

УДК 004:512

В. М. Ильман – Днепропетровский национальный университет железнодорожного транспорта имени академика В. Лазаряна

Е. С. Куропятник – Днепропетровский национальный университет железнодорожного транспорта имени академика В. Лазаряна, elenadiit@rambler.ru

КОНЦЕВЫЕ ОБЪЕКТЫ И ИХ ГРАММАТИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА

*Статью представили д.т.н. проф. В. И. Шинкаренко (ДНУЖТ),
д.ф.-м.н. проф. В. Е. Белозеров (ДНУ)*

Введение

Среди множества подходов используемых для моделирования предметных областей грамматический подход информатики выделяется своей простотой и универсальностью. Существует большое разнообразие моделирующих грамматик: мультисимвольные, программные, графические и пр. [1, 2, 3]; формальных систем, использующих грамматики [4, 5] и др. Носителями грамматик являются алфавиты, элементы которых являются некоторыми формализмами предметных областей, представляемые терминальными и нетерминальными символами. Формально, алфавит – множество свободных не связанных с системой отсчета элементов (символов, формальных имен и пр.), из которых с помощью определенных операций составляются цепочки-слова некоторого языка. Однако, элементами алфавитов могут быть объекты более сложной структуры. Так в информационных, транспортных, графических, экономических, биологических и прочих системах объекты предметных областей могут иметь строковую, интервальную, древовидную и иную природу и представляться концами (префиксами, суффиксами) строк, интервалов [6] или более сложными конечными конструкциями. Аналогичная ситуация возникает при рассмотрении конечных элементов строительной механики, математических объектов в комплексной области, представлений потоковых сетей, блоков алгоритмов – программ. В самих формальных грамматиках порождаемые ими цепоч-

ки языков связаны также с понятиями концов [3]. Поэтому, носители таких грамматик должны задаваться определенными конструктивными структурами, а сами грамматики – грамматическими структурами. Грамматическая структура задает модель предметной области, предназначенную для конструирования и анализа теоретических и практических вопросов в частности алгоритмических программ, информационных потоков, технологических цепочек, производственных процессов и других. Грамматическая структура представляется [7, 8] как носитель, сигнатура и конструктивная аксиоматика. Составляющие структуры неоднородны по составу, правилам выполнения и другим показателям.

Объектом наших исследований являются свободные конечные конструкции. В рассматриваемой работе вводится структура свободных концов и предлагаются операции над конечными объектами. Свободные концы определяются как упорядоченные или неупорядоченные наборы элементов некоторого алфавита, и могут характеризоваться длиной и другими характеристиками. Концевые объекты несвязаны с системой отсчета [9]. Предложена конструктивная грамматическая структура на свободных концах и рассмотрена задача построения формального языка на свободных концах при условии совместимости конечных конструкций. Такая конечная грамматическая структура, например, позволяет проектировать технологический

процесс формирования информационных списков объектов предметной области с заданными характеристиками, ограничениями на совместимость и прочее. Носитель грамматической структуры состоит из конструктивных терминальных и нетерминальных структур концов, вспомогательных символов и множеств характеристик, причем нетерминальные концы могут иметь нулевую характеристику длины. Сигнатура включает двуместные операции конкатенации и подстановки, многоместные отношения конкатенации, непосредственного вывода и других операций и операторов. Конструктивная аксиоматика грамматической структуры позволяет строить свободные языки на свободных концах и, следовательно, корректно применять правила подстановок. Правила подстановок грамматической структуры могут иметь детерминированную и недетерминированную нагрузки, обусловленные особенностями предметных областей. Кроме того, некоторые нетерминальные концы в правилах подстановки являются контекстными сопровождениями и так же могут нести определенную смысловую нагрузку. Предложенная грамматическая структура концов при наложении ограничений на правила подстановок, на их веса и прочее обобщает грамматические структуры, определенные на классических алфавитах [1].

Целью данной работы является формализация понятия концевых конструкций (свободных концов), определения их структуры и аксиоматику.

Структура свободных концов

Носители формальных грамматик состоят из алфавитов, элементы которых являются свободными в том отношении, что их можно вставлять в конструкцию цепочки в любое место, предусмотренное правилами грамматики. Поэтому постулируем следующее:

- любой алфавит A носителя формальной грамматики свободный;

- конструктивный алфавит B , элементы которого построены на свободном алфавите A – свободный;
- $A \subset B$.

Рассмотрим некоторые свободные элементы, которые могут составлять конструктивные алфавиты грамматик.

Пусть задан терминальный алфавит $A = \{a_i\}_{i=0}^n$ такой, что $a_0 = \varepsilon$ – пустой (нейтральный) символ, и подмножество положительных действительных чисел R^+ , такое, что $0 \in R^+$. На алфавите A зададим конструкцию c_i из набора элементов a_{i_j} такую, что элементы из алфавита могут повторяться:

$$(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}). \quad (1)$$

В конструкции (1) все или часть элементов могут быть концами.

Например, конструкция (1) может быть мультимножеством или образовывать список $[a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}]$ [6], или быть гибридным – составленным из элементов мультимножества и списка. Если $0 \leq |c_i| \leq m$ размер конструкции (1) такой, что при размере $|c_i| = 0$, $c_i = \varepsilon$ и $|c_i| = 1$, $c_i = a_{i_j}$; то конструктивный алфавит $A_c = \{c_i\}$ свободный и $A \subset A_c$. Другими объектами, задаваемыми выражением (1) могут быть наборы концевых и не концевых вершин графа, вершин симплекса и прочее.

Концы могут быть простыми, если «тело» объекта не учитывается (например, простой интервал [7]).

Определение 1.1. Пару $(a_{i_j}, a_{i_k}) = s_i$ назовем свободной концевой конструкцией s_i простых концов, для которых a_{i_j} и a_{i_k} элементы свободного алфавита A и на индексах j и k не установлено отношение порядка.

Множество $\{s_i\}$ задает свободный алфавит простых концов A_s , причем при усло-

вии $s_i = (a_{i_j}, a_{i_j}) = a_{i_j}$ имеем $A \subset A_s$. Очевидно, свободная концевая конструкция s_i является частным случаем конструкции (1).

Определение 1.2. k - мерной (по количеству пар) свободной простой концевой конструкцией называется набор $((a_{i_1}, a_{i_2}), \dots, (a_{i_j}, a_{i_{j+1}})) = S_k$.

