

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ АВТОМАТОВ К ДИНАМИЧЕСКОМУ РАСЧЕТУ СЕТОК И МЕМБРАН

Досліджено можливості застосування скінченних автоматів та асоційованих матриць до розрахунку коливань сіток і мембран з безперервним розподіленням мас та різноманітними граничними умовами.

Исследованы возможности применения конечных автоматов и ассоциированных матриц к расчету колебаний сеток и мембран с непрерывным распределением масс и различными граничными условиями.

The possibilities of application of the terminal automatic devices and associated matrices to modeling the grid and membrane vibrations with continuous mass distribution and different boundary conditions are examined.

Сетка представляется системой пересекающихся стержней (струн) с пренебрежительно малой жесткостью на изгиб и находится в одной плоскости xu под действием равномерного натяжения на контуре [1]. Оси стержней одного направления параллельны между собой и расположены, в общем случае, на различных расстояниях друг от друга. Условия закрепления концевых сечений также могут быть различными. Каждая струна состоит из кусочно-непрерывных участков длиной l_k ($k = 1, 2, \dots, p$), погонной массой μ_k и растянута осевым усилием N_k . Предполагается, что натяжение струн достаточно велико, что позволяет пренебречь его изменениями, вызванными малыми прогибами при колебаниях. В этом случае можно использовать решения для систем пересекающихся балок, полученные автором с помощью графов и автоматов в работе [2].

Предварительно рассматривается структура частотного уравнения для универсальной, по отношению к общей расчетной схеме, типовой j -й подсистемы с различным количеством «входов-выходов», которые характеризуют состояния крайних и промежуточных подсистем. Затем, используя принцип ортогональности, составляется уравнение для всей системы. Так, для изгибных колебаний сетки в направлении оси z уравнение частот имеет вид

$$V(G_{z1}) \prod_{j=2}^{m-2} \Phi_{zj} \tilde{V}(G_{zm-1}) = 0, \quad (1)$$

где $V(G_{z1})$ – одномерная матрица (матрица-строка) с характеристиками стержней первой ($j = 1$) подсистемы; Φ_{zj} – двумерная матрица второго порядка, характеризующая состояния промежуточных подсистем ($j = 2, 3, \dots, m - 2$);

$\tilde{V}(G_{zm-1})$ – матрица-столбец с характеристиками стержней подсистемы $m - 1$.

Для формирования матриц каждой из подсистем удобно пользоваться кодированной ассоциированной матрицей участка струны, которая содержит совокупность значений всех выходов автомата A . Входные последовательности всех значений булевых функций начальных (НП) и конечных (КП) граничных параметров струны могут быть реализованы на множестве $\{0, 1\}$. Поэтому возможные состояния струны, определяемые комбинациями граничных условий из одного фиксированного и произвольного НП, КП (всего 4 состояния), будут характеризоваться частотными определителями из миноров 1-го порядка матрицы влияния начальных параметров B_{ik} [3, 4], построенной по технической теории изгибных колебаний. Располагая элементы матрицы B_{ik} в соответствии с входными параметрами $\{u_z, q_z\}$ и кодами НП/КП, обозначив частотный параметр $\lambda_{zk}^2 = \mu_k \omega_i^2 l_k^2 / N_k$, получим ассоциированную матрицу M_{zk}

$$M_{zk} = \begin{array}{c|cc} & \begin{array}{c} \text{КП} \\ \text{НП} \end{array} & \\ \hline \begin{array}{c} \text{НП} \\ \text{КП} \end{array} & \begin{array}{cc} 01 & 10 \\ \hline \cos \lambda_{zk} & -\frac{\lambda_{zk}}{l_k} \sin \lambda_{zk} \\ \hline l_k \sin \lambda_{zk} & \cos \lambda_{zk} \end{array} \end{array}. \quad (2)$$

