

И П С - Г У У З

ДНЕПРОПЕТРОВСКИЙ ИНСТИТУТ ИНЖЕНЕРОВ
ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА

Инж. ДЕНИШЕНКО Ю.Н.

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ДИНАМИЧЕСКОГО
ВОЗДЕЙСТВИЯ ПОДВИЖНОЙ НАГРУЗКИ

А в т о р е ф е р а т
диссертации на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Днепропетровск
1966

НТБ
ДНУЖТ

Публичная защита диссертации состоится
на заседании Ученого Совета *31 мая* 1966г.

Просим Вас и сотрудников Вашего учреждения,
интересующихся темой диссертации, принять участие
в заседании Ученого Совета или приложить свои

отзы
Учре
дору

Ю,
вн
1966г.

г. Ленинград, ДИИТ, в-р 78-110 отб.
Подписано к печати 25.11

НТБ
ДНУЖТ

М П С - Г У У З

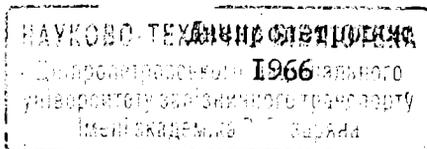
ДНЕПРОПЕТРОВСКИЙ ИНСТИТУТ ИНЖЕНЕРОВ
ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА

Инж. ДЕНИШЕНКО Ю.Н.

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ДИНАМИЧЕСКОГО
ВОЗДЕЙСТВИЯ ПОДВИЖНОЙ НАГРУЗКИ

А в т о р е ф е р а т
диссертации на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Научный руководитель
доктор технических наук,
профессор БОНДАРЬ Н.Г.



НТБ
ДНУЖТ

**Работа выполнена в Днепропетровском институте
инженеров железнодорожного транспорта.**

**НТБ
ДНУЖТ**

Бурное развитие техники наших дней ставит перед исследователями огромное количество задач, многие из которых описываются линейными или нелинейными дифференциальными уравнениями второго порядка с переменными коэффициентами. Подобные задачи очень редко удается решить точно и поэтому обычно приходится искать приближенные решения.

В настоящей работе рассматривается приложение нового метода — метода переменного масштаба — к решению задач о динамическом воздействии подвижной нагрузки на сооружения, которые сейчас становятся все более актуальными в связи с непрерывным ростом скоростей и веса подвижного состава с одной стороны и, с другой стороны, уменьшением веса мостовых конструкций.

В первой главе дан краткий обзор литературы, посвященной задачам о динамическом воздействии подвижной нагрузки на сооружения. Рассматриваются работы — Видлиса, Стокса, Бресса, Радаковича, А.Н.Крылова, С.П.Тимошенко, С.А.Ильясевича, И.И.Казея, К.Е.Китаева, В.В.Болотина, Инглиса, Шалленкампла, А.Б.Моргаевского, С.И.Конашенко, А.П.Филиппова, Ю.М.Майзеля и др.

Во второй главе рассматривается приложение метода переменного масштаба для решения линейных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами.

НТБ
ДНУЖТ

$$\ddot{U}(t) + N(t)\dot{U}(t) + T(t)U(t) = F(t) \quad (I)$$

Сущность метода^{х)} заключается в том, что путем изменения масштаба координат, дифференциальное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами, решение которого неизвестно, иногда точно, а в большинстве случаев приближенно, можно привести к другому дифференциальному уравнению второго порядка, решение которого известно.

Эта же идея лежит в основе метода ВБК, метода предложенного И.Зборником, её пользовались для решения конкретных уравнений В.В.Болотин, С.И.Конашенко и др. В методе переменного масштаба эта идея распространяется и на решение нелинейных уравнений второго порядка^{хх)}.

Однако при практическом использовании этой идеи появляется большая трудность - неизвестно к какому из решенных уравнений можно привести конкретное уравнение (I) и какие при этом надо сделать подстановки.

Поэтому в данной главе определяются некоторые соотношения между коэффициентами $N(t)$ и $T(t)$ уравнения (I), при соблюдении одного из которых может быть

х) Сб. Исследования по теории сооружений, вып. 13, 1964 и вып. 14, 1965.

хх) Труды ДИИЭ'а, вып. 38, 1962.