Различные концевые конструкции S_k образуют конструктивный алфавит A_{sk} такой, что $A \subset A_{sk}$, если, например, $S_k = ((a_{i_1}, a_{i_1}), (\varepsilon, \varepsilon) \dots, (\varepsilon, \varepsilon)) = a_{i_1}$. k - мерная свободная концевая конструкция S_k задает другое представление конструкции (1).

Если концевая конструкция имеет «тело» (например, простая дуга [7]), то с конструкцией s_i свяжем набор конечных чисел $\{r_j\}_{j=1}^{k-1} \subset R^+$ таких, что каждой паре концов $(a_{i_j}, a_{i_{j+1}}) \mapsto r_j$.

Определение 1.3. Тройка $(a_{i_j}, a_{i_{j+1}}, r_j)$ образует нагруженную (постоянную) свободную конструкцию концов a_{i_j} и $a_{i_{j+1}}$.

Определение 1.4. Нагруженной k - мерной свободной концевой конструкцией называется

$$((a_{i_1}, a_{i_2}, r_1), (a_{i_2}, a_{i_3}, r_2), \dots, (a_{i_{k-1}}, a_{i_k}, r_k)).$$

Очевидно, совокупности нагруженных концевых конструкций также образуют конструктивные алфавиты. Если конструкции в определениях 1.1 – 1.4 ориентированные (на индексах элементов концов установлено отношение порядка), то они задают списочные свободные концевые конструкции. Определенные выше концевые пары могут служить моделями таких математических объектов как интервал, вектор, матрица и др.; концами лингвистических и программных выражений; концами программных процедур и прочее. Концевые конструкции на парах допускают обобщение на тройки, четверки концов, симплексы, симплицальные комплексы и так далее. Чтобы не загромождать предмет

исследования ограничимся в дальнейшем только одномерными концами.

Данные выше упрощенные определения свободных концов является понятийными и требуют уточнения, поэтому определим элементарную структуру C_s , порождающую свободные бинарные концы:

$$C_s = \langle M_s, \Sigma_s, \Lambda_s \rangle, \quad (2)$$

где $M_s = (A, U, V_1, V_2, \dots, V_l, D)$, A – свободный алфавит определенный выше, U – ограниченное подмножество множества R^+ такое, что $0 \in U$, V_j – характеристические конечные множества, в общем, разной природы, для которых $\varepsilon \in V_j$;

$D = \{(\cdot), [,], \cdot, -, s, s_i\}$ – множество специальных символов; $\Sigma_s = \{f_{1,2}^2, h_{1,2}^3, \frac{r}{a} \rightarrow^2\}$ – сигнатура приписывающих отношений порядка и отображений и Λ_s – конструктивная аксиоматика порождения алфавитов свободных концов, которая может состоять из отдельных или комбинаций следующих аксиоматик: Λ_{s1} – аксиоматика свободных простых концов и конструктивного алфавита

$\forall a_i, a_j \in A, f_1(a_i, a_j) = (a_i, a_j); (a_i, a_j) = (a_j, a_i) = s; s$ – простая концевая конструкция;

$$s = (a_j, a_j) = a_j, \quad s = (\varepsilon, a_j) = a_j; \quad \{s_k\}_{k=0}^m = A_s, s_0 = \varepsilon,$$

$$m = n + \frac{n!}{2(n-2)!} + 1, A \subset A_s; A_s$$
 – конструктивный алфавит свободных простых концов; Λ_{s2} – аксиоматика свободных списочных простых концов и конструктивного алфавита:

$$\forall a_i, a_j \in A, f_2(a_i, a_j) = [a_i, a_j] = \bar{s};$$

$$[a_i, a_j] \neq [a_j, a_i];$$

\bar{s} – списочная простая концевая конструкция; $\bar{s} = [a_j, a_j] = a_j, \bar{s} = [\varepsilon, a_j] = [a_j, \varepsilon] = a_j;$

$$\{\bar{s}_k\}_{k=0}^{m_1} = \bar{A}_s, \bar{s}_0 = \varepsilon, m_1 = n + \frac{n!}{(n-2)!} + 1,$$

$A \subset \bar{A}_s$; \bar{A}_s – конструктивный алфавит свободных списочных простых концов;

$\Lambda_{s3}(w)$ – аксиоматика свободных нагруженных концов и конструктивного алфавита:

$$\left\{ \begin{array}{l} r_p \in U \ \& \ v_{qg} \in V_q, w = [r_p, v_{1g_1}, v_{2g_2}, \dots, v_{1g_1}]; \\ w - \text{характеристический список}; \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall a_i, a_j \in A \ \& \ r_p \in U \ \& \ v_{qg} \in V_q, \\ h_1(a_i, a_j, w) = (a_i, a_j, w); \\ (a_i, a_j, w) = (a_j, a_i, w) = s(w); \end{array} \right.$$

$s(w)$ – нагруженная концевая конструкция;

$\{s_k(w)\}_{k=0}^{m_k} = A_s(w)$ – конструктивный алфавит свободных нагруженных концов;

$\Lambda_{s4}(w)$ – аксиоматика свободных нагруженных списочных концов и конструктивного алфавита:

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall a_i, a_j \in A \ \& \ r_p \in U \ \& \ v_{qg} \in V_q, \\ h_2(a_i, a_j, w) = (\bar{s}, w) = \bar{s}(w); \end{array} \right.$$

$\bar{s}(w)$ – нагруженная списочная концевая конструкция;

$\{\bar{s}_k(w)\}_{k=0}^{m_k} = \bar{A}_s(w)$ – конструктивный алфавит свободных нагруженных списочных концов.

Кроме того аксиоматики нагруженных концов должны быть дополнены аксиомами:

- $\left\{ \begin{array}{l} \forall a_i, a_j \in A \ \& \ r_p \in U \Rightarrow \\ s(w) | \bar{s}(w) \xrightarrow[r_p=0]{a_i=a_j} a_j(w); \\ w = [0, \varepsilon, \varepsilon, \dots, \varepsilon] \Rightarrow a_j(w) = a_j; \end{array} \right.$
- $A \subset A_s, A_s \subset A_s(w) \ \& \ A_s \subset \bar{A}_s(w);$
- $\left\{ \begin{array}{l} \exists v_{kj_i} \in w - \text{вероятностный} \\ \text{элемент характеристики,} \\ \Rightarrow v_{kj_i} = p_{ij} \ \& \ \sum_{j=1}^{k_i} p_{ij} = 1. \end{array} \right.$

Структура (2) обобщает структуры классических алфавитов с элементарными структурами символов и позволяет распространить ее на алфавиты с другой структурой символов. В частности, если алфавит носителя M числовой, то получим обычную структуру концов в системе координат.

