \omega^2 L^2(0)}}{t_k^2} - 2 \frac{L(t_k) - L(0)}{t_k^3}$$

при условии  $v^2(t) \geq \omega^2 L^2(t)$ .

Для полученной спирали-винтовой траектории аналитически находятся основные кинематические параметры: единичные векторы касательной  $\bar{\tau}$ , главной нормали  $\bar{n}$ , бинормали  $\bar{b}$ , а также кривизна  $K$ , кручение  $\chi$ , матрица направляющих косинусов, связывающая оси сопровождающего трёхгранника и неподвижные оси наземного комплекса [9], т. е.

$$\bar{\tau} = \frac{\dot{\vec{r}}}{V}, \quad \bar{n} = -\frac{\dot{\vec{r}} \times (\ddot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}})}{V^4 K}, \quad \bar{b} = -\frac{\dot{\vec{r}} \times [\dot{\vec{r}} \times (\ddot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}})]}{V^5 K},$$

$$K = \frac{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|}{V^3}, \quad \chi = -\frac{\dot{\vec{r}} \cdot (\ddot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}})}{\frac{1}{V^2} \begin{vmatrix} \dot{\vec{r}} & \ddot{\vec{r}} \\ \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} & \ddot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \dot{\vec{r}} & \ddot{\vec{r}} \\ \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} & \ddot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}} \end{vmatrix}},$$

$$V^2 = \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}.$$

Используемые в приведенных формулах сложные векторные произведения удобно вычислять с помощью предлагаемых матричных алгоритмов, адаптированных к компьютерной реализации:

$$\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}} \leftrightarrow \frac{1}{2} (\dot{R} - \dot{R}^t) \ddot{r},$$

$$\dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}} \leftrightarrow \frac{1}{2} (\dot{R} + \dot{R}^t) \ddot{r}, \quad \dot{\vec{r}} \times (\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}) \leftrightarrow \frac{1}{4} (\dot{R} - \dot{R}^t)^2 \ddot{r},$$

$$\dot{\vec{r}} \cdot (\ddot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}) \leftrightarrow \frac{1}{4} (\dot{R} + \dot{R}^t) (\ddot{R} - \ddot{R}^t) \ddot{r}, \quad \dot{\vec{r}} \times [\dot{\vec{r}} \times (\ddot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}})] \leftrightarrow \frac{1}{8} (\dot{R} - \dot{R}^t)^3 \ddot{r}.$$

Отметим также, что

$$\left| \begin{array}{cc} \dot{\vec{r}} & \ddot{\vec{r}} \\ \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} & \dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}} \end{array} \right|, \left| \begin{array}{cc} \dot{\vec{r}} & \ddot{\vec{r}} \\ \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} & \dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}} \end{array} \right| \leftrightarrow \frac{1}{16} \dot{r}' (\dot{R} - \dot{R}')^4 \ddot{r}.$$

Здесь  $\dot{R}, \dot{R}', \ddot{R}, \ddot{R}'$  - кватернионные матрицы с нулевой скалярной частью.

Таким образом, получаем следующие формулы:

$$\begin{aligned} \bar{\tau} &\leftrightarrow \frac{1}{V} \dot{r}, \quad \bar{n} \leftrightarrow -\frac{1}{4 V^4 K} (\dot{R} - \dot{R}')^2 \ddot{r}, \quad \bar{b} \leftrightarrow -\frac{1}{8 V^5 K} (\dot{R} - \dot{R}')^3 \ddot{r}, \\ \chi &= -\frac{4 V^2 (\dot{R} + \dot{R}') (\ddot{R} - \ddot{R}') \ddot{r}}{\dot{r}' (\dot{R} - \dot{R}')^4 \ddot{r}}, \quad K^2 = \frac{\ddot{r}' (\dot{R} - \dot{R}')^2 \ddot{r}}{4 V^6}, \quad V^2 = -\frac{1}{4} \dot{r}' (\dot{R} + \dot{R}')^2 \dot{r}. \end{aligned}$$

Зависимость орт сопровождающего трехгранника и базовой системы отсчета в кватернионных матрицах имеет вид:

$$\|0 \ \bar{\tau} \ \bar{n} \ \bar{b}\| = \frac{1}{4 V^4 K} \|0 \ \bar{i} \ \bar{j} \ \bar{k}\| \left\| \left| 0 \right| 4 V^3 K \dot{r} \left| -(\dot{R} - \dot{R}')^2 \ddot{r} \right| - \frac{1}{2V} (\dot{R} - \dot{R}')^3 \ddot{r} \right\|.$$

Откуда непосредственно находится матрица направляющих косинусов.

**Заключение.** В аналитической и вычислительной динамике предлагается применять математический аппарат кватернионных матриц, который достаточен как для построения математических моделей механических систем, так и при проведении вычислительных экспериментов в процессе динамического проектирования образцов новой техники. Исчисление кватернионных матриц адаптировано к компьютерным технологиям и изоморфно алгебре кватернионов, обобщает алгебру действительных и комплексных чисел, векторную алгебру на плоскости и в трехмерном пространстве [3, 11].