НТБ
ДНУЖТ

построено решение исходного уравнения, например:

$$2N(t) = -\frac{\dot{T}(t)}{T(t)}; \quad N(t) + T(t) = -1;$$

$$\dot{N}(t) = T(t); \quad N(t) - T(t) = 1; \quad \text{и др.}$$

Однако большинство практических задач не удается решить точно. Поэтому предлагаются некоторые неравенства или приближенные равенства, при выполнении одного из которых можно построить приближенное решение уравнения (I), например:

$$\left| T(t) \right| \gg \left| \frac{\ddot{T}(t)}{4T(t)} - \frac{5}{16} \left[\frac{\dot{T}(t)}{T(t)} \right]^2 + \frac{1}{2} \dot{N}(t) + \frac{1}{4} N^2(t) \right|;$$

$$\left| T_1(t) \right| \gg \left| \frac{\ddot{T}_1(t)}{4T_1(t)} - \frac{5}{16} \left[\frac{\dot{T}_1(t)}{T_1(t)} \right]^2 \right|, \quad \text{где } T_1(t) = T(t) - \frac{1}{2} \dot{N}(t) - \frac{1}{4} N^2(t)$$

Эта теория в дальнейших главах применяется для решения конкретных задач.

В третьей главе рассматривается динамическое воздействие движущегося груза на простую балку.

Пользуясь принципом Даламбера составлено уравнение колебаний середины балки при движении по ней груза^{х)}.

х) Балка рассматривается как система с одной степенью свободы.

$$\ddot{y}(t) + \frac{\dot{p}(t)}{p(t)} \dot{y}(t) + \frac{\frac{1}{4} \ddot{p}(t) + 5\theta^2}{p(t)} y(t) = \frac{\rho}{M_p p(t)} \sin \varepsilon t, \quad (2)$$

где $p(t) = 1 + 2\beta \sin^2 \varepsilon t$; $S = 1 - \alpha^2 \beta$; $\alpha = \frac{v}{v_{кр}}$;

$$v_{кр} = \frac{\pi l}{l} \sqrt{\frac{EJ}{m}}; \quad \varepsilon = \frac{\pi l}{l}; \quad \beta = \frac{M_k}{ml}$$

Это уравнение является следствием более общего уравнения Инглиса-Болотина.

Применяя метод переменного масштаба, для динамического коэффициента получено приближенное решение:

$$(1 + \mu) = \frac{y(\xi)}{y_{cm}} = \frac{n_1}{\alpha n_0 (1 - v^2)} (\sin v \pi \xi - v \sin \pi \xi) \quad (3)$$

Здесь $v = \frac{n_0 n_1}{\alpha}$; $n_0 = 1 - \frac{2}{\pi} \left(1 - \sqrt{1 - 2\alpha^2 \beta} \right)$

$$\xi = \frac{vt}{l}; \quad n_1 = 1 - \frac{2}{\pi} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + 2\beta}} \right)$$

Выражение (3) дает возможность построить график изменения динамического коэффициента в зависимости от положения груза на балке. Если же интересоваться только максимальным значением динамического коэффициента, то, исследовав равенство (3) на экстримум, получим

НТБ
ДНУЖТ

$$(1 + \mu)_{\max} = \frac{n_1}{\alpha n_0 (\nu - 1)} \sin \pi \xi_k, \quad (4)$$

где $\xi_k = \frac{2k}{\nu + 1}$; $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ $0 \leq \xi_k \leq 1$

Результаты сравнения максимальных динамических коэффициентов по формуле (4) и найденных путем численного интегрирования уравн. (2) проф. А.Б.Моргаевским, приведены в табл. I.

Таблица I

№ п/п	β	$\alpha = \alpha \sqrt{1 + 2\beta}$	0,25	0,5	0,8	1,0
		$(1 + \mu)_{\max}$				
1	0,5	по А.Б.Моргаевскому	1,059	1,794	2,238	2,282
2	0,5	по формуле (4)	1,19	1,80	2,16	2,21
3	1,0	по А.Б.Моргаевскому	1,089	1,80	2,49	2,694
4	1,0	по формуле (4)	1,11	1,85	2,44	2,80