Если алфавит носителя нетерминальный, задающий некоторый контекст, то символы этого алфавита в структуре (2) можно определить как ненагруженные концевые конструкции или нагруженными конструкциями нулевой длины со смысловыми характеристиками заданного списка.

Выясним некоторые свойства концевых структур. Предположим, что на алфавите B_1 определена структура концов типа (2) $C_s(B_1)$, а на алфавите B_2 соответствующая структура $C_s(B_2)$.

Определение 1.5. Структуры концов $C_s(B_1) = \langle M_1, \Sigma_1, \Lambda_1 \rangle$ и $C_s(B_2) = \langle M_2, \Sigma_2, \Lambda_2 \rangle$ однотипные, если $M_1 = M_2 | M_1 \neq M_2$, $\Sigma_1 = \Sigma_2$ с точностью до обозначений операций и аксиомы аксиоматик Λ_1 и Λ_2 одинаковы с точностью до имен символов алфавитов и характеристических списков.

Введенная концевая структура с помощью дополнительных операций дает возможность строить концевые конструкции, заданные определениями 1.3 и 1.4. Для этого введем в рассмотрение словарь алфавитов.

Предположим, что словарь $B = \bigcup_{k=0}^m B_k$, составленный из некоторых алфавитов B_k

таких, что $\bigcap_{k=1}^m B_k = \emptyset$ и на каждом определена однотипная концевая структура

$C_s(B_k) = \langle M_k, \Sigma, \Lambda \rangle$. Тогда на словаре B определена структура $C_s(B) = \langle M, \Sigma, \Lambda \rangle$, в

которой носитель $M = \bigcup_{k=0}^m M_k$.

Определение 1.6. Пусть $C_s(B_1) = \langle M_1, \Sigma_1, \Lambda_1 \rangle$ и $C_s(B_2) = \langle M_2, \Sigma_2, \Lambda_2 \rangle$ однотипные структуры, тогда концевая структура $C_s(B_1)$ есть *подструктурой* структуры $C_s(B_2)$, ($C_s(B_1) \subset C_s(B_2)$), если $M_1 \subset M_2$.

Очевидно, что составляющие словаря B определяют подструктуры $C_s(B_k)$ конечной структуры $C_s(B) = \langle M, \Sigma, \Lambda \rangle$.

Для свободной конечной структуры $C_s(B) = \langle M, \Sigma, \Lambda \rangle$ укажем некоторые алгебраические свойства.

Свойство 1.1. В структуре $C_s(B)$ всегда можно выделить однотипную подструктуру $C_s(D_j)$, $D_j \subset B$.

Множество всех подструктур $C_s(D_j)$ структуры $C_s(B)$ обозначим как \tilde{B} .

Определение 1.7. Подструктура $C_s(D_j)$ пустая, если $D_j = \{\varepsilon\}$.

Свойство 1.2. $C_s(\{\varepsilon\}) \in \tilde{B}$, пустая подструктура порождает пустой конечной алфавит.

Определение 1.8. Подструктуры $C_s(D_1), C_s(D_2) \in \tilde{B}$ эквивалентны, если $\hat{D}_1 = \hat{D}_2$.

Определение 1.9. Подмножество подструктур $S \subset \tilde{B}$ такое, что

$$S = \left\{ C_s(D_j); j \in J, \bigcup_{j \in J} C_s(D_j) = C_s(B) \right\}$$

называется образующим.

Свойство 1.3. Подструктуры, определенные на составляющих B_k словаря B являются образующими структуры $C_s(B)$.

Введенное определение 1.8 задает отношение эквивалентности на множестве подструктур \tilde{B} . Так же как в грамматических структурах [4], это отношение позволяет разбить множество \tilde{B} на классы эквивалентности и совместно с образующим множеством S дает возможность получить новые алгебраические свойства свободной конечной структуры.

Так как из аксиом аксиоматики структуры (2) следует, что нагруженные конечные алфавиты обобщают ненагруженные алфавиты, то в дальнейшем будем рассматривать только нагруженные алфавиты и обо-

значать их, независимо от ориентации, как \hat{B} , а при необходимости использовать обычные обозначения как в структуре (2).

Операции над свободными конечными конструкциями

Рассмотрим теперь конструктивную аксиоматику некоторых операций над свободными концами, порожденными структурой $C_s(\hat{B})$.

Аксиоматику $\Lambda(\otimes)$ линейной (двухместной) конкатенации \otimes над концами структуры $C_s(B)$ определим следующим образом:

$$\begin{cases} \forall \hat{s}_1, \hat{s}_2, \hat{s}_3 \in \hat{B}_k, \hat{s}_1 \otimes \hat{s}_2 = \hat{s}_1 \hat{s}_2 = \hat{l}, \\ \hat{s}_1 \otimes \hat{s}_2 \neq \hat{s}_2 \otimes \hat{s}_1, \hat{s}_1 \otimes \varepsilon = \varepsilon \otimes \hat{s}_1 = \hat{s}_1 = \hat{l}, \\ \hat{s}_1 \otimes \hat{s}_2 \otimes \hat{s}_3 = (\hat{s}_1 \otimes \hat{s}_2) \otimes \hat{s}_3 \\ \hat{s}_1 \otimes \hat{s}_2 \otimes \hat{s}_3 = \hat{s}_1 \otimes (\hat{s}_2 \otimes \hat{s}_3) = \hat{s}_1 \hat{s}_2 \hat{s}_3 = \hat{l}; \\ \forall \hat{s}_1, \hat{s}_2 \in \hat{B}_k = B_{ks} \Rightarrow \hat{l} = l = s_1 s_2; \\ \hat{B}_k = \bar{B}_{ks} \Rightarrow \hat{l} = \bar{l} = \bar{s}_1 \bar{s}_2; \\ \hat{s}_1 = \hat{s}_1(w_1) \& \hat{s}_2 = \hat{s}_2(w_2), \\ \hat{s}_2(w_2) \Rightarrow \hat{s}_1 \otimes \hat{s}_2 = \hat{l} = \bar{l}(w_1, w_2); \end{cases} \quad (3)$$

\hat{l} – конечная цепочка.

