ПОХІДНА ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ

2017

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ДНІПРОПЕТРОВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ЗАЛІЗНИЧНОГО ТРАНСПОРТУ
ІМЕНІ АКАДЕМІКА В. ЛАЗАРЯНА

Похідна та її застосування

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

ДНІПРО
2017

УДК 621.332.3
П 64

Автори:
Кузнецов Віталій Миколайович
Бусарова Тетяна Миколаївна
Агошкова Тетяна Анатоліївна
Клименко Ірина Володимирівна
Міхєєва Наталя Василівна

Рецензенти:
д-р фіз.-мат. наук, проф. *С. О. Пічугов* (ДНУЗТ),
д-р техн. наук, проф. *С. С. Тищенко* (ДДАЕУ)

Рекомендовано
вченою радою університету як навчальний посібник
(*протокол № 11 від 01.07.2016*).
Зареєстровано НМВ ДНУЗТ
(*реєстр. № 288/16/11 від 01.07.2016*)

П 64 **Похідна** та її застосування [Текст]: навчальний посібник / В. М. Кузнецов, Т. М. Бусарова, Т. А. Агошкова, І. В. Клименко, Н. В. Міхєєва; Дніпропетр. нац. ун-т залізн. трансп. ім. акад. В. Лазаряна. – Дніпро, 2017. – 104 с.
ISBN 978-966-8471-83-4

Посібник містить теоретичний матеріал з розділу вищої математики «Похідна та її застосування», запитання для самоперевірки, а також зразки розв’язування типових прикладів.

Для студентів першого курсу інженерно-технічних спеціальностей.

Іл. 49. Бібліогр.: 4 назви.

УДК 621.332.3

ISBN 978-966-8471-83-4

ВСТУП

Мета викладання дисципліни «Вища математика» – допомогти студентам оволодіти математичним апаратом, достатнім для опрацювання математичних моделей, пов'язаних із їхньою подальшою практичною діяльністю.

Навчальний посібник «Похідна та її застосування» допоможе студентам засвоїти методи розв'язання задач з цього розділу вищої математики. Переваги посібника: з одного боку – невеликий формат, з другого – містить усе, що потрібно студенту для підготовки до відповідного модуля.

Кожен розділ посібника починається з теоретичного матеріалу, який включає важливі означення, теореми та формули. Потім розглядається достатня кількість розв'язаних прикладів, які поділені на дві групи: найпростіші та приклади середньої важкості. Автори свідомо не розглядали прикладів підвищеної складності, тому що ставили мету навчити студента розв'язувати основні приклади, навчити деякому мінімуму, необхідному для засвоєння студентом цього розділу вищої математики.

Посібник буде добрим помічником студентам I курсу всіх факультетів у вивченні вказаного розділу. Цей розділ є необхідною і важливою частиною курсу лекцій з вищої математики.

Навчальний посібник «Похідна та її застосування» може бути застосований як доповнення до лекційного матеріалу, так і для самостійної роботи студентів.

У результаті вивчення матеріалу посібника студенти повинні знати основні поняття та формули, а також вміти застосовувати їх під час розв'язання прикладних задач.

1. Задачі, які приводять до поняття похідної

1.1. Геометрична задача

Нехай криву задано рівнянням $y = f(x)$ і в точці $M_0(x_0, y_0)$ проведено дотичну T (не перпендикулярно до осі Ox). Візьмемо на кривій точку $M_1(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$. Пряма M_0M_1 буде січною. Нехай φ – кут, який утворює січна M_0M_1 з додатним напрямком осі Ox, а α – кут між дотичною M_0T і теж додатним напрямком осі Ox (рис. 1).

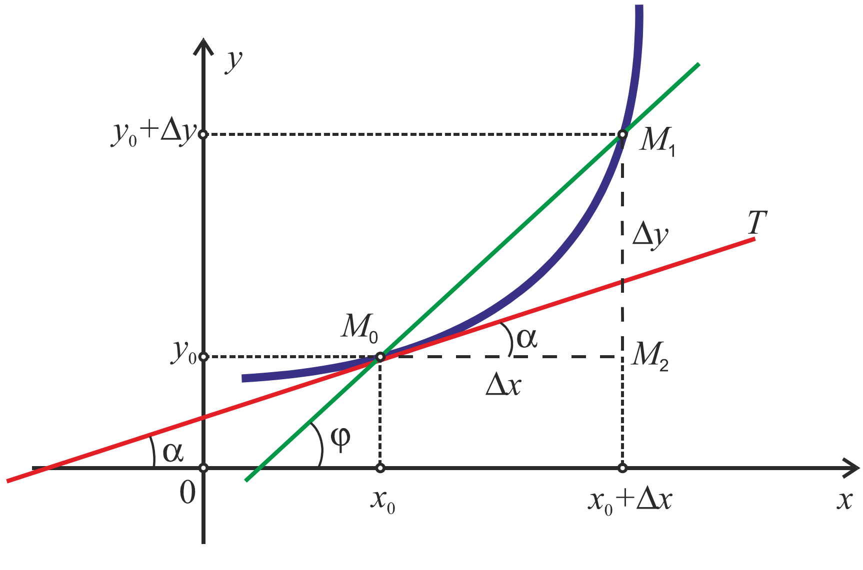


Рис. 1

Розглянемо прямокутний трикутник $M_0M_1M_2$ $(\angle M_1M_0M_2 = \varphi)$ (див. рис. 1). Тоді

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{M_1M_2}{M_2M_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Нехай $\Delta x \to 0$. Тоді точка M_1 буде прямувати вздовж кривої до точки M_0, кут φ – до кута α, а січна M_0M_1 наближатиметься до дотичної M_0T (*дотичною* до кривої в точці M_0 називається граничне положення січної M_0M_1, якщо точка M_1 наближається вздовж кривої до точки M_0), тобто

$$\lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg}\varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \operatorname{tg}\alpha .$$

З аналітичної геометрії відомо, що $\operatorname{tg}\alpha = k$ (k – кутовий коефіцієнт прямої). Тоді

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg}\alpha = k . \qquad (1)$$

Цю границю й називають *кутовим коефіцієнтом дотичної*.

1.2. Фізична задача

Нехай матеріальна точка *m* рухається за законом $S = S(t)$ вздовж прямої і за час *t* проходить відстань *OM* (рис. 2). Знайдемо швидкість руху точки *m* в положенні *M*.

Нехай з моменту часу *t* пройшов ще деякий невеликий проміжок часу, який позначимо через Δt, а шлях MM_1, пройдений за цей час, позначимо через ΔS. Середня швидкість руху точки *m* за час Δt буде дорівнювати

$$v_{\text{сер}} = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t} .$$

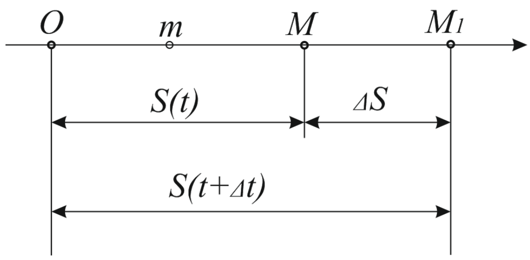


Рис. 2

Нагадаємо, що нам потрібно знайти швидкість матеріальної точки *m* у положенні *M*. Чим менший проміжок ΔS, тим ближче буде значення $v_{\text{сер}}$ до значення швидкості в точці *M*. Швидкість руху точки *m* у момент часу t характеризує та границя, до якої прямує середня швидкість при $\Delta t \to 0$. Тобто

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = v. \quad (2)$$

Цю границю й називають *швидкістю руху* точки m в даний момент часу t.

2. Похідна функції

2.1. Означення похідної

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на деякому інтервалі.

1. Зафіксуємо значення аргументу x і знайдемо відповідне значення функції $y = f(x)$.

2. Надамо аргументові x деякого приросту (додатного або від'ємного) Δx. Тобто розглянемо ще одне значення аргументу $x + \Delta x$ і знайдемо відповідне значення функції $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$.

3. З одержаної рівності знайдемо приріст функції $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

4. Складемо відношення $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$.

5. Знайдемо границю цього відношення при $\Delta x \to 0$.

Границя (якщо вона існує і скінченна) відношення приросту функції Δy до приросту аргументу Δx, коли приріст аргументу прямує до нуля, називається *похідною* функції $y = f(x)$ у точці x:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x). \tag{3}$$

Похідну позначають ще й так: $y'(x)$, y', $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{df}{dx}$. Значення похідної при $x = a$ позначається так: $f'(a)$.

Функція, яка має похідну в точці x, називається *диференційованою* в точці x.

Зазначимо, що при визначенні похідної ми сформулювали п’ять пунктів. Такий шлях називають *знаходженням похідної «по кроках»*, або за означенням.

Знайдемо, наприклад, похідну функції $y=\sin x$ у точці x по кроках:

1. Зафіксуємо x і знайдемо значення функції $y=\sin x$.

2. Надамо аргументу x деякого приросту Δx, тобто розглянемо нове значення аргументу $x+\Delta x$ і знайдемо відповідне значення функції $y+\Delta y=f\left(x+\Delta x\right)=\sin\left(x+\Delta x\right)$.

3. Знайдемо приріст функції

$$\Delta y=f\left(x+\Delta x\right)-f\left(x\right)=\sin\left(x+\Delta x\right)-\sin x .$$

4. Складемо відношення $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{\sin\left(x+\Delta x\right)-\sin x}{\Delta x}$.

5. Знайдемо границю цього відношення, коли $\Delta x\to 0$:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\left(x+\Delta x\right)-\sin x}{\Delta x}=\left\{\begin{array}{c}\text{застосуємо тригонометричну формулу}\\ \sin\alpha-\sin\beta=2\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\end{array}\right\}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\dfrac{x+\Delta x-x}{2}\cdot\cos\dfrac{x+\Delta x+x}{2}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}1\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=\cos x .$$

Таким чином, $\left(\sin x\right)'=\cos x$.

Аналогічно можна показати, що $\left(\cos x\right)'=-\sin x$.

Знайдемо так само по кроках (або за означенням) похідну функції $y=\ln x$:

1. Зафіксуємо x і знайдемо значення функції $y=\ln x$.

2. Надамо аргументу x деякого приросту Δx і знайдемо відповідне значення функції $y+\Delta y=f\left(x+\Delta x\right)=\ln\left(x+\Delta x\right)$.

3. Знайдемо приріст функції $\Delta y = \ln(x+\Delta x) - \ln x$.