Установлен базис вводимой совокупности четырех кватернионных матриц на множестве элементов четырехмерного ортонормированного пространства и противоположных элементов в виде мономиальных  $(1, 0, -1)$  матриц, составляющих две некоммутативные подгруппы восьмого порядка. Показана изоморфность элементов базиса пространства кватернионов и построенных совокупностей базисных матриц. Симметрия кватернионных матриц отражена в трех операциях транспонирования и целесообразных обозначениях. Приведенные результаты составляют основополагающий элемент исчисления кватернионных матриц. Рассмотренными кватернионными матрицами представлены в эквивалентной записи сложные векторно-скалярные произведения, используемые в динамике твердого тела. Аналитически решена задача об определении основных кинематических параметров спирали-винтовой траектории многозавойной авиационно-

космической транспортной системы. Расчетные алгоритмы представлены в форме кватернионных матриц, обеспечивающей удобную компьютерную реализацию.

1. Беллман Р. Введение в теорию матриц. – М.: Наука, 1976. – 352 с.
2. Блехман И.И. Механика и прикладная математика: Логика и особенности приложения математики. / И.И. Блехман, А.Д. Мышкис, Я.Г. Пановко. – М.: Наука. Главная ред. физ.-мат. лит., 1983. – 328 с.
3. Бранец В.Н., Шмыглевский И.П. Механика космического полета: Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. – М.: Наука, 1973. – 320 с.
4. Икес Б.П. Новый метод выполнения численных расчетов, связанных с работой системы управления ориентацией, основанный на использовании кватернионов // Ракетная техника и космонавтика. – 1970. – 8, №1. – с.13–19.
5. Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины (1918-2008). – 90 лет Института (История. Структура. Информационные аспекты) / Под общ.ред. А.Н. Гузя. Сост. И.С. Чернышенко, Я.Я. Рушницкий. – К.: Літера ЛТД, 2008. – 320с.
6. Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И. Основы теории групп. – М.: Наука, 1982. – 288 с.
7. Кошляков В.Н. Задачи динамики твердого тела и прикладной теории гироскопов. Аналитические методы. – М.: Наука, 1985. – 288 с.
8. Кравец Т.В. Об использовании кватернионных матриц для описания вращательного движения твердого тела в пространстве. // Техническая механика. – 2001. - №1. – С.148-157.
9. Кравец Т.В. Определение по вектору Гиббса ориентации сопровождающего трехгранника траектории свободного твердого тела. // Техническая механика. – 2002 - №1. – С.27-32.
10. Мальцев А.И. Основы линейной алгебры. – М.: Наука, 1970. – 400 с.
11. Онищенко С.М. Применение гиперкомплексных чисел в теории инерциальной навигации. Автономные системы. – Киев: Наук.думка, 1983. – 208 с.
12. Панов А.П., Гусынин В.П., Сердюк И.И., Карпов А.С. Определение кинематических параметров движения ступеней авиационно-космических систем. // Техническая механика. – 1999 - №1. – С.76-83.
13. Плотников П.К., Челноков Ю.Н. Применение кватернионных матриц в теории конечного поворота твердого тела // Сб. научн.-метод. статей по теорет. механике. – М.: Высшая школа, 1981.– вып. 11.– С. 122 – 128.
14. Стражева И.В., Мелкумов В.С. Векторно-матричные методы в механике полета. – М.: Машиностроение, 1973. – 260 с.
15. Фрезер Р., Дункан В., Коллар А. Теория матриц и её приложение к дифференциальным уравнениям и динамике. – М.: Изд. Иностран. лит., 1950. – 445 с.
16. Челноков Ю.Н. Кватернионные и бикватернионные модели и методы механики твердого тела и их приложения. Геометрия и кинематика движения. . – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 512 с.
17. Kravets V.V., Kravets T.V. On the Nonlinear Dynamics of Elastically Interacting Asymmetric Rigid Bodies // Int. Appl. Mech. – 2006. – 42, №1. – p.110 – 114.
18. Kravets V.V., Kravets T.V., Kharchenko A.V. Using Quaternion Matrices to Describe the Kinematics and Nonlinear Dynamics of an Asymmetric Rigid Body // Int.Appl.Mech. – 2009. – 45, № 2 – p. 223– 231.
19. Larin V.B. On the Control Problem for a Compound Wheeled Vehicle // Int. Appl. Mech. – 2007. – 43, № 11 – p. 1269– 1275.
20. Lobas L.G., Verbitsky V.G. Quantitative and Analytical Methods in Dynamics of Wheel Machines. – Kyiv: Naukova Dumka, 1990. – 232 p.
21. Martynyuk A.A. Qualitative Methods in Nonlinear Dynamics: Novel Approaches to Liapunov's Matrix Functions. – New York – Basel: Marsel Dekker, 2002. – 301 p.

Днепропетровский национальный  
университет железнодорожного  
транспорта имени акад. В. Лазаряна

Получено