

А.И.Маневич, С.В.Ракша

НЕЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА УСТОЙЧИВОСТИ СЖАТЫХ ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ
ТРАПЕЦИЕВИДНОГО СЕЧЕНИЯ С УЧЕТОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ФОРМ

При проектировании сжатых тонкостенных стержней, в частности, прямоугольного или трапециевидного сечения, обычно стремятся обеспечить равноустойчивость по общей (эйлеровой) и местной фор —

мам потери устойчивости (рис. I). Экспериментальные исследования показывают, что для таких стоек, близких к равноустойчивым, критическая (предельная) нагрузка на 25 – 30 % ниже расчетного значения по линейной теории [1]. Тот факт, что наибольшие расхождения отмечаются именно для равноустойчивых конструкций, позволяет предположить, что основной причиной снижения предельной нагрузки является взаимодействие форм общего и местного выпучивания.

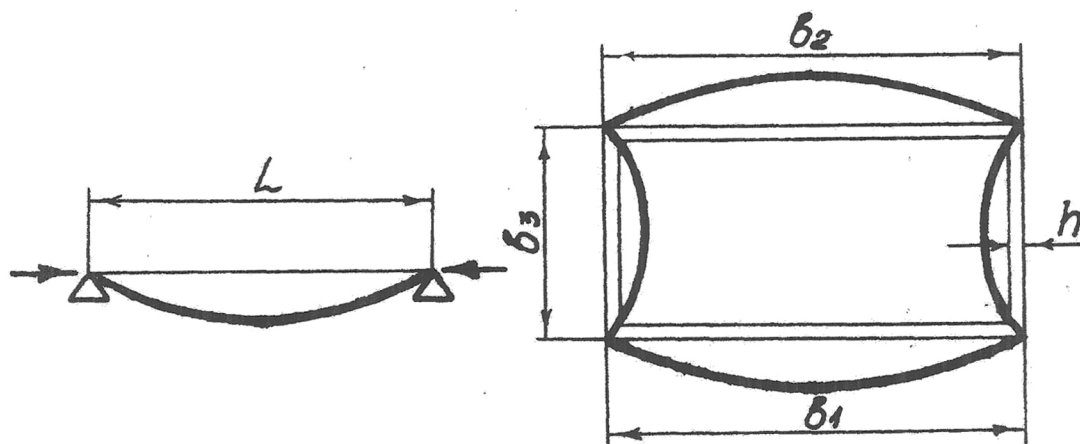


Рис. I. Общая (а) и местная (б) формы выпучивания

Однако при решении задачи о связанном выпучивании стержней полого прямоугольного сечения возникают трудности, обусловленные тем, что кубические члены в энергии, отражающие взаимодействие общей формы с каждой из местных форм (в первом нелинейном приближении), обращаются в нуль (вследствие двойной симметрии сечения). Для описания взаимодействия общей и местных форм приходится учитывать члены четвертой степени в энергии и строить второе приближение, но здесь также возникает принципиальная трудность – задача определения смешанной формы второго порядка оказывается плохо обусловленной вследствие густоты спектра собственных значений для коротковолновых местных форм.

В [2] было предложено учитывать, наряду с "первичной" местной формой, так называемую "вторичную" местную форму, имеющую ту же длину волны, но другой профиль (и другой характер симметрии). Наложение этой формы на первичную позволяет учесть изменение местного волнообразования, обусловленное общим прогибом. Возникающая при этом наложении несимметричность местного прогиба приводит к появлению кубического члена в энергии. При этом отпадает необ-

ходимость расчета смешанной формы второго порядка, так как последняя, как показано в [3], по существу совпадает с вторичной формой. В данной работе в указанной постановке рассмотрена задача о потере устойчивости центрально-сжатого полого стержня трапециевидного и прямоугольного сечения. Основное внимание уделено вопросу о роли вторичной местной формы и оценке параметров сечения, при которых учет этой формы необходим.