Операцию конкатенации \otimes двух конечных конструкций \hat{s}_1, \hat{s}_2 можно модифицировать, определив поворот конструкции \hat{s}_2 относительно \hat{s}_1 или, наоборот, на заданный угол γ , т.е. выполнить операцию конкатенации с поворотом $\otimes(\gamma)$ [8]. Другие модификации конкатенации получаются как конкатенации левых \otimes_l , правых \otimes_p и обоих \otimes_g концов конструкций. Так для операций \otimes_l, \otimes_p и

$$\begin{aligned} \hat{l}_r \notin \hat{l} \Rightarrow f(\hat{l}, q_i) = q_j \in W_i \mid \\ \hat{l} \stackrel{f(\hat{l}, q_i)=q_j}{\Rightarrow} \hat{l}_n; \end{aligned} \quad \text{соответственно}$$

имеем:

$$\bullet \begin{cases} \hat{s}_1 = (\hat{b}_{11}, \hat{b}_{12}) \& \hat{s}_2 = (\hat{b}_{21}, \hat{b}_{22}); \\ \hat{b}_{11}, \hat{b}_{12}, \hat{b}_{21}, \hat{b}_{22} \in \hat{B} \\ \Rightarrow \hat{s}_1 \otimes_l \hat{s}_2 = \hat{l} = (\hat{b}, \hat{b}_{12}) \vee (\hat{b}, \hat{b}_{22}), \\ \hat{b} = \hat{b}_{11} \mid \hat{b}_{21}; \end{cases}$$

- $\widehat{s}_1 \otimes_p \widehat{s}_2 = \widehat{l} = (\widehat{b}_{11}, \widehat{b}) \wedge (\widehat{b}_{21}, \widehat{b}),$
 $\widehat{b} = \widehat{b}_{12} | \widehat{b}_{22};$
- $\widehat{s}_1 \otimes_g \widehat{s}_2 = \widehat{l} = ((\widehat{b}_{11} = \widehat{b}_{21}), (\widehat{b}_{12} = \widehat{b}_{22})),$
 $w_1 \neq w_2;$

что соответствует слиянию соответствующих концов концевых конструкций.

Если аксиоматику операции \otimes над нагруженными концами дополнить списочным отображением η , то получим сложную операцию конкатенации \otimes_1 , для которой дополнение к аксиоматике будет

$$\begin{aligned} \widehat{s}_1 &= \widehat{s}_1(w_1) \& \widehat{s}_2 = \widehat{s}_2(w_2), \\ \widehat{s}_2(w_2) &\Rightarrow \widehat{s}_1 \otimes_1 \widehat{s}_2 = \widehat{l}(w), \\ w &= \eta(w_1, w_2); \end{aligned} \quad (4)$$

Введем некоторые ограничения на носители

$$\left\{ \begin{aligned} \forall \widehat{l} &= \widehat{l}_1^s \widehat{l}_j^s \widehat{l}_2, \widehat{l}_1, \widehat{l}_2 \in F(\widehat{A}_s \cup \widehat{H}_s); \\ &\text{по аксиоматике } \Lambda_j \Rightarrow \\ \mu(\widehat{l}_{i,j}^s) &= \widehat{s}_{i,j} \alpha_{i,j}(\mu(t_{i,j})), & \text{и опре-} \\ \mu(t_{i,j}) &= [\tau_{i,j_1}, \tau_{i,j_2}, \dots, \alpha_{i,j} \tau_{i,j_r}, \dots, \\ &[\tau_{i,j_k}]]; \end{aligned} \right.$$

делим правило отображения η .

Пусть $|w|$ длина характеристического списка некоторой свободной конструкции $\widehat{s}(w)$.

1. $\forall \widehat{s}_1, \widehat{s}_2 \in \widehat{B}_k, |w_1| = |w_2|$, это требование естественно выполняется, если ввести пустой символ ε вместо недостающего элемента в списке;

$$2. \left\{ \begin{aligned} \forall \widehat{s}_1, \widehat{s}_2 \in \widehat{B}_k, w_1 &= [r_{1p}, v_{1g_1}, v_{1g_2}, \dots, v_{1g_l}], \\ w_2 &= [r_{2p}, v_{2g_1}, v_{2g_2}, \dots, v_{2g_l}], \\ \Rightarrow v_{1g_j}, v_{2g_j} &\in V_j; \end{aligned} \right.$$

3. $U \times V_1 \times V_2 \times \dots \times V_l$ упорядоченно;

$$4. \left\{ \begin{aligned} U_1, U_2 \subset U \& V_{i1}, V_{i2} \subset V_i \Rightarrow \\ \eta: (U_1 \times_{i=1}^l V_{i1}, U_2 \times_{i=1}^l V_{i2}) &\rightarrow \quad, \\ \rightarrow \eta_0(U_1 \times U_2) \times_{i=1}^l \eta_i(V_{i1} \times V_{i2}) \end{aligned} \right.$$

где компоненты η_i отображения η операции, операторы, алгоритмы или структуры в зависимости от природы множеств V_i , причем относительно соответствующих

компонент отображения во множествах $q_k : (\widehat{m}_k : [\alpha_i \tau_{i_r} \rightarrow \tau_{i_r} \alpha_i,$
 $\alpha_j \tau_{j_r} \rightarrow \alpha_j \tau_{j_r}], \{q_{k+1}\}, \{\emptyset\});$ имеется единица θ_i ; в частности, для компоненты $\eta_0 \equiv +,$
 $\theta_0 \equiv 0.$

Разновидностью операции конкатенации \otimes_1 является операция с поглощением концов конструкций $\widehat{s}_1(w_1)$ и $\widehat{s}_2(w_2) - \otimes_2$. Для этой операции имеет место:

$$\left\{ \begin{aligned} \widehat{s}_1 &= (\widehat{b}_{11}, \widehat{b}_{12}) = \widehat{s}_1(w_1) \& \\ \widehat{s}_2 &= (\widehat{b}_{21}, \widehat{b}_{22}) = \widehat{s}_2(w_2); \\ \widehat{b}_{11}, \widehat{b}_{12}, \widehat{b}_{21}, \widehat{b}_{22} &\in \widehat{B} \Rightarrow \widehat{s}_1 \otimes_2 \widehat{s}_2 = \\ &= (\widehat{b}_{11}, \widehat{b}_{22}) = \widehat{s}_3(w), \\ w &= \eta(w_1, w_2). \end{aligned} \right.$$

Могут быть модифицированные операции конкатенации \otimes_2 , например, поглощение, только по одноименным концам конструкций $\widehat{s}_1(w_1)$ и $\widehat{s}_2(w_2)$, т.е. когда $\widehat{b}_{12} = \widehat{b}_{21}$.

Введенные операции предполагают внешние действия над концами, но операции конкатенации могут быть внутренними, т.е. расширять границы концов, создавать «тело» концов или дополнять его. Множество всех внешних и внутренних операций конкатенации над свободными концевыми конструкциями обозначим символом Ω .