Если в k -м сечении струны расположены дискретная упругая опора относительно вертикальных перемещений в плоскости xz жесткостью c_k , а также сосредоточенный груз массой m_k , то выражение для ассоциированной матрицы Y_{zk} примет вид:

$$Y_{zk} = \begin{array}{c|cc|cc} & \text{КП} & & & & \\ \text{НП} & & 01 & | & 10 & \\ \hline 10 & & \cos \lambda_{zk} + \frac{\tilde{c}_k l_k}{\lambda_{zk}} \sin \lambda_{zk} & | & -\frac{\lambda_{zk}}{l_k} \sin \lambda_{zk} + \tilde{c}_k \cos \lambda_{zk} & \\ \hline 01 & & \frac{l_k}{\lambda_{zk}} \sin \lambda_{zk} & | & \cos \lambda_{zk} & \\ \hline \end{array} \quad (3)$$

или в сокращенной форме с учетом принятых ранее обозначений [5]

$$Y_{zk} = M_{zk} + \tilde{c}_k M_{01}^{(1)}, \quad (4)$$

где $\tilde{c}_k = c_k - m_k \omega_i^2$.

Матрицу упругой связи I_{ck} получим из матрицы Y_{zk} , если принять $l_k \rightarrow 0$. Т.к. рассматриваемое сечение находится слева от упругой связи, то матрицу Y_{zk} k -го участка струны с непрерывно-дискретными параметрами можно также представить в следующем виде:

$$I_{ck} = \begin{array}{c|c} 1 & \tilde{c}_k \\ \hline 0 & 1 \end{array}; \quad Y_{zk} = I_{ck} M_{zk}. \quad (5)$$

Рассмотрим простой пример для свободных изгибных колебаний из плоскости xu двух опертых по концам струн постоянного сечения, пересекающихся в центрах пролетов. Используем основные соотношения, полученные в работе [6] для совместных колебаний двумерных стержневых систем. В этом случае $i = j = 1$; $n = m = 2$; $l_{s1} = l_{s2} = l_s$; $\mu_{s1} = \mu_{s2} = \mu_s$; $\lambda_{zs1} = \lambda_{zs2} = \lambda_{zs}$; $s = 1, 2$ для струн, расположенных соответственно вдоль осей x, y .

Следуя [6], данная система представляется в виде связного графа G_z , а также подграфов 1G_z и 2G_z , получающихся в результате рассеивания связей между параметрами u_{z1}, u_{z2} и q_{z1}, q_{z2} . Состояния I, II подграфов ${}^1G_z, {}^2G_z$ показаны на рис. 1, а, б.

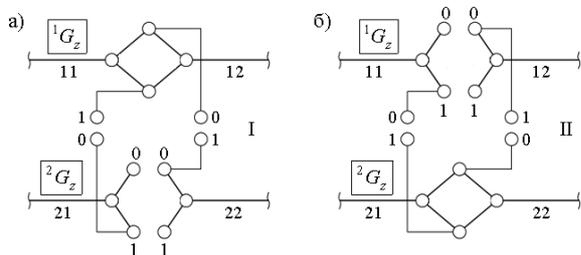


Рис. 1. Состояния подграфов ${}^1G_z, {}^2G_z$

Значения характеристических функций автомата определим с помощью таблицы переходов (табл. 1), в которой сопрягаемые параметры обозначены одинаковыми буквенными символами.

Таблица переходов A_z

		s_v							
		I				II			
x_v		11	12	21	22	11	12	21	22
		НП	К	0	a	0	0	0	0
С	1		b	1	1	1	1	1	d
КП	К	a	0	0	0	0	0	c	0
	С	b	1	1	1	1	1	d	1

Уравнение частот в данном случае представляется в форме ортогональности двух векторов с характеристиками участков 11, 12, 21, 22

$$V({}^1G_z) \tilde{V}({}^2G_z) = 0, \quad (6)$$

где

$$V({}^1G_z) = \|v_{11} v_{12} \quad v'_{11} v'_{12}\|; \quad \tilde{V}({}^2G_z) = \left\| \begin{array}{c} v_{21} v_{22} \\ v'_{21} v'_{22} \end{array} \right\|. \quad (7)$$