4. Складемо відношення $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\ln(x+\Delta x) - \ln x}{\Delta x}$.

5. Знайдемо границю цього відношення, коли $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln(x+\Delta x)-\ln x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln\dfrac{x+\Delta x}{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\cdot\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right) =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}} = \ln\lim_{\Delta x\to 0}\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}} = \left\{\begin{array}{l}\text{маємо невизначеність } \{1^{\infty}\},\\ \text{тому застосуємо другу}\\ \text{чудову границю:}\\ \lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e\end{array}\right\} =$$

$$= \ln\lim_{\Delta x\to 0}\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}\cdot\frac{1}{x}} = \ln e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}.$$

Таким чином, $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

2.2. Геометричний і фізичний зміст похідної

Згадаємо геометричну задачу й формулу (1):

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha = k.$$

Геометричний зміст похідної: похідна функції $y = f(x)$ у точці x_0 дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної до графіка цієї функції в даній точці x_0, тобто $f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha = k$.

Згадаємо фізичну задачу й формулу (2):

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{S(t+\Delta t) - S(t)}{\Delta t} = S'(t) = v(t).$$

Фізичний зміст похідної: похідна функції $S = S(t)$ у момент часу t дорівнює швидкості руху точки m у момент часу t, тобто $S'(t) = v(t)$.

І взагалі, якщо функція $y = f(x)$ описує деякий процес (фізичний, хімічний та ін.), то похідна $y' = f'(x)$ – це *швидкість зміни* цього процесу.

2.3. Зв'язок між диференційованістю й неперервністю функції в точці

Теорема. Якщо функція $y = f(x)$ диференційована в деякій точці $x = x_0$, то функція в цій точці неперервна.

Доведення. Якщо функція $y = f(x)$ диференційована в точці x_0, то в цій точці виконується рівність $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$.

Застосуємо теорему (формулюємо її в скороченому вигляді): якщо $\lim y = b$, то $y = b + \alpha$ (α – нескінченно мала функція). Тоді

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha \quad \text{або} \quad \Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha \Delta x. \tag{4}$$

За означенням функція неперервна в точці, якщо $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$.

Перейдемо до границі в рівності (4) при $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \left[f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x \right] = 0.$$

Тобто функція $y = f(x)$ неперервна в точці x_0.

Зауваження. Обернена теорема не виконується. Тобто, неперервна в деякій точці функція $y = f\left(x\right)$ не завжди має похідну в цій точці. Для підтвердження цього факту розглянемо приклади.

Приклад 1. Функція $y = \sqrt[3]{x}$ (рис. 3) *неперервна* на $\left(-\infty; +\infty\right)$. У точці $x_0 = 0$ дотична до кривої – вертикальна й збігається з віссю Oy. Кут нахилу цієї дотичної $\alpha = \pi/2$, кутовий коефіцієнт $k = f'\left(x_0\right) = \mathrm{tg}\,\alpha = \mathrm{tg}\dfrac{\pi}{2}$ не існує, тобто в точці $x_0 = 0$ *похідна не існує*.

Приклад 2. Задано кусково-неперервну функцію (рис. 4)

$$y = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 1; \\ 3x-2, & 1 < x \le 2. \end{cases}.$$

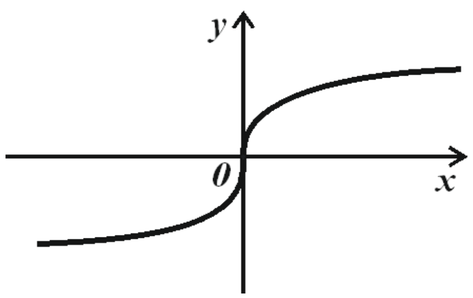


Рис. 3

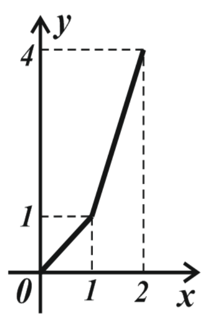


Рис. 4

У точці $x_0 = 1$ задана функція *неперервна*.

За означенням похідної відношення $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ прямує при $\Delta x \to 0$ до однієї й тієї самої границі незалежно від того, який знак має приріст Δx (додатний чи від'ємний).

Перевіримо, чи має похідну функція в точці $x_0 = 1$.

Нехай $\Delta x > 0$. Тоді

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\left(1+\Delta x\right) - f\left(1\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left[3\cdot\left(1+\Delta x\right)-2\right] - \left[3\cdot 1 - 2\right]}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3\cdot\Delta x}{\Delta x} = 3.$$

Нехай $\Delta x < 0$. Тоді

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[1+\Delta x] - 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$$

Отже, границя залежить від того, який знак має приріст аргументу Δx, а це означає, що функція в точці $x_0 = 1$ *не має похідної*.

Тобто існують неперервні функції, які в деяких точках не мають похідних.

Запитання для самоперевірки

1. Що таке похідна функції?
2. Як знайти похідну за означенням (по кроках)?
3. Який геометричний зміст має похідна?
4. Який фізичний зміст має похідна?
5. Якщо функція неперервна в точці x_0, то чи буде в цій точці функція мати похідну?

2.4. Основні теореми й правила диференціювання функцій

1. Похідна сталої $y = c$ дорівнює нулю.

Дійсно, нехай $y = c$. Тоді

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x) = c \Rightarrow \Delta y = c - c = 0 \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0.$$

Отже $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$, тобто похідна сталої дорівнює нулю: $c' = 0$.

2. Нехай функції $u = u(x)$ і $v = v(x)$ диференційовані в точці x.

Тоді в цій точці:

1) похідна суми (різниці) двох (і більше) функцій дорівнює сумі (різниці) похідних цих функцій: $[u \pm v]' = u' \pm v'$;

2) похідна добутку двох функцій u і v обчислюється за формулою

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v';$$

3) похідна частки цих функцій обчислюється за формулою

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}, v \neq 0.$$

Доведемо, наприклад, другу рівність.

Доведення. Нехай $y = u \cdot v$. Тоді $y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v)$. Знайдемо Δy.

$$\Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv = \Delta u \cdot v + u \cdot \Delta v + \Delta u \Delta v.$$

Складемо відношення $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ і знайдемо його границю, коли $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u \cdot v + u \cdot \Delta v + \Delta u \Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\Delta u}{\Delta x} v + \frac{\Delta v}{\Delta x} u + \frac{\Delta u \Delta v}{\Delta x}\right] =$$

$$= v \underbrace{\left[\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}\right]}_{u'} + u \underbrace{\left[\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}\right]}_{v'} + \lim_{\Delta x \to 0} \Delta u \underbrace{\left[\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}\right]}_{v'}.$$

Перш ніж записати відповідь, пояснимо одержаний вираз. У перших двох доданках v і u винесено за знак границі тому, що вони не залежать від Δx. У третьому доданку можна було б Δu і Δv поміняти місцями – нічого б не змінилось. Вирази у квадратних дужках – це похідні відповідних функцій. Третій доданок прямує до нуля, тому що функція $u(x)$ диференційована, а тому й неперервна. А це означає, що $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta u = 0$. Таким чином,

$$(uv)' = u'v + uv'. \tag{5}$$

Зауваження. Якщо одна з функцій, наприклад функція $u(x)$, є сталою величиною, тобто $u = C$, то за формулою (5) маємо

$$[Cv]' = C'v + Cv' = \{C' = 0\} = Cv'.$$

Це означає, що *сталий множник можна виносити за знак похідної*.

Приклад. $y = 4\sin x$. Знайти y'.

Розв'язання. $y' = (4\sin x)' = 4(\sin x)' = 4\cos x$.

Застосовуючи зауваження, можна знайти похідну функції $y = \log_a x$. Дійсно, $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a} = \dfrac{1}{\ln a}\ln x$.

Тут $C = \dfrac{1}{\ln a}$. Тоді

$$y' = (\log_a x)' = \left(\frac{1}{\ln a}\ln x\right)' = \frac{1}{\ln a}(\ln x)' = \frac{1}{\ln a \cdot x}.$$

Маємо $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$.

За допомогою формули похідної частки знайдемо похідну функції $y = \operatorname{tg} x$:

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Тобто $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

Аналогічно можна знайти похідну функції $y = \operatorname{ctg} x$:

$(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$ (знайдіть самостійно).

3. Теорма (про похідну оберненої функції). Якщо для функції $y = f(x)$ існує обернена функція $x = \varphi(y)$, яка в точці y має похідну

$\varphi'(y)$, що не дорівнює нулю, то у відповідній точці x функція $y = f(x)$ має похідну, яка обчислюється за формулою

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} \text{ або } f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)},\ x'_y = \varphi'(y) \neq 0 .$$

Зазначимо, що індекси вказують, за якою змінною обчислюється похідна.

Доведення. За умовами теореми функція $x = \varphi(y)$ має похідну, тобто $x'_y = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\Delta x}{\Delta y}$. Далі запишемо такий ланцюжок:

$$x'_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{1}{\dfrac{\Delta y}{\Delta x}} = \left\{ \begin{matrix} \text{якщо } \Delta y \to 0, \\ \text{то і } \Delta x \to 0 \end{matrix} \right\} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\dfrac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{y'_x} .$$

Тобто $x'_y = \dfrac{1}{y'_x}$ або навпаки $y'_x = \dfrac{1}{x'_y}$.

Застосуємо цю теорему для знаходження похідної функції $y = a^x$.

Спочатку запишемо обернену функцію $x = \log_a y$ та її похідну $x_y{}' = \dfrac{1}{y \ln a}$.

За теоремою про похідну оберненої функції маємо

$$y'_x = \left(a^x\right)' = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\dfrac{1}{y \ln a}} = y \ln a = a^x \ln a .$$

Отже, $\left(a^x\right)' = a^x \ln a$.

Як окремий випадок $\left(e^x\right)' = e^x \ln e = e^x$.

Тепер знайдемо похідні обернених тригонометричних функцій за допомогою цієї самої теореми.

Для функції $y = \arcsin x$ обернена функція $x = \sin y$. Її похідна $x'_y = \cos y$. Тоді

$$y'_x = \left(\arcsin x\right)' = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Отже, $\left(\arcsin x\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Аналогічно можна знайти, що $\left(\arccos x\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (знайдіть самостійно).

Для функції $y = \mathrm{arctg} x$ похідна має вигляд

$$y'_x = \left(\mathrm{arctg}\, x\right)' = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\dfrac{1}{\cos^2 y}} = \cos^2 y = \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Аналогічно можна показати, що $y'_x = \left(\mathrm{arcctg}\, x\right)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$ (знайдіть самостійно).