Рассмотренные операции конкатенации позволяют получить композицию концевых конструкций над любыми элементами конструктивного алфавита. И далее исследовать свойства этих композиций.

Установим некоторые свойства концевых конструкций и рассмотрим другие операции над свободными концами.

Определение 2.1. Две свободные концевые конструкции $\widehat{s}_1(w_1)$ и $\widehat{s}_2(w_2)$ называются *однотипными*, если их характеристические списки w_1 и w_2 могут отличаться только первыми элементами.

Свойство 2.1. Концевые конструкции $\widehat{s}(w_1)$ и $\widehat{s}(w_2)$, характеристические списки

которых удовлетворяют условиям определения 2.1 однотипные.

Свойство 2.2. Однотипная последовательность $\{\widehat{s}(w_i)\}$ упорядочена по характеристикам длин в списках w_i и элементы этой последовательности образуют цепь по включению $\widehat{s}(w_i) \subset \widehat{s}(w_{i+1})$, если $r_i < r_{i+1}$, $i = 0, 1, \dots$.

Свойство 2.3. Однотипная конечная последовательность $\{\widehat{s}(w_i)\}$ ограничена снизу определенным свободным элементом алфавита A .

Определим операцию сложения двух однотипных свободных конечных конструкций:

$$\begin{cases} \widehat{s}_1 = (\widehat{b}_{11}, \widehat{b}_{12}) \& \widehat{s}_2 = (\widehat{b}_{21}, \widehat{b}_{22}); \\ \widehat{b}_{11}, \widehat{b}_{12}, \widehat{b}_{21}, \widehat{b}_{22} \in \widehat{B}; \\ w_1 = [r_1, v_1, v_2, \dots, v_l], \\ w_2 = [r_2, v_1, v_2, \dots, v_l] \\ \Rightarrow \widehat{s}_1(w_1) + \widehat{s}_2(w_2) = \widehat{s}(w) = (\widehat{b}_{11}, \widehat{b}_{22}), \\ w = [r_1 + r_2, v_1, v_2, \dots, v_l]; \\ \widehat{s}_1(w_1) + \widehat{s}_2(w_2) \neq \widehat{s}_2(w_2) + \widehat{s}_1(w_1). \end{cases} \quad (5)$$

Подобным образом можно определить операцию умножения однотипных конечных конструкций:

$$\begin{cases} \widehat{s}_1(w_1) * \widehat{s}_2(w_2) = \widehat{s}(w) = (\widehat{b}_{11}, \widehat{b}_{22}), \\ w = [r_1 * r_2, v_1, v_2, \dots, v_l]; \\ \widehat{s}_1(w_1) * \widehat{s}_2(w_2) \neq \widehat{s}_2(w_2) * \widehat{s}_1(w_1). \end{cases} \quad (6)$$

Определение 2.2. Список $w_0 = [r, \varepsilon, \varepsilon, \dots, \varepsilon]$ множества характеристических списков $W = U \times_{i=1}^l V_i$ называется скалярным.

Введем операцию умножения свободной конечной конструкции $\widehat{s}(w)$ на скалярный список правилом:

$$\begin{aligned} w_0 \circ \widehat{s}(w) &= \widehat{s}(w_1), \quad w = [r_1, v_1, v_2, \dots, v_l], \\ w_1 &= [r * r_1, \varepsilon \otimes v_1, \varepsilon \otimes v_2, \dots, \varepsilon \otimes v_l]. \end{aligned} \quad (7)$$

Свойство 2.4. Операция умножения конечной конструкции на скалярный список коммутативна и ассоциативна.

Введенные операции сложения и умножения являются полезными при представлении концов. Так конструктивная концевая

структура (2) для нагруженных концов порождает, вообще говоря, бесконечный конечной алфавит. Однако, если воспользоваться операцией умножения нагруженной конечной конструкции на скалярный список, то конечной алфавит будет конечным и его элементы можно определить как $\widehat{s}_g([1, v_{1g_1}, v_{2g_2}, \dots, v_{lg_l}])$.

Определение 2.3. Алфавит \widehat{B} с элементами \widehat{s}_g называется нормальным конструктивным алфавитом свободных нагруженных концов.

Грамматическая структура концов

Традиционно формальные грамматики строятся как безусловные, т. е. порождаемые цепочки языка грамматики выделяются в пределах выбранных правил из некоторого свободного языка без всяких условий. Условия отбора цепочек формального языка удобно задавать в грамматической структуре. Для этого необходимо поставим определенную задачу. Рассмотрим следующую задачу.

Задача. На структурах концов (2) необходимо построить формальную конструктивную структуру грамматики, порождающую такой язык, чтобы цепочки языка удовлетворяли условиям совместимости смысловых характеристик смежных концов по операциям конкатенации.

Некоторые подходы проверки контекстных условий в языках программирования приведены в работе [10]. Один из них основан на использовании формальных программных грамматик для проверки совпадения контекстов по индексу. Модификация этого подхода к решению вопроса смысловой совместимости конечных конструкций состоит в следующем:

- на конечных конструкциях порожденных структурой (2) строятся цепочки с приписанным смысловым контекстом или выделяются из свободного языка (такие цепочки имеются в свободном языке);

- с помощью оператора гомоморфизма [3], как в S -системах, выделяются по соответствующему индексу из характеристических списков концов определенный смысловый показатель;

- проверка совместимости (совпадения по индексу) смысловых показателей конечных конструкций реализуется в программной грамматике с ядрами в виде матричных продукций [11].

Таким образом, решение поставленной задачи требует интегрированного подхода, как в грамматиках структурного проектирования [11].

Пусть A , определенный выше, терминальный алфавит и $N = H \cup T$ нетерминальный алфавит. Где $H = \{\alpha_i\}_{i=1}^p$ – основной алфавит и $T = T_1 \times T_2 \times \dots \times T_m$ – характеристический алфавит концевой структуры (2), причем $T_i = \{\tau_{ij}\}_{j=0}^{i_i}$, $\tau_{i0} = \varepsilon$. Предположим, что, если нетерминальные концевые конструкции нагружены, то они имеют нулевую длину, поэтому их представление по структуре (2) зададим так: $(\alpha_i, \alpha_i) = \alpha_i(t)$, в котором характеристический список $t \in T$. Если $t = [\varepsilon, \varepsilon, \dots, \varepsilon]$, то примем $\alpha_i(t) = \alpha_i$.

