МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Дніпровський національний університет залізничного транспорту імені академіка В. Лазаряна

Н.І. ПОСЛАЙКО

ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ.

ЗАДАЧІ З УМОВАМИ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ ТА КОНФЛІКТУ

Дніпро – 2019

УДК 519.83(075.8)
П 61
Видавництво ПФ «Стандарт - Сервіс», 2019

Рекомендовано до друку Вченою радою
Дніпровського національного університету залізничного транспорту
імені академіка В. Лазаряна (протокол № 13 від 24 червня 2019 року.
Реєстр. № 420/19-З від 25 червня 2019 року)

Рецензенти:

Семенець С.М.– кандидат технічних наук, доцент кафедри прикладної математики та інформаційних технологій Придніпровської державної академії будівництва та архітектури

Гасанов З.М. – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри прикладної математики Дніпровського національного університету залізничного транспорту імені академіка В. Лазаряна

П 61 ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ. ЗАДАЧІ З УМОВАМИ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ ТА КОНФЛІКТУ. Навчальний посібник / Послайко Н.І. – Дніпро, Вид-во ПФ «Стандарт - Сервіс», 2019. – 54 с.

УДК 519.83(075.8)

У навчальному посібнику розглядаються основні поняття, означення теорії ігор. У першій частині для парних ігор з нульовою сумою наведені основні теоретичні твердження та ілюстративні приклади, а також рекомендації по знаходженню оптимальних стратегій в таких іграх на ЕОМ. У другій частині для статистичних ігор наведені основні критерії пошуку оптимальних рішень при різних припущеннях, приклади на їх застосування, а також розглядаються задачі прийняття багатоцільових рішень за умов невизначеності та конфлікту. Наприкінці наводяться завдання для самостійної роботи.

Посібник призначений для студентів денної та безвідривної форм навчання економіко-гуманітарного факультету.

ЗМІСТ

ОСНОВНІ ТЕРМІНИ І ПОНЯТТЯ:

- ігрові моделі дослідження операцій;
- гра;
- парна гра;
- множинна гра;
- гра з нульовою сумою;
- скінченна гра;
- нескінченна гра;
- статистичні ігри;
- гравці;
- стратегія;
- чисті стратегії;
- змішані стратегії;
- оптимальна стратегія;
- домінуюча стратегія;
- активні стратегії;
- платіжна матриця;
- матриця ризиків;
- нижня ціна гри;
- верхня ціна гри;
- сідлова точка;
- лінійне програмування;
- симплекс-метод;
- множина Парето;
- Парето-оптимальні альтернативи;
- інформаційні ситуації.

«Роби велике, не обіцяючи великого».

Піфагор, давньогрецький мислитель, математик, філософ.

ВСТУП

У багатьох задачах дослідження операцій виникає проблема прийняття рішень в умовах невизначеності.

У ряді випадків задача про прийняття рішень ставиться в такому вигляді: яку ціну можна заплатити за недостатню інформацію, щоб економічний ефект всієї операції був максимальним?

Для обґрунтування рішень розроблені спеціальні математичні методи, які розглядаються в теорії ігор. Виникнення теорії ігор відноситься до 1944 року, коли вийшла в світ монографія Неймана і Моргенштейна "Теорія ігор і економічної поведінки".

1. ПАРНІ ІГРИ З НУЛЬОВОЮ СУМОЮ

1.1. Основні поняття теорії ігор

При розв'язуванні ряду практичних задач дослідження операцій приходиться аналізувати так звані конфліктні ситуації, де стикаються інтереси двох (або більше) ворогуючих сторін. Останні переслідують різні цілі.

Конфліктуючі сторони – це торгівельні фірми, промислові підприємства, тресті, монополії і т. і.

Теорія ігор – це математична теорія конфліктних ситуацій.

При складанні математичних моделей конфліктних ситуацій проводять спрощення, залишаючи тільки суттєві фактори. Математичні моделі конфліктних ситуацій називають **грою**.

Якщо задіяні два гравці, то гру називають **парною**, в протилежному випадку – **множинною**.

Кажуть, що гра **з нульовою сумою**, якщо один гравець виграє стільки, скільки програє інший.

Стратегією гравця називають сукупність правил, що визначають вибір варіанту дій при кожному особистому ході гравця в залежності від ситуації, що склалася в процесі гри. Гра називається **скінченною**, якщо у кожного гравця є тільки скінченне число стратегій, і **нескінченною**, якщо хоча б у одного з двох гравців є нескінченне число стратегій.

Оптимальною стратегією гравця називається така стратегія, яка при многократному повторенні гри забезпечує даному гравцю максимально можливий середній виграш (або ж, що те саме, мінімально можливий середній програш).

При виборі стратегій кожен гравець виходить з того , що його противник такий же розумний, як і він, і робить все, щоб заважати гравцю добитись своєї цілі.

1.2. Розв'язування гри в чистих стратегіях

Розглянемо парну скінченну гру з нульовою сумою. Нехай є два гравці A та B. У гравця A є m стратегій:

$$A_1,\ A_2, \ldots,\ A_m,$$

а у $B - n$ стратегій:

$$B_1,\ B_2, \ldots,\ B_n.$$

Ці стратегії називаються **чистими**. Така гра називається грою $m \times n$.

Вибір стратегій $A_i,\ B_j$ однозначно визначає результат гри − виграш гравця A (додатний або від'ємний). Позначимо його через a_{ij}. a_{ij}, по-іншому, це програш B, якщо $a_{ij} > 0$, і програш A, якщо $a_{ij} < 0$.

Припустимо, що нам відомі a_{ij}, $i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}$. Напишемо їх у вигляді прямокутної таблиці.

Таблиця 1.1

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	$\ldots$	B_n
A_1	a_{11}	a_{12}	$\ldots$	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	$\ldots$	a_{2n}
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
A_m	a_{m1}	a_{m2}	$\ldots$	a_{mn}

Таблицю 1.1 називають **платіжною матрицею** або **матрицею гри**.

Припустимо, що гравець A – це ми, а B − наш противник. Виберемо найкращу з наших стратегій. Проаналізуємо послідовно кожну з наших стратегій. Вибираючи A_i ми повинні розраховувати, що противник відповість на неї тією з стратегій B_j , для якої наш виграш мінімальний. Знайдемо мінімальне число a_{ij} в i-ому рядку і позначимо його α_i:

$$\alpha_i = \min_j a_{ij}.$$

Вибираючи якусь стратегію A_i ми повинні розраховувати , що в результаті розумних дій противника ми виграємо тільки α_i. Діючи обережно, ми повинні надати перевагу тій стратегії, для якої число α_i максимальне. Позначимо його α :

$$\alpha = \max_i \alpha_i$$

або

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij}.$$

Величину α називають **нижньою ціною** гри або максимінним виграшом , або максиміном.

Та стратегія гравця A, яка відповідає максиміну α називається максимінною стратегією.

Тобто, якщо ми будемо дотримуватись максимінної стратегії, то нам при будь-якій поведінці противника гарантований виграш, не менший ніж α.

Противник B зацікавлений, щоб обернути наш виграш в мінімум. Він зацікавлений переглянути всі свої стратегії, виділяючи для кожної з них максимальне значення виграшу. Позначимо

$$\beta_j = \max_i a_{ij}.$$

B зацікавлений зробити наш максимальний виграш мінімальним:

$$\beta = \min_j \max_i a_{ij}.$$

Число β називають **верхньою ціною** гри. Дотримуючись своєї обережної стратегії, гравець B гарантовано програє не більше, ніж β. Та стратегія гравця B, яка відповідає мінімаксу β називається мінімаксною стратегією.

Реальний результат розв’язання конфліктної ситуації, який називають ціною гри ν , міститься між верхньою та нижньою ціною:

$$\alpha \le \nu \le \beta.$$

У випадку, якщо верхня і нижня ціни співпадають

$$\alpha = \nu = \beta \quad ,$$

то гра має **розв’язок в чистих стратегіях**, тобто можна точно визначити оптимальні стратегії (A_i, B_j), які вигідні для обох сторін. Якщо одна сторона відійде від своєї оптимальної стратегії, то її виграш від цього тільки зменшиться.

Гра, для якої $\alpha = \nu = \beta$, називається грою з **сідловою точкою**. Сідлова точка для гри з платіжною матрицею A може не існувати, може існувати одна така точка, а може їх бути і декілька.

Якщо гра не має сідлової точки, то для знаходження її розв'язку використовуються так звані змішані стратегії. Про них мова піде в пункті 1.4.

Приклад 1. 1. Дебітор A бажає вибрати одну з чотирьох умов займу: A_1, A_2, A_3, A_4. Кредитор B може на будь-який варіант займу відповісти варіантом представлення кредиту B_1, B_2, B_3, B_4, B_5. Процентні ставки для дебітора при будь-якому варіанті кредитора представлені платіжною матрицею (таблиця 1.2):

Таблиця 1. 2

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	6	1	8	4	4
A_2	9	6	7	5	8
A_3	3	7	6	2	8
A_4	2	6	7	3	3

Знайдемо верхню і нижню ціну гри. Для цього в таблиці 1.2 добавимо стовпець для α_i і рядок для β_j , і підрахуємо їх. Отримаємо таблицю 1.3.

Таблиця 1.3

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	α_i
A_1	6	1	8	4	4	1
A_2	9	6	7	$\boxed{5}$	8	$\boxed{5}$
A_3	3	7	6	2	8	2
A_4	2	6	7	3	3	2
β_j	9	7	8	$\boxed{5}$	8	

Видно, що верхні і нижні ціни гри співпадають:

$$\alpha = \beta = \nu = 5,$$

тобто для обох гравців вигідні стратегії $(A_2,\ B_4)$ і процентна ставка, що дорівнює 5. При прийнятті іншої стратегії, відмінної від оптимальної, гравець A тільки програє. Стратегії $(A_2,\ B_4)$ є оптимальними. Гра має одну сідлову точку, яка відповідає елементу $a_{24} = 5$.

1.3. Дослідження платіжних матриць

Приклад 1. 2. Виконати можливі спрощення платіжної матриці (таблиця 1.4).

Таблиця 1.4

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	1	2	-3	-1	0
A_2	3	4	-1	2	1
A_3	2	0	1	-3	6
A_4	3	4	-1	2	1
A_5	1	-2	1	-4	3

Розв'язання. Оскільки рядки у A_2 і A_4 рівні, відповідні стратегії дублюють одна одну, тому відкинемо, наприклад, стратегію A_4. Елементи першого рядка менші відповідних елементів другого рядка, тому можна відкинути стратегію A_1 (стратегія A_2 домінуюча). Елементи п'ятого рядка менші відповідних елементів третього рядка, тому стратегія A_5 завідомо не вигідна. Відкинемо її також. Гравцю A, який намагається максимізувати свій виграш, доцільно застосовувати тільки стратегії A_2 і A_3. Отримаємо (таблиця 1.5):

Таблиця 1. 5

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_2	3	4	-1	2	1
A_3	2	0	1	-3	6

.

Подивимось на останню матрицю (таблиця 1.5) з точки зору гравця B. В цій матриці елементи першого і другого стовпця більші відповідних елементів четвертого стовпця, тому гравцю B, який намагається програти якомога менше, вигідніше використовувати стратегію B_4, ніж стратегії B_1 або B_2. Тому домінуючі стовпці, які в даній ситуації відповідають невигідним стратегіям, треба викинути. З аналогічної причини викинемо і стратегію B_5. В результаті приходимо до матриці (таблиця 1.6):

Таблиця 1. 6

A_i \ B_j	B_3	B_4
A_2	-1	2
A_3	1	-3

Її вже неможливо більше спростити.

Приклад 1.3. Виконати можливі спрощення платіжної матриці (таблиця 1.7).