4. Теорема (про похідну складної функції).

Якщо функція $y = f\left(u\right)$ має похідну в точці u, а функція $u = \varphi\left(x\right)$ – похідну в точці x, тоді складна функція $y = f\left[\varphi\left(x\right)\right]$ має похідну в точці x, яка обчислюється за формулою

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x. \tag{6}$$

Зазначимо, що індекси у формулі (6) вказують, за якою змінною обчислюється похідна.

Доведення. Запишемо відношення $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ у вигляді $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \dfrac{\Delta u}{\Delta x}$. Знайдемо границю відношення, коли $\Delta x \to 0$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Функція $u=\varphi(x)$ неперервна в точці *x*. Тому, якщо $\Delta x \to 0$, то і $\Delta u \to 0$. Тоді

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=\left\{\lim_{\Delta u\to 0}\ \frac{\Delta y}{\Delta u}=y'_u,\ \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=u'_x\right\}=y'_u\cdot u'_x.$$

Тобто $y'_x=y'_u\cdot u'_x$.

Таким чином, щоб продиференціювати складну функцію $y=f\left[\varphi(x)\right]$, де $\varphi(x)=u$, необхідно знайти похідну від «зовнішньої» функції *y* за проміжним аргументом *u* і помножити на похідну від «внутрішньої» функції $u=\varphi(x)$ за аргументом *x*.

Зазначимо, що це правило можна використовувати й для функції, яка складена з трьох і більше функцій.

За допомогою цієї теореми знайдемо похідну функції $y=x^{\alpha}$. Спочатку перетворимо функцію:

$$y=x^{\alpha}=e^{\ln x^{\alpha}}=e^{\alpha\ln x}.$$

Одержали складну функцію

$$y=e^{\alpha\ln x}\Rightarrow y=e^{u};\ \ u=\alpha\ln x.$$

Знайдемо похідні функцій $y=e^{u}$ та $u=\alpha\cdot\ln x$:

$$y'_u=e^{u};\ u'_x=\left(\alpha\cdot\ln x\right)'=\alpha\frac{1}{x}.$$

За формулою (6) маємо:

$$y'_x=e^{u}\alpha\frac{1}{x}=e^{\alpha\cdot\ln x}\alpha\frac{1}{x}=x^{\alpha}\alpha\frac{1}{x}=\alpha x^{\alpha-1}.$$

Таким чином, $\left(x^{\alpha}\right)'=\alpha x^{\alpha-1}$.

Розглянемо окремі випадки цієї формули:

1) $x'=1$; 2) $\left(x^{2}\right)'=2x$;

3) $\left(\sqrt{x}\right)' = \left\{\text{тут } \alpha = \dfrac{1}{2}\right\} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$;

4) $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = \{\text{тут } \alpha = -1\} = -\dfrac{1}{x^2}$.

Таблиця похідних

$\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha x^{\alpha-1}$	$(\sin x)' = \cos x$
$(x)' = 1$	$(\cos x)' = -\sin x$
$\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\mathrm{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
$\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$	$(\mathrm{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
$\left(a^x\right)' = a^x \ln a$	$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\left(e^x\right)' = e^x$	$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$	$(\mathrm{arc\,tg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$	$(\mathrm{arc\,ctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

Запитання для самоперевірки

1. Яке значення має похідна сталої?
2. Яке значення має похідна частки?
3. За якою формулою обчислюється похідна оберненої функції?
4. За якою формулою обчислюється похідна складної функції?
5. Чим відрізняються похідні функцій $y = \arcsin x$ і $y = \arccos x$?

2.5. Розв'язання прикладів

Розділ I (найпростіші приклади)

Наведені нижче приклади ми будемо розв'язувати за допомогою таблиці похідних і правил диференціювання.

Приклад 1. Обчислити похідні функцій:

1) $y = \ln x - 8\mathrm{tg}x$; 2) $y = \dfrac{2}{x} + \dfrac{x}{2}$; 3) $y = \arccos x - 4 \cdot 5^x + e^2$.

Розв'язання. Усі три функції складаються із суми (різниці) функцій. Користуємося формулою $(u \pm v)' = u' \pm v'$.

1. $y' = (\ln x - 8\mathrm{tg}x)' = (\ln x)' - (8\mathrm{tg}x)' = \dfrac{1}{x} - 8\dfrac{1}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{8}{\cos^2 x}$.

2. Запишемо функцію таким чином: $y = 2 \cdot \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2} x$. Тоді

$$y' = 2\left(\frac{1}{x}\right)' + \frac{1}{2}(x)' = -\frac{2}{x^2} + \frac{1}{2}.$$

3. Зазначимо, що e^2 – це стала, похідна якої дорівнює нулю:

$$y' = (\arccos x)' - 4\left(5^x\right)' + \left(e^2\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 4 \cdot 5^x \ln 5 + 0 =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 4 \cdot 5^x \ln 5.$$

Приклад 2. Обчислити похідні функцій:

1) $y = x^3$; 2) $y = \sqrt{x^3}$; 3) $y = x^2 \cdot \sqrt{x}$; 4) $y = \dfrac{5}{\sqrt[3]{x^2}}$.

Розв'язання. Усі чотири функції – степеневі, тобто вигляду $y = x^{\alpha}$. Усі чотири приклади обчислюються за формулою $\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha \cdot x^{\alpha - 1}$:

1. Тут $\alpha = 3$. Тоді

$$y' = \left(x^3\right)' = 3x^{3-1} = 3x^2.$$

2. Тут $\alpha = \frac{3}{2}$, тобто $y = x^{\frac{3}{2}}$. Тоді

$$y' = \frac{3}{2} x^{\frac{3}{2}-1} = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}.$$

3. Перетворимо задану функцію таким чином:

$$y = x^2 \cdot \sqrt{x} = x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{5}{2}}.$$

Тут $\alpha = \frac{5}{2}$. Тоді

$$y' = \frac{5}{2} x^{\frac{5}{2}-1} = \frac{5}{2} x^{\frac{3}{2}} = \frac{5}{2} x\sqrt{x}.$$

4. Перетворимо задану функцію таким чином:

$$y = \frac{5}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{5}{x^{\frac{2}{3}}} = 5x^{-\frac{2}{3}}.$$

Тут $\alpha = -\frac{2}{3}$. Тоді

$$y' = \left(5x^{-\frac{2}{3}}\right)' = 5\left(x^{-\frac{2}{3}}\right)' = 5\left(-\frac{2}{3}\right)x^{-\frac{2}{3}-1} = -\frac{10}{3}x^{-\frac{5}{3}} =$$

$$= -\frac{10}{3}\cdot\frac{1}{x^{\frac{5}{3}}} = -\frac{10}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x^5}} = -\frac{10}{3x\sqrt[3]{x^2}}.$$

Приклад 3. Знайти похідні функцій у заданій точці x_0:

1) $y = x^2 + 2x,\ x_0 = 1;$ 2) $y = \cos x - \frac{1}{2}\mathrm{ctg}x,\ x_0 = \frac{\pi}{2}.$

Розв'язання.

1. Спочатку знайдемо похідну функції в загальному вигляді, тобто $y' = 2x + 2$. А тепер обчислимо значення похідної в точці $x_0 = 1$, тобто $y'(1)$: $y'(1) = 2\cdot 1 + 2 = 4$.

2. Аналогічно

$$y' = -\sin x + \frac{1}{2\sin^2 x}; \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2\sin^2\frac{\pi}{2}} = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Приклад 4. Знайти похідні добутку й частки функцій:

1) $y = x^4 \cdot \ln x$; 2) $y = \mathrm{arctg}x \cdot \left(2 - 3x^2\right)$;

3) $y = \dfrac{x^5}{x+1}$; 4) $y = \dfrac{e^x + 5x}{\sin x}$.

Розв'язання. Застосуємо відповідні формули: $\left(u \cdot v\right)' = u' \cdot v + u \cdot v'$ та $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$.

1. Тут $u = x^4$, $v = \ln x$. Тоді

$$y' = \left(x^4 \cdot \ln x\right)' = \left(x^4\right)' \ln x + x^4 \cdot \left(\ln x\right)' = 4x^3 \cdot \ln x + x^4 \cdot \frac{1}{x} =$$

$$= 4x^3 \cdot \ln x + x^3 = x^3\left(4\ln x + 1\right).$$

2. Тут $u = \mathrm{arctg}x$, $v = 2 - 3x^2$. Тоді

$$y' = \left[\mathrm{arctg}x \cdot \left(2 - 3x^2\right)\right]' = \frac{1}{1+x^2} \cdot \left(2 - 3x^2\right) + \mathrm{arctg}x \cdot \left(0 - 3 \cdot 2x\right) =$$

$$= \frac{2 - 3x^2}{1+x^2} - 6x \cdot \mathrm{arctg}x.$$

3. Тут $u = x^5$; $v = x + 1$. Тоді

$$y' = \left(\frac{x^5}{x+1}\right)' = \frac{\left(x^5\right)' \cdot \left(x+1\right) - x^5 \cdot \left(x+1\right)'}{\left(x+1\right)^2} = \frac{5x^4\left(x+1\right) - x^5\left(1+0\right)}{\left(x+1\right)^2} =$$

$$= \frac{5x^4\left(x+1\right) - x^5}{\left(x+1\right)^2} = \frac{5x^5 + 5x^4 - x^5}{\left(x+1\right)^2} = \frac{4x^5 + 5x^4}{\left(x+1\right)^2} = \frac{x^4\left(4x+5\right)}{\left(x+1\right)^2}.$$

4. $y' = \left(\dfrac{e^x + 5x}{\sin x}\right)' = \dfrac{\left(e^x + 5\right)\cdot \sin x - \left(e^x + 5x\right)\cdot \cos x}{\sin^2 x}.$

Приклад 5. Знайти похідні складних функцій:

1) $y = \sin^3 x$; 4) $y = \ln\left(x^2 + 3\right)$; 7) $y = \mathrm{arctg}^4 5x$;

2) $y = \sin x^3$; 5) $y = 3^{x+x^2}$; 8) $y = \cos\left(\dfrac{x}{4} + \dfrac{\pi}{3}\right), y'(0) - ?$;

3) $y = \sin 3x$; 6) $y = e^{\cos 6x}$; 9) $y = 7^{\sin 5x}$;

10) $y = \sqrt[4]{\sin 7x}$.