Первый этап исследования состоит в решении линейной задачи устойчивости стержня. При расчете общей формы использовалась схема эйлеровой стойки (на краях принимались условия шарнирного опирания). При расчете местных форм стержень рассматривался как сочленение пластин и строилось точное решение задачи при выполнении на линиях контакта пластин условий кинематического и силового сопряжения (при равенстве нулю перемещений линии контакта). Использование матричной формы решения позволяет получить в достаточно простом виде характеристическое уравнение и построить собственные формы. Определялось число полуволн m по длине, для которого критическое напряжение было минимальным, для указанных m вычислялось несколько следующих корней трансцендентного характеристического уравнения и строились соответствующие моды (собственные формы).

На рисунке 2 приведены первая и вторичная местные формы (соответствующие двум первым корням) для стержня трапециевидного сечения и указаны безразмерные критические напряжения $\sigma^{*(i)} = (\sigma^{(i)} / E) \cdot 10^3$ для этих форм (i — номер моды).

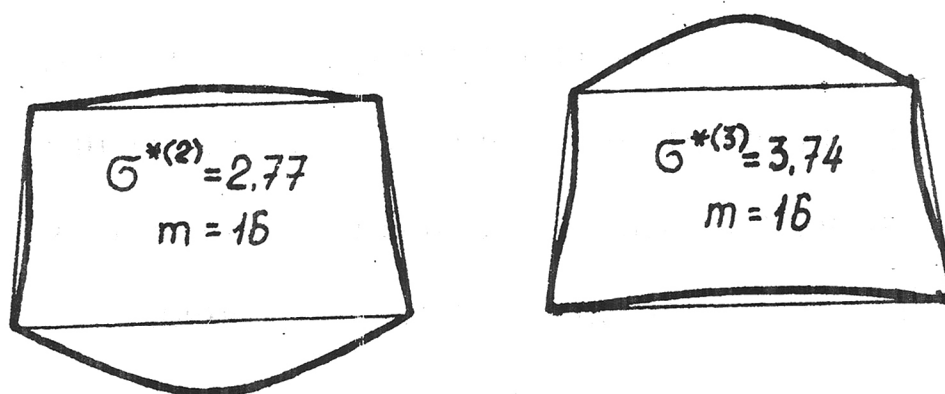


Рис. 2. Первая (а) и вторичная (б) местные формы стержня с параметрами $b_1/L = 0,08$, $b_2/b_1 = 0,875$, $t_1/b_1 = 0,02375$

При решении нелинейной задачи устойчивости поле перемещений U для каждой из пластин, составляющих сечение, представляется в виде наложения общей и указанных двух местных форм

$$U = \zeta_1 U_1 + \zeta_2 U_2 + \zeta_3 U_3, \quad (I)$$

где $U_i = (u_i, v_i, w_i)$ — i -я собственная форма ($i = 1$ соответствует общей форме, $i = 2$ — местной форме с минимальным критическим напряжением (первой местной форме), $i = 3$ — вторичной местной форме). Собственные формы нормировались условием равенства максимального прогиба наибольшей из толщин пластин, составляющих стержень. Как показано в общей асимптотической теории устойчивости [4], представление конечного прогиба в виде линейной комбинации мод с критическими напряжениями, близкими к минимальному (типа (I)), является достаточным при решении задачи в первом нелинейном приближении (учет "поправок" к указанным модам влияет лишь на неучитываемые члены четвертой степени в энергии).

Начальные несовершенства U^* задавались в форме, аналогичной (I), $U^* = \sum_{i=1}^3 \zeta_i^* U_i$, где ζ_i^* — амплитуда начальной погиби по i -й форме (отнесенная к наибольшей толщине пластины).