Таблиця 1.7

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	-5	0	4	2
A_2	7	5	4	9
A_3	6	8	-1	0

Розв'язання. Бачимо, що для гравця A стратегія A_2 домінує над стратегією A_1. Відкинемо стратегію A_1. Отримаємо (таблиця 1.8):

Таблиця 1.8

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4
A_2	7	5	4	9
A_3	6	8	-1	0

Тепер проаналізуємо стратегії гравця B. Стратегії B_1, B_2, B_4 домінують над стратегією B_3. Відкинемо ці домінуючі стратегії. Отримаємо:

Таблиця 1.9

A_i \ B_j	B_3
A_2	4
A_3	-1

Очевидно, що для гравця A найкраща стратегія A_2, для гравця B – стратегія B_3. В даному прикладі в результаті спрощення платіжної матриці вдалось знайти розв'язок гри в чистих стратегіях. Пояснюється це тим, що дана платіжна матриця має сідлову точку (елемент $a_{23} = 4$).

Приклад 1.4 (для самостійного розв'язання). Виконати можливі спрощення платіжної матриці (таблиця 1.10).

Таблиця 1.10

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	1	2	4	3
A_2	0	2	3	2
A_3	1	2	4	3
A_4	4	3	1	0

Приклад 1.5. Задана платіжна матриця гри (таблиця 1.11).

Таблиця 1.11

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3
A_1	2	-3	4
A_2	-3	4	-5
A_3	4	-5	6

З'ясувати, чи існує розв'язок гри в чистих стратегіях?

Розв'язання. Знайдемо нижню і верхню ціну гри (таблиця 1.12):

Таблиця 1.12

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	α_i
A_1	2	-3	4	$\boxed{-3}$
A_2	-3	4	-5	-5
A_3	4	-5	6	-5
β_j	$\boxed{4}$	$\boxed{4}$	6	

Як бачимо з таблиці 1.12, α=-3, а β=4. Розв'язок гри у чистих стратегіях не існує. Наша максимінна стратегія A_1, а у противника B дві мінімаксні стратегії B_1, B_2.

Приклад 1.6. Задана платіжна матриця гри (таблиця 1.13).

Таблиця 1. 13

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3
A_1	0,5	0,6	0,8
A_2	0,9	0,7	0,8
A_3	0,7	0,5	0,6

З'ясувати, чи існує розв'язок гри в чистих стратегіях?

Розв'язання. Знайдемо нижню і верхню ціну гри (таблиця 1.14):

Таблиця 1.14

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	α_i
A_1	0,5	0,6	0,8	0,5
A_2	0,9	$\boxed{0,7}$	0.8	$\boxed{0,7}$
A_3	0,7	0,5	0,6	0,5
β_j	0,9	$\boxed{0,7}$	0,8	

В платіжній матриці є сідлова точка, оскільки $\alpha = \beta = \nu = 0,7$. Розв'язок гри в чистих стратегіях існує. Оптимальними стратегіями є (A_2, B_2). Ціна гри дорівнює 0,7.

Приклад 1.7. Задана платіжна матриця гри (таблиця 1.15).

Таблиця 1.15

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	2	2	1	1	2
A_2	0	1	1	1	1
A_3	1	1	1	1	2
A_4	1	2	1	1	2

З'ясувати, чи існує розв'язок гри в чистих стратегіях?

Розв'язання. Знайдемо нижню і верхню ціну гри (таблиця 1.16):

Таблиця 1.16

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	α_i
A_1	2	2	$\boxed{1}$	$\boxed{1}$	2	$\boxed{1}$
A_2	0	1	$\boxed{1}$	$\boxed{1}$	1	0
A_3	1	1	$\boxed{1}$	$\boxed{1}$	2	$\boxed{1}$
A_4	1	2	$\boxed{1}$	$\boxed{1}$	2	$\boxed{1}$
β_j	2	2	$\boxed{1}$	$\boxed{1}$	2	

Маємо $\alpha = \beta = \nu = 1$, тобто розв'язок гри в чистих стратегіях існує, причому не єдиний, платіжна матриця має шість сідлових точок, яким відповідають стратегії $(A_1,\ B_3)$, $(A_1,\ B_4)$, (A_3, B_3), (A_3, B_4), (A_4, B_3), (A_4, B_4). У випадку, коли оптимальних стратегій декілька , кожен гравець може застосовувати будь-яку зі своїх оптимальних стратегій незалежно від іншого гравця. Цю властивість називають взаємозамінністю оптимальних стратегій в антагоністичних іграх.

1.4. Розв'язування гри в змішаних стратегіях. Основні твердження

Серед скінченних ігор, що мають практичне значення, не так уже часто зустрічаються ігри з сідловою точкою. Більш типовим є випадок, коли нижня і верхня ціни гри є різними. Аналізуючи матриці таких ігор, ми прийшли до висновку, що , якщо кожному гравцю представити вибір однієї-єдиної чистої стратегії, то в розрахунку на розумного противника цей вибір повинен визначатись принципом мінімаксу. При цьому гравець гарантує собі виграш, рівний нижній ціні гри α . Виникає питання: чи не можна гарантувати виграш, більший ніж α , якщо застосовувати не одну-єдину чисту стратегію, а змінювати по черзі випадковим чином декілька стратегій? Такі стратегії, які полягають у випадковому виборі по черзі чистих стратегій, називають в теорії ігор **змішаними**.

При використанні змішаної стратегії перед кожною партією гри запускається в хід якийсь механізм випадкового вибору, який забезпечує появу кожної стратегії з деякою ймовірністю, і потім приймається та стратегія, на яку випав жереб.

Змішані стратегії представляють собою математичну модель мінливої, гнучкої тактики, при якій противник не знає, і не може дізнатись завчасно, з якою обстановкою йому прийдеться зустрітись.

Введемо спеціальні позначення для змішаних стратегій. Нехай є гра I, в якій у нас (A) є m стратегій: $A_1, A_2, ..., A_m$, а у противника (B) – n стратегій: $B_1, B_2, ..., B_n$. Будемо позначати

$$S_A = \left(p_1,\ p_2, ...,\ p_m \right)$$

нашу змішану стратегію, в якій стратегії $A_1, A_2, ..., A_m$ застосовуються з ймовірностями $p_1,\ p_2, ...,\ p_m$, причому

$$p_1 + p_2 + ... + p_m = 1.$$

Аналогічне позначення для змішаної стратегії противника буде

$$S_B = \left(q_1,\ q_2, ...,\ q_n \right),$$

де

$$q_1 + q_2 + ... + q_n = 1 \ .$$

Очевидно, кожна чиста стратегія є окремим випадком змішаної: всі стратегії, окрім заданої, мають ймовірності, що дорівнюють нулю, а задана – одиниці.

Виявляється, якщо допустити не тільки чисті, але і змішані стратегії, то можна для кожної скінченої гри знайти розв'язок, тобто пару стійких оптимальних стратегій гравців.

Розв'язком гри називається пара оптимальних стратегій S_A^*, S_B^*, в загальному випадку змішаних, які володіють наступною властивістю: **якщо один з гравців дотримується своєї оптимальної стратегії, то іншому не може бути вигідно відступати від своєї.**

Виграш, який відповідає розв'язку, називається ціною гри. Ми будемо її (як і раніше – чисту ціну) позначати ν .

Існує так звана **основна теорема теорії ігор**, яка полягає в наступному.

Кожна скінченна гра має принаймні один розв'язок, можливо в області змішаних стратегій.

Припустимо, що в грі $m \times n$ нами знайдений розв'язок, який складається із двох оптимальних стратегій:

$$S_A = \left(p_1,\, p_2, ...,\, p_m\right),\ S_B = \left(q_1,\, q_2, ...,\, q_n\right).$$

В загальному випадку деякі з чисел

$$p_1,\, p_2, ...,\, p_m;\ q_1,\, q_2, ...,\, q_n$$

можуть бути рівними нулю, тобто не всі стратегії, які доступні гравцю, входять в його оптимальну змішану стратегію.

Будемо називати **активними** стратегіями гравця ті, які входять в його оптимальну змішану стратегію з відмінними від нуля ймовірностями.

Для розв'язування ігор істотне значення має наступна **теорема про активні стратегії.**

Якщо один з гравців дотримується своєї оптимальної змішаної стратегії, то виграш залишається незмінним і рівним ціні гри ν , незалежно від того, що робить інший гравець, якщо тільки той не виходить за межі своїх активних стратегій (тобто користується будь-якою з них в чистому виді, або змішує їх у будь-яких пропорціях).

1.5. Зведення розв'язання гри $m \times n$ до задач лінійного програмування.

Знайдемо спочатку оптимальну стратегію S_A^*. Ця стратегія повинна забезпечити виграш, не менший, ніж ν , при будь-якій поведінці противника, і виграш рівний ν , при його оптимальній поведінці (тобто при стратегії S_B^*).

Ціна гри ν нам поки що невідома. Не порушуючи загальності, можна припустить її рівною деякому додатному числу $\nu > 0$. Дійсно, для того, щоб виконувалась умова $\nu > 0$, достатньо, щоб всі елементи матриці $\left(a_{ij}\right)$ були невід'ємними. Цього завжди можна добитись , додаючи до всіх елементів матриці $\left(a_{ij}\right)$ одну і ту ж достатньо велику додатну величину *M*. При цьому ціна гри збільшиться на M , а розв'язок не зміниться. Отже, будемо вважати $\nu > 0$.

Припустимо, що ми (A) застосовуємо свою оптимальну стратегію S_A^* . Тоді наш середній виграш буде дорівнювати:

$$a_j = p_1 a_{1j} + p_2 a_{2j} + ... + p_m a_{mj} \quad (j = 1,...,n).$$

Наша оптимальна стратегія S_A^* володіє тією властивістю, що при будь-якій поведінці противника забезпечує нам виграш, не менший, ніж ціна гри ν . Це означає, що будь-яке з чисел a_j не може бути меншим, ніж ν. Отримуємо ряд умов:

$$\begin{cases} p_1 a_{11} + p_2 a_{21} + ... + p_m a_{m1} \geq \nu, \\ p_1 a_{12} + p_2 a_{22} + ... + p_m a_{m2} \geq \nu, \\ .... \\ p_1 a_{1n} + p_2 a_{2n} + ... + p_m a_{mn} \geq \nu. \end{cases} \tag{1.1}$$

Розділимо нерівності в (1.1) на додатну величину ν і введемо позначення:

$$x_1 = \frac{p_1}{\nu},\ x_2 = \frac{p_2}{\nu},\ \dots,\ x_m = \frac{p_m}{\nu}. \tag{1.2}$$

Тоді умови (1.1) запишуться у вигляді:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + ... + a_{m1}x_m \geq 1, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{m2}x_m \geq 1, \\ .... \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + ... + a_{mn}x_m \geq 1, \end{cases} \tag{1.3}$$

де $x_1, x_2, \dots, x_m$ – невід'ємні змінні. В силу (1.2) і того, що $p_1 + p_2 + ... + p_m = 1$, змінні $x_1, x_2, \dots, x_m$ задовольняють умові

$$x_1 + x_2 + ... + x_m = \frac{1}{\nu}. \tag{1.4}$$

Ми хочемо зробити свій гарантований виграш **максимально можливим**. При цьому права частина (1.4) набуває **мінімального значення**. Таким чином, задача розв'язання гри звелась до наступної математичної задачі.

Визначити невід'ємні значення змінних $x_1, x_2, \dots, x_m$ **так, щоб вони задовольняли лінійним обмеженням (1.3) і при цьому їх лінійна функція**

$$L = x_1 + x_2 + \dots + x_m \tag{1.5}$$

обертались в мінімум.

Це типова задача лінійного програмування. Розв'язуючи її можна знайти оптимальну стратегію S_A^* гравця A.