Розв'язання. Нагадаємо формулу, за якою будемо розв'язувати подані приклади: $y'_x = y'_u \cdot u'_x$. Тобто, щоб знайти похідну від складної функції, необхідно знайти похідну від «зовнішньої» функції $y(u)$ і помножити її на похідну від «внутрішньої» функції $u(x)$. Якщо функція складається з трьох і більше функцій, то правило знаходження похідної не змінюється: похідна складної функції дорівнює добутку похідних від функцій, що її утворюють.

1. Запишемо задану функцію таким чином: $y = (\sin x)^3$. Вона складається з двох функцій: $y = u^3, u = \sin x$. Знайдемо похідні цих функцій: $y'_u = 3u^2$; $u'_x = \cos x$.

Тоді за наведеною формулою маємо:

$$y'_x = 3u^2 \cos x = 3(\sin x)^2 \cos x = 3\sin^2 x \cdot \cos x.$$

2. На перший погляд функція $y = \sin x^3$ нагадує функцію з попереднього прикладу. Але це інша функція: $y = \sin u, u = x^3$. Знайдемо похідні: $y'_u = \cos u$; $u'_x = 3x^2$. Тоді

$$y'_x = \cos u \cdot 3x^2 = \cos x^3 \cdot 3x^2 = 3x^2 \cos x^3.$$

3. А цю функцію запишемо так: $y = \sin u,\ u = 3x$. Знайдемо похідні: $y'_u = \cos u$; $u'_x = 3$. Тоді

$$y'_x = \cos u \cdot 3 = 3\cos 3x.$$

4. Аналогічно для функції $y = \ln\left(x^2+3\right)$ маємо $y = \ln u$, $u = x^2 + 3$. Похідні цих функцій $y'_u = \dfrac{1}{u}$, $u'_x = 2x$. Звідси

$$y'_x = \frac{1}{u}\cdot 2x = \frac{1}{x^2+3}\cdot 2x = \frac{2x}{x^2+3}.$$

5. Запишемо складові функції: $y = 3^u$; $u = x + x^2$. Тоді

$$y' = \left(3^u\right)'\cdot\left(x+x^2\right)' = 3^u\cdot\ln 3\cdot\left(1+2x\right) = 3^{x+x^2}\cdot\ln 3\cdot\left(1+2x\right).$$

6. Функція $y = e^{\cos 6x}$ складається з трьох функцій: $y = e^u$, $u = \cos v$, $v = 6x$. У цьому випадку похідна обчислюється за формулою $y'_x = y'_u\cdot u'_v\cdot v'_x$.

Тоді маємо: $y'_u = e^u$, $u'_v = -\sin v$, $v'_x = 6$. Перемножимо знайдені похідні та запишемо результат:

$$y'_x = e^u\cdot\left(-\sin v\right)\cdot 6 = e^{\cos v}\cdot\left(-\sin v\right)\cdot 6 = -6e^{\cos 6x}\cdot\sin 6x.$$

7. Запишемо функцію у вигляді $y = \mathrm{arctg}^4 5x = \left(\mathrm{arctg}5x\right)^4$. Запишемо складові функції: $y = u^4, u = \mathrm{arctg}v, v = 5x$. Знайдемо похідні цих функцій і перемножимо їх: $y' = 4u^3, u' = \dfrac{1}{1+v^2}, v' = 5$. Тоді

$$y'_x = 4u^3\cdot\frac{1}{1+v^2}\cdot 5 = 4\cdot\left(\mathrm{arctg}5x\right)^3\cdot\frac{1}{1+25x^2}\cdot 5 = \frac{20\mathrm{arctg}^3 5x}{1+25x^2}.$$

8. У цьому прикладі необхідно знайти значення похідної в точці $x_0 = 0$. Запишемо складові функції: $y = \cos u, u = \dfrac{x}{4}+\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{4}x+\dfrac{\pi}{3}$.

Знайдемо похідні цих функцій, а потім y'_x:

$$y'_u = -\sin u, u'_x = \frac{1}{4};\quad y'_x = -\sin\left(\frac{x}{4}+\frac{\pi}{3}\right)\cdot\frac{1}{4}.$$

Тепер обчислюємо значення похідної в заданій точці $x_0 = 0$:

$$y'_x(0) = y'(0) = -\sin\frac{\pi}{3}\cdot\frac{1}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{8}.$$

Зазначимо, що розкладання функції на складові, тобто докладний запис, застосовують тільки на початку освоєння техніки диференціювання складної функції. Надалі такі розкладання рекомендується робити подумки.

Розглянемо ще один метод знаходження похідної складної функції.

9. Нехай нам необхідно обчислити не похідну, а значення функції в деякій точці x. Що для цього потрібно зробити?

1) знайти $5x$;

2) знайти $\sin 5x$;

3) знайти $7^{\sin 5x}$.

Тобто, останнє, що треба зробити, це знайти значення показникової функції.

Тепер повернемося до умови прикладу. Похідну будемо знаходити, починаючи з третьої (останньої) дії (тобто з похідної показникової функції), потім перейдемо до другої дії (похідна тригонометричної функції) і потім – до першої. Одержані похідні перемножимо.

$$y' = 7^{\sin 5x}\cdot\ln 7\cdot\cos 5x\cdot 5 = 5\cdot 7^{\sin 5x}\cdot\ln 7\cdot\cos 5x.$$

10. Використаємо метод з попереднього прикладу. Оскільки $y = \sqrt[3]{\cos 7x}$, то: 1) $7x$; 2) $\cos 7x$; 3) $\sqrt[3]{\cos 7x} = (\cos 7x)^{\frac{1}{3}}$.

Починаємо обчислення з похідної степеневої функції:

$$y' = \frac{1}{3}\cdot(\cos 7x)^{-\frac{2}{3}}\cdot(-\sin 7x)\cdot 7 = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(\cos 7x)^{\frac{2}{3}}}\cdot(-\sin 7x)\cdot 7 =$$

$$= -\frac{7}{3}\cdot\frac{\sin 7x}{\sqrt[3]{\cos^2 7x}}.$$

Зрозуміло, що дії краще не записувати, а продумувати їх.

Розділ II

Приклад. Обчислити похідні заданих функцій:

1) $y = \ln 2x \cdot \cos x$; 4) $y = \dfrac{x^3 - 1}{x^3 + 1}$; 7) $y = \sin^3 \dfrac{1}{x}$;

2) $y = \sqrt{x} \cdot \operatorname{arctg} 9x$; 5) $y = \ln\sqrt{2 - 3x}$; 8) $y = e^{\operatorname{ctg}^2 4x^2}$.

3) $y = \dfrac{x^2}{\sin(3x - 1)}$; 6) $y = \operatorname{arcctg}^4 4x$;

Розв'язання.

1. Знаходимо похідну добутку двох функцій:

$$y' = (\ln 2x)' \cos x + \ln 2x (\cos x)' = \frac{1}{2x} 2\cos x + \ln 2x \cdot (-\sin x) =$$

$$= \frac{\cos x}{x} - \ln 2x \cdot \sin x.$$

2. Аналогічно попередньому прикладу знаходимо похідну добутку двох функцій:

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \operatorname{arctg} 9x + \sqrt{x} \cdot \frac{1}{1 + (9x)^2} \cdot 9 = \frac{\operatorname{arctg} 9x}{2\sqrt{x}} + \frac{9\sqrt{x}}{1 + 81x^2}.$$

3. Обчислюємо похідну частки двох функцій:

$$y' = \frac{\left(x^2\right)' \cdot \sin(3x - 1) - x^2 \cdot \left[\sin(3x - 1)\right]'}{\sin^2(3x - 1)} =$$

$$= \frac{2x \cdot \sin(3x - 1) - x^2 \cdot \cos(3x - 1) \cdot 3}{\sin^2(3x - 1)} = \frac{2x \cdot \sin(3x - 1) - 3x^2 \cos(3x - 1)}{\sin^2(3x - 1)}.$$

4. Аналогічно знаходимо похідну частки двох функцій:

$$y' = \frac{3x^2 \cdot \left(x^3 + 1\right) - 3x^2 \cdot \left(x^3 - 1\right)}{\left(x^3 + 1\right)^2} = \frac{3x^2 \cdot \left(x^3 + 1 - x^3 + 1\right)}{\left(x^3 + 1\right)^2} = \frac{6x^2}{\left(x^3 + 1\right)^2}.$$

5. Маємо складну функцію: $y=\ln u$, $u=\sqrt{v}$, $v=2-3x$. Тоді

$$y'=\frac{1}{u}\cdot\frac{1}{2\sqrt{v}}\cdot(-3)=\frac{1}{\sqrt{2-3x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2-3x}}\cdot(-3)=-\frac{3}{2(2-3x)}.$$

6. Маємо складну функцію. Тоді

$$y'=4\operatorname{arcctg}^3 4x\cdot\left(-\frac{1}{1+(4x)^2}\right)\cdot 4=-\frac{16\operatorname{arcctg}^3 4x}{1+16x^2}.$$

7. Маємо складну функцію. Тоді

$$y'=3\sin^2\frac{1}{x}\cdot\cos\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-\frac{3\sin^2\frac{1}{x}\cdot\cos\frac{1}{x}}{x^2}.$$

8. Маємо складну функцію. Тоді

$$y'=e^{\operatorname{ctg}^2 4x^2}\cdot 2\operatorname{ctg}4x^2\cdot\left(-\frac{1}{\sin^2 4x^2}\right)\cdot 8x=-16x\cdot e^{\operatorname{ctg}^2 4x^2}\cdot\frac{\operatorname{ctg}4x^2}{\sin^2 4x^2}.$$

2.6. Диференціювання функцій, заданих у параметричному вигляді

Нехай функція $y=f(x)$ задана у вигляді

$$\begin{cases} y=y(t), \\ x=x(t), \end{cases} \text{ або } \begin{cases} y=\varphi(t), \\ x=\psi(t). \end{cases}$$

Такий вигляд диференціальної залежності між змінними y та x називається *параметричним*, а змінна t – *параметром*.

Іноді функцію в параметричному вигляді записують в один рядок і без дужок, тобто $y=y(t), x=x(t)$. Знайдемо формулу для обчислення похідної функції, заданої в параметричному вигляді.