Далее, используя алгоритм [6] для нахождения характеристических функций f_z из матрицы M_{zk} (2) в соответствии с кодами НП, КП участков системы для каждого из состояний подграфов ${}^1G_z, {}^2G_z$ (табл. 1), несложно определить значения элементов векторов, входящих в (7). К примеру, для $v_{11}, v_{12}, v_{21}, v_{22}$ можно записать:

$$v_{11} = \left\| \begin{array}{c} l_1 \sin \lambda_{z1} \quad \cos \lambda_{z1} \\ \lambda_{z1} \end{array} \right\|;$$

$$v_{12} = \left\{ \cos \lambda_{z1} \quad \frac{l_1 \sin \lambda_{z1}}{\lambda_{z1}} \right\};$$

$$v_{21} = v_{22} = \frac{l_2 \sin \lambda_{z2}}{\lambda_{z2}}. \quad (8)$$

Выражения для $v'_{11}, v'_{12}, v'_{21}, v'_{22}$ определяются совершенно аналогично. Подставляя в (7) значения (8), после преобразований приходим к уравнению

$$\operatorname{tg} \lambda_{z1} + \sqrt{\frac{\mu_1 N_2}{\mu_2 N_1}} \operatorname{tg} \lambda_{z2} = 0. \quad (9)$$

Нахождение решений для других сочетаний граничных условий закрепления струн не представляет затруднений и сводится лишь к выборке соответствующих кодам НП и КП участков элементов строк или столбцов матрицы M_{zk} .

Для сетки с бесконечно малыми размерами ячеек, т.е. при $l_1, l_2 \rightarrow 0$ и $n, m \rightarrow \infty$ осуществляется предельный переход к прямоугольной мембране. Наиболее простое решение получаем

ется для мембраны с неподвижным закреплением ее по контуру. Для этого достаточно воспользоваться решением для пересекающихся балок на сплошном упругом основании с учетом действия статических продольных сил в балках обоих направлений [7].

Топологическая модель круговой мембраны с кусочно-непрерывными p участками, в пределах которых интенсивность массы μ_k ($k=1, 2, \dots, p$) считается постоянной, представлена на рис. 2.

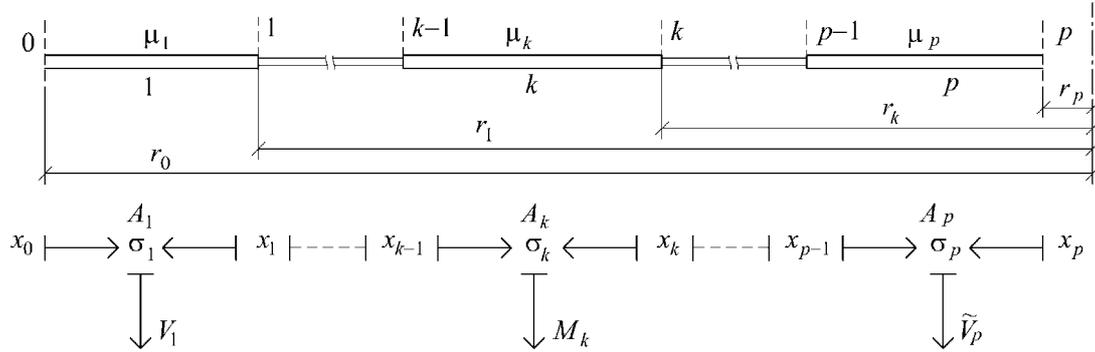


Рис. 2. Топологическая модель круговой мембраны

Воспользуемся переходной матрицей [3], полученной методом начальных параметров для k -го кольцевого участка, ограниченного окружностями с радиусами r_k, r_{k-1} . Соответствующая кодированная ассоциированная матрица R_k может быть представлена в следующей форме

$$R_k = \begin{array}{c|cc} & \begin{array}{c} \text{КП} \\ \text{НП} \end{array} & \begin{array}{c} 01 \\ 10 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} 10 \\ 01 \end{array} & \begin{array}{cc} a_{11} & \alpha \lambda_k a_{12} \\ \frac{1}{\alpha \lambda_k} a_{21} & a_{22} \end{array} & \beta \end{array} \quad (10)$$

$$\text{где } \lambda_k^2 = \frac{\mu_k \omega^2 r_k^2}{N}; \quad \alpha = \frac{N}{r_k}; \quad \beta = \frac{\pi \lambda_{k-1}}{2}.$$