Знайдемо тепер оптимальну стратегію S_B^* гравця B. Все буде аналогічно розв'язанню гри для гравця A, з тією різницею, що гравець B намагається не максимізувати, а мінімізувати наш виграш, тобто не мінімізувати, а максимізувати величину $\frac{1}{\nu}$. Замість умов (1.3) повинні будуть виконуватись умови:

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n \le 1, \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n \le 1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \dots + a_{mn}y_n \le 1, \end{cases} \tag{1.6}$$

де

$$y_1 = \frac{q_1}{\nu},\ y_2 = \frac{q_2}{\nu},\ \dots,\ y_n = \frac{q_n}{\nu}.$$

Треба так вибрати змінні $y_1, y_2, \dots, y_n$, щоб вони задовольняли умовам (1.6) і обертали в максимум лінійну функцію

$$\tilde{L} = y_1 + y_2 + \dots + y_n = \frac{1}{\nu}. \tag{1.7}$$

Таким чином, задача розв'язання будь-якої скінченої гри зводиться до пари двоїстих задач лінійного програмування. Такі задачі зазвичай розв'язуються за допомогою ЕОМ.

Для ігор 2×2, $2\times n$, $m\times2$ існує проста геометрична інтерпретація, яка дозволяє за допомогою найпростіших прийомів (аналітично і графічно) знаходити їх розв'язки.

Наведемо розв'язок гри 2×2 (таблиця 1.17).

Таблиця 1.17

A_i \ B_j	B_1	B_2
A_1	a_{11}	a_{12}
A_2	a_{21}	a_{22}

Оптимальними будуть стратегії $S_A^*=(p_1,\ p_2)$, $S_B^*=(q_1,\ q_2)$, де

$$p_1=\frac{a_{22}-a_{21}}{a_{11}+a_{22}-a_{21}-a_{12}},\ \ p_2=\frac{a_{11}-a_{12}}{a_{11}+a_{22}-a_{21}-a_{12}}, \tag{1.8}$$

$$q_1=\frac{a_{22}-a_{12}}{a_{11}+a_{22}-a_{21}-a_{12}},\ \ q_2=\frac{a_{11}-a_{21}}{a_{11}+a_{22}-a_{21}-a_{12}}, \tag{1.9}$$

а ціна гри дорівнює:

$$\nu=\frac{a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}}{a_{11}+a_{22}-a_{21}-a_{12}}\ . \tag{1.10}$$

Приклад 1.8. Торгова організація A виділяє 1млн. гривень на закупівлю товару на реалізацію. Є вибір між закупкою товарів T_1 і T_2. Очікуваний прибуток залежить від того, який товар T_1 чи T_2 буде закуповувати конкурент B. Якщо обидва будуть закуповувати товар T_1, то з огляду на конкуренцію A понесе збитки в 200 тис. грн. Якщо обидва будуть закуповувати товар T_2, то з тієї ж причини A понесе збитки в 100 тис. грн. Якщо A закупить T_1, B закупить T_2, то прибуток A складе 900 тис. грн. Якщо A закупить T_2, а B закупить T_1, то прибуток складе 700 тис. грн.

Як краще поводитись гравцям при оптимальній поведінці?

Розв'язання. Позначимо стратегії гравців:

A_1 – компанія A закуповує товар T_1,

A_2 – компанія A закуповує товар T_2,

B_1 – компанія B закуповує товар T_1,

B_2 – компанія B закуповує товар T_2 .

Платіжна матриця має вигляд (таблиця 1.18):

Таблиця 1.18

A_i \ B_j	B_1	B_2
A_1	-200	900
A_2	700	-100

Очевидно, що ця матриця не має сідлової точки. Знайдемо оптимальний розв'язок гри в змішаних стратегіях, використовуючи формули (1.8), (1.9), (1.10):

$$p_1 = \frac{-100-700}{-200-100-700-900} = \frac{8}{19},\ p_2 = 1 - p_1,\ \ p_2 = \frac{11}{19},$$

$$q_1 = \frac{-100-900}{-200-100-700-900} = \frac{10}{19},\ \ q_2 = 1 - q_1,\ \ q_2 = \frac{9}{19},$$

$$\nu = \frac{(-200)(-100) - 700 \cdot 900}{-200-100-700-900} = \frac{6100}{19} = 321.053.$$

З результатів розв'язку бачимо, що гравцю A вигідно реалізовувати обидві стратегії A_1 і A_2 з частотою $\frac{8}{19}$ та $\frac{11}{19}$ відповідно, тобто закуповувати і товар T_1, і товар T_2. При цьому товар T_1 повинен бути закуплений на суму 1 млн. грн. $\cdot\frac{8}{19}$, тобто на суму 421 тис. грн. , а товар T_2 на суму 579 тис. грн. Прибуток A, незалежно від поведінки суперника, складе приблизно 321 тис. грн.

Те ж саме можна сказати і для гравця B (якщо, звичайно, гра антагоністична і виграш A це програш B): закуповувати обидва товари, першого на суму $\frac{10}{19}$ від запланованого, а другого – на суму $\frac{9}{19}$ від запланованого обсягу.

Приклад 1.9. Директор транспортної компанії A, що надає транспортні послуги з перевезення пасажирів в обласному центрі, планує відкрити один або декілька маршрутів: A_1, A_2, A_3 та A_4. Для цього було закуплено 100 мікроавтобусів. Він може поставити весь транспорт на одному з маршрутів (найбільш вигідному), або розподілити по декількох маршрутах. Попит на транспорт, а відповідно і прибуток компанії багато в чому залежить, які маршрути в найближчий час відкриє головний конкурент – компанія B. Її керівництво повністю володіє ситуацією і може відкрити декілька з п'яти маршрутів: B_1, B_2, B_3, B_4, B_5. Оцінки прибутку компанії A (млн. грн.) при будь-якій відповіді B представлені платіжною матрицею:

Таблиця 1.19

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	5	6	4	6	9
A_2	6	5	3	4	8
A_3	7	6	6	7	5
A_4	6	7	5	4	3

Знайти оптимальний розподіл прибутку по маршрутах та очікуваний прибуток.

Розв'язання. Викреслимо із таблиці 1.19 другий стовпець, оскільки всі його елементи більші або дорівнюють елементам третього. Викреслимо четвертий рядок, оскільки його елементи, що залишились після викреслювання другого стовпця, менші елементів третього. Елементи першого стовпця більші елементів третього, викреслимо перший стовпець. Другий рядок викреслюємо в результаті порівняння з першим. Четвертий стовпець викреслюємо після порівняння з третім. В результаті отримаємо матрицю (таблиця 1.20):

Таблиця 1.20

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	~~5~~	~~6~~	4	~~6~~	9
A_2	~~6~~	~~5~~	~~3~~	~~4~~	~~8~~
A_3	~~7~~	~~6~~	6	~~7~~	5
A_4	~~6~~	~~7~~	~~5~~	~~4~~	~~3~~

Вона еквівалентна матриці (таблиця 1.21):

Таблиця 1.21

$A_i \backslash B_j$	B_3	B_5
A_1	4	9
A_3	6	5

Тоді ймовірності чистих стратегій компанії A в змішаній дорівнюють:

$$p_1 = \frac{5-6}{4+5-6-9} = \frac{1}{6},\ p_2 = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}.$$

Ціна гри

$$\nu = \frac{4\cdot 5 - 9\cdot 6}{4+5-6-9} = \frac{34}{6} \approx 5.67.$$

Отже, $\frac{1}{6}$ частину автопарку (17 машин) треба направити на маршрут A_1 , а інші $\frac{5}{6}$ парку (83 машини) – на маршрут A_3 . Маршрути A_2 та A_4 використовувати не раціонально. При цьому прибуток не залежно від відповіді компанії B буде складати $\frac{34}{6}$ млн. грн.

1.6. Розв’язання гри $m \times n$ в програмному середовищі MAPLE 8

Задачі лінійного програмування, до яких зводиться знаходження розв’язків ігор розглядуваного тут типу (їх називають ще матричними іграми), можна розв’язувати в різних програмних середовищах EXCEL, MATHLAB, MAPLE та інших. Далі наводиться описання розв’язання ігор $m \times n$ за допомогою MAPLE 8.

Спочатку треба підключити пакет simplex, який нараховує 17 функцій та означень:

NONNEGATIVE – ключове слово, що вказує на невід’ємний тип змінних;
convex hull – обчислення опуклої оболонки для набору точок;
basis – повернення списку базисних змінних для множини лінійних рівнянь;
display – виведення в матричній формі системи рівнянь або нерівностей;
feasible – з’ясування, чи існує розв’язок заданої задачі;
maximize – обчислення максимуму функції;
minimize – обчислення мінімуму функції;
pivot – створення нової системи рівнянь з заданим головним елементом;
pivoting – видача підсистеми рівнянь для заданого головного елемента;
setup – задання системи лінійних рівнянь;
standardize – приведення заданої системи рівнянь або нерівностей до стандартної форми у вигляді нерівностей.

Головними з цих функцій є функції maximize та minimize, що оптимізують задачу лінійного програмування симплекс-методом. Вони записуються в такому вигляді:

maximize (f, C)
minimize (f, C)
maximize (f, C, vartype)
minimize (f, C, vartype)
maximize (f, C, vartype,’NewC’,’transform’)
minimize (f, C, vartype, ’NewC’,’transform’).

Тут f – лінійний вираз функції цілі;
C – множина обмежень;
vartype – тип змінних NONNEGATIVE або UNRESTRICTED;
NewC і transform – імена змінних, яким присвоюються відповідно оптимальний опис і змінні перетворень.

Далі наведено розв’язання прикладу 1.8 в програмному середовищі MAPLE 8.

Вирази (1.3), (1.5) та (1.6), (1.7) тут набувають вигляду:

$$\begin{cases} -200x_1 + 700x_2 \ge 1, \\ 900x_1 - 100x_2 \ge 1, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,$$

$$L = x_1 + x_2 \to \min,$$

$$\begin{cases} -200y_1 + 900y_2 \le 1, \\ 700y_1 - 100y_2 \le 1, \end{cases}$$

$$y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0,$$

$$\tilde{L} = y_1 + y_2 \to \max .$$

Програмна реалізація розв’язання задачі наведена нижче.

```
> with(simplex):
Warning, the protected names maximize and minimize have been redefined and
unprotected
> minimize(x1+x2,{-200*x1+700*x2>=1,900*x1-100*x2>=1},NONNEGATIVE,
  'vt');
```

$$\{x1 = \frac{2}{1525}, x2 = \frac{11}{6100}\}$$

```
> NC;vt;
```

$$NC$$

$$\{x1 = \frac{2}{1525} + \frac{\_SL1}{6100} + \frac{7\ \_SL2}{6100}, x2 = \frac{\_SL2}{3050} + \frac{11}{6100} + \frac{9\ \_SL1}{6100}\}$$

```
> fmin:=subs(x1 = 2/1525, x2 = 11/6100,x1+x2);
```

$$fmin := \frac{19}{6100}$$

```
> subs(v1=19/6100,v=1/v1);
```

$$v = \frac{6100}{19}$$

```
> p1:=subs(x1 = 2/1525,v=6100/19,x1*v);
```

$$p1 := \frac{8}{19}$$

```
> p2:=subs(x2 = 11/6100,v=6100/19,x2*v);
```

$$p2 := \frac{11}{19}$$

```
> maximize(y1+y2,{-200*y1+900*y2<=1,700*y1-100*y2<=1},NONNEGATIVE)
  ;
```

$$\{y2 = \frac{9}{6100}, y1 = \frac{1}{610}\}$$

```
> fmax:=subs(y1 = 1/610,y2 = 9/6100,y1+y2);
```

$$fmax := \frac{19}{6100}$$

```
> q1:=subs(y1 = 1/610,v=6100/19,y1*v);
```

$$q1 := \frac{10}{19}$$

```
> q2:=subs(y2 = 9/6100,v=6100/19,y2*v);
```

$$q2 := \frac{9}{19}$$

```
>
```

1.7. Запитання для самоконтролю

1. Пояснити економічний зміст елементів платіжної матриці.
2. Пояснити сутність понять «нижня ціна гри», «верхня ціна гри».
3. Яка гра називається грою з сідловою точкою?
4. Скільки сідлових точок може мати платіжна матриця?
5. Як знаходиться розв’язок гри, у якої немає сідлової точки?
6. Які стратегії називають змішаними?