Теорема. Нехай функції $y=y(t)$ і $x=x(t)$ мають похідні, причому $x_t'\neq 0$ і функція $x=x(t)$ має обернену функцію $t=F(x)$, яка теж має похідну. Тоді функція $y=f(x)$ має похідну й ця похідна визначається за формулою

$$y_x'=\frac{y_t'}{x_t'} \text{ або } y'(x)=\frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)}. \tag{7}$$

Доведення. Дійсно, нехай функція $x=x(t)$ має обернену функцію $t=F(x)$. Тоді функцію $y=f(x)$ можна розглядати як складну функцію: $y=y(t), t=F(x)$. За правилом диференціювання складної функції запишемо: $y_x'=y_t'\cdot t_x'$. Далі за теоремою про похідну оберненої функції $t_x'=\dfrac{1}{x_t'}$. І нарешті, $y_x'=\dfrac{y_t'}{x_t'}$.

Приклад. Знайти y_x' , якщо $\begin{cases} y=2\sin t, \\ x=5\cos t. \end{cases}$

Розв'язання. Знайдемо похідні функцій $y(t)$ і $x=x(t)$:

$$y_t'=2\cos t, x_t'=-5\sin t.$$

Тоді

$$y_x'=-\frac{2\cos t}{5\sin t}=-\frac{2}{5}\operatorname{ctg} t.$$

2.7. Диференціювання неявно заданих функцій

Нехай функція $y=f(x)$ задана рівнянням $F(x,y)=0$. У цьому випадку кажуть, що функція y задана в *неявному вигляді*. Зазначимо, що не обов'язково в правій частині рівняння $F(x,y)=0$ повинен стояти нуль. Головне, що рівняння не розв'язане відносно y.

Наведемо приклади неявно заданих функцій:

$$x^2+e^y+5=0;\quad \sin\frac{y}{x}=1-\cos y^2.$$

Зауважимо, що кожну функцію, задану в явному вигляді, можна подати в неявному вигляді. Наприклад: $y=x^2-2$ – явний вигляд, $y-x^2+2=0$ – неявний вигляд. Але не будь-яку функцію, задану в неявному вигляді, можна подати в явному вигляді. Тому необхідно знати, як обчислити похідну неявно заданої функції.

Похідну цієї функції знаходять, диференціюючи по x обидві частини рівняння $F(x,y)=0$, і обов'язково враховують, що y є функцією аргументу x, тобто, наприклад: $\left(y^3\right)'=3y^2\cdot y'$; $(\sin y)'=\cos y\cdot y'$. Потім із одержаного виразу знаходять y'.

Приклад. Знайти похідну функції y, що задана неявно рівнянням $x^4+\ln y=3$.

Розв'язання. Знаходимо похідні лівої і правої частин рівності:

$$\left(x^4+\ln y\right)'=3'\Rightarrow 4x^3+\frac{1}{y}\cdot y'=0.$$

А тепер знайдемо y', тобто розв'яжемо одержане рівняння відносно y':

$$\frac{1}{y}\cdot y'=-4x^3,\quad y'=-4x^3y.$$

2.8. Логарифмічне диференціювання

Функція вигляду $y=u(x)^{v(x)}$ $\left[u(x)>0\right]$ називається степенево-показниковою (або складено-показниковою функцією). Похідну від такої функції знаходять таким чином:

1) спочатку функцію логарифмують (зазвичай по основі *e*), тобто записують: $\ln y = v(x) \cdot \ln u(x)$;

2) потім диференціюють цю рівність і знаходять з одержаного виразу y'.

Пояснимо на прикладі.

Приклад. Обчислити похідну функції $y = \left(\sin 4x\right)^{2x}$.

Розв'язання.

1. Логарифмуємо функцію:

$$\ln y = \ln\left(\sin 4x\right)^{2x} \quad \text{або} \quad \ln y = 2x \cdot \ln\left(\sin 4x\right).$$

2. Диференціюємо вираз: $\frac{1}{y} \cdot y' = 2 \cdot \ln\left(\sin 4x\right) + 2x \cdot \frac{1}{\sin 4x} \cdot \cos 4x \cdot 4$.

Вираз $\frac{1}{y} \cdot y'$ називають *логарифмічною похідною*.

Спростимо вираз у правій частині:

$$\frac{y'}{y} = 2\ln\sin 4x + 8x \cdot \operatorname{ctg}4x.$$

Знайдемо y':

$$y' = \left(2\ln\sin 4x + 8x\operatorname{ctg}4x\right) \cdot y = \left(2\ln\sin 4x + 8x\operatorname{ctg}4x\right) \cdot \left(\sin 4x\right)^{2x}.$$

Метод логарифмічного диференціювання застосовують ще й тоді, коли задана функція складається з декількох доданків або дробу, у якому в чисельнику й знаменнику є декілька доданків.

Приклад. Знайти похідну функції $y = \frac{\left(x^2 - 3\right)^5 \cdot \sin x^4}{\left(x^3 + 5x^2\right)^2}$.

Розв'язання. Спочатку прологарифмуємо вираз, а потім знайдемо похідну (нагадаємо, що $\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$, $\ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b$).

$$\ln y = \ln \frac{\left(x^2-3\right)^5 \cdot \sin x^4}{\left(x^3+5x^2\right)^2},$$

$$\ln y = 5\ln\left(x^2-3\right) + \ln\sin x^4 - 2\ln\left(x^3+5x^2\right).$$

Тепер знайдемо похідну:

$$\frac{y'}{y} = \frac{5}{x^2-3}\cdot 2x + \frac{1}{\sin x^4}\cdot \cos x^4 \cdot 4x^3 - 2\cdot\frac{1}{x^3+5x^2}\cdot\left(3x^2+10x\right).$$

З одержаного виразу знайдемо y':

$$y' = \frac{\left(x^2-3\right)^5 \cdot \sin x^4}{\left(x^3+5x^2\right)^2}\cdot\left[\frac{10x}{x^2-3} + 4x^3 \mathrm{ctg} x^4 - \frac{2\left(3x+10\right)}{x^2+5x}\right].$$

Запитання для самоперевірки

1. За якою формулою обчислюється похідна функції, яка задана в параметричному вигляді?
2. Яка функція називається степенево-показниковою?
3. Який вигляд має логарифмічна похідна?
4. У яких випадках застосовують логарифмічне диференціювання?

2.9. Розв'язання прикладів

Розділ II

Приклад 1. Знайти похідні функцій, які задані в параметричному вигляді:

1) $\begin{cases} y = t - \sin t, \\ x = \cos\dfrac{t}{2}. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = \cos^4 4t, \\ x = \sin^4 4t. \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y = \operatorname{arctg} 2t, \\ x = e^{-2t}. \end{cases}$

Розв'язання. Усі приклади розв'язуємо за допомогою формули $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$, тобто обчислюємо похідні від заданих функцій і записуємо дріб: у чисельнику – похідна y'_t, у знаменнику – похідна x'_t:

1. $y'_t = 1 - \cos t$, $x'_t = -\sin\dfrac{t}{2}\cdot\dfrac{1}{2}$.

Тоді

$$y'_x = -\frac{1-\cos t}{\sin\dfrac{t}{2}\cdot\dfrac{1}{2}} = -\frac{2\left(1-\cos t\right)}{\sin\dfrac{t}{2}}.$$

До речі, одержану відповідь можна спростити (нагадаємо, що $1-\cos 2x = 2\sin^2 x$):

$$y'_x = -\frac{2\cdot 2\sin^2\dfrac{t}{2}}{\sin\dfrac{t}{2}} = -4\sin\frac{t}{2}.$$

У наступних прикладах скоротимо обчислення похідної і будемо водночас у чисельнику знаходити похідну y'_t, а в знаменнику – похідну x'_t.

2. $y'_x = \dfrac{\left(\cos^4 4t\right)'}{\left(\sin^4 4t\right)'} = \dfrac{4\cos^3 4t\cdot\left(-\sin 4t\right)\cdot 4}{4\sin^3 4t\cdot\cos 4t\cdot 4} = -\operatorname{ctg}^2 4t$;

3. $y'_x=\dfrac{\left(\operatorname{arctg}2t\right)'}{\left(e^{-2t}\right)'}=\dfrac{\dfrac{1}{1+4t^2}\cdot 2}{e^{-2t}\cdot(-2)}=-\dfrac{1}{\left(1+4t^2\right)\cdot e^{-2t}}=-\dfrac{e^{2t}}{1+4t^2}$.

Приклад 2. Знайти похідні функцій, які задані неявно:

1) $x^2+y^2-3y-2x=1$; 3) $e^{x^3y}-x=y^4$;

2) $x^3+y^3=xy$; 4) $\dfrac{y}{x}+2^{x-y}=0$.

Розв'язання. Нагадаємо, що спочатку ми диференціюємо обидві частини рівності, а потім із одержаного виразу знаходимо y'. Крім того, маємо на увазі, що *y* є функцією від *x*, тобто, наприклад: $\left(e^{y^2}\right)'=e^{y^2}\cdot 2y\cdot y'$.

1. $2x+2yy'-3y'-2=0$. Знаходимо y':

$$2yy'-3y'=2-2x\Rightarrow\left(2y-3\right)y'=2-2x\Rightarrow y'=\frac{2-2x}{2y-3}.$$

2. Аналогічно знаходимо похідні лівої і правої частин рівності. У правій частині користуємося формулою похідної добутку

$$3x^2+3y^2\cdot y'=y+xy'.$$

Далі знаходимо y':

$$3y^2\cdot y'-xy'=y-3x^2\Rightarrow y'\cdot\left(3y^2-x\right)=y-3x^2\Rightarrow y'=\frac{y-3x^2}{3y^2-x}.$$

3. Знайдемо похідні лівої і правої частин рівності:

$$e^{x^3y}\cdot\left(3x^2y+x^3y'\right)-1=4y^3y'.$$

Розкриємо дужки: $e^{x^3y}\cdot 3x^2y+e^{x^3y}\cdot x^3y'-1=4y^3y'$. Знайдемо y':

$$\left(e^{x^3y}\cdot x^3-4y^3\right)y'=1-e^{x^3y}\cdot 3x^2y,\ y'=\frac{1-3x^2y\cdot e^{x^3y}}{x^3e^{x^3y}-4y^3}.$$

4. Аналогічно: $\dfrac{y'\cdot x-y}{x^2}+2^{x-y}\cdot\ln 2\cdot\left(1-y'\right)=0$.