В состав элементов матрицы R_k входят также цилиндрические функции (функции Бесселя) первого и второго рода $J_n(\lambda), Y_n(\lambda)$ порядка n [3, 8]

$$\left. \begin{array}{l} a_{11} = Y'_n(\lambda_{k-1})J_n(\lambda_k) - J'_n(\lambda_{k-1})Y_n(\lambda_k); \\ a_{12} = J'_n(\lambda_{k-1})Y'_n(\lambda_k) - Y'_n(\lambda_{k-1})J'_n(\lambda_k); \\ a_{21} = Y_n(\lambda_{k-1})J_n(\lambda_k) - J_n(\lambda_{k-1})Y_n(\lambda_k); \\ a_{22} = J_n(\lambda_{k-1})Y'_n(\lambda_k) - Y_n(\lambda_{k-1})J'_n(\lambda_k). \end{array} \right\} \quad (11)$$

Если в k -м круговом сечении мембраны по окружности радиуса r_k расположены упругие опоры жесткостью c_k , а также равномерно распределенная масса интенсивностью m_k , то, как и в предыдущем случае, выражение для ассоциированной матрицы Z_k можно представить в форме:

$$Z_k = R_k + (c_k - m_k \omega_i^2) R_{01}^{(1)}, \quad (12)$$

или, по аналогии с (5), структура матрицы Z_k с учетом матрицы упругой связи I'_k примет вид

$$Z_k = I'_k R_k; \quad I'_k = \begin{vmatrix} 1 & c_k - m_k \omega_i^2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (13)$$

Выражения (10)–(13) дают возможность в простой форме получить уравнения частот для поперечных колебаний мембраны со ступенчатым изменением толщины и плотности, различными граничными условиями, дополнительными упругими связями и сосредоточенными включениями в интенсивность массы.

В результате разбиения множества состояний автомата A на p частей получим набор подмножеств состояний π , характеризуемых матрицами выходов $V_1, R_2, \dots, R_{p-1}, \tilde{V}_p$. В этом случае уравнение частот представляется в ортогональной форме и выражает основную теорему декомпозиции [9] в виде суммы произведений характеристических функций f_{zk} каждого подавтомата A_k при каждом возможном состоянии s_v в момент времени t_v :

$$\prod_{k=1}^p \pi_k = 0; \quad \sum_{v=1}^s \left(\prod_{k=1}^p f_{zk} \right) = 0. \quad (14)$$

Для регулярных и квазирегулярных систем уравнение частот преобразуется к виду:

$$V_1 R_k^{p-2} \tilde{V}_p = 0, \quad (15)$$

где векторы V_1 и \tilde{V}_p характеризуют условия закрепления мембраны по ее внутреннему и наружному контурам и соответствуют строкам или столбцам матрицы (10).

Для описания колебаний регулярных сеток и мембран следует использовать эквивалентные автоматы, а также их минимальные (сокращенные) формы [10], что упрощает расчет, делая его также минимальным.

Топологическая модель системы для определения форм собственных колебаний по сравнению с моделью, принятой для построения частотных уравнений, остается без изменений. Решение включает обращение матриц, в которых исключены одна строка и один столбец, при условии, что одна из искомым компонент вектора НП принимается равной единице. Это дает значительную экономию времени по нахождению остальных $n-1$ неизвестных начальных параметров и позволяет выполнять решение задачи о формах собственных колебаний по принципу алгоритма на основе представлений системы в виде графов и автоматов.

Для расчета установившихся вынужденных колебаний сеток и мембран возможно также использовать топологическую информацию о системе и соответствующие методы конечно-автоматного моделирования [11]. Графы, изоморфные данной системе, совершающей свободные и вынужденные колебания, будут идентичны. Вершины, которые представляли бы прилагаемые нагрузки, не связаны с топологической структурой графа и в самом графе не отражены. Различными являются лишь состояния граничных параметров и топологические коды графа G . Решение задачи Коши дополняется вектором P_k внешнего гармонического возмущения.