7. Які стратегії називають оптимальними?
8. Які стратегії називають активними?
9. Що називають розв’язком гри?
10. Розкрити зміст основної теореми теорії ігор.
11. Як зміниться розв’язок гри, якщо до всіх елементів платіжної матриці додати одну і ту ж величину М ?
12. Як зводиться розв’язання гри до розв’язання задач лінійного програмування?
13. В яких відомих Вам програмних середовищах можна розв’язувати задачі матричних ігор з нульовою сумою?

2.Статистичні ігри

2.1. Постановка задачі

Статистичні ігри утворюють спеціальний клас матричних ігор, в яких одним із учасників є людина або група осіб, у яких спільна мета (гравець A – статистик), а іншим «природа» (гравець *П*). Такі ігри ще називають іграми з природою. Під терміном природа розуміють весь комплекс зовнішніх умов, за яких статистику приходиться приймати рішення. Природа (економіка) байдужа до виграшу і не намагається повернути на свою користь промахи статистика. Статистик може використовувати m стратегій $A_1, A_2, ..., A_m$, природа може реалізувати n різних станів $B_1, B_2, ..., B_n$. Статистику можуть бути відомі ймовірності q_j, з якими природа реалізує свої стани $П_j$. Діючи проти природи, статистик може користуватись як чистими стратегіями A_i, так і змішаними стратегіями $S_A = \left(p_1, p_2, ..., p_m\right)$.

Якщо статистик має можливість чисельно оцінити (величиною a_{ij}) наслідки застосування кожної своєї чистої стратегії A_i при будь-якому стані природи $П_j$, то гру можна задати платіжною матрицею (таблиця 2.1).

Таблиця 2.1

A_i \ $П_j$	$П_1$	…	$П_n$
A_1	a_{11}	…	a_{1n}
…	…	…	…

A_m	a_{m1}	$\dots$	a_{mn}

Елементи a_{ij} є виграші гравця A, але не є програшами природи $П$. Цю матрицю ще називають матрицею доходності, яка агрегує інформацію про можливу дохідність варіантів стратегії при різних сценаріях розвитку економічної ситуації.

Якщо відомі ймовірності станів природи, то в платіжній матриці додають ще один рядок.

При спрощенні платіжної матриці статистичної гри є своя специфіка: відкидати ті чи інші стани природи (стратегії гравця *П*) не можна, оскільки вона може реалізовувати будь-який свій стан незалежно від того, вигідний він статистику чи ні. При виборі оптимальної стратегії статистика користуються різними критеріями.

Розрізняють два види задач в іграх з природою.

1) Задачі про прийняття рішень в умовах невизначеності, коли немає можливості отримати інформацію про ймовірності станів природи.

2) Задачі про прийняття рішень в умовах ризику, коли відомі ймовірності, з якими природа перебуває в кожному з можливих станів.

2.2. Прийняття рішень в умовах невизначеності

Невизначеність може бути наслідком багатьох причин:

– коливання попиту,
– нестабільність економічної ситуації,
– зміна курсу валют,
– коливання інфляції,
– нестійка біржова ситуація,
– погода як природне явище.

Для прийняття рішень в умовах невизначеності використовують :

– критерій Вальда,
– критерій оптимізму,
– критерій песимізму,
– критерій Севіджа,
– критерій Гурвіца.

Критерій Вальда (критерій гарантованого результату, критерій максиміна)

Цей критерій забезпечує максимізацію мінімального виграшу, який може бути отриманий при реалізації кожного з варіантів стратегій. Оптимальною вважається чиста стратегія A_i, при якій найменший виграш $\min_j a_{ij}$ статистика буде максимальним:

$$W = \max_i \min_j a_{ij}.$$

Даний критерій орієнтує особу, що приймає рішення, на обережну лінію поведінки, яка напрямлена на отримання доходу і мінімізацію можливих ризиків одночасно.

Застосування критерію Вальда виправдано, якщо ситуація, в якій приймається рішення, характеризується наступними обставинами:

– про ймовірності настання того чи іншого стану природи нічого не відомо;

– не допускається ніякий ризик;

– реалізується лише мала кількість рішень.

Критерій Вальда консервативний, тобто безризиковий, оскільки суб'єкт прийняття рішення не може зіткнутися з гіршим результатом, ніж той, на який він розраховує. Цим критерієм користуються і тоді, коли рішення реалізується лише один раз.

Приклад 2.1. Знайти оптимальну стратегію за критерієм Вальда, якщо відомі наступні дані (таблиця 2.2).

Таблиця 2.2

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3
A_1	20	15	10
A_2	16	12	14
A_3	13	18	15

Розв'язання. Маємо:

$$W = \max_i \min_j a_{ij} = \max(10;12;13) = 13.$$

Отриманий результат відповідає стратегії A_3 .

Критерій оптимізму (критерій максимаксу)

Він призначений для вибору найбільшого елемента матриці дохідності:

$$M = \max_i \max_j a_{ij}.$$

Критерій оптимізму використовується, коли гравець опиняється в безвихідному положенні, коли будь-який його крок рівноймовірно може виявитись як абсолютний виграш, так і повним провалом («або пан, або пропав»).

Приклад 2.2. Для даних прикладу 2.1знайти оптимальну стратегію за критерієм оптимізму.

Розв'язання. Маємо:

$$M = \max_i \max_j a_{ij} = \max(20;16;18) = 20.$$

Отриманий результат відповідає стратегії A_1 .

Критерій песимізму

Цей критерій призначений для вибору найменшого елемента матриці дохідності:

$$P = \min_i \min_j a_{ij}.$$

Критерій песимізму передбачає, що розвиток ситуації буде несприятливим для особи, яка приймає рішення. При використанні критерію, особа, що приймає рішення, орієнтується на можливу втрату контролю над ситуацією і тому намагається виключити всі потенційні ризики та вибрати варіант з мінімальною дохідністю.

$$P = \min_i \min_j a_{ij}.$$

Приклад 2.3. Для даних прикладу 2.1 знайти оптимальну стратегію за критерієм песимізму.

Розв'язання. Маємо:

$$P = \min_i \min_j a_{ij} = \min(10;12;13) = 10.$$

Отриманий результат відповідає стратегії A_1 .

Критерій Севіджа (критерій мінімаксного ризику Севіджа)

У 1951 р. був запропонований один з найважливіших для практики критеріїв – критерій мінімального ризику Севіджа. Проілюструємо його на такому прикладі.

Приклад 2.4. При переході на випуск нових виробів можливі три управлінські рішення - A_1, A_2, A_3 Кожному з них відповідає випуск певного виду продукції. Результати залежать від невизначеного економічного середовища (забезпеченості сировиною, майбутнього попиту, тощо), яке може бути 4-х видів $П_1$, $П_2$, $П_3$, $П_4$: відома матриця A (прибуток у кожній можливій ситуації, таблиця 2.3):

Таблиця 2.3

$A_i \backslash П_j$	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$
A_1	0.3	0.4	0.6	0.5
A_2	0.4	0.8	0.3	0.4
A_3	0.7	0.7	0.5	0.6

Якби нам був відомий стан середовища (наприклад, $П = П_1$), то найдоцільніше було б прийняти третє управлінське рішення A_3, оскільки $\max(0.3; 0.4; 0.7) = 0.7$. Севідж запропонував складати **матрицю ризику**, елементи якої розраховуються як різниці між максимальним елементом відповідного стовпчика і елементом матриці A. Наприклад, елементу 0,3, який стоїть на перетині першого рядка (A_1) і першого стовпчика ($П_1$), у матриці ризику R відповідає елемент 0,7-0,3=0,4.

Матриця ризику R встановлює, наскільки вигідно реалізуються існуючі можливості досягнення успіху з врахуванням ризику втрачених можливостей.

Маємо матрицю ризику R , доповнену стовпчиком *найбільших* її елементів, визначених для кожного *рядка*: colon (0,4; 0,3; 0,2):

Таблиця 2.4

$A_i \backslash П_j$	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	
A_1	0.4	0.4	0	0.1	0.4
A_2	0.3	0	0.3	0.2	0.3
A_3	0	0.2	0.1	0	0.2

Обираємо ті варіанти, у рядках яких стоять найменші у цьому стовпчику числа. Таким чином, у даному прикладі оптимальним за Севіджем є третє управлінське рішення.

Сформулюємо критерій Севіджа в загальному випадку. Для матриці A розмірності $m \times n$ оптимальною вважається стратегія, для якої досягається

$$S = \min_i \max_j r_{ij},$$

де
$$r_{ij} = \max_i a_{ij} - a_{ij}.$$

Критерій Гурвіца

Якщо реалізується невелика кількість рішень, причому інформація про ймовірності станів економічного середовища відсутня, можна застосовувати критерій Гурвіца з врахуванням показника песимізму-оптимізму λ, $\lambda \in [0,1]$. При $\lambda = 1$ критерій Гурвіца співпадає з критерієм Вальда, а при $\lambda = 0$ - з критерієм «азартного гравця», який робить ставку на «щасливий випадок». Чіткої методики обрання λ немає. Якщо суб'єкт керування вважає середовище у рівній мірі як антагоністичним, так і сприятливим цілям управління, покладають $\lambda = \frac{1}{2}$.

Щоб знайти оптимальні за Гурвіцем рішення, у кожному i-ому рядку матриці A знаходять мінімальний f_i^1 та максимальний f_i^2 елементи і утворюють i-ий елемент f_i додаткового стовпчика матриці A за правилом :

$$f_i = \lambda f_i^1 + (1-\lambda) f_i^2,\ f_i^1 = \min_j a_{ij},\ f_i^2 = \max_j a_{ij},\ i=\overline{1,m}.$$

Обираються (як оптимальні) ті варіанти, яким відповідають найбільші елементи цього стовпчика.

Тобто, оптимальною за критерієм Гурвіца є чиста стратегія A_i, що знайдена з умови:

$$G = \max_i \left(\lambda \min_j a_{ij} + (1-\lambda) \max_j a_{ij} \right).$$

Приклад 2.5. Розглянемо гру 3×2 з наступною матрицею дохідності A (таблиця 2.5):

Таблиця 2.5

A_i \ Π_j	Π_1	Π_2
A_1	1	9
A_2	5	6
A_3	4	10

Маємо:

$$f_1 = \lambda + (1-\lambda)\cdot 9 = 9 - 8\lambda,$$
$$f_2 = 5\lambda + (1-\lambda)\cdot 6 = 6 - \lambda,$$
$$f_3 = 4\lambda + (1-\lambda)\cdot 10 = 10 - 6\lambda$$

(див. рис. 1) .

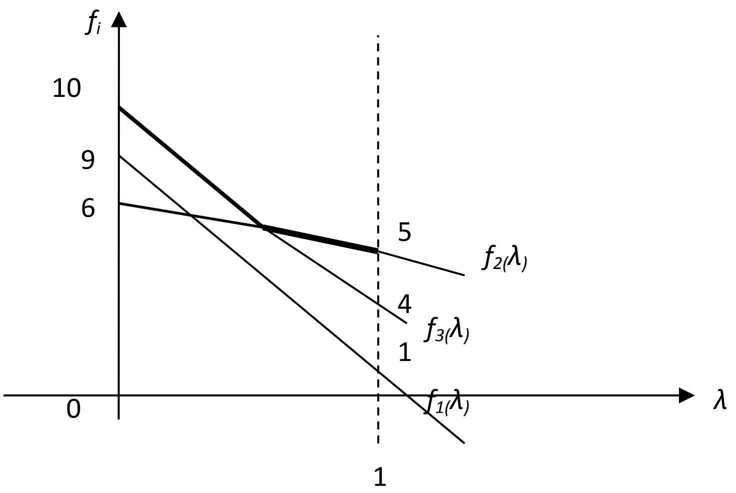

Рис. 1. Параметричні рішення за критерієм Гурвіца.

