

500/1
Г-70

Министерство Путей Сообщения СССР

ДНЕПРОПЕТРОВСКИЙ ИНСТИТУТ ИНЖЕНЕРОВ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО
ТРАНСПОРТА имени Л. М. КАГАНОВИЧА

ГОРОДЕЦКАЯ Т. Л.

К ВОПРОСУ О ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЯХ
СИСТЕМЫ СОСРЕДОТОЧЕННЫХ МАСС
С УПРУГИМИ И УПРУГО-ВЯЗКИМИ СВЯЗЯМИ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

ДНЕПРОПЕТРОВСК

1951 г.

НТБ
ДНУЖТ

Вопрос о продольных колебаниях системы сосредоточенных масс с упругими связями возникает в связи с многими задачами техники, в частности, в связи с исследованием динамических усилий в упряжных аппаратах поездов. Определение этих усилий имеет большое значение при проектировании подвижного состава.

246 а. Вычисление усилий в упряжных аппаратах при установившихся режимах движения не представляет труда. Значительно сложнее вопрос об определении усилий в упряжных аппаратах при неустановившихся режимах движения — трогании с места, торможении, приложении дополнительной силы тяги и т. п.

Проф. Николай Егорович Жуковский наметил два пути решения этой задачи, принимая поезд за упругий стержень с грузом на конце и рассматривая поезд, как систему сосредоточенных масс с упругими связями.

Проф. В. А. Лазарян исследовал в своих работах усилия в упряжных аппаратах, принимая поезд за упругий стержень.

В настоящей работе поезд рассматривается, как система сосредоточенных масс.

Работа посвящена определению усилий, возникающих при продольных колебаниях в связях, соединяющих сосредоточенные массы. Рассмотрен случай упругих связей и случай связей упруго-вязких, т.е. таких, в которых кроме упругих сил действуют еще силы сопротивления взаимным перемещениям сосредоточенных масс, пропорциональные их относительным скоростям.

Рассмотрены усилия при действии постоянной силы, внезапно приложенной к головной массе (локомотиву), при действии силы, произвольно изменяющейся во времени и при ударе головной массы по остальной системе.

В работе произведено сравнение усилий, возникающих в упругих связях, которыми соединяются сосредоточенные массы с усилиями, возникающими в различных сечениях упругого стержня с грузом на конце при действии таких же сил, как указано выше, приложенных к грузу.

В первой главе рассматриваются продольные колебания системы масс с упругими связями, причем одна масса — M (локомотив) отлична от остальных масс — m (вагонов). Предполагается, что к системе приложена сила F (разность между касательной силой тяги локомотива и сопротивлением его движению), которая при $t \gg 0$ постоянна, а при $t < 0$ равна нулю. Составлена система дифференциальных уравнений движения $n+1$ точек в форме уравнений Лагранжа II рода. Эта система преобразована в систему из n дифференциальных уравнений относительно искомых усилий в связях.

Метод решения был избран символический. Система полученных уравнений, записанная символически, имеет такой вид:

$$\begin{aligned} [D^2 + \lambda^2(k+1)]T_1 - \lambda^2 T_2 &= Fk\lambda^2 \\ -\lambda^2 T_1 + [D^2 + 2\lambda^2]T_2 - \lambda^2 T_3 &= 0 \\ &\vdots \\ -\lambda^2 T_{n-2} + [D^2 + 2\lambda^2]T_{n-1} - \lambda^2 T_n &= 0 \\ -\lambda^2 T_{n-1} + [D^2 + 2\lambda^2]T_n &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $\lambda^2 = \frac{c}{m}$, где c — жесткость связей, m — масса точки,

$k = \frac{m}{M}$ (отношение массы вагона к массе локомотива). $D^2 T$ обозначает символически вторую производную от $T(t)$.

Вековое уравнение имеет вид:

$$\Delta = \lambda^{2n} \begin{vmatrix} a+k-1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & a-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a-1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & a-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & a \end{vmatrix} \quad (2)$$

и, если, раскрыть определитель, то его можно представить так:

$$(a+k-1)\Delta^{(n-1)} - \Delta^{(n-2)} = 0 \quad (3)$$

где буквой a обозначена величина $\frac{D^2}{\lambda^2} + 2$.

Для определения $\Delta^{(i)}$ имеет место такое рекуррентное соотношение:

$$\Delta^{(i)} = \Delta^{(1)}\Delta^{(i-1)} - \Delta^{(i-2)} \quad (4)$$

С помощью соотношения (4) можно, начиная с $\Delta^{(1)} = a$ последовательно получить все $\Delta^{(i)}$, т. е. левую часть уравнения частот (3).

При большом n раскрытие определителя и решение уравнения частот представляет собой громоздкую задачу. Решение этой задачи можно упростить в связи с тем, что полиномы $\Delta^{(i)}$ представляют собой систему ортогональных полиномов Чебышева II рода:

$$u_i = \frac{\sin(i+1)\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} \quad (5)$$

Если положить $a=2x$ во (2) и представить в явном виде полиномы u_i (5), то окажется в самом деле, что $\Delta^{(i)}$ представляют систему полиномов (5). Для полиномов Чебышева (5) также справедливо рекуррентное соотношение, подобное (4).