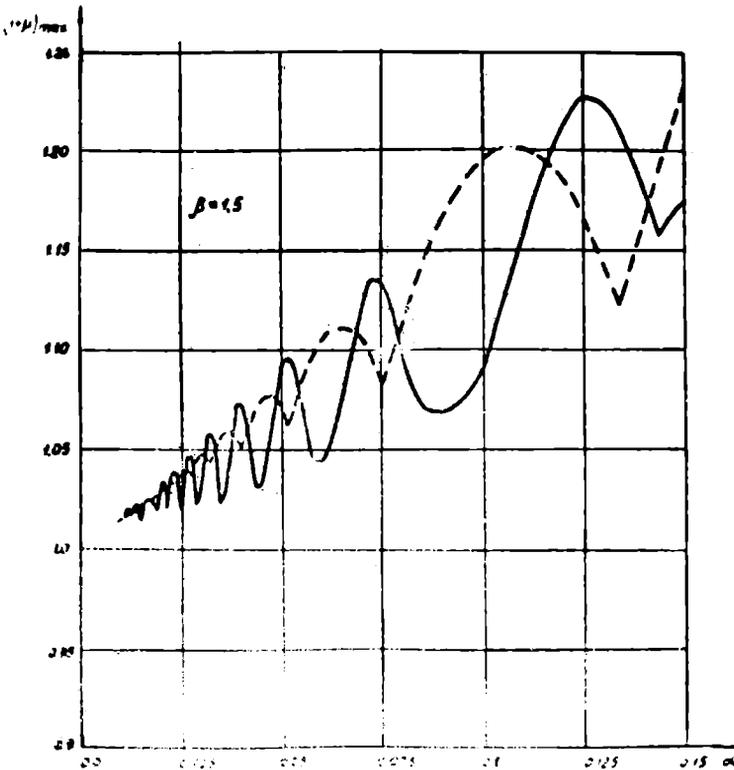
Как видно из таблицы I, точность формулы (4) удовлетворительна.

Для малых скоростей движения груза по балке, результаты вычислений по формуле (4) сравнивались с опытными значениями, получен-

НТБ
ДНУЖТ

ными А.Г.Гальченко и С.И.Конашенко. Точность выражения (4) и в этом случае оказалась удовлетворительной.

Для выяснения зависимости максимального динамического коэффициента от скорости движения груза и от массы груза, по формуле (4) проделаны подсчеты на ЭЦВМ "Промінь" для различных параметров α и β . График изменения максимального динамического коэффициента изображен на фиг.1 пунктирной линией.



НТБ
ДНУЖТ

Как видно из фиг. I, с увеличением скорости движения груза максимальный динамический коэффициент может как увеличиваться, так и уменьшаться - это зависит от соотношения фаз чисто вынужденных и свободных колебаний.

Скорости, которые соответствуют либо почти наибольшим $(1 + \mu)_{\max}$ - либо почти наименьшим $(1 + \mu)_{\min}$, получены из приближенного анализа выражения (4) и равны

$$\alpha_i = \frac{0,363 n_1 i}{i^2 + 0,815 n_1^2 \beta} \left(1 + \sqrt{3,08 + 1,695 \frac{n_1^2 \beta}{i^2}} \right); \quad (5)$$

$$i = 1, 3, 5, 7, \dots$$

В таблице 2 дано сравнение критических скоростей, полученных по формуле (5) и критических скоростей, полученных по формулам В.В.Болотина и С.И.Конашенко.

НТБ
ДНУЖТ

Таблица 2

№№ п/п	α	Решение β	1	2	3	4	5
			1	α_1	по В.В.Болотину	0,577	0,447
2	α_1	по С.И.Конавченко	0,598	0,476	0,410	0,366	0,335
3	α_1	по формуле (5)	0,555	0,436	0,374	0,333	0,302
4	α_2	по В.В.Болотину	0,228	0,184	0,158	0,141	0,128
5	α_2	по С.И.Конавченко	0,242	0,205	0,184	0,169	0,157
6	α_2	по формуле (5)	0,236	0,215	0,187	0,177	0,167

Как видно из таблицы, формула (5) дает приемлемую точность.

Далее в этой главе рассматривается влияние на динамический коэффициент начального искривления оси балки. Аналитическое решение получено в таком виде:

$$(1 + \mu) = (1 + \mu)_{\text{стат}} + \frac{y_0}{y_{\text{см}}} \left(\frac{1}{n_0^2} - 1 \right) (1 - \cos \nu \hat{n} \xi)$$

По этому решению построены графики изменения динамического коэффициента при движении груза по

НТБ
ДНУЖТ

балке в случае, когда $Y_0 = Y_{cm}$ и $Y_0 = -Y_{cm}$.

Наибольшие ординаты графиков приведены в таблице 3.