За критерієм Гурвіца оптимальними можуть бути рішення A_2 і A_3 , але, як випливає з рис. 1, ні за яких λ рішення A_1 не буде оптимальним. Зазначимо, що, знайшовши абсцису точки перетину другої та третьої прямої ($\lambda_0 = 0{,}8$), робимо висновок: при $\lambda \in \left[0;\ 0{,}8\right]$ оптимальним за Гурвіцем є рішення A_3, а при $\lambda \in \left[0{,}8;\ 1\right]$ - рішення A_2 (при $\lambda = 0{,}8$ рішення A_2 і A_3 співпадають).

На рис. 1 жирною лінією виділена ламана Гурвіца.

Існує спеціальне позначення щодо пріоритетності (придатності) рішень. Той факт, що рішення A_3 придатніше, ніж рішення A_1, позначають так: $A_3 \succ A_1$.

Приклад 2.6. Можливе будівництво чотирьох типів електростанцій: A_1 (теплових), A_2 (приплотинних), A_3 (безшлюзових) і A_4 (шлюзових). Ефективність кожного з типів залежить від різноманітних факторів: режиму рік, вартості палива та його перевезення і т. і. Припустимо, що виділено чотири різних стани, кожен з яких означає певне поєднання факторів: $П_1, П_2, П_3, П_4$. Економічна ефективність будівництва окремих типів електростанцій змінюється в залежності від станів природи і задається матрицею дохідності (таблиця 2.6).

Таблиця 2.6

A_i \ $П_j$	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$
A_1	5	2	8	4
A_2	2	3	4	12
A_3	8	5	3	10
A_4	1	4	2	8

Знайти оптимальні стратегії серед перелічених, використовуючи критерії Вальда, Севіджа, Гурвіца.

Розв'язання. Згідно з критерієм Вальда

$$W = \max_i \min_j a_{ij} = \max(2;2;3;1) = 3,$$

оптимальною є стратегія A_3, тобто передбачається будівництво безшлюзової ГЕС.

Скористаємось критерієм Севіджа. Побудуємо матрицю ризиків (таблиця 2.7):

Таблиця 2.7

A_i \ $П_j$	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	$\max_j r_{ij}$
A_1	3	3	0	8	8
A_2	6	2	4	0	6
A_3	0	0	5	2	5
A_4	7	1	6	4	7

Згідно з критерієм Севіджа

$$S = \min_i \max_j r_{ij},$$

де $r_{ij} = \max_i a_{ij} - a_{ij}$.

Маємо

$$S = \min_i(8;6;5;7) = 5.$$

Тобто оптимальною є теж стратегія A_3 .

Використаємо критерій Гурвіца. Візьмемо $\lambda = 0,5$. Для полегшення підрахунків в матриці A (з таблиці 2.6) додаємо три стовпця (таблиця 2.8).

Таблиця 2.8

A_i \ $П_j$	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	$\min\limits_j a_{ij}$	$\max\limits_j a_{ij}$	$\lambda \min\limits_j a_{ij} + (1-\lambda)\max\limits_j a_{ij}$
A_1	5	2	8	4	2	8	5
A_2	2	3	4	12	2	12	7
A_3	8	5	3	10	3	10	6,5
A_4	1	4	2	8	1	8	4,5

Оптимальною за критерієм Гурвіца є стратегія A_2 (будівництво приплотинної ГЕС):

$$G = \max_i \left(\lambda \min_j a_{ij} + (1-\lambda)\max_j a_{ij} \right) = \max(5;7;6,5;4,5) = 7 .$$

2.3. Задачі про прийняття рішень в умовах ризику, коли відомі ймовірності, з якими природа перебуває в кожному з можливих станів.

Критерії оптимальності, що використовуються в цих умовах:

– критерій Байєса,
– критерій Лапласа,
– критерій Гермейєра.

Критерій Байєса

Припустимо, що гравцю відомі не тільки стани $П_1$, $П_2$, …, $П_n$, в яких випадковим чином може знаходитись природа, але і ймовірності q_1, q_2, …, q_n настання цих станів, при цьому $\sum\limits_j q_j = 1$.

Матрицю виграшів гравця A і ймовірності станів природи $П$ можна представити у вигляді (таблиця 2.9):

Таблиця 2.9

A_i \ $П_j$	$П_1$	$П_2$	…	$П_n$
A_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}
…	…	…	…	…
A_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}
q_j	q_1	q_2	…	q_n

Чисту стратегію A_i можна визначити як випадкову величину (таблиця 2.10):

Таблиця 2.10

A_i	a_{i1}	a_{i2}	$\dots$	a_{in}
q	q_1	q_2	$\dots$	q_n

Математичне сподівання цієї величини

$$B_i = \sum_{j=1}^{n} q_j a_{ij}, \quad \overline{i = 1, m}.$$

За оптимальну приймається та стратегія A_i, при якій максимізується середній виграш статистика B_i, тобто забезпечується

$$B = \max_i B_i = \max_i \sum_{j=1}^{n} q_j a_{ij}.$$

Якщо елементи матриці A – це програші гравця, то серед середніх програшів треба, зрозуміло, вибирати найменший.

Приклад 2.7. Після кількох років експлуатації промислове обладнання може опинитися в одному із трьох станів:

1) потрібен незначний ремонт;
2) необхідно замінити окремі деталі;
3) потрібен капітальний ремонт.

Ймовірності цих станів дорівнюють відповідно: $q_1 = 0.2, q_2 = 0.5$, $q_3 = 0.3$. Керівник може прийняти одне з таких рішень: A_1 – здійснити ремонт своїми силами, що потребуватиме затрат 3, 7 чи 9 грошових одиниць в залежності від стану обладнання; A_2 – здійснити ремонт за допомогою спеціалістів-ремонтників, що потребуватиме затрат 9, 5 або 6 грошових одиниць; A_3 – замінити обладнання новим, на що буде витрачено 12, 10 або 8 грошових одиниць.

Використовуючи ігровий підхід, визначити рекомендації по оптимальному способу дій керівника.

Розв'язання. Керівник підприємства – це перший гравець, природа – другий. Під природою розуміємо комплекс зовнішніх умов, в яких обладнання функціонувало протягом кількох років. «Виграш» першого гравця – це затрати, пов'язані з реалізацією управлінських рішень (стратегій).

Проведемо дослідження за критеріям Байєса . Для зручності сформуємо таблицю 2.11.

Таблиця 2.11

A_i \ $П_j$	$П_1$	$П_2$	$П_3$
A_1	-3	-7	-9
A_2	-9	-5	-6
A_3	-12	-10	-8
q_j	0.2	0.5	0.3

Обчислимо B_i, $\overline{i=1,3}$ - відповідні математичні сподівання:

$$B_1 = -3\cdot 0.2 - 7\cdot 0.5 - 9\cdot 0.3 = -6.8,$$
$$B_2 = -9\cdot 0.2 - 5\cdot 0.5 - 6\cdot 0.3 = -6.1,$$
$$B_3 = -12\cdot 0.2 - 10\cdot 0.5 - 8\cdot 0.3 = -9.8.$$

Середній виграш досягає максимального значення у разі стратегії A_2:

$$\max_i B_i = \max(-6.8; -6.1; -9.8) = -6.1$$

Отже, оптимальним, згідно з критерієм Байєса, буде друге управлінське рішення.

Критерій Лапласа (Бернуллі-Лапласа)

Це окремий випадок критерію Байєса, коли стани природи уявляються статистику рівноймовірними, тобто $q_1 = 1/n$, $q_2 = 1/n$, …, $q_n = 1/n$. Тоді середні виграші для кожної стратегії перетворюються на середні арифметичні по відповідних рядках матриці дохідності:

$$L_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}, \quad \overline{i=1,m}.$$

Цей критерій ще називають принципом недостатнього обґрунтування Лапласа. За оптимальну приймається та стратегія A_i , при якій максимізується середній виграш статистика L_i , тобто забезпечується

$$L = \max_i L_i = \max_i \left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \right).$$

Приклад 2.8. Магазин може завезти в різних пропорціях товари трьох типів. Їх реалізація і прибуток залежать від виду товару і попиту на нього. Попит має три стани – і не прогнозується. Керівництво магазину вважає ці стани рівноймовірними. Матриця дохідності має вигляд (таблиця 2.12):

Таблиця 2.12

A_i \ $П_j$	$П_1$	$П_2$	$П_3$
A_1	20	15	10
A_2	16	12	14
A_3	13	18	15

Знайти оптимальну стратегію поведінки за критерієм Лапласа.

Розв‘язання. Знаходимо середні арифметичні по кожному рядку матриці дохідності:

$$L_1 = \frac{1}{3}(20+15+10) = 15,\ L_2 = \frac{1}{3}(16+12+14) = 14,\ L_3 = \frac{1}{3}(13+18+15) = 15.33.$$

Маємо

$$L = \max_i L_i = \max(15,\ 14,\ 15.33) = 15.33,$$

тобто оптимальною є третя стратегія A_3 , треба завозити товар третього типу.

Критерій Гермейєра

Припустимо, що відомі ймовірності станів природи $q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_n$. За критерієм Гермейєра ефективність чистих стратегій визначається наступним чином: вибравши чисту стратегію A_i , гравець може отримати виграш a_{ij} , якщо природа опиниться в стані $П_j$. Але природа може опинитись в цьому стані з ймовірністю q_j . Тому гравець може отри мати свій виграш a_{ij} тільки з ймовірністю q_j . У зв'язку з цим розглядається так званий елемент Гермейєра цього виграшу – $a_{ij} \cdot q_j$. Розглянемо наступну матрицю (таблиця 2.13).

Таблиця 2.13

A_i \ $П_j$	$П_1$	$П_2$	$\ldots$	$П_n$
A_1	$a_{11} \cdot q_1$	$a_{12} \cdot q_2$	$\ldots$	$a_{1n} \cdot q_n$
A_2	$a_{21} \cdot q_1$	$a_{22} \cdot q_2$	$\ldots$	$a_{2n} \cdot q_n$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
A_m	$a_{m1} \cdot q_1$	$a_{m2} \cdot q_2$	$\ldots$	$a_{mn} \cdot q_n$

Для кожної стратегії знаходимо найменший елемент:

$$G_i = \min a_{ij} \cdot q_j, \quad \overline{i = 1, m}.$$

Оптимальною вважається стратегія, на якій досягається максимум G_i:

$$G = \max_i G_i = \max_i \min_j a_{ij} \cdot q_j.$$

Критерій Гермейєра застосовують гравці, що не схильні до ризику, оскільки кожна стратегія оцінюється з точки зору мінімального гарантованого результату.

Приклад 2.9. Задана матриця дохідності (таблиця 2.14).

Таблиця 2.14

Тип товару	Попит		
	$П_1$	$П_2$	$П_3$
A_1	20	15	10
A_2	16	12	14
A_3	13	18	15

Знайти оптимальну стратегію за критерієм Гермейєра при ймовірностях станів природи $q_1 = 0.2, q_2 = 0.3, q_3 = 0.5$.

Розв'язання. Побудуємо матрицю Гермейєра з елементами $a_{ij} \cdot q_j$ (таблиця 2.15).

Таблиця 2.15

Тип товару	Попит		
	$П_1$	$П_2$	$П_3$
A_1	4	4,5	5
A_2	3,2	3,6	7
A_3	2,6	5,4	7,5

Знаходимо для кожної стратегії найменший елемент $G_i = \min a_{ij} \cdot q_j \quad \left(\overline{i = 1, 3}\right)$:

$$G_1 = \min(4; 4,5; 5) = 4,$$

$$G_2 = \min(3,2; 3,6; 7) = 3,2,$$

$$G_3 = \min(2,6; 5,4; 7,5) = 2,6\ .$$

Оптимальною є стратегія A_1, оскільки

$$G = \max_i G_i = \max(4; 3,2; 2,6) = 4.$$

Приклад 2.10 (*Задача про фруктового дилера*). Фруктовий дилер скуповує у селян малину по 15 $ за кошик і продає у місті по 25 $. Протягом кожного з 40 днів «малинового сезону» він продавав різну кількість кошиків. Це обумовлено випадковістю попиту на цей товар. Дилер помітив, що попит обсягом 4 кошики спостерігався 4 дні, 5 кошиків – 8 днів, 6 – 16 днів, 7 – 10, 8 – 2 дні.