С помощью полиномов Чебышева уравнению частот (3) сразу можно придать удобную форму:

$$\sin(n+1)\beta - (1-k)\sin n\beta = 0 \quad (6)$$

корни которого заключены в пределах $\frac{n\pi}{n+1} < \beta_p < \frac{n(p+1)\pi}{n+1}$. Решить такое уравнение не представляет особого труда, а D^2 через β выражается так: $D^2_p = -\lambda^2 4 \sin^2 \frac{\beta_p}{2}$

Рассмотрен случай, когда число точек $n \rightarrow \infty$, а их массы $m \rightarrow 0$ при сохранении массы всей системы постоянной $n \cdot m = \text{const}$.

В результате предельного перехода получено уравнение

$$\operatorname{tg} \gamma = -\alpha \gamma \quad (\beta n = \gamma; \alpha = \frac{M}{nm}) \quad (7)$$

Такой вид имеет уравнение частот для стержня с грузом на конце.

Показано, что частоты колебания рассматриваемой системы сосредоточенных масс, равные $\nu_p = 2\lambda \sin \frac{\beta_p}{2}$, при достаточно большом n отличаются от частот продольных колебаний стержня на величину III порядка малости.

Что касается усилий $T_i(t)$, то они были определены с помощью символического метода таким образом: из системы алгебраических уравнений (1) определялись $T_i(D) = \frac{\Delta_i(D)}{\Delta(D)}$ где $\Delta(D)$ —определитель системы (2), а $\Delta_i(D)$ —можно получить с помощью рекуррентного соотношения (4) и следующей формулы:

$$\Delta_i = Fk\lambda^2 \Delta^{(n-i)} \quad (8)$$

Проще можно вычислить Δ_i с помощью полиномов Чебышева.

$$\Delta_i = Fk\lambda^{2n} \frac{\sin(n-i+1)\beta}{\sin\beta} \quad (9)$$

Зная корни определителя $\Delta(D)$, можно разложить его на множителя, а $T_i = \frac{\Delta_i(D)}{\Delta(D)}$ представить в виде суммы рациональных дробей вида $\frac{A_{ip}}{D^2 - D_p^2}$. Отрицательная степень D определяется как операция, обратная дифференцированию и для усилия в упругих связях при нулевых начальных условиях получается соотношение:

$$T_i = \sum_{p=1}^n A_{ip} [1 - \cos \nu_p t] \quad (10)$$

В работе приведена формула для вычисления коэффициентов A_{ip} .

Показано, что в результате предельного перехода при $n \rightarrow \infty$, $m \rightarrow 0$ и $n \cdot m = \text{const}$ для усилий имеет место такая же формула, как получил В. А. Лазарян в своих работах для упругого стержня с грузом на конце*).

Далее, аналогичным образом, решалась задача об определении усилий в упруго-вязких связях системы сосредоточенных масс, т. е. была учтена сила сопротивления вза-

*) В. А. Лазарян. Исследование неустановившихся режимов движения поездов. Трансжелдориздат, 1949 г.

НТБ
ДНУЖТ

имным перемещениям точек, при чем она была принята пропорциональной I степени скорости взаимных перемещений. В этом случае система дифференциальных уравнений относительно усилий в связях в символическом виде получается такая:

$$\begin{aligned} T_1[D^2 + D(k+1)\delta + (k+1)\lambda^2] + T_2(-\delta D - \lambda^2) &= Fk\lambda^2 \\ T_1(-\delta D - \lambda^2) + T_2[D^2 + 2(\delta D + \lambda^2)] + T_3(-\delta D - \lambda^2) &= 0 \end{aligned} \quad (11)$$

$$T_{n-1}(-\delta D - \lambda^2) + T_n[D^2 + 2(\delta D + \lambda^2)] = 0,$$

где δ — коэффициент, характеризующий вязкость.

Частоты в этом случае также можно выразить через корни уравнения (6)

Показано, что частоты в случае связей упруго-вязких определяются из формулы

$$b_p = \sqrt{\nu_p^2 - \left(\frac{\delta r_p}{2}\right)^2} \quad (12)$$

где ν_p — частота колебаний без сил сопротивления, а

$$r_p = 4\sin^2 \frac{\beta_p}{2} \text{ или } r_p = \frac{\nu_p^2}{\lambda^2}$$

Способом, аналогичным тому, который применялся для связей упругих, получены формулы, с помощью которых определяются усилия в связях упруго-вязких

$$T_i = \sum_{p=1}^n \frac{\beta_{ip}}{a_p^2 + b_p^2} \left\{ 1 - e^{a_p t} \left[\cos b_p t - \frac{a_p}{b_p} \sin b_p t \right] \right\} \quad (13)$$

где

$$a_p = \frac{\delta_p r}{2}$$

В первой главе работы разобраны численные примеры. В тех случаях, когда головная масса M больше масс вагонов m ни в одной связи усилия не превышают силу F , т. е. силу, приложенную к головной массе.