Таблица 3

$\alpha_* = \alpha \sqrt{1+2\beta}$	0,25		0,5		0,8		1,0	
β	0,5	1,0	0,5	1,0	0,5	1,0	0,5	1,0
$Y_0 = -Y_{cm}$	1,16	0,99	1,66	1,70	1,70	1,67	1,11	1,06
$Y_0 = 0$	1,18	1,11	2,16	1,85	1,80	2,44	2,21	2,80
$Y_0 = +Y_{cm}$	1,20	1,13	2,65	2,01	1,90	3,20	3,14	4,54

Как видно из приведенных данных, при больших скоростях движения груза по балке, влияние начального искривления оси очень существенно.

далее рассматривается влияние вязкого трения на колебания балки при движении груза. Уравнение колебаний получено в таком виде:

$$\ddot{y}(t) + \left[\frac{\partial \theta}{\partial P(t)} + \frac{\dot{P}(t)}{P(t)} \right] \dot{y}(t) + \frac{1}{4} \frac{\ddot{P}(t) + 5\theta^2}{P(t)} y(t) = \frac{P}{M_p P(t)} \sin \epsilon t,$$

где ∂ - логарифмический декремент колебаний.

НТБ
ДНУЖТ

Приближенное решение этого уравнения, найденное методом переменного масштаба, записывается так:

$$(1 + \mu) = \frac{y(\xi)}{y_{cm}} = \frac{v}{n_0^2 [\delta^2 + (1+v)^2] [\delta^2 + (1-v)^2]} \left[(1-v^2) (e^{-\delta v \pi \xi} \sin v \pi \xi - v \sin \pi \xi) + \delta^2 (e^{-\delta \pi \xi} \sin v \pi \xi + v \sin \pi \xi) + 2 \delta v (e^{-\delta v \pi \xi} \cos v \pi \xi - \cos \pi \xi) \right],$$

Здесь $\delta = \frac{\partial n_1^2}{2 \alpha \pi}$

Интересно отметить, что коэффициент δ , характеризующий затухание, находится в обратной пропорциональной зависимости от скорости движения груза. На первый взгляд создается впечатление, что с уменьшением скорости должно увеличиться влияние сил вязкого трения. Однако это впечатление ложное, т.к. с уменьшением скорости $\exp(-\delta v \pi \xi)$ уменьшается, а частота вынужденных колебаний увеличивается. Так как они стоят перед синусом, т.е. определяют амплитуду, то влияние вязкого трения на динамический коэффициент незначительно.

В четвертой главе рассматривается динами-

НТБ
ДНУЖТ

ческое воздействие движущейся равномерно распределенной нагрузки на простую балку.

Дифференциальное уравнение колебаний середины балки, составленное аналогично уравнению (2), имеет вид:

$$\ddot{y}(t) + \frac{\dot{W}(t)}{W(t)} \dot{y}(t) + \frac{\theta^2 - \frac{\xi^2}{\pi} \beta D_1(t)}{W(t)} y(t) = \frac{q l (1 - \cos \varepsilon t)}{M_p \pi W(t)}, \quad (6)$$

где

$$W(t) = 1 + \frac{\beta}{\pi} D_1(t) = 1 + \frac{\beta}{\pi} \left(\varepsilon t - \frac{1}{2} \sin 2\varepsilon t \right);$$

$$\beta = \frac{m_k}{m_p}.$$

m_k - погонная масса движущейся нагрузки;

q - интенсивность движущейся нагрузки;

m_p - погонная масса балки.

Приближенное решение этого уравнения методом переменного масштаба записывается в такой форме:

$$(1 + \mu) = \frac{y(\xi)}{y_{cm}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\kappa_2}{\kappa_1} \right)^2 \left[1 + \frac{1}{1 - \nu_3^2} \left(\nu_3^2 \cos \frac{1}{\nu_3} \pi \xi - \cos \pi \xi \right) \right], \quad (7)$$

Здесь

$$\xi = \frac{vt}{l}; \quad \alpha = \frac{v}{v_{кр}}; \quad \nu_3 = \frac{\alpha}{\kappa_1}; \quad v_{кр} = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{EJ}{m_k}};$$

$$\kappa_1 = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{1 - \alpha^2 \beta}{1 + \beta}} \right); \quad \kappa_2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1 + \beta}} \right)$$

НТБ
ДНУЖТ

Постоянные k_1 и k_2 - это коэффициенты некоторых аппроксимаций. В дальнейшем делается попытка уточнить решение уравнения (6) путем уточнения коэффициентов аппроксимаций k_1 и k_2 .