Построение формального языка концевых конструкций $L(G)$ будем проводить с помощью грамматической структуры [4]. Представим формальную концевую грамматическую структуру в виде:

$$C_G = \langle M_G, \Sigma_G, \Lambda_G \rangle. \quad (8)$$

Носитель грамматической структуры (8) зададим на конструктивных структурах концов построенных на этих свободных алфавитах \hat{A}_s , и \hat{H}_s , т. е. $M_G = \langle C_s(A), C_s(H), N \rangle$. Причем нагруженный конструктивный алфавит, который может порождаться структурой $C_s(A)$ является нормальным, а нагруженный нетерминальный конструктивный алфавит состоит их конструктивных концов нулевой длины (в списке t этот элемент опущен).

Сигнатуру и аксиоматику грамматической структуры (8) определим, как

$$\Sigma_G = \Omega \cup \{\circ^2, \eta^k, +^2, *^2, \mu^k, m^k, \rightarrow^2, \Rightarrow^2, f^2, \chi^1\}$$

и

$$\Lambda_G = (\Lambda_F, \Lambda_K, \Lambda_J, \Lambda_Y, \Lambda_M, \Lambda_P, \Lambda_V, \Lambda_C, \Lambda_H, \Lambda_L)$$

Операции сигнатуры $(\circ, \eta, +, *)$ задаются правилами (4) – (7), смысл других операций будет дан в аксиоматике. Составляющие аксиоматики имеют следующий смысл и задаются конструктивными аксиомами:

Λ_F – аксиоматика свободного языка:

- $\left\{ \begin{array}{l} \forall \hat{s}_1, \hat{s}_2, \hat{s}_3 \in \hat{A}_s \cup \hat{H}_s \ \& \ \forall \bullet \in \Omega \Rightarrow \\ \Rightarrow \hat{s}_1 \bullet \hat{s}_2 = \hat{s}_1 \hat{s}_2 = \hat{l}; \\ \forall \alpha, \beta \in N \Rightarrow \alpha \otimes \beta = \alpha \beta = l; \end{array} \right.$
- списочное отображение η применяется только над конструктивными концами алфавита \hat{A}_s ;
- $\left\{ \begin{array}{l} \forall \hat{s}_i, \hat{s}_j \in \hat{A}_s \mid \hat{H}_s \mid \hat{A}_s \cup \hat{H}_s \ \& \\ \hat{l} = \hat{s}_i \mid \hat{s}_j \Rightarrow \hat{l} \bullet \hat{l} = \hat{l}; \\ \forall \alpha, \beta \in N \ \& \ l = \alpha \mid \beta \Rightarrow l \otimes l = l; \\ \{\hat{l}\} = F(\hat{A}_s) \mid F(\hat{H}_s) \mid F(\hat{A}_s \cup \hat{H}_s), \\ \{l\} = F(N) - \text{свободные языки.} \end{array} \right.$

Λ_K – аксиоматика контекста:

- $\left\{ \begin{array}{l} \forall \hat{s}_i \in \hat{A}_s \ \& \ \forall \hat{s}_j(t) \in \hat{H}_s, \\ t \neq [\varepsilon, \varepsilon, \dots, \varepsilon] \Rightarrow \\ \hat{s}_i \otimes \hat{s}_j = \hat{s}_i \hat{s}_j = \hat{s}_i \alpha_j(t) = \hat{l}^s \\ \hat{l}^s - \text{цепочка с контекстом;} \\ \{\hat{l}^s\} = F^s \subset F(\hat{A}_s \cup \hat{H}_s), \\ F^s - \text{свободный язык.} \end{array} \right.$

Λ_J – аксиоматика гомоморфизма μ :

- $\left\{ \begin{array}{l} \forall \hat{l} \in F(\hat{A}_s) \mid F(\hat{H}_s) \mid F(\hat{A}_s \cup \hat{H}_s) \mid \\ \mid F(N) \\ \ \& \ \hat{l} = \hat{s}_1 \hat{s}_2 \dots \hat{s}_r \\ \Rightarrow \mu(\hat{l}) = \mu(\hat{s}_1) \otimes \mu(\hat{s}_2) \otimes \dots \otimes \mu(\hat{s}_r); \end{array} \right.$
- $\forall \hat{s}_i \in \hat{A}_s \mid \hat{H}_s \Rightarrow \mu(\hat{s}_i) = \hat{s}_i$;

- $$\begin{cases} \forall \widehat{l}^s \in F^s \ \& \ \widehat{l}^s = \widehat{s}_i \alpha_j(t), \\ t = [\tau_{j_1}, \tau_{j_2}, \dots, \tau_{j_r}, \dots, \tau_{j_k}], \\ \text{для заданного } r \\ \Rightarrow \mu(\widehat{l}^s) = \widehat{s}_i \mu(\alpha_j(t)) = \\ = \widehat{s}_i \alpha_j \mu(\mu(t) \mu()), \\ \mu(t) = [\tau_{j_1}, \tau_{j_2}, \dots, \mu(\tau_{j_r}), \dots, \tau_{j_k}], \\ \mu(\tau_{j_r}) = \alpha_j \tau_{j_r}. \end{cases}$$

Λ_Y – аксиоматика продукций подстановок и отношения непосредственного вывода:

- $$\begin{cases} \widehat{p}_i : \widehat{l}_i \rightarrow \widehat{l}_k, \ \widehat{l}_j, \widehat{l}_k \in F(\widehat{H}_s) | \\ F(\widehat{A}_s \cup \widehat{H}_s), \\ 0 < |\widehat{l}_j| < k_1, \ 0 \leq |\widehat{l}_k| < k_2; \end{cases}$$
- $$\forall \widehat{p}_i : \widehat{l}_j \rightarrow \widehat{l}_k \ \& \ \forall \widehat{p}_r : \widehat{l}_i \rightarrow \widehat{l}_m \ \& \\ i \neq r \Rightarrow \widehat{l}_j \neq \widehat{l}_i \ | \ \widehat{l}_j = \widehat{l}_i;$$
- $\{\widehat{p}_i\}_{i=1}^r = \widehat{P}$ – продукционная схема;
- $$\begin{cases} (\widehat{l} = \widehat{l}_1 \widehat{l}_2) \in (\widehat{A}_s \cup \widehat{H}_s) \ \& \\ \ \& \ \exists (\widehat{p}_i : \widehat{l}_j \rightarrow \widehat{l}_k) \in \widehat{P} \\ \Rightarrow \widehat{l}_1 \widehat{l}_2 \xrightarrow{\widehat{p}_i} \widehat{l}_1 \widehat{l}_k \widehat{l}_2 \end{cases}$$

\widehat{p}_i допустимая продукция к цепочке \widehat{l} .