Проблема , що виникла у дилера – це оптимальний (з позиції отримання прибутку) вибір кількості кошиків, які він повинен закуповувати щодня.

Побудувати математичну модель задачі і знайти оптимальне рішення.

Розв‘язання. Побудуємо матрицю дохідності.

В ролі стратегій дилера виступає кількість кошиків малини, які він може закупити у селян. Очевидно, що дилеру недоцільно закуповувати менше ніж чотири кошики і більше ніж вісім кошиків. Тобто, у нього 5 стратегій: A_1 – рішення закупити 4 кошики, A_2 – 5 кошиків, A_3 – 6, A_4 – 7 та A_5 – 8 кошиків.

В ролі станів природи виступає попит на малину, який неможливо точно передбачити. Варіантів попиту теж 5:
$П_1$ – попит на 4 кошики, $П_2$ – на 5 кошиків, $П_3$ – на 6, $П_4$ – на 7, $П_5$ – на 8 кошиків.

Підрахуємо тепер можливий прибуток для різних ситуацій. Якщо дилер закуповує 4 кошики малини, тобто використовує першу стратегію , то при будь-якому попиті він отримає прибуток 40 $, на кожному проданому кошику заробить 10 $. Якщо дилер придбав на один кошик більше, ніж продав, то на цій операції він втрачає 15 $, оскільки вередливий покупець не придбає «вчорашню» малину. Наприклад, при виборі стратегії A_4 і стані попиту $П_3$, дохід буде складати 45 $ – за 7 кошиків малини дилер заплатить селянам 105 $, а продасть лише 6 кошиків за 150 $. В ситуації (A_5, $П_1$) дилер понесе збитки (25*4-15*8=-20).

В даному випадку маємо типову задачу прийняття рішень в умовах невизначеності. За ймовірності станів природи можна використати відповідні відносні частоти настання цих випадкових подій:

$$q_1 = \frac{4}{40} = 0,1;\ q_2 = \frac{8}{40} = 0,2;\ q_3 = \frac{16}{40} = 0,4;$$

$$q_4 = \frac{10}{40} = 0,25;\ q_5 = \frac{2}{40} = 0,05.$$

Далі наведена матриця дохідності для цієї статистичної гри (таблиця 2.16).

Таблиця 2.16

A_i \ $П_j$	$П_1$	$П_2$	$П_2$	$П_2$	$П_2$
A_1	40	40	40	40	40
A_2	25	50	50	50	50
A_3	10	35	60	60	60
A_4	-5	20	45	70	70
A_5	-20	5	30	55	80
q_j	0,1	0,2	0,4	0,25	0,05

Знайдемо оптимальну стратегію за критерієм Байєса. Підрахуємо середні значення прибутку для кожної стратегії

$B_1 = 40$; $B_2 = 25 \cdot 0{,}1 + 50 \cdot 0{,}9 = 44{,}5$; $B_3 = 10 \cdot 0{,}1 + 35 \cdot 0{,}2 + 60 \cdot 0{,}7 = 50$;
$B_4 = (-5) \cdot 0{,}1 + 20 \cdot 0{,}2 + 45 \cdot 0{,}4 + 70 \cdot 0{,}3 = 42{,}5$;
$B_5 = (-20) \cdot 0{,}1 + 5 \cdot 0{,}2 + 30 \cdot 0{,}4 + 55 \cdot 0{,}25 + 80 \cdot 0{,}05 = 28{,}75.$

Оскільки $\max\limits_i B_i = \max(40; 47{,}5; 50; 42{,}5; 28{,}75) = 50$,

оптимальною є третя стратегія – закупка шести кошиків малини.

Тепер знайдемо оптимальну стратегію за критерієм Гермейєра. Побудуємо матрицю Гермейєра з елементами $a_{ij} \cdot q_j$ (таблиця 2.17).

Таблиця 2.17

A_i \ $П_j$	$П_1$	$П_2$	$П_2$	$П_2$	$П_2$
A_1	4	8	16	10	2
A_2	2,5	10	20	12,5	2,5
A_3	1	7	24	15	3
A_4	-0,5	4	18	17,5	3,5
A_5	-2	1	12	13,75	4

Знаходимо для кожної стратегії найменший елемент $G_i = \min a_{ij} \cdot q_j \quad \left(i = \overline{1,5}\right)$:

$$G_1 = \min(4;8;16;10;2) = 2,\ G_2 = \min(2{,}5;10;20;12{,}5;2{,}5) = 2{,}5,$$
$$G_3 = \min(1;7;24;15;3) = 1,\ \ G_4 = \min(-0{,}5;4;18;17{,}5;3{,}5) = -0{,}5,$$
$$G_5 = \min(-2;1;12;13{,}75;4) = -2.$$

Оптимальною є стратегія A_2, оскільки

$$G = \max(2; 2,5; 1; -0,5; -2) = 2,5.$$

Як бачимо, критерії Байєса і Гермейєра в якості оптимальних пропонують різні стратегії: A_3 та A_2. Так буває часто. Дослідник тепер сам може вибрати один із рекомендованих теорією підходів. При виборі стратегії A_3, яку рекомендує критерій Байєса, середній виграш дилера максимальний – 50 $. Критерій Гермейєра більш «обережний», пропонує менш ризиковану стратегію поведінки A_2, але середній виграш при цьому менший – 44,5 $.

2.4. Задачі прийняття багатоцільових рішень за умов невизначеності та конфлікту

Для успішного функціонування організації перед її керівництвом стоять різні цілі (економічні, соціальні), які можуть суперечити одна одній. Кількісними моделями цілей є критерії, причому не завжди одну ціль можна виразити одним критерієм. Реальні задачі найчастіше багатокритеріальні.

Знайти розв'язок, який був би найкращим за кількома критеріями одночасно, як правило, неможливо. Тому намагаються знайти множину недомінованих (Парето-оптимальних) розв'язків (Парето Альфредо (1848-1923) – італійський вчений, інженер за освітою).

Припустимо, що багатокритеріальна задача формулюється так:

$$Q_1(x_1, x_2) \to \max,\ \ Q_2(x_1, x_2) \to \max,\ X = (x_1, x_2).$$

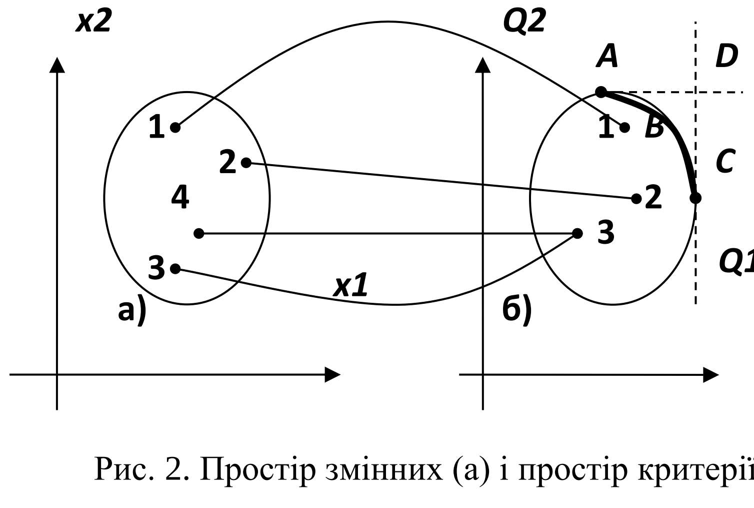

Рис. 2. Простір змінних (а) і простір критеріїв (б)

Розв'язки 1 і 2 не порівняльні, оскільки для розв'язку 1 Q_2 більше, ніж для розв'язку 2 (і, в той же час, Q_1 менше, ніж для розв'язку 2). З точки зору критерію Q_1 «кращим» є розв'язок 2, а з позиції критерію $Q2$ – 1. Розв'язки 3 і 4 ідентичні. Розв'язки, що належать множині ABC, не домінуються ніякими розв'язками зображеної області. Множина *ABC* називається **множиною Парето.**

Приклад 2.11. Побудувати множину Парето-оптимальних розв'язків, якщо критерії задані наступним чином:

$$Q_1(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2^2 \to \max,\ Q_2(x_1, x_2) = -x_1^2 + x_2 \to \max\ ,$$

а координати альтернатив у просторі *X* задані таблицею 2.18.

Таблиця 2.18

Координати альтернатив

№	1	2	3	4	5	6
x1	0	2	-1	5	4	-3
x2	1	-3	4	0	-1	5

Розв'язання. Розраховуємо значення *Q1* і *Q2* для кожної з шести альтернатив. Дані заносимо в таблицю 2.19. Виключаючи доміновані альтернативи, отримаємо множину Парето-оптимальних розв'язків.

Таблиця 2.19

Парето-оптимальні альтернативи

№	1	2	3	4	5	6
Q1	2	20	31	5	6	47
Q2	1	-7	3	-25	-17	-4
Парето-опт.альт.	-	-	+	-	-	+

Пояснимо вибір Парето-оптимальних альтернатив (останній рядок таблиці 2.19).

Альтернативи 1- 2 непорівняльні через те, що 2<20; 1>-7. Порівняємо між собою альтернативи 1 – 3: оскільки 3 домінує 1, виключаємо 1 (ставимо «-»). Порівняємо 2-3: оскільки 3 домінує 2, виключаємо 2 (ставимо «-» у стовпчику 2). Порівнюючи альтернативи 3-4, виключаємо 4 (ставимо «-» у стовпчику 4, оскільки 3 домінує 4). Аналогічно, порівнюючи альтернативи 3-5, з тієї ж причини виключаємо 5 (ставимо «-» у стовпчику 5). Альтернативи 3-6 непорівняльні (дійсно, 31<47, а 3>-4) . Таким чином, отримано <u>відповідь:</u> множину Парето-оптимальних альтернатив складають рішення з номерами 3 і 6.

При розв'язування багатокритеріальних задач часто використовують методи згортання кількох критеріїв , а також інші прийоми – метод "ідеальної точки", діалогові методи тощо.

Прийняття багатоцільових багатокритеріальних рішень характеризується трьома чинниками – методом нормалізації, співвідношеннями пріоритету, критерієм згортки.

Нормалізацію застосовують для переходу до порівняльних шкал у значеннях функціоналу оцінювання. Наприклад, при застосуванні природної нормалізації у кожному стовпчику k функціоналу оцінювання знаходять $\min_k f_k$, $\max_k f_k$ і переходять від елементів f_k^q до відповідних елементів

$$\frac{f_k{}^q - \min_k f_k}{\max_k f_k - \min_k f_k} \quad (k=1,2,\ldots,n;\ q=1,2,\ldots,m).$$

Функціонал F прийнято писати зі знаком плюс, якщо при прийнятті рішень ми орієнтуємось на його максимальне значення, і зі знаком мінус – якщо на мінімальне. Кажуть, що функціонал F має позитивний інгредієнт або негативний відповідно.

Так, наприклад, якщо елементи деякого стовпчика функціоналу оцінювання F^+ мають вигляд *colon(5; 10; 3; -1)*, то після природної нормалізації вони перетворюються у елементи виду

$$colon\left(\frac{5+1}{10+1};\frac{10+1}{10+1};\frac{3+1}{10+1};\frac{-1+1}{10+1}\right) = colon\left(\frac{6}{11};\ 1;\ \frac{4}{11};\ 0\right).$$

Таким чином, всі елементи по модулю не перевищують одиницю і, до того ж, вони втрачають розмірність.

Застосування **співвідношення пріоритету і лінійної згортки** проілюструємо на прикладі про множину Парето-оптимальних розв'язків, наведеному вище. Нехай критерій *Q1* має вагу 0,2, а критерій *Q2* – вагу 0,8.