Поэтому функции аппроксимируются по участкам:

$$1) 0 \leq \varepsilon t \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad 2) \frac{\pi}{2} \leq \varepsilon t \leq \pi$$

Решение в этом случае записывается так:

$$1) (1 + \mu)_{\text{I}} = \frac{1}{2} \left(\frac{k_4}{k_3} \right)^2 \left[1 + \frac{1}{1 - v_4^2} (v_4^2 \cos \frac{1}{v_4} \pi \xi - \cos \pi \xi) \right];$$

$$0 \leq \xi \leq 0,5 \quad (8)$$

$$2) (1 + \mu)_{\text{II}} = C \cos \frac{1}{v_5} \pi (\xi - 0,5) + D \sin \frac{1}{v_5} \pi (\xi - 0,5) +$$

$$+ \frac{1}{2} \left(\frac{k_6}{k_5} \right)^2 \left[1 + \frac{1}{1 - v_5^2} (v_5^2 \cos \frac{1}{v_5} \pi \xi - \cos \pi \xi) \right];$$

$$0,5 \leq \xi \leq 1$$

где

$$C = \frac{1}{2} \left(\frac{k_4}{k_3} \right)^2 \left(1 - \frac{v_4^2}{1 - v_4^2} \cos \frac{\pi}{2v_4} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{k_6}{k_5} \right)^2$$

$$D = \frac{v_5}{2} \left[\left(\frac{k_4}{k_3} \right)^2 \frac{1}{1 - v_4^2} \left(1 - v_4 \sin \frac{\pi}{2v_4} \right) - \left(\frac{k_6}{k_5} \right)^2 \frac{1}{1 - v_5^2} \right]$$

$$v_4 = \frac{\alpha}{k_3};$$

$$v_5 = \frac{\alpha}{k_5};$$

$$k_3 = 0,182 \left(1 + \sqrt{\frac{1-0,5\alpha^2\beta}{1+0,5\beta}} \right) + 0,636 \sqrt{\frac{1-0,091\alpha^2\beta}{1+0,091\beta}},$$

$$k_4 = 0,182 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1+0,5\beta}} \right) + 0,636 \frac{1}{\sqrt{1+0,091\beta}},$$

$$k_5 = 0,182 \left(\sqrt{\frac{1-\alpha^2\beta}{1+\beta}} + \sqrt{\frac{1-0,5\alpha^2\beta}{1+0,5\beta}} \right) + 0,636 \sqrt{\frac{1-0,909\alpha^2\beta}{1+0,909\beta}},$$

$$k_6 = 0,182 \left(\frac{1}{\sqrt{1+\beta}} + \frac{1}{\sqrt{1+0,5\beta}} \right) + 0,636 \frac{1}{\sqrt{1+0,909\beta}},$$

Из сравнений результатов первого и второго приближений с результатами численного интегрирования уравнения (6), выполненного проф. А.Б. Моргаевским^{х)}, вытекает, что точность второго приближения выше, однако это достигается значительным усложнением решения.

Далее исследуется влияние начального искривления оси балки на динамический коэффициент при движении распределенной нагрузки.

Решение в этом случае записывается так:

$$(1 + \mu)_{\bar{I}} = (1 + \mu)_{\bar{I}; y=0} - \frac{y_0}{y_{cm}} \left[1 - \left(\frac{k_4}{k_3} \right)^2 \right] \left(1 - \cos \frac{1}{V_4} \sqrt{\xi} \right);$$

$$0 \leq \xi \leq 0,5$$

х) Сб. Исследования по теории сооружений, вып. 13, 1964.

ДИТЬ
ДНУЖТ

$$(1+\mu)_{II} = (1+\mu)_{II; y_0=0} - \frac{y_0}{y_{cm}} \left\{ \left[1 - \left(\frac{k_6}{k_5} \right)^2 \right] + \right. \\ \left. + C_1 \cos \frac{1}{\sqrt{5}} \pi (\xi - 0,5) + D_1 \sin \frac{1}{\sqrt{5}} \pi (\xi - 0,5) \right\} \\ 0,5 \leq \xi \leq 1 \quad ,$$

где $C_1 = \left[1 - \left(\frac{k_4}{k_3} \right)^2 \right] \left(1 - \cos \frac{\pi}{2\sqrt{4}} \right) - \left[1 - \left(\frac{k_6}{k_5} \right)^2 \right]$

$$D_1 = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{4}} \left[1 - \left(\frac{k_4}{k_3} \right)^2 \right] \sin \frac{\pi}{2\sqrt{4}}$$

В таблице 4 приведены значения максимальных динамических коэффициентов, которые получают-ся в случае движения распределенной нагрузки по балке, имеющей начальное искривление оси равное по абсолютной величине статическому прогибу.