На основании известных результатов общей асимптотической теории устойчивости [4, 5] потенциальная энергия при отбрасывании членов выше третьей степени относительно ζ_i (и сохранении лишь главных членов, связанных с несовершенствами ζ_i^*) записывается в виде

$$\begin{aligned} \Pi = & a_0 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 a_i \zeta_i^2 \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_i}\right) + \frac{1}{3} a_{111} \zeta_1^3 + a_{122} \zeta_1 \zeta_2^2 + \\ & + a_{133} \zeta_1 \zeta_3^2 + a_{123} \zeta_1 \zeta_2 \zeta_3 + \sum_{i=1}^3 a_i \zeta_i \zeta_i^* \frac{\lambda}{\lambda_i}, \end{aligned} \quad (2)$$

где λ — параметр нагрузки, λ_i — критическое значение λ для i -й формы, коэффициенты a_i , a_{ijk} вычисляются по известным формулам [4, 5]. В частности,

$$\begin{aligned} a_{ijk} = & \iint_S [T_1^{(i)} w_{,x}^{(j)} w_{,x}^{(k)} + T_2^{(i)} w_{,y}^{(j)} w_{,y}^{(k)} + \\ & + S_{12}^{(i)} (w_{,x}^{(j)} w_{,y}^{(k)} + w_{,y}^{(j)} w_{,x}^{(k)})] ds, \end{aligned} \quad (3)$$

где T_1, T_2, S_{12} — мембранные усилия, верхний индекс в скобках — номер собственной формы, интегрирование выполняется по срединным плоскостям всех пластин. Для прямоугольного сечения (в отличие от трапециевидного) коэффициенты a_{iii} тождественно равны нулю вследствие погашения интегралов, вычисляемых по участкам стержня, лежащим по разные стороны от нейтральной плоскости при общем изгибе. Эффект взаимодействия форм учитывается членом $a_{123} \zeta_1 \zeta_2 \zeta_3$, который появляется лишь благодаря учету вторичной местной формы U_3 .

Равновесные ветви строились при помощи прямой процедуры минимизации потенциальной энергии как функции ζ_i ($i = 1 \dots 3$) при данном λ с вычислением для точек равновесной ветви гессиана (якобиана I соответствующей системы уравнений равновесия). Соединение этой процедуры с решением уравнения $I = 0$ методом секущих позволило определить предельные точки или точки бифуркации.

В численном эксперименте рассматривались различные варианты стержней, близких к равноустойчивым по общей и местной формам. При фиксированной ширине большей полки b_1 и высоте сечения изменялась ширина меньшей полки b_2 (вплоть до значения $b_2/b_1 = 1$, то есть до прямоугольника).

Данные линейного расчета показывают, что для трапециевидного профиля критическое напряжение вторичной местной формы $\sigma^{(3)}$, как правило, заметно превышает величину $\sigma^{(2)}$ (для первой местной формы), но при переходе к прямоугольнику $\sigma^{(3)}$ приближается к $\sigma^{(2)}$ (рис. 3). Соответственно возрастает коэффициент $|a_{123}|$ (одновременно с уменьшением $|a_{122}|$ и $|a_{133}|$).

Результаты нелинейного расчета показывают, что учет вторичной местной формы для трапециевидного профиля приводит к несущественному уточнению предельного напряжения σ_* , кроме сечений, очень близких к прямоугольным. Взаимодействие общей и первой местной формы приводит к снижению предельной нагрузки на 25 — 35 % при общей погибь порядка толщины пластины h и местной погибь порядка $0,1 h \div 0,2 h$. При этом опасным является лишь одно направление общего прогиба — в сторону меньшей полки (тогда большая полка при изгибе догружается), а при обратном направлении общего изгиба выпучивание будет несвязанным (только общая форма). Для сечений, близких к прямоугольному, "двумодальный" расчет оказывается недостаточным, с приближением b_2/b_1 к единице расхождение с