Спростимо вираз і знайдемо y':

$$y'\frac{1}{x}-\frac{y}{x^2}+2^{x-y}\cdot\ln 2-y'\cdot 2^{x-y}\ln 2=0,$$

$$y'\left(\frac{1}{x}-2^{x-y}\ln 2\right)=\frac{y}{x^2}-2^{x-y}\ln 2\Rightarrow y'=\frac{\dfrac{y}{x^2}-2^{x-y}\ln 2}{\dfrac{1}{x}-2^{x-y}\ln 2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'=\frac{y-x^2 2^{x-y}\ln 2}{\left(1-x2^{x-y}\ln 2\right)x}.$$

Приклад 3. Знайти похідні степенево-показникових функцій:

1) $y=x^{3x}$; 2) $y=\left(\mathrm{tg}3x\right)^{e^x}$; 3) $y=\left(\ln x\right)^{\sin 6x}$.

Розв'язання. Нагадуємо обчислення похідної: спочатку функцію логарифмуємо, потім одержаний вираз диференціюємо.

1. Прологарифмуємо вираз: $\ln y=\ln x^{3x}=3x\cdot\ln x$.

Продиференціюємо вираз: $\dfrac{1}{y}\cdot y'=3\ln x+3x\cdot\dfrac{1}{x}=3\ln x+3$.

Остаточно:

$$y'=\left(3\ln x+3\right)\cdot y=\left(3\ln x+3\right)\cdot x^{3x}.$$

2. Прологарифмуємо вираз: $\ln y=\ln\left(\mathrm{tg}3x\right)^{e^x}=e^x\cdot\ln\left(\mathrm{tg}3x\right)$.

Продиференціюємо вираз:

$$\frac{1}{y}y'=e^x\ln\left(\mathrm{tg}3x\right)+e^x\frac{1}{\mathrm{tg}3x}\left(\frac{1}{\cos^2 3x}\right)\cdot 3=e^x\left(\ln\mathrm{tg}3x+\frac{3}{\sin 3x\cdot\cos 3x}\right).$$

Або

$$\frac{1}{y}\cdot y'=e^x\cdot\left(\ln\mathrm{tg}2x+\frac{6}{\sin 6x}\right).$$

Остаточно:

$$y' = e^x \cdot \left(\ln \operatorname{tg} 2x + \frac{6}{\sin 6x} \right) \cdot \left(\operatorname{tg} 3x \right)^{e^x}.$$

3. Прологарифмуємо вираз: $\ln y = \ln \left(\ln x \right)^{\sin 6x} = \sin 6x \cdot \ln \left(\ln x \right)$.

Продиференціюємо вираз: $\frac{1}{y} \cdot y' = 6 \cos 6x \cdot \ln \left(\ln x \right) + \frac{\sin 6x}{x \ln x}$.

Остаточно:

$$y' = \left(6 \cos 6x \cdot \ln \ln x + \frac{\sin 6x}{x \ln x} \right) \cdot \left(\ln x \right)^{\sin 6x}.$$

2.10. Диференціал функції

Нехай функція $y = f\left(x\right)$ має похідну в деякій точці *x*, тобто виконується рівність $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Пригадаємо теорему (формулюємо її у скороченому вигляді): якщо $\lim y = b$, то $y = b + \alpha$, де α – нескінченно мала величина. Тоді в нашому випадку матимемо: якщо $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'$, то $\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \alpha$ або $\Delta y = y' \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$, тобто приріст функції Δy складається з двох доданків: $y' \cdot \Delta x$ – головної частини приросту і $\alpha \cdot \Delta x$ – нескінченно малої величини вищого порядку мализни відносно Δx (оскільки $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha \cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha = 0$).

Розглянемо детальніше перший доданок: $y' \cdot \Delta x$, або $f'\left(x\right) \cdot \Delta x$, – його називають *диференціалом* функції $f\left(x\right)$ і позначають dy, або $df\left(x\right)$:

$$dy = y' \cdot \Delta x. \tag{8}$$

Перетворимо цю формулу. Нехай $y = x$, тоді $y' = x' = 1$. Застосовуючи формулу (8), одержимо: $dy = dx = \Delta x$, тобто диференціал незалежної змінної дорівнює приросту незалежної змінної: $dx = \Delta x$. Тоді формула (8) буде мати вигляд

$$dy = y'dx \text{, або } dy = f'(x)dx.$$

До речі, із цієї формули маємо: $f'(x) = \frac{dy}{dx}$, тобто похідну можна розглядати як відношення диференціала функції до диференціала незалежної змінної.

Таблиця деяких диференціалів

$y = C$	$dy = C' \cdot dx = 0$
$y = u + v$	$dy = du + dv$
$y = u \cdot v$	$dy = du \cdot v + u \cdot dv$
$y = \frac{u}{v}$	$dy = \frac{du \cdot v - u \cdot dv}{v^2}$
$y = x^n$	$dy = n \cdot x^{n-1}dx$
$y = \sin x$	$dy = \cos x \, dx$

Знаходження диференціала, по суті, зводиться до знаходження похідної цієї функції, помноженої на диференціал незалежної змінної.

Приклад. Знайти диференціал функції $y = \sqrt{x} + 3$.

Розв'язання. Застосуємо формулу $dy = y'dx$. Знайдемо похідну функції $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Тоді диференціал функції буде дорівнювати: $dy = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$.

Геометричний зміст диференціала. Розглянемо криву $y = f(x)$ (рис. 5). Візьмемо на кривій довільну точку $M(x, y)$. Проведемо дотичну до кривої в цій точці (кут нахилу α). Нагадаємо, що $\mathrm{tg}\alpha = k = y'$. Надамо аргументу x приросту Δx. Тоді функція y набуде приросту Δy. Розглянемо трикутник MNP: $\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{NP}{MN}$ або $y' = \dfrac{NP}{MN}$. Звідси

$$NP = y' \cdot MN = y' \cdot \Delta x = y'dx = dy.$$

Тобто геометричний зміст диференціала – це приріст ординати дотичної до кривої $y = f(x)$ у точці x.

Зауваження. Зазначимо, що на рис. 5 приріст функції Δy складається з двох доданків NP і PL (де $NP = dy$). Не слід думати, що приріст Δy завжди більше диференціала dy. Достатньо розглянути іншу криву (рис. 6), для якої $dy > \Delta y$ $(NP > NL)$.

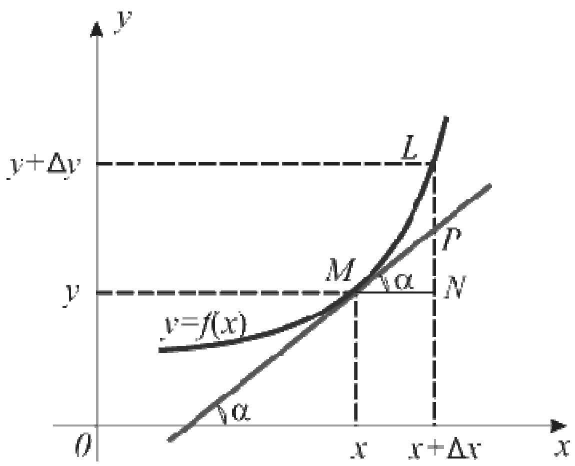


Рис. 5

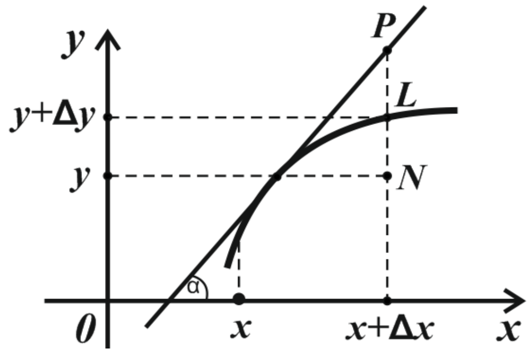


Рис. 6

2.11. Розв'язання прикладів

Приклад 1. Знайти диференціали заданих функцій:

1) $y = e^{-7x}$; 2) $z = \mathrm{tg}3t$; 3) $t = \ln^2 4y$.

Розв'язання. Нагадаємо, що формула обчислення диференціала функції $y = f(x)$ має вигляд: $dy = f'(x)dx$. Зазначимо, що, наприклад, для функції $z = \varphi(t)$ ця формула буде мати вигляд $dz = \varphi'(t)dt$.

1. Знайдемо спочатку похідну заданої функції:

$$y' = e^{-7x} \cdot (-7) = -7e^{-7x}.$$

Тоді диференціал цієї функції запишеться у вигляді $dy = -7e^{-7x}dx$.

2. Знайдемо диференціал:

$$dz = \frac{1}{\cos^2 3t} \cdot 3dt \quad \text{або} \quad dz = \frac{3dt}{\cos^2 3t}.$$

3. Аналогічно $dt = 2\ln 4y \cdot \dfrac{1}{4y} \cdot 4dy$, $dt = \dfrac{2\ln 4y}{y} dy$.

Приклад 2. Знайти диференціали лівої та правої частин рівності:

1) $x^3 = 2 - 3y^2$;

2) $\operatorname{arctg} t = e^{-z}$;

3) $\sqrt{y} = \sin^2 z$;

4) $y^2 = \dfrac{1}{\sin t}$.

Розв'язання. Цей приклад розв'язується за тією самою формулою, що й попередній:

1. $3x^2dx = -6ydy \Rightarrow x^2dx = -2ydy$.
2. $\dfrac{1}{1+t^2} dt = -e^{-z}dz$.
3. $\dfrac{1}{2\sqrt{y}} dy = 2\sin z \cos z dz$ або $\dfrac{dy}{2\sqrt{y}} = \sin 2z dz$.
4. $2ydy = \dfrac{-\cos t}{\sin^2 t} dt$.

2.12. Похідні вищих порядків

Нехай функція $y = f(x)$ диференційована на деякому проміжку. У загальному випадку похідна $y' = f'(x)$ теж є функцією від x. Якщо ми виконаємо ті самі операції з похідною $f'(x)$, які ми виконували з функцією $f(x)$ (приріст аргументу, приріст функції, відношення цих приростів, границя відношення, коли $\Delta x \to 0$), то одержимо $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y'}{\Delta x} = y''$. Тобто похідна від першої похідної є похідною другого порядку. Позначають її так: y'', $f''(x)$, $\dfrac{d^2 y}{dx^2}$.

Зауважимо, що друга, третя, іноді четверта похідні позначаються так: y'', y''', y''''. Але для похідних вищих порядків застосовують інше позначення. Наприклад, $y^{(15)}$ – п'ятнадцята похідна (номер похідної записується обов'язково в дужках!)