Таблица 4

№ п/п	α $(1+\mu)_{max}$ при	0,25	0,5	0,8
		1	1,07	1,57
2	2	1,11	2,07	5,30
3	3	1,17	2,57	8,63

Как видно из приведенных данных, при скоростях движения распределенной нагрузки, соизмеримых

НТБ
ДНУЖТ

с критической скоростью, начальное искривление оси балки имеет огромное влияние на динамический коэффициент.

В пятой главе рассматриваются некоторые нелинейные задачи динамического воздействия подвижной нагрузки на балку.

Решение нелинейных задач строится при помощи комбинации двух методов - метода переменного масштаба и метода последовательных приближений. Идея заключается в следующем:

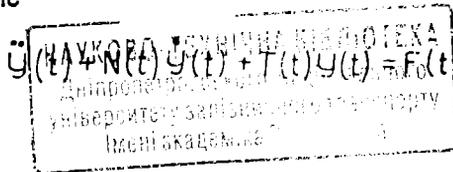
Пусть дано уравнение

$$\ddot{U}(t) + N(t)\dot{U}(t) + T(t)R(U) = F(t), \quad (9)$$

где $R(U)$ - нелинейная функция от U , обладающая малой нелинейностью. Это уравнение можно представить еще так:

$$\ddot{U}(t) + N(t)\dot{U}(t) + \left[T(t) \frac{R(U)}{U(t)} \right] U(t) = F(t) \quad (10)$$

Так как $R(U)$ - функция, обладающая малой нелинейностью, то в нулевом приближении вместо уравнения (10) можно рассматривать линейное уравнение



НТБ
ДНУЖТ

21694a

Это уравнение может быть решено при помощи метода переменного масштаба.

Допустим, что найдено решение линейного уравнения. Обозначим это решение $y_0(t)$. Подставляя его в член уравнения (10), заключенный в квадратные скобки, имеем:

$$\ddot{y}(t) + N(t)\dot{y}(t) + \left[T(t) \frac{R(y_0)}{y_0(t)} \right] y(t) = F(t)$$

Таким образом снова получено линейное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами. Решив это уравнение, найдем решение нелинейного уравнения (9) в первом приближении.

Повторяя эту операцию можно построить приближенные решения и более высоких порядков.

Для выяснения точности предлагаемого приема решений нелинейных уравнений с переменными коэффициентами, рассмотрена простейшая задача - колебания математического маятника переменной длины, из анализа решения которой вытекает, что в данном случае предлагаемый прием дает большую точность, чем асимптотический метод.

Далее рассматривается задача о колебаниях балки с опорами, имеющими горизонтальные упругие

НТБ
ДНУЖТ

связи, при движении по ней груза.

Уравнения движения балки в этом случае составлялись в форме уравнений Лагранжа второго рода. Кинетическая энергия балки определялась обычным способом, а для определения потенциальной энергии рассмотрена статическая задача — определить прогиб середины балки с опорами, имеющими горизонтальные упругие связи, от силы N приложенной в этой же точке.

Эта зависимость такова:

$$N \approx \frac{48 EJ}{l^3} y \left(1 + \frac{\pi^2 k l}{40 EJ} y^2 \right), \quad (II)$$

где k — жесткость упругих связей.

Интересно отметить, что такого же характера зависимость между прогибом середины балки и силой, приложенной в этой же точке, получается также и тогда, когда рассматривается прогиб простой балки, материал которой не следует закону Гука. Естественно, что в этом случае коэффициент перед y^2 в выражении (II) будет другим. Следовательно, все последующие выкладки могут быть легко распространены и на этот случай.

Теперь потенциальная энергия системы определяется так:

НТБ
ДНУЖТ

$$\Pi = \int_0^y N(y) dy = \frac{48EJ}{l^3} \int_0^y y \left(1 + \frac{\pi^2 k l}{40EJ} y^2 \right) dy$$

После подстановки выражений для кинетической и потенциальной энергий в уравнение Лагранжа, уравнение движения середины балки при движении по ней груза, получено в следующем виде:

$$\ddot{y}(t) + \frac{\dot{p}(t)}{p(t)} \dot{y}(t) + \frac{1}{p(t)} \left[\frac{1}{4} \ddot{p}(t) + 5\theta^2 + \frac{\pi^2 \theta^2 k l}{40EJ} y^2(t) \right] y(t) = \frac{P}{M_p p(t)} \sin \epsilon t$$

Если в этом уравнении положить жесткость упругих связей (k) равной нулю, то придем к ранее полученному уравнению (2). Если же в выражении (12) положить $M_k=0$ и $P=0$, придем к известному уравнению для свободных колебаний балки на двух шарнирно неподвижных опорах

(при этом $k = \frac{EF}{l}$).