Λ_M – аксиоматика списочных (матричных) продукций и отношения непосредственного вывода:

- $$\begin{cases} \widehat{m}_j - \text{списочная подстановка,} \\ \widehat{m}_j = [\widehat{p}_{j_1}, \widehat{p}_{j_2}, \dots, \widehat{p}_{j_k}], \\ \widehat{p}_{j_i} \in \widehat{P}; - \text{уникальный список;} \end{cases}$$
- $\widehat{M} = \{\widehat{m}_j\}_{j=1}^k$ продукционная списочная схема;
- $$\begin{cases} \widehat{m}_j \in \widehat{M} - \text{допустимая к } \widehat{l}, \\ \widehat{l} \xrightarrow{\widehat{m}_j} \widehat{l}_j; \\ \widehat{l} \xrightarrow{\widehat{p}_{j_1}} \widehat{l}_1 \xrightarrow{\widehat{p}_{j_2}} \widehat{l}_2 \dots \xrightarrow{\widehat{p}_{j_k}} \widehat{l}_k = \widehat{l}_j. \end{cases}$$

Λ_P – аксиоматика программных продукций отношений выбора и непосредственных выводов:

- $\forall \widehat{m}_i \in \widehat{M}, \ \exists q_i : (\widehat{m}_i, K_i, W_i); -$ программная продукция;
- $\{q_i\}_{i=1}^n = Q, \ q_i \neq q_j, \ i \neq j; -$ множество меток продукций;

- $K_i \subseteq Q$ – множество удач, и $W_i \subseteq Q$ – множество неудач продукции \widehat{m}_i .

- $$\begin{cases} q_i \in Q, \ q_i : (\widehat{m}_i, K_i, W_i) \ \& \\ \widehat{m}_i \text{ допустимая к } \widehat{l}, \ \widehat{l} \xrightarrow{\widehat{m}_i} \widehat{l}_i; \\ \Rightarrow \exists q_j \in K_i, \ \widehat{m}_j \text{ допустимая к } \widehat{l}_i; \\ \widehat{l} \xrightarrow{\widehat{m}_i, \widehat{m}_j} \widehat{l}_j; \end{cases}$$

q_i – допустимая продукция к цепочке \widehat{l} на множестве удач K_i ;

- $$\begin{cases} q_i \in Q, \ q_i : (\widehat{m}_i, K_i, W_i) \ \& \\ \widehat{m}_i \text{ недопустимая к } \widehat{l}; \\ \Rightarrow \exists q_j \in W_i, \ \widehat{m}_j \text{ допустимая к } \widehat{l}; \\ \widehat{l} \xrightarrow{\widehat{m}_j} \widehat{l}_j; \end{cases}$$

q_i – допустимая продукция к цепочке \widehat{l} на множестве неудач W_j .

Λ_V – аксиоматика оператора выбора продукций для непосредственного вывода:

- $$\begin{cases} \forall q_i \in Q, \ q_i : (\widehat{m}_i, K_i, W_i) \ \& \\ \ \& \ \widehat{l} \in F(\widehat{A}_s \cup \widehat{H}_s); \\ f(\widehat{l}, q_i) - \text{оператор выбора продукций;} \end{cases}$$

- $$\begin{cases} \widehat{l}_r \xrightarrow{\widehat{m}_i} \widehat{l}_i \ \& \\ \widehat{l}_r \in \widehat{l} \Rightarrow f(\widehat{l}, q_i) = q_j \in K_i \ | \\ \widehat{l} \xrightarrow{q_i, f(\widehat{l}, q_i)=q_j} \widehat{l}_n; \end{cases}$$

- $$\begin{cases} \widehat{l}_r \xrightarrow{\widehat{m}_i} \widehat{l}_i \ \& \\ \widehat{l}_r \notin \widehat{l} \Rightarrow f(\widehat{l}, q_i) = q_j \in W_i \ | \\ \widehat{l} \xrightarrow{f(\widehat{l}, q_i)=q_j} \widehat{l}_n; \end{cases}$$

Λ_C – аксиоматика совместимости контекстных характеристик:

- $$\begin{cases} \forall \widehat{l}_i^s, \widehat{l}_j^s \in F^s, \ \widehat{l}_{i,j}^s = \widehat{s}_{i,j} \alpha_{i,j}(t_{i,j}), \\ t_{i,j} = [\tau_{i,j_1}, \tau_{i,j_2}, \dots, \tau_{i,j_r}, \dots, \tau_{i,j_k}] \ \& \\ \tau_{i_r} = \tau_{j_r} \Rightarrow \widehat{l}_i^s, \widehat{l}_j^s - \text{совместны} \\ \text{по индексур;} \end{cases}$$

- $\forall r, \widehat{l}_i^s, \widehat{l}_j^s$ – *совместны по индексу* $r \Rightarrow$
 $\Rightarrow \widehat{l}_i^s, \widehat{l}_j^s$ – *совместны*;

$\left\{ \begin{array}{l} \forall \widehat{l} = \widehat{l}_1^s \widehat{l}_2^s \widehat{l}_3^s \widehat{l}_4^s, \widehat{l}_1, \widehat{l}_2 \in F(\widehat{A}_s \cup \widehat{H}_s); \\ \text{по аксиоматике } \Lambda_J \Rightarrow \end{array} \right.$

- $\left\{ \begin{array}{l} \mu(\widehat{l}_{i,j}^s) = \widehat{s}_{i,j} \alpha_{i,j}(\mu(t_{i,j})), \\ \mu(t_{i,j}) = [\tau_{i,j_1}, \tau_{i,j_2}, \dots, \alpha_{i,j} \tau_{i,j_r}, \dots, \\ \tau_{i_k, j_k}]; \end{array} \right.$

- для фиксированных значений индексов i_r и j_r проверяется по списочной схеме \widehat{M} совпадение характеристик τ_{i_r} и τ_{j_r} (по этим индексам):

$$q_k : (\widehat{m}_k : [\alpha_{i_r} \tau_{i_r} \rightarrow \tau_{i_r} \alpha_{i_r}, \\ \alpha_{j_r} \tau_{j_r} \rightarrow \alpha_{j_r} \tau_{j_r}], \{q_{k+1}\}, \{\emptyset\});$$

$$q_{k+1} : (\widehat{m}_{k+1} : [\alpha_{i_r} \rightarrow \varepsilon, \alpha_{j_r} \rightarrow \varepsilon], \\ \{q_{k+2}\}, \{\emptyset\});$$

$$q_{k+2} : \dots$$

Λ_H – аксиоматика индуктивных правил:

- $U \subseteq \widehat{H}_s$ – множество начальных концевых конструкций,
- $\widehat{l}_0 \in U \ \& \ \exists q_i : (\widehat{m}_i : \widehat{l}_0 \rightarrow \widehat{l}_k, Y_i, W_i) \in Q \Rightarrow q_i$ – аксиома начала;

- $\left\{ \begin{array}{l} \widehat{l}_k \in F(\widehat{A}_s) | F^s \\ \& \exists q_i : (\widehat{m}_i : \widehat{l}_j \rightarrow \widehat{l}_k, K_i, W_i) \in Q, \\ W_i = \emptyset | (K_i = \emptyset \ \& \ W_i = \emptyset) \Rightarrow q_i^*; \end{array} \right.$

– *заключительная аксиома*.