Совокупность значений всех выходов z_v автомата A определяется выходами его подавтоматов, представленными ассоциированными матрицами $V_1, M_2, \dots, M_{p-1}, \tilde{V}_p$, описывающими свободные колебания системы, и ассоциированными матрицами $W_1, T_2, \dots, T_{p-1}, \tilde{W}_p$, учитывающими воздействие внешних сил. Неизвестные начальные параметры x_k вычисляются по правилу Крамера в виде отношения определителей D_{zk} и D_z , равных последовательному произведению соответствующих ассоциированных матриц каждого из p участков системы

$$x_k = \frac{D_{zk}}{D_z}; \quad D_{zk} = W_1 \prod_{k=2}^{p-1} T_k \tilde{W}_p;$$

$$D_z = V_1 \prod_{k=2}^{p-1} M_k \tilde{V}_p. \quad (16)$$

Алгоритм динамического расчета сеток и мембран при гармоническом возбуждении колебаний включает этапы декомпозиции систе-

мы на подсистемы, построения графа системы с отнесением вершин к зависимым, независимым и нулевым граничным параметрам, составления таблицы переходов состояний конечного автомата, определения функций предикатов, формирования матричного выражения определителей D_z и D_{zk} , нахождения неизвестных начальных параметров подсистем.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Расчет сооружений на импульсные воздействия [Текст] / под ред. И. М. Рабиновича. - М.: Стройиздат, 1970. - 304 с.
2. Распопов, А. С. Расчет многокомпонентных стержневых систем методом декомпозиции [Текст] / А. С. Распопов // Вісник Дніпропетр. нац. ун-ту заліз. трансп. ім. акад. В. Лазаряна. - 2008. - Вип. 25. - Д.: Вид-во ДНУЗТ, 2008. - С. 105-109.
3. Ивович, В. А. Переходные матрицы в динамике упругих систем [Текст] : справочник / В. А. Ивович. - М.: Машиностроение, 1981. - 183 с.
4. Распопов, А. С. Конечно-автоматное моделирование пространственных колебаний стержневых и балочных конструкций [Текст] / А. С. Распопов // Вісник Дніпропетр. нац. ун-ту заліз. трансп. ім. акад. В. Лазаряна. - 2007. - Вип. 19. - Д.: Вид-во ДНУЗТ, 2007. - С. 125-133.
5. Распопов, А. С. Колебания регулярных балочных конструкций с непрерывно-дискретными параметрами [Текст] / А. С. Распопов, О. О. Рубан, С. А. Чернышенко // Техн. механіка. - 2008. - № 1. - С. 131-139.
6. Распопов, А. С. Применение топологических методов к расчету пространственных колебаний двух- и трехмерных стержневых систем [Текст] / А. С. Распопов // Вісник Дніпропетр. нац. ун-ту заліз. трансп. ім. акад. В. Лазаряна. - 2008. - Вип. 22. - Д.: Вид-во ДНУЗТ, 2008. - С. 117-124.
7. Распопов, А. С. К расчету поперечных колебаний пересекающихся балок с распределенными параметрами [Текст] / А. С. Распопов // Вопр. динамики мостов и теор. колебаний: Межвуз. сб. науч. тр. ДИИТа. - 1993. - С. 90-94.
8. Корн, Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров [Текст] / Г. Корн, Т. Корн. - М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1968. - 720 с.
9. Кунцманн, Й. Булева алгебра и конечные автоматы [Текст] / Й. Кунцманн, П. Наслин. - М.: Мир, 1969. - 294 с.
10. Гилл, А. Введение в теорию конечных автоматов [Текст] / А. Гилл. - М.: Наука, 1966. - 272 с.
11. Распопов, О. С. Особливості моделювання вимушених коливань нерозрізних конструкцій в системі скінченних автоматів [Текст] / О. С. Распопов // Дороги і мости : зб. наук. пр. - К.: ДерждорНДІ. - 2008. - Вип. 8. - С. 229-236.

Поступила в редколлегию 19.01.2010.
Принята к печати 22.01.2010.