Для першої альтернативи, згідно з даними таблиці 2.19, одержуємо: *Qзгортки* = 0,2·2+0,8·1=1,2 (згорткою є сумарна ефективність обох критеріїв *Q1* і *Q2* з врахуванням їх «ваг»). Аналогічно для другої альтернативи *Qзгортки* = - 1,6; для третьої – (8.6); для четвертої – (-19); для п'ятої – (-12,4) і для шостої – (6,2). У такій постановці «найкращим» є третє рішення. Дійсно,

$$max(1,2;\ -1,6;\ 8,6;\ -19;\ -12,4;\ 6,2)=8,6,$$

так що максимальний елемент посідає *третє* місце.

Розрізняють чотири типи задач прийняття багатокритеріальних рішень за умов ризику.

Перш ніж ми ознайомимось з цими задачами, коротко розглянемо прийняту в цій теорії класифікацію для різних інформаційних ситуацій, в яких приходиться приймати рішення, та введемо нові позначення для тих об’єктів, які ми вже розглядали раніше.

Ситуація прийняття рішень в умовах невизначеності та ризику характеризується матрицею *F*, елементи якої f_{ij} (i=1,2,…,m; j=1,2,…,n) є кількісними оцінками прийнятого рішення x_i за умови, що середовище знаходиться у стані θ_j:

$$F=\begin{pmatrix} & \theta_1 & \theta_2 & \dots & \theta_n \\ x_1 & f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} \\ x_2 & f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_m & f_{m1} & f_{m2} & \dots & f_{mn} \end{pmatrix}.$$

Тобто, символу F відповідає в попередніх позначеннях символ A, f_{ij} – a_{ij}, x_i – A_i, θ_j – Π_j.

Матрицю F називають функціоналом оцінювання.

Форма F^+ використовується для оптимізації категорій корисності, виграшу, ефективності, ймовірності досягнення результату. Для оптимізації збитків, ризику використовують функціонал оцінювання F з <u>негативним інгредієнтом</u> : $F = F^- = \{f_{ij}^-\}$; при цьому намагаються досягнути $\min\limits_{x_i}\{f_{ij}\}$
.

Глобальні характеристики рівнів невизначеності середовища наступні:

I_1 (перша інформаційна ситуація) – характеризується заданим розподілом апріорних ймовірностей станів економічного середовища $\theta_1,\theta_2,...,\theta_n$;

I_2 (друга інформаційна ситуація) – заданий розподіл ймовірностей містить невідомі параметри;

I_3 (третя інформаційна ситуація) – задана система лінійних співвідношень на компонентах апріорного розподілу станів середовища;

I_4 (четверта інформаційна ситуація) – розподіл ймовірностей станів середовища невідомий;

I_5 (п’ята інформаційна ситуація) – інтереси середовища антагоністичні по відношенню до суб’єкта прийняття рішення;

I_6 (шоста інформаційна ситуація) є проміжною між ситуаціями I_1-I_5.

При моделюванні ситуацій важливішою є не формальна (чисто обчислювальна), а саме творча складова: потрібно визначитися з множиною рішень, множиною станів економічного середовища, вибрати і формалізувати показники ефективності, сформувати функціонал оцінювання F, «прив'язати» його до певної інформаційної ситуації, вибрати один (чи декілька) критеріїв прийняття рішень, провести необхідні формальні обчислення і, нарешті, рекомендувати прийняти оптимальне рішення суб'єкту управління (керівнику).

Тепер по порядку розглянемо чотири типи задач прийняття багатокритеріальних рішень за умов ризику, про які згадувалось раніше.

Перша задача. Суб'єкт керування має кілька ситуацій прийняття рішень, що відрізняються між собою функціоналами оцінювання в заданій інформаційній ситуації *I*.

Необхідно визначити оптимальне рішення для всіх ситуацій прийняття рішень одночасно.

Приклад 2.12. Нехай, наприклад, $F=F^{+}$, причому F^1 та F^2 задані у вигляді таких матриць:

$$F^1 = \begin{pmatrix} & \theta_1 & \theta_2 \\ x_1 & 1 & 1 \\ x_2 & 2 & 2 \\ x_3 & 3 & 1 \\ x_4 & 0 & 3 \\ x_5 & 2 & 10 \\ x_6 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad F^2 = \begin{pmatrix} & \theta_1 & \theta_2 \\ x_1 & 2 & 1 \\ x_2 & 1 & 2 \\ x_3 & 3 & 1 \\ x_4 & 1 & 3 \\ x_5 & 5 & 0 \\ x_6 & 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

Визначена інформаційна ситуація $I= I_5$. Суб'єкт керування задає пріоритет з вагомими коефіцієнтами $u_1 = \frac{1}{3}$, $u_2 = \frac{2}{3}$. Використовуючи природну нормалізацію, лінійне врахування пріоритету, за допомогою критерію Вальда визначити оптимальне максимінне рішення.

Розв'язання. Використовуючи природну нормалізацію, для матриці F^1 маємо:

для стану середовища θ_1

$$\min_k f_k^1 = 0; \quad \max_k f_k^1 = 3; \quad \max_k f_k^1 - \min_k f_k^1 = 3;$$

для стану середовища θ_2

$$\min_k f_k^1 = 1; \quad \max_k f_k^1 = 10; \quad \max_k f_k^1 - \min_k f_k^1 = 9.$$

Аналогічно для матриці F^2 одержуємо:
для стану середовища θ_1

$$\min_k f_k^2 = 1; \quad \max_k f_k^2 = 7; \quad \max_k f_k^2 - \min_k f_k^2 = 6;$$

для стану середовища θ_2

$$\min_k f_k^2 = 0; \quad \max_k f_k^2 = 3; \quad \max_k f_k^2 - \min_k f_k^2 = 3.$$

Таким чином, F^1 набуває виду $\overline{F^1}$, а $F^2 - \overline{F^2}$:

$$\overline{F^1} = \begin{pmatrix} & \theta_1 & \theta_2 \\ x_1 & \frac{1}{3} & 0 \\ x_2 & \frac{2}{3} & \frac{1}{9} \\ x_3 & 1 & 0 \\ x_4 & 0 & \frac{2}{9} \\ x_5 & \frac{2}{3} & 1 \\ x_6 & \frac{1}{3} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}, \quad \overline{F^2} = \begin{pmatrix} & \theta_1 & \theta_2 \\ x_1 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ x_2 & 0 & \frac{2}{3} \\ x_3 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ x_4 & 0 & 1 \\ x_5 & \frac{2}{3} & 0 \\ x_6 & 1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Згідно з лінійним принципом врахування пріоритету, одержуємо:

$$\overline{\overline{F^1}} = \frac{1}{3}\overline{F^1}, \quad \overline{\overline{F^2}} = \frac{2}{3}\overline{F^2},$$

тобто

$$\overline{\overline{F^1}} = \begin{pmatrix} & \theta_1 & \theta_2 \\ x_1 & \frac{1}{9} & 0 \\ x_2 & \frac{2}{9} & \frac{1}{27} \\ x_3 & \frac{1}{3} & 0 \\ x_4 & 0 & \frac{2}{27} \\ x_5 & \frac{2}{9} & \frac{1}{3} \\ x_6 & \frac{1}{9} & \frac{4}{27} \end{pmatrix}, \quad \overline{\overline{F^2}} = \begin{pmatrix} & \theta_1 & \theta_2 \\ x_1 & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ x_2 & 0 & \frac{4}{9} \\ x_3 & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \\ x_4 & 0 & \frac{2}{3} \\ x_5 & \frac{4}{9} & 0 \\ x_6 & \frac{2}{3} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}.$$

Застосовуючи сумарну згортку $(F = \overline{\overline{F^1}} + \overline{\overline{F^2}})$, остаточно отримаємо функціонал F такого виду:

$$F = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} & \theta_1 & \theta_2 \\ x_1 & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \\ x_2 & \frac{2}{9} & \frac{13}{27} \\ x_3 & \frac{5}{9} & \frac{2}{9} \\ x_4 & 0 & \frac{20}{27} \\ x_5 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ x_6 & \frac{7}{9} & \frac{16}{27} \end{pmatrix}.$$

Згідно з критерієм Вальда, знаходимо мінімальні елементи по рядках F:

$$\min\left(\frac{2}{9};\ \frac{2}{9}\right) = \frac{2}{9};\ \min\left(\frac{2}{9};\ \frac{13}{27}\right) = \frac{2}{9};\ \min\left(\frac{5}{9};\ \frac{2}{9}\right) = \frac{2}{9};$$

$$\min\left(0;\ \frac{20}{27}\right) = 0;\ \min\left(\frac{2}{3};\ \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3};\ \min\left(\frac{7}{9};\ \frac{16}{27}\right) = \frac{16}{27}.$$

Максимальне з мінімальних значень – $\frac{16}{27}$. Таким чином, єдиним оптимальним максимінним рішенням є рішення $x^* = x_6$.

Друга задача. Нехай виконуються умови, сформульовані у першій задачі. Якщо застосовувати вибраний критерій прийняття рішень у кожній із ситуацій окремо, отримаємо другу задачу прийняття багатоцільових рішень за умов ризику.

Приклад 2.13. Нехай функціонали F^1 *і* F^2 такі ж самі, як у попередній задачі, причому має місце інформаційна ситуація I_5. Потрібно знайти оптимальний розв'язок другої задачі за критерієм гарантованого результату Вальда.

Розв'язання. Для кожного θ_j (j=1,2) шукаємо мінімальні значення (по рядках) відповідних елементів функціоналів F^1 *і* F^2.

Ситуація θ_1 : min (1;2) =1; min (2;1) =1; min (3;3) =3 ;
min (0;1) =0; min (2;5) =2; min (1;7) =1.

Ситуація θ_2 : min (1;1) =1; min (2;2) =2; min (1;1) =1 ;
min (3;3) =3; min (10;0) =0; min (5;2) =2.

Отримаємо функціонал оцінювання F^+*:*

$$F^+ = \begin{pmatrix} & \theta_1 & \theta_2 \\ x_1 & 1 & 1 \\ x_2 & 1 & 2 \\ x_3 & 3 & 1 \\ x_4 & 0 & 3 \\ x_5 & 2 & 0 \\ x_6 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Обираючи за критерій згортки *критерій гарантованого результату,* одержуємо:

min (1;1) =1; min (1;2) =1; min (3;1) =1; min (0;3) =0;

min (2;0) =0; min(1;2) =1

і, отже,

max (1; 1; 1; 0; 0; 1) = 1.

Маємо відповідь: оптимальними є рішення x_1, x_2, x_3, x_6.

Зауваження. Якщо за критерій згортки обрати критерій сумарної ефективності, будемо мати:

max (1+1; 1+2; 3+1; 0+3; 2+0; 1+2) =

=max (2; 3; 4; 3; 2; 3) = 4.

Тобто оптимальним є рішення x_3.

Якби ми користувалися критерієм *домінуючого результату* і обирали максимальний з максимальних елементів (по рядках), результат був би наступний:

max (1; 2; 3; 3; 2; 2) = 3,

і оптимальними були б рішення x_3 та x_4.

Третя задача. Нехай функціонал оцінювання F^+ один, а рішення приймається не за одним, а за кількома критеріями.

Приклад 2.14. Припустимо, що

$$F^+ = \begin{pmatrix} & \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 & \theta_4 \\ x_1 & 1 & 5 & 9 & 6 \\ x_2 & 2 & 1 & 0 & 7 \\ x_3 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ x_4 & 3 & 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

Відомі ймовірності станів економічного середовища:

$$p(\theta_1) = 0{,}1,\ p(\theta_2) = 0{,}3,\ p(\theta_3) = 0{,}4,\ p(\theta_4) = 0{,}2.$$

Орган керування вважає доцільним приймати рішення за двома критеріями:

а) за модальним критерієм (враховуючи найімовірніший стан середовища);

б) за критерієм Байєса.