Решение этого уравнения приводится для случая малой нелинейности, т.е. когда

$$\left| \frac{1}{4} \ddot{p}(t) + 5\theta^2 \right| \gg \left| \frac{\pi^2 \theta^2 k l}{40EJ} y^2(t) \right|$$

или

$$\left| y(t) \right| \ll \left| 2 \sqrt{\frac{EJ}{kl} (1 - 2\alpha^2 \beta)} \right|$$

НТБ
ДНУЖТ

Решение линейной задачи (3) найдено в главе 3. Подставляя его в нелинейный член уравнения (12), получим:

$$\ddot{y}(t) + \frac{\dot{p}(t)}{p(t)} \dot{y}(t) + \frac{1}{p(t)} \left[\frac{1}{4} \ddot{p}(t) + 5\theta^2 + \frac{\rho^2 n_1^2 \kappa}{m^2 l n_0^2 EJ (\varepsilon^2 - \psi_1^2)^2} (\varepsilon \sin \psi_1 t - \psi_1 \sin \varepsilon t)^2 \right] y(t) = \frac{\rho}{M_p p(t)} \sin \varepsilon t$$

Таким образом вновь получено линейное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами, которое можно решить при помощи метода переменного масштаба.

Приближенно решение этого уравнения можно представить так:

$$(1 + \mu) = \frac{y(\xi)}{y_{cm}} = \left(1 + \frac{\kappa l}{4EJ} y_{cm}^2 \right) \frac{n_1^2}{v_2 (1 - v_2^2) \alpha^2} (\sin v_2 \pi \xi - v_2 \sin \pi \xi), \quad (14)$$

где
$$v_2 = \frac{n_0 n_1 \sqrt{1 + n_3}}{\alpha}$$

$$n_3 = \frac{v^4 y_{cm}^2}{4n_0^6 (1 - v^2)^2} \frac{\kappa l}{EJ} \left(\frac{1}{v} \sin v \frac{\pi}{2} - 1 \right)^2$$

Если интересоваться только максимальными значениями динамического коэффициента, то, исследовав решение (14) на экстремум, найдем:

НТБ
ДНУЖТ

$$(1 + \dots)_{\max} = \left(1 + \frac{k l}{4 E J} y_{cm}^2\right) \frac{n_i^2}{\alpha^2 v_2 (v_2 - 1)} \sin^2 \xi_i \quad (15)$$

Здесь

$$\xi_i = \frac{2}{1 + v_2} i ; \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad 0 \leq \xi_i \leq 1$$

Для выяснения точности полученных теоретических результатов были поставлены лабораторные эксперименты с металлической балочкой длиной 2 м и поперечным сечением 45 x 9,6 мм. Модуль упругости материала балки $E = 2,15 \cdot 10^6$ кг/см². Вес балки 7 кг. Опорные части выполнены таким образом, что центры шарниров совпадают с нейтральной осью балки. Несмотря на мощное усиление опорных частей, выполнить их полностью неподвижными не удалось, из-за различных причин опорные части имели некоторое упругое смещение. Жесткость этих упругих связей определена экспериментально и равна $K = 453,4$ кг/см.

Рядом с балкой располагается горка, с которой спускается груз. В зависимости от начального положения груза на горке, скорость входа его на балку может меняться. Максимальная скорость движения груза по балке равнялась 5,5 м/сек.

Положение груза на балке фиксировалось с помощью восьми замыкателей (педалей).

НТБ
ДНУЖТ

Во время опытов при помощи индуктивного датчика перемещений, измерялся прогиб середины балки, который фиксировался на фотобумаге при помощи осциллографа Н-700.

Опыты проводились с грузами весом 7 и 10 кг (соответственно $\beta = 1,0$ и $1,5$).