Взагалі, похідною *n*-го порядку від функції $f(x)$ називають похідну (першу похідну) від похідної ($n-1$)-го порядку:

$$\left(y^{(n-1)}\right)' = y^{(n)} = f^{(n)}(x).$$

Похідні вищих порядків знаходять за тими самими формулами, що й похідні першого порядку.

Приклад. Знайти похідну третього порядку від функції $y = 7x^4 - \cos x$.

Розв'язання. Необхідно знайти y'''.

Починаємо з першої похідної: $y' = 28x^3 + \sin x$.

Тепер знайдемо другу похідну: $y'' = 84x^2 + \cos x$.

І нарешті, третю: $y''' = 168x - \sin x$.

Фізичний зміст другої похідної. Нехай шлях *S*, який проходить точка за час *t*, обчислюється за формулою $S = f(t)$. Нагадаємо, що перша похідна $S' = f'(t) = v(t)$ – це швидкість руху точки в даний момент часу *t*. Друга похідна $S'' = f''(t) = a(t)$ – це прискорення точки в момент часу *t*. Зазначимо, що водночас $a(t) = v'(t)$, тобто прискорення $a(t)$ точки в момент часу *t* – це друга похідна від шляху $S(t)$ в момент часу *t* або перша похідна від швидкості $v(t)$ в момент часу *t*: $a(t) = v'(t) = S''(t)$.

Похідна другого порядку від функції, яка задана в параметричному вигляді. Нехай функція $y=f\left(x\right)$ задана в параметричному вигляді $\begin{cases} y=y\left(t\right), \\ x=x\left(t\right). \end{cases}$

Нагадаємо, що перша похідна такої функції обчислюється за формулою $y'_x=\dfrac{y'_t}{x'_t}$.

Знайдемо другу похідну функції:

$$y''_x=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)=\left\{\begin{array}{l}\text{За означенням похідної}\\ \text{парметричної функції маємо}\end{array}\right\}=\frac{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{y'_t}{x'_t}\right)}{x'_t}=$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\text{Застосуємо формулу обчис-}\\ \text{лення похідної частки}\end{array}\right\}=\frac{y''_t\cdot x'_t-y'_t\cdot x''_t}{\left(x'_t\right)^2}\cdot\frac{1}{x'_t}=\frac{y''_t\cdot x'_t-y'_t\cdot x''_t}{\left(x'_t\right)^3}.$$

Таким чином:

$$y''_x=\frac{y''_t\cdot x'_t-y'_t\cdot x''_t}{\left(x'_t\right)^3}. \qquad (9)$$

Приклад. Знайти другу похідну функції, що задана параметрично $\begin{cases} y=3e^{2t}, \\ x=e^{3t}. \end{cases}$

Розв'язання. Знайдемо «компоненти» формули (9):

$$y'_t=6e^{2t},\quad y''_t=12e^{2t},\quad x'_t=3e^{3t},\quad x''_t=9e^{3t}.$$

Тоді за формулою (9) маємо:

$$y''_x=\frac{36e^{2t}\cdot e^{3t}-54e^{3t}\cdot e^{2t}}{27e^{9t}}=\frac{36e^{5t}-54e^{5t}}{27e^{9t}}=$$

$$=-\frac{18e^{5t}}{27e^{9t}}=-\frac{2e^{5t}}{3e^{9t}}=-\frac{2}{3}e^{5t-9t}=-\frac{2}{3}e^{-4t}=-\frac{2}{3e^{4t}}.$$

2.13. Розв'язання прикладів

Розділ I (найпростіші приклади)

Приклад. Знайти вказані похідні заданих функцій:

1) $y = 4x^3 + 3x^2 + 4x + 2$, $\qquad y''' = ?$

2) $y = e^{5x+8}$, $\qquad y'' = ?$

3) $y = (7x+3)^4$, $\qquad y'' = ?$

4) $y = 4^{2x+5}$, $\qquad y''(0) = ?$

Розв'язання.

1. $y' = 12x^2 + 6x + 4$, $y'' = 24x + 6$,

$$y''' = 24.$$

2. $y' = e^{5x+8} \cdot 5$,

$$y'' = 5e^{5x+8} \cdot 5 = 25e^{5x+8}.$$

3. $y' = 4(7x+3)^3 \cdot 7 = 28(7x+3)^3$,

$$y'' = 28 \cdot 3 \cdot (7x+3)^2 \cdot 7 = 588(7x+3)^2.$$

4. $y' = 4^{2x+5} \cdot \ln 4 \cdot 2$, $y'' = 4^{2x+5} \cdot \ln^2 4 \cdot 4 = 4\ln^2 4 \cdot 4^{2x+5}$,

$$y''(0) = 4 \cdot \ln^2 4 \cdot 4^5 = 4^6 \cdot \ln^2 4.$$

Розділ II

Приклад 1. Знайти вказані похідні заданих функцій:

1) $y = \sqrt{2x+3}$, $\qquad y'' = ?$

2) $y = \dfrac{1}{3x-7}$, $\qquad y'' = ?$

3) $y = \cos(\ln 2x)$, $\qquad y'' = ?$

4) $y = 3^x$, $\qquad y^{(n)} = ?$

Розв'язання.

1. Запишемо першу похідну: $y' = \frac{2}{2\sqrt{2x+3}} = \frac{1}{\sqrt{2x+3}}$.

Для того щоб знайти другу похідну, можна застосувати формулу похідної частки або y' подати у вигляді $y' = (2x+3)^{-\frac{1}{2}}$. Тоді

$$y'' = -\frac{1}{2}(2x+3)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2 = -\frac{1}{\sqrt{(2x+3)^3}}.$$

2. У цьому прикладі застосуємо формулу обчислення похідної частки (хоча можна було б і тут подати дріб у такому вигляді: $y = (3x-7)^{-1}$).

Отже, перша похідна

$$y' = \frac{0\cdot(3x-7)-3}{(3x-7)^2} = -\frac{3}{(3x-7)^2}.$$

Друга похідна

$$y'' = -\frac{0\cdot(3x-7)^2 - 3\cdot 2(3x-7)\cdot 3}{(3x-7)^4} = \frac{18}{(3x-7)^3}.$$

3. $y' = -\sin(\ln 2x)\cdot\frac{1}{2x}\cdot 2 = -\frac{\sin(\ln 2x)}{x}$,

$$y'' = -\frac{\cos(\ln 2x)\cdot\frac{1}{x}\cdot x - \sin(\ln 2x)}{x^2} = -\frac{\cos(\ln 2x) - \sin(\ln 2x)}{x^2}.$$

4. Зазвичай, для знаходження *n*-ї похідної обчислюють першу похідну, другу похідну і т. д. до тих пір, поки буде зрозуміло, за яким законом визначається $y^{(n)}$.

Знайдемо першу похідну $y' = 3^x \cdot \ln 3$, другу $y'' = 3^x \cdot \ln^2 3$. Уже на цьому етапі зрозуміло, що $y^{(n)} = 3^x \cdot \ln^n 3$.

Приклад 2. Знайти другі похідні функцій, що задані в параметричному вигляді

1) $\begin{cases} y = 3(1+\sin t), \\ x = 3(1+\cos t), \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = 2t^3, \\ x = 3t^2, \end{cases}$ якщо $t = 1$.

Розв'язання. Нагадаємо формулу обчислення другої похідної $y''_x = \dfrac{y''_t \cdot x'_t - y'_t \cdot x''_t}{\left(x'_t\right)^3}$.

1. Знайдемо x'_t, y'_t, x''_t, y''_t.

$$x'_t = -3\sin t, \quad x''_t = -3\cos t, \quad y'_t = 3\cos t, \quad y''_t = -3\sin t.$$

Підставивши одержані похідні у формулу, одержимо:

$$y''_x = \frac{(-3\sin t)(-3\sin t) - (3\cos t)(-3\cos t)}{(-3\sin t)^3} = \frac{9\sin^2 t + 9\cos^2 t}{-27\sin^3 t} = -\frac{1}{3\sin^3 t}.$$

2. У цьому прикладі необхідно знайти значення другої похідної, якщо $t = 1$:

$$x' = 6t, \quad x'' = 6, \quad y' = 6t^2, \quad y'' = 12t,$$

$$y''_x = \frac{12t \cdot 6t - 6t^2 \cdot 6}{216t^3} = \frac{72t^2 - 36t^2}{216t^3} = \frac{1}{6t}, \quad y''_x(t=1) = \frac{1}{6}.$$

Приклад 3. Задано рівняння прямолінійного руху матеріальної точки: $S = 2t^3 + t^2$. Знайти швидкість точки в момент часу $t = 1$ і прискорення точки в момент часу $t = 2$.

Розв'язання. Нагадаємо, що коли точка рухається за законом $S = S(t)$, то швидкість точки $v(t) = S'(t)$, а прискорення $a(t) = v'(t) = S''(t)$. Тому знайдемо першу похідну:

$$S'(t) = 6t^2 + 2t = v(t).$$

Тоді $v(1) = 8$.

Знайдемо другу похідну: $S''(t) = v'(t) = 12t + 2 = a(t)$. Тоді $a(2) = 26$.

2.14. Рівняння дотичної і нормалі до кривої

Спочатку знайдемо рівняння дотичної до кривої. Нехай задана крива $y = f(x)$ і точка $M_0(x_0, y_0)$, яка належить цій лінії. Проведемо дотичну до кривої в точці M_0 (рис. 7).

Застосуємо рівняння прямої, яка проходить через задану точку в заданому напрямку: $y - y_0 = k(x - x_0)$.

За геометричним змістом похідної: $k = \mathrm{tg}\alpha = y'(x_0) = f'(x_0)$.

Тоді *рівняння дотичної до кривої* $y = f(x)$ в точці $M_0(x_0, y_0)$ буде мати вигляд

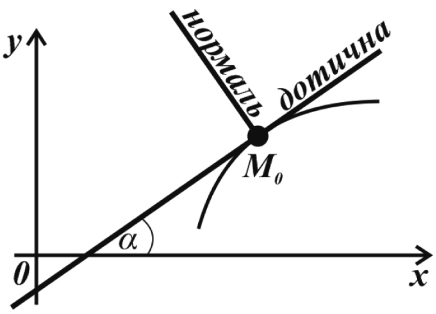


Рис. 7

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0). \tag{10}$$

Нормаль – пряма, яка проходить через точку дотику M_0 перпендикулярно дотичній.

Для того щоб записати рівняння нормалі, достатньо згадати умову перпендикулярності прямих: $k_1 = -\dfrac{1}{k_2}$.