Визначити, яке рішення є оптимальним.

Розв'язання. На основі функціоналу F^+ отримаємо функціонал $\overline{F^+}$ виду:

$$\overline{F^+} = \begin{pmatrix} & a) & б) \\ x_1 & 9 & 6{,}4 \\ x_2 & 0 & 1{,}9 \\ x_3 & 1 & 1{,}7 \\ x_4 & 1 & 2{,}9 \end{pmatrix}$$

Це дійсно так: елементи стовпчика а) є елементами того стовпчика матриці F^+, який відповідає найімовірнішому стану середовища (у даному прикладі – це елементи третього стовпчика). Елементи стовпчика б) – це відповідні математичні сподівання, розраховані по рядках: рішенню x_1 відповідає математичне сподівання

$$0{,}1 \cdot 1 + 0{,}3 \cdot 5 + 0{,}4 \cdot 9 + 0{,}2 \cdot 6 = 6{,}4,$$

і так далі.

Обираючи за критерій згортки критерій сумарної ефективності, приходимо до висновку, що оптимальним є рішення x_1.

Четверта задача. Нехай задано деякий функціонал оцінювання і виділено декілька інформаційних ситуацій. У кожній з них, згідно з одним певним критерієм, приймається рішення. Покажемо, як прийняти остаточне управлінське рішення, найбільш прийнятне за **всіма** критеріями, на такому прикладі.

Приклад 2.15. Функціонал F^+ заданий матрицею

$$F^{+} = \begin{pmatrix} & \theta_1 & \theta_2 \\ x_1 & 1 & 0 \\ x_2 & 3 & 1 \\ x_3 & 2 & 2 \\ x_4 & 2 & 3 \\ x_5 & 1 & 0 \\ x_6 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Економічне становище характеризується першою інформаційною ситуацією з ймовірностями станів $p(\theta_1) = \frac{1}{3}$, $p(\theta_2) = \frac{2}{3}$ та четвертою інформаційною ситуацією. Суб'єктом керування обрані для прийняття рішень

а) критерій Байєса в I_1;
б) критерій Бернуллі-Лапласа в I_4.

Обираючи за критерій згортки критерій домінуючого результату, визначити оптимальний розв'язок.

Розв'язання. Матриця F^+ трансформується в матрицю $\overline{F^+}$ виду:

$$\overline{F}^{+} = \begin{pmatrix} & a) & б) \\ x_1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ x_2 & \frac{5}{3} & 2 \\ x_3 & 2 & 2 \\ x_4 & \frac{8}{3} & \frac{5}{2} \\ x_5 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ x_6 & \frac{4}{3} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Дійсно, приймаючи рішення x_1 , у стовпчику а) отримаємо перший елемент (математичне сподівання)

$$\frac{1}{3}\cdot 1+\cdot\frac{2}{3}0=\frac{1}{3},$$

а у стовпчику б), згідно з критерієм Бернуллі-Лапласа, іншу його величину:

$$\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot 0=\frac{1}{2}.$$

Аналогічні розрахунки проводимо для $x_2, x_3, \ldots, x_6$.

Застосуємо критерій домінуючого результату. Знаходимо:

$$\max\left(\frac{1}{2};\ 2;\ 2;\ \frac{8}{3};\ \frac{1}{2};\ \frac{3}{2}\right)=\frac{8}{3}.$$

Відповідь: оптимальним є рішення x_4.

2.5. Запитання для самоконтролю

1. Які ігри називають статистичними?
2. Що розуміють під терміном «природа» в статистичних іграх?
3. Охарактеризувати специфіку спрощення платіжних матриць в статистичних іграх?
4. Охарактеризувати види задач в іграх з природою.
5. Які критерії використовують для прийняття рішень в умовах невизначеності?
6. Наслідком яких причин є невизначеність при прийнятті рішень?
7. На що орієнтує критерій Вальда особу, яка приймає рішення?
8. За яких обставин використовується критерій максиміну?
9. За яких обставин використовується критерій песимізму?
10. Як будується матриця ризиків в критерії Севіджа?
11. Які управлінські рішення є оптимальними за критерієм Севіджа?
12. Охарактеризувати критерій Гурвіца.
13. Що представляє собою ламана Гурвіца?
14. Які критерії оптимальності використовуються, коли відомі ймовірності станів природи?
15. Яка стратегія приймається за оптимальну в критерії Байєса?
16. Охарактеризувати критерій Лапласа.
17. Охарактеризувати критерій Гермейєра.
18. Що розуміють під Парето-оптимальними розв’язками в задачах прийняття багатоцільових рішень за умов невизначеності та конфлікту?
19. Охарактеризувати глобальні характеристики рівнів невизначеності середовища.

ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

1. В регіоні є дві конкуруючі фірми, що виготовляють взуття: фірма A та фірма B . Фірма A може виготовити в наступному році чотири нові моделі взуття: A_1, A_2, A_3 та A_4 . Конкурент B теж може виготовити чотири нові моделі взуття: B_1, B_2, B_3, B_4. Оскільки взуття аналогічне, то попит і відповідно прибуток кожної фірми від виробництва кожної моделі залежить від того, що виробляє конкурент. Оцінки прибутку фірми A (які з огляду на конкуренцію, пропорційні збиткам фірми B) наведені в таблиці (тис. грн.). Як раціональніше всього поводитись кожній фірмі, щоб отримати найбільший прибуток? Розв'язати задачу, використовуючи програмне забезпечення. Зробити аналіз розв'язку.

Варіант №1

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	70	30	20	50
A_2	60	50	40	80
A_3	20	60	80	60
A_4	50	70	30	50

Варіант №2

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	20	60	80	60
A_2	60	50	40	80
A_3	50	70	30	50
A_4	70	30	20	50

Варіант №3

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	30	50	70	20
A_2	50	80	60	40
A_3	60	60	20	80
A_4	70	50	50	30

Варіант №4

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	70	30	20	50
A_2	60	50	40	80
A_3	20	60	80	60
A_4	50	70	30	50

Варіант №5

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	80	40	30	60
A_2	70	60	50	90
A_3	30	70	90	70
A_4	60	80	40	60

Варіант №6

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	60	20	10	40
A_2	50	40	30	70
A_3	10	50	70	50
A_4	50	70	30	50

Варіант №7

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	90	50	40	70
A_2	80	70	60	90
A_3	40	80	90	80
A_4	70	90	50	70

Варіант №8

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	50	10	10	30
A_2	40	30	20	60
A_3	10	40	60	40
A_4	30	50	10	30

Варіант №9

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	80	40	30	60
A_2	70	60	50	90
A_3	30	70	90	70
A_4	60	80	40	60

Варіант №10

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	60	20	10	40
A_2	50	40	30	70
A_3	10	50	70	50
A_4	40	60	20	40

2. Деяка фірма вирішила побудувати готель в одному з курортних місць.

Необхідно визначити найбільш доцільну кількість місць або кімнат в цьому готелі і, взагалі, чи варто будувати готель в цьому місці.

Склали кошторис витрат при будівництві готелю з різною кількістю кімнат, а також розрахували очікуваний дохід в залежності від кімнат, що будуть зняті.

В залежності від прийнятого рішення – кількості кімнат в готелі *А* (20;30;40;50) і кількості знятих кімнат *П* (0;10;20;30;40;50), яка залежить від множини випадкових факторів і наперед фірмі невідома, отримали наступну таблицю щорічних прибутків (таблиця 2.20).

Таблиця 2.20

$A \backslash П$	0	10	20	30	40	50
20	-121	62+N	245	245	245	245
30	-168	14	198+N	380	380	380
40	-216	-33	150	332+N	515	515
50	-264	-81	101	284	468+N	650

N взяти рівним номеру студента в групі.

Для розв’язання задачі задіяти всі підходящі критерії.

3. Сільськогосподарське підприємство має можливість вирощувати картоплю на трьох ділянках: на ділянці підвищеної вологості A, середньої вологості B, сухій C. Врожайність картоплі залежить від погодних умов, зокрема від кількості опадів, що випадають протягом сезону. Якщо опадів випадає менше норми, то середня врожайність на ділянці A складає a_1 з 1 га, при кількості опадів близької до норми, a_2 ц з 1 га, якщо ж опадів випадає більше норми , a_3 ц з 1 га; на ділянці B – відповідно b_1, b_2 та b_3 ц з 1 га; на ділянці C – c_1, c_2, та c_3 ц з 1 га.

Використовуючи ігровий підхід, встановити, на якій ділянці треба вирощувати картоплю в наступному році, якщо за даними служби довгострокового прогнозування погоди, ймовірність опадів менше норми очікується рівною q_1 , близько до норми – q_2 , більше норми – q_3 .

Дані по варіантах наведені в таблиці 2.21.

Таблиця 2.21

№ варіанту	a_1	a_2	a_3	b_1	b_2	b_3
1	270	220	110	210	250	140
2	290	190	80	220	230	150
3	280	200	90	230	220	130
4	260	180	100	200	270	160
5	300	210	120	190	240	120
6	270	230	80	220	260	130
7	280	220	90	210	250	150
8	290	200	110	200	270	140
9	260	190	100	230	230	160
10	300	230	120	190	240	120

Продовження таблиці 2.21

№ варіанту	c_1	c_2	c_3	q_1	q_2	q_3
1	120	260	280	0,2	0,7	0,1
2	100	280	290	0,3	0,5	0,2
3	90	270	310	0,3	0,6	0,1
4	110	240	270	0,2	0,6	0,2
5	130	250	300	0,1	0,6	0,3
6	110	270	310	0,2	0,5	0,3
7	90	260	280	0,1	0,7	0,2
8	120	240	270	0,2	0,7	0,1
9	100	250	300	0,4	0,4	0,2
10	80	280	290	0,3	0,5	0,2

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛИТЕРАТУРИ

1. Вентцель Е. С. Исследование операций [Текст] / Е. С. Вентцель– М. : Советское радио, 1972. – 552 с.
2. Вентцель Е.С. Исследование операций: задачи, принципы, методология [Текст] / Е. С. Вентцель – М.: Дрофа, 2004. – 208 с.
3. Карагодова О. О., Кігель В. Р., Рожок В. Д. Дослідження операцій [Текст] / О. О. Карагодова, В. Р. Кігель, В. Д. Рожок – К.: Центр учбової літератури, 2007.– 256 с.
4. Кузнецов А. В., Сокович В. А., Холод Н. Н. и др. Под общей ред. А. В. Кузнецова. Сборник задач и упражнений по высшей математике. Математическое программирование [Текст] / А. В. Кузнецов, В. А. Сокович, Н. Н. Холод и др.– Минск : Вышейшая школа, 1995.– 447 с.
5. Диксит А. К., Нейлбафф Б. Дж. Стратегические игры. Доступный учебник по теории игр [Текст] / А. К. Диксит, Б. Дж. Нейлбафф – Изд. Манн, Иванов и Фербер, 2017.– 880 с.
6. Заїкіна В. В. Елементи математичного програмування і дослідження операцій: Навчальний посібник [Текст] / В. В. Заїкіна: – Хмельницький, 2011. – 274 с.

Навчальне видання

Послайко Надія Іванівна

ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ.

ЗАДАЧІ З УМОВАМИ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ ТА КОНФЛІКТУ

Навчальний посібник

Редактор Міщенко А.А.
Комп'ютерна верстка Гаюн Т.В.

Видавництво ПФ «Стандарт - Сервіс»
Свідоцтво ДК № 3197 від 28.05.2008р.
с.м.т. Ювілейне, вул. Радгоспна, буд.68/65, Дніпропетровський район,
Дніпропетровська обл.,Україна.

Надруковано:
Видавництво ПФ «Стандарт - Сервіс»
Здано до друку 02.07.19р. Формат 29,7 х 42. Папір офсетний.
Різографічний друк. Умов. рук. арк. 3,00. Наклад 100 прим.
Заказ № 5 від 05.07.19р.