Λ_L – аксиоматика управления выводом правильных цепочек и формального языка:

- $\left\{ \begin{array}{l} \widehat{l} \in F(\widehat{A}_s \cup \widehat{H}_s) | F^s \ \& \ \forall q_i \in Q, \\ q_i : (\widehat{m}_i, K_i, W_i); \\ \chi(\widehat{l}) \text{ – оператор управления выводом}; \end{array} \right.$

- $\chi(\widehat{l}) = f(\mu(\circ | + | * | \bullet | \eta, (\widehat{l}))) = q_j \in Q$
– суперпозиция альтернативных операций и операторов;

- $\left\{ \begin{array}{l} (\exists ((q_1, q_2, \dots, q_m) \subseteq Q);) \\ q_j = q_k | q_j \neq q_k \\ \& \widehat{l}_0 \in U \ \& \ \widehat{l}_m \in F(\widehat{A}_s) | F^s; \\ \left(\begin{array}{l} \chi(\widehat{l}_0) = q_{j_1} \quad \chi(\widehat{l}_1) = q_{j_2} \quad \dots \quad \chi(\widehat{l}_{m-1}) = q_{j_m}^* \\ \widehat{l}_0 \Rightarrow \widehat{l}_1 \Rightarrow \dots \Rightarrow \widehat{l}_m \end{array} \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \widehat{l}_m \text{ – правильная цепочка}; \end{array} \right.$

- $W(\widehat{l}_m) = (\widehat{l}_0 \xrightarrow{q_1} \widehat{l}_1 \xrightarrow{q_2} \dots \xrightarrow{q_m^*} \widehat{l}_m)$ – вывод цепочки \widehat{l}_m ;

- $\{\widehat{l}_m\} = L(C_G)$ – формальный язык, порождаемый концевой грамматической структурой.

Таким образом, построена формальная конструктивная грамматическая структура свободных концов, которая порождает согласованный по определенной семантике язык.

Выводы

Введенные концевые структуры алфавитов и разработанные на их основе конструктивные грамматические структуры обобщают классические структуры грамматик. Предложенные модификации свободных концов позволяют строить предметные концевые грамматические структуры для конструирования и автоматизации технологических процессов предметных областей, выполнять анализ технологических конфигураций и пр.

Представляется возможным рассмотреть методику построения свободных пар концов и грамматических структур распространить на более сложные концевые конструкции, симплексы, симплицальные комплексы и др.

Важным аспектом при разработке грамматических структур систем искусственного интеллекта является управляемость. Включение элементов управления в грамматику приводит к существенному усложнению ее структуры. В работе управление реализовано через выбор в свободном языке согласованных, по одному характеру

стическому показателю конечных конструкций, что потребовало введения оператора управления выводом и сопутствующих ему аксиоматик. Решение вопроса управляемости в грамматических структурах по нескольким показателям является не простым, так как может привести вычислительной неустойчивости при реализации конфигураций языковых представлений, т.е. решение проблемы управляемости возможно, например, при включении алгоритмической структуры [5] в грамматическую структуру.

Библиографический список

1. Гладкий, А. В. Формальные грамматики и языки [Текст] / А. В. Гладкий. – Москва: Наука, 1973. – 368 с.
2. Гинзбург, С. Математическая теория контекстно-свободных языков [Текст] / С. Гинзбург. – Москва: Мир, 1970. – 328 с.
3. Фу, К. С. Структурные методы в распознавании образов [Текст] / К. С. Фу. – Москва: Мир, 1977. – 318 с.
4. Lindenmayer, A. Mathematical models for cellular interaction in development. Pats I and II. [Text] / A. Lindenmayer // Journal of Theoretical Biology. – 1968. – V. 18. – P. 280-315.
5. Лисовик, Л. П. Об одном методе задания фрактальных множеств [Текст] / Л. П. Лисовик, Т. А. Карнаух // Кибернетика и системный анализ. – 2009. – № 3. – С. 42-49.
6. Саломаа, А. Жемчужины теории формальных языков [Текст] / А. Саломаа. – Москва: Мир, 1986. – 159 с.
7. Ильман, В. М., Структурний підхід до проблеми відтворення граматик [Текст] / В. М. Ильман, В. І. Шинкаренко // Проблеми програмування. – 2007. – № 1. – С. 5-16.
8. Шинкаренко, В. И. Структурные модели алгоритмов в задачах прикладного программирования. I. Формальные алгоритмические структуры [Текст] / В. И. Шинкаренко, В. М. Ильман, В. В. Скалозуб // Кибернетика и системный анализ. – 2009. – № 3. – С. 3-14.
9. Суворов, Г. Д. Простые концы и последовательности плоских отображений [Текст] / Г. Д. Суворов. – Киев: Наукова думка, 1986. – 187 с.
10. Роджерс, Д. Математические основы машинной графики [Текст] / Д. Роджерс, Дж. Адамс. – Москва: Мир, 2001. – 604 с.
11. Андон, Ф. И., Алгебро-алгоритмические модели и методы параллельного программирования [Текст] / Ф. И. Андон, А. Е. Дорошенко, Г. Е. Цейтлин, Е. А. Яценко. – Киев: Академперіодика, 2007. – 634 с.

Ключові слова: конструктивні граматичні структури, вільні кінцеві об'єкти, ланцюжкові конструкції, сумісність об'єктів.

Ключевые слова: конструктивные грамматические структуры, свободные конечные объекты, цепочечные конструкции, совместимость объектов.

Keywords: constructive grammatical structures, free end-capping objects, chain constructions, compatibility objects.

Поступила в редколлегию 07.05.2014