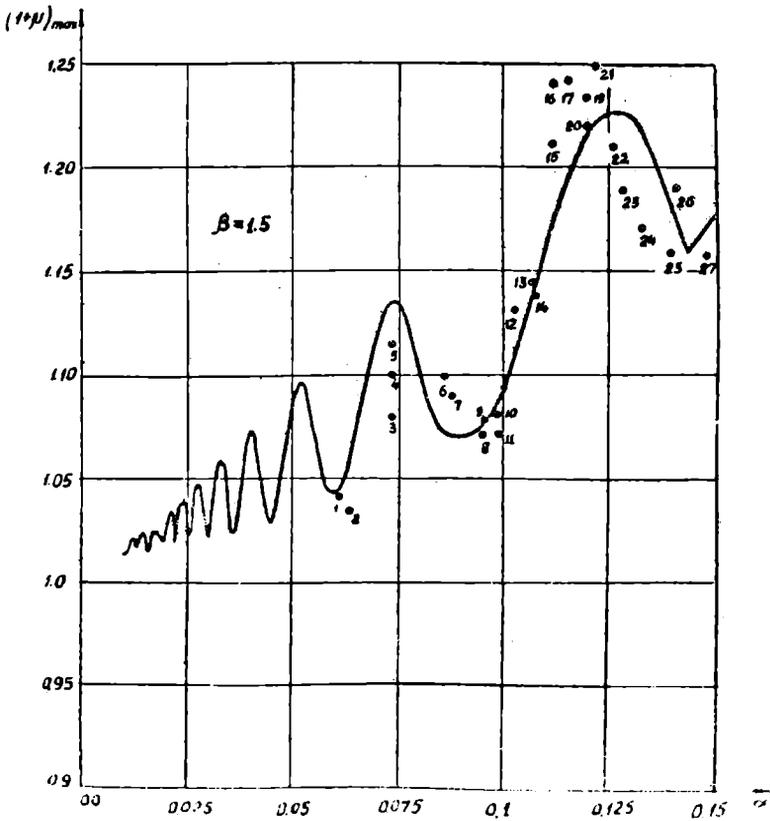


рис 2

НТБ
ДНУЖТ

На фиг.2 точками показаны опытные значения максимальных динамических коэффициентов, а сплошной линией - график изменения максимального динамического коэффициента в зависимости от скорости движения груза, полученный по формуле (15). (вычисления проведены на ЭЦВМ "Промінь").

На фиг.1 показано сравнение результатов, полученных для линейной (4) и нелинейной задач (пунктирной линией обозначено решение линейной задачи).

Анализируя полученные графики можно сделать следующие выводы:

1. Несмотря на большое количество допущений, точность полученных формул удовлетворительная.

2. С увеличением скорости движения груза динамический коэффициент в общем растет, причем характер нарастания динамического коэффициента для линейной и нелинейной задач, примерно одинаковый (это, конечно, не относится к изменению динамического прогиба).

3. Для случая движения груза по балке с опорами, имеющими упругие горизонтальные связи, как и для случая движения груза по простой балке, существует бесконечное число критических скоростей,

причем на величину критической скорости большое влияние оказывает жесткость горизонтальных связей опор.

Диссертация изложена на 145 страницах, содержит 46 рисунков и фотографий, а также 20 приложений.

Перечень литературы состоит из 133 названий.

Основное содержание диссертации опубликовано в следующих статьях:

1. Денищенко Ю.Н. - Приближенное решение задачи о динамическом воздействии движущегося груза на балку с двумя шарнирно неподвижными опорами методом переменного масштаба времени. Труды ДИИТ"а, вып.53, 1964.

2. Боддарь Н.Г., Денищенко Ю.Н. - Приложение метода переменного масштаба времени к решению задач о динамическом воздействии подвижной нагрузки на сооружения. Сб.исследования по теории сооружений, вып.14, 1965.

НТБ
ДНУЖТ

3. Денищенко Ю.Н. - Приближенное решение задачи о колебании математического маятника переменной длины методом переменного масштаба. Труды ДИИТ^а, вып.56, 1966.

4. Денищенко Ю.Н. - Приложение метода переменного масштаба к задаче Виллиса. Труды ДИИТ^а, вып.56, 1966.

Некоторые результаты работы опубликованы в монографии Н.Г.Бондаря, И.И.Казея, Б.Ф.Лесохина, Ю.Г.Козьмина - "Динамика железнодорожных мостов", 1965.

Материалы диссертации должны автором на:

- совещании по некоторым проблемам динамики сооружений и машин. Днепропетровск, 1964;

- совещании по нелинейным колебаниям механических систем, г.Ленинград, 1965;

- заседании семинара по механике Днепропетровского института инженеров железнодорожного транспорта, 1966;

- заседании семинара по механике НТО Строиндустрии. Днепропетровск, 1966.