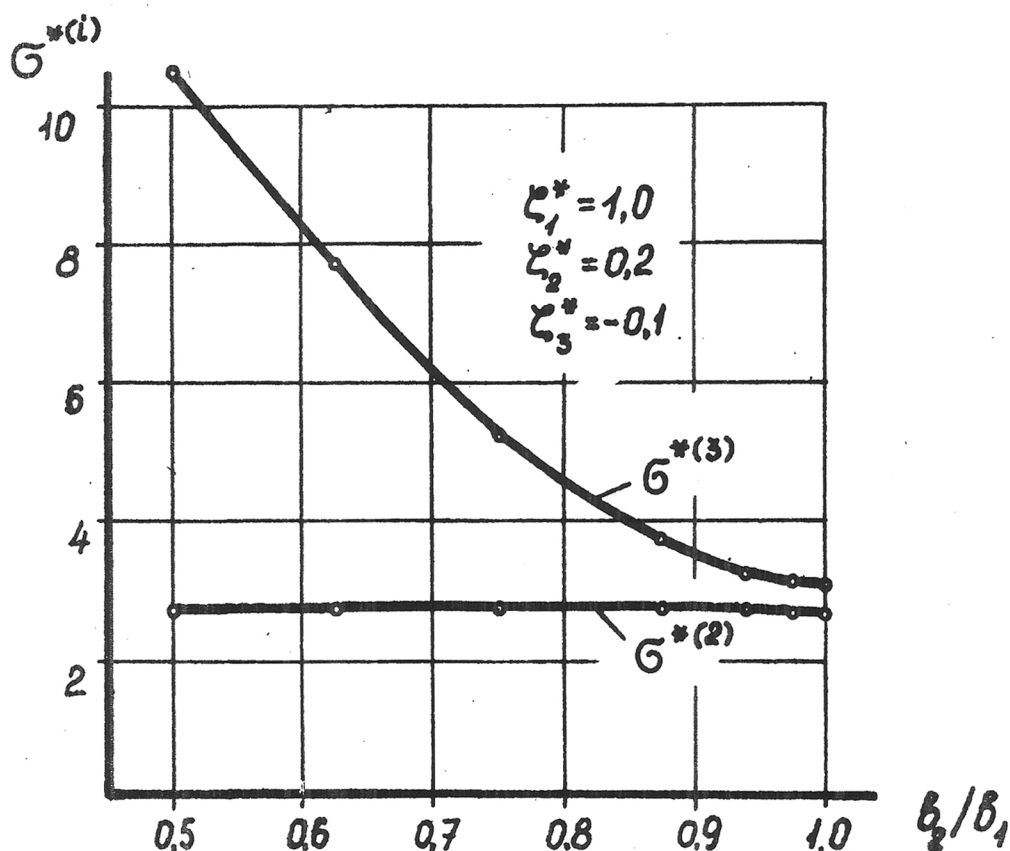


Рис. 3. Зависимость критического напряжения $\sigma^{*(i)}$ от геометрических параметров сечения стержня

"трехмодальным" расчетом резко возрастает. Опасными будут оба направления общего прогиба (хотя и с различным падением несущей способности). В предельном случае $b_2/b_1 = 1$ (прямоугольное сечение) при учете U_3 было получено $\sigma_*/\sigma^{(1)} = 0,7 + 0,8$, тогда как в двумодальном расчете $\sigma_*/\sigma^{(1)} = 1$.

Результаты численного эксперимента позволяют сделать вывод о том, что учет вторичной местной формы необходим для стержней прямоугольного сечения и трапецевидных сечений, очень близких к прямоугольному (примерно при $b_2/b_1 > 0,92 + 0,95$).

Л и т е р а т у р а

I. R e i s A.J., R o o r d a J. The interaction between lateraltorsional and local plate buckling in thin-walled beams // Stability of Steel Structures (Preliminary Reports). - 1977. - P. 415 - 425.

2. K o i t e r W.T., N e u t A. v a n d e r. Interaction between local and overall buckling of stiffened compression panels // Thin-walled structures. - 1980. - Part.I. - P.51 - 66.

3. S r i d h a r a n S., A l i M.A. An improved interactive buckling analysis of thin-walled columns having doubly symmetric sections // Int. J. Solids and Structures. - 1986. - V.22. - n 4. - P.429 - 443.

4. К о й т е р В.Т. Устойчивость и закритическое поведение упругих систем // Механика. - 1960. - № 5. - С.99 - 110.

5. М а н е в и ч А.И. К теории связанной потери устойчивости подкрепленных тонкостенных конструкций // Прикладная математика и механика. - 1982. - Т.46. - Вып.2. - С.337 - 345.