Характер изменения усилий для числа точек, равного 5, для 9 и для 14 — одинаковый. Усилия во всех случаях возрастают и остаются некоторое время постоянными, а затем

убывают и далее вновь возрастают. Графики T_1 , T_2 , T_3 сдвинуты последовательно вправо по оси времени, что и следовало ожидать, так как усилие в упругой связи возникает тогда, когда волна натяжения, распространяясь вдоль системы, достигает рассматриваемой связи. По сдвигу графиков можно судить о скорости распространения волны натяжения, которая отличается весьма мало от скорости распространения упругой волны в стержне, так что для определения скорости распространения волны натяжения в системе, состоящей только из пяти точек, можно ее (систему) заменить упругим стержнем.

Произведенные вычисления позволяют сделать заключение, что для определения частот колебаний систему, состоящую из отдельных точек (даже при числе масс в системе равном 5) можно заменить упругим стержнем. Частота основного тона колебаний стержня в этом случае отличается от частоты основного тона колебаний стержня на $3,1\%$, а при числе масс в системе равном 9—эти частоты отличаются друг от друга на $1,1\%$.

Графики изменения усилий в упругих связях системы сосредоточенных масс по характеру не отличаются от графиков усилий в различных сечениях упругого стержня. Из приведенных в работе таблиц и графиков видно, что максимальные усилия в упругих связях сосредоточенных масс и в соответствующих сечениях упругого стержня совпадают, даже при числе масс равном пяти.

В тех случаях, когда головная масса $M \leq m$ усилия в связях значительно выше, чем в тех случаях, когда $M > m$ и изменяются быстрее.

Произведенные в работе вычисления усилий в связях упруго-вязких (рассмотрены два случая разных коэффициентов вязкости), показывают, что усилия в этих случаях не превышают силы F . Колебания усилий происходят вокруг значений последних при стационарном движении. Колебания затухают и действующие усилия становятся равными усилиям при стационарном движении.

В работе рассмотрен также продольный удар по системе точек с упругими и упруго-вязкими связями. При исследовании продольного удара была использована теорема о связи реакции системы на единичную силу с реакцией системы на единичный импульс. Эту теорему можно формулировать так: усилия, возникающие в рассматриваемой системе при ударе, равны произведению количества движения

ударяющего груза на производные по времени от усилий, полученных при действии, внезапно приложенной постоянной силы F , деленных на эту силу F . Таким образом, для определения усилий при ударе получаются простые формулы. Так, для связей упругих усилия при ударе можно вычислить по следующей формуле:

$$S_i = \frac{K}{F} \sum_{p=1}^n \frac{A_{ip}}{v_p} \sin v_p t \quad (14)$$

где K — количество движения ударяющегося груза.

Анализ результатов показывает, что в случае продольного удара распространение усилий носит волновой характер. Усилие в первой связи, если полагать ее упругой, возрастает очень быстро от нуля при $t=0$ до величины близкой к величине усилия, которое возникает в месте соударения упругого стержня с грузом. Затем усилие уменьшается, меняет знак и снова начинает возрастать.

В случае связей упруго-вязких в первой связи при $t=0$ получается усилие отличное от нуля. Это происходит в силу того, что на процесс оказывает влияние сила сопротивления взаимным перемещениям точек. В прочих связях усилия при $t=0$ и некоторое время после этого момента (пока упругая волна не достигнет соответствующей связи) остаются равными нулю, затем возрастают и в дальнейшем изменение усилий носит характер затухающих колебаний.

Сравнения полученных результатов с результатами, которые имеются в работах В. А. Лазаряна, позволяют заключить, что для исследования продольного удара можно систему, состоящую из конечного числа материальных точек, даже при пяти точках в системе, заменить стержнем.

В работе вычислены усилия в упругих и упруго-вязких связях системы сосредоточенных масс, возникающие под действием постоянной силы, но полученные результаты могут быть использованы для определения усилий в связях упругих и упруго-вязких под действием силы, изменяющейся по любому заданному закону. Последние могут быть определены, если воспользоваться интегралом Дюгамеля.

Так, усилия в упругих связях, под действием силы $F(t)$ вычисляются из соотношения

$$P(t) = \int_0^t F(\tau) \frac{dT}{d\tau} (t - \tau) d\tau, \quad (15)$$

где $T(t)$ —есть усилия в упругих связях, возникающие под действием единичной силы (реакция системы на единичную силу).

Для экспериментальной проверки полученных результатов был произведен ряд опытов на моделях. На имеющейся в измерительной лаборатории Днепропетровского института инженеров ж. д. транспорта механической модели были произведены опыты по соударению отдельного вагона с системой. Относительные перемещения вагонов при ударе фиксировались при помощи высокочастотной киносъемки и при помощи осциллографирования электрических импульсов от специального датчика.

Кроме того, на установленной там же электрической модели (электроинтеграторе), были получены усилия, возникающие при ударе массы по системе,

Эксперименты хорошо подтвердили результаты теоретических исследований.

дипт, зак. № 161, 0,5 печ. л., 43000 зн. в печ. л., подписано к печати 19-V 1951 г.
Тираж 115 экз. БТ 06160.

Сканировала Камянская Н.А.

НТБ
ДНУЖТ