Тоді *рівняння нормалі* буде мати вигляд:

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0). \tag{11}$$

Уважно розглянувши формули (10) і (11), робимо висновок: для того щоб скласти рівняння дотичної або нормалі до кривої $y = f(x)$ у заданій точці $M_0(x_0, y_0)$, необхідно:

1. Спочатку знайти похідну функції $y = f(x)$.

2. Потім знайти значення цієї похідної в заданій точці: $y_0 = f'(x_0)$ (часто цей пункт розв'язання студенти не виконують).

3. Підставити координати точки M_0 і значення похідної $f'(x_0)$ у відповідне рівняння.

2.15. Розв’язання прикладів

Приклад. Знайти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = f(x)$ в точці $M_0(x_0, y_0)$:

1) $y = x^2 - 4x$ $\qquad M_0(1; -3)$;

2) $y = e^x$ $\qquad M_0(0; 1)$;

3) $y = 3\ln x - 4$ $\qquad M_0(1; -1)$.

Розв’язання.

1. Знайдемо похідну: $y' = 2x - 4$. Потім обчислимо похідну в заданій точці $M_0(1; -3)$: $y'(1) = f'(1) = -2$. Маючи на увазі, що $x_0 = 1$, $y_0 = -3$, запишемо рівняння дотичної (10):

$$y + 3 = (-2)(x - 1) \Rightarrow y + 3 = -2x + 2 \Rightarrow 2x + y + 1 = 0.$$

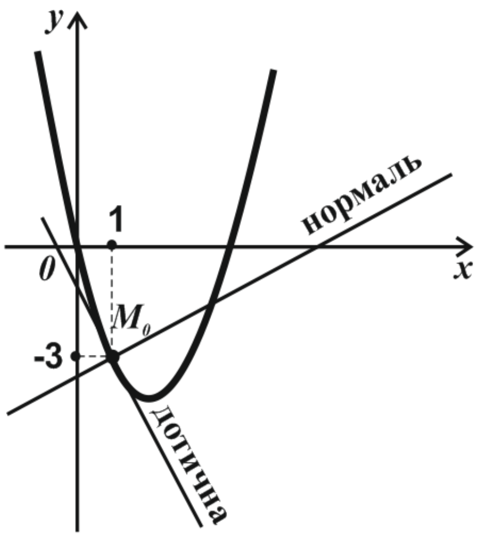


Рис. 8

Запишемо рівняння нормалі (11):

$$y + 3 = \frac{1}{2}(x - 1) \Rightarrow 2y + 6 = x - 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x - 2y - 7 = 0.$$

На рис. (8): крива $y = x^2 - 4x$ (до речі, парабола), дотична і нормаль, які проведені до кривої в точці $M_0(1; -3)$.

2. Розв’язання аналогічне:

$$y = e^x; \quad y' = e^x; \quad y'(0) = 1.$$

Рівняння дотичної: $y - 1 = x \Rightarrow x - y + 1 = 0$.

Рівняння нормалі: $y - 1 = -x \Rightarrow x + y - 1 = 0$.

3. $y' = \dfrac{3}{x}$ $\; y'(1) = 3$.

Рівняння дотичної: $y + 1 = 3(x - 1) \Rightarrow 3x - y - 4 = 0$.

Рівняння нормалі: $y + 1 = -\dfrac{1}{3}(x - 1) \Rightarrow x + 3y + 2 = 0$.

Запитання для самоперевірки

1. За якою формулою обчислюється диференціал функції $y = f(x)$?
2. Чому дорівнює $d(u \cdot v)$?
3. Що таке похідна *n*-го порядку?
4. Який фізичний зміст має друга похідна?
5. За якою формулою обчислюється похідна другого порядку функції, що задана в параметричному вигляді?
6. За якою формулою знаходять рівняння нормалі до кривої $y = f(x)$ в точці $M_0(x_0, y_0)$?

3. Основні теореми диференціального числення

Теорема Ролля. Нехай функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$ і диференційована на інтервалі (a, b). Якщо $f(a) = f(b) = 0$, то обов'язково знайдеться хоча б одна точка c $(a < c < b)$, у якій $f'(c) = 0$.

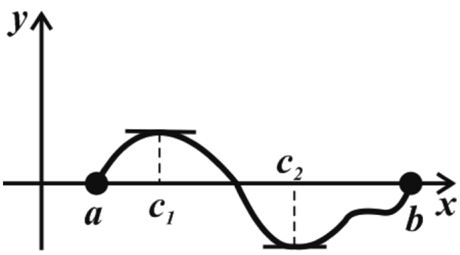


Рис. 9

Зауваження. Можна довести, що теорема Ролля правильна й у випадку, коли $f(a) = f(b) \neq 0$.

Геометричний зміст теореми. На інтервалі (a, b) знайдеться хоча б одна точка c, у якій дотична до кривої $y = f(x)$ буде паралельною осі OX. На рис. 9 таких точок дві: c_1 і c_2.

Теорема Лагранжа. Нехай функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$ і диференційована на інтервалі (a, b). Тоді обов'язково знайдеться хоча б одна точка c $(a < c < b)$, для якої

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \tag{12}$$

Формулу (12) називають формулою кінцевих приростів, або формулою Лагранжа.

Доведення. Розглянемо функцію $\varphi(x)$ (її називають допоміжною):

$$\varphi(x) = [f(x) - f(a)](b - a) - [f(b) - f(a)](x - a).$$

Доведемо, що $\varphi(x)$ задовольняє умови теореми Ролля.

Дійсно, $\varphi(x)$ неперервна на $[a,b]$ і диференційована на (a,b), тому що є лінійною комбінацією функцій $f(x)$ і $x-a$. Знайдемо $\varphi(a)$ і $\varphi(b)$. За теоремою Ролля ці значення повинні дорівнювати нулю.

$$\varphi(a)=\left[f(a)-f(a)\right](b-a)-\left[f(b)-f(a)\right](a-a)=0.$$

$$\varphi(b)=\left[f(b)-f(a)\right](b-a)-\left[f(b)-f(a)\right](b-a)=0.$$

Таким чином, функція $\varphi(x)$ задовольняє умови теореми Ролля і тому знайдеться точка c $(a<c<b)$, у якій $\varphi'(c)=0$. Знайдемо $\varphi'(x)$:

$$\varphi'(x)=f'(x)(b-a)-\left[f(b)-f(a)\right].$$

Нехай $x=c$:

$$\varphi'(c)=f'(c)(b-a)-\left[f(b)-f(a)\right].$$

Тоді

$$f'(c)(b-a)-\left[f(b)-f(a)\right]=0,$$

звідси

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a) \quad \text{або} \quad f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Теорему доведено.

Геометричний зміст теореми. Із рис. 10 видно, що $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ – кутовий коефіцієнт хорди AB, яка стягує точки A і B.

$f'(c)$ – кутовий коефіцієнт дотичної до кривої в точці c. За формулою (12) кутові коефіцієнти рівні.

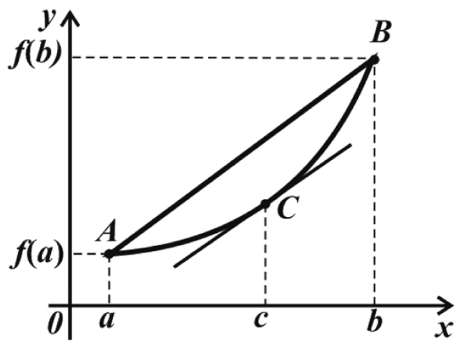


Рис. 10

Тому: знайдеться точка C на кривій $y=f(x)$, у якій дотична до кривої буде паралельна хорді AB.

Теорема Коші. Нехай функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ неперервні на відрізку $[a,b]$ і диференційовані на інтервалі (a,b), причому $\varphi'(x)\neq 0$ на (a,b). Тоді знайдеться хоча б одна точка c $(a<c<b)$, у якій

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}. \tag{13}$$

Формула (13) називається формулою Коші.

Теорема Коші доводиться таким самим методом, що і теорема Лагранжа.

Запишемо формулу (13) для окремого випадку, коли $\varphi(x)=x$: $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$, і одержимо формулу (12). Далі, у формулі (12) приймемо $f(b)=f(a)$ і одержимо рівність $f'(c)=0$. Уважно розглянемо записані перетворення і зробимо висновок: теорема Лагранжа є окремим випадком теореми Коші. А теорема Ролля є окремим випадком теореми Лагранжа.

Наведені теореми мають велике значення в теорії диференціального числення. Розглянемо, наприклад, застосування теореми Лагранжа.

Теорема. Якщо функція $f(x)$ диференційована на $[a,b]$ і для всіх x із $[a,b]$ $f'(x)$ дорівнює нулю, то на цьому відрізку $f(x)=\text{const}$.

Доведення. Зафіксуємо деяку точку $x\neq a$ із відрізка $[a,b]$ і застосуємо теорему Лагранжа до відрізка $[a,x]$. За цією теоремою знайдеться таке значення c $(a<c<x)$, що $f'(c)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. За умовою теореми $f'(x)=0$ на $[a,b]$, тому і $f'(c)=0$. Звідси $f(x)-f(a)=0$ або $f(x)=f(a)$. А оскільки x – це довільне значення з $[a,b]$, то теорему доведено.

4. Застосування диференціального числення

4.1. Розкриття невизначеностей за допомогою правила Лопіталя

Відшукання границі функції часто приводить до невизначених виразів вигляду: $\left\{\frac{0}{0}\right\}$, $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$, $\{0\cdot\infty\}$, $\{\infty-\infty\}$, $\left\{0^0\right\}$, $\left\{\infty^0\right\}$, $\left\{1^\infty\right\}$. Знаходження границі в цьому випадку називають розкриттям невизначеності. Наведені нижче теореми (під назвою *правило Лопіталя*) є основним способом розкриття невизначеностей.

Теорема 1. Правило Лопіталя

Розкриття невизначеності виду $\left\{\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}\right\}$**.** Нехай функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ задовольняють умови теореми Коші на відрізку $[a, b]$ і дорівнюють нулю в точці $x = a$, тобто $f(a) = \varphi(a) = 0$. Тоді, *якщо існує* границя відношення похідних цих функцій, коли $x \to a$, то існує границя відношення функцій, коли $x \to a$ і ці границі рівні. Тобто

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}. \qquad (14)$$

Доведення. Візьмемо на відрізку $[a, b]$ деяку точку $x \neq a$ і застосуємо на $[a, x]$ формулу Коші: $\frac{f(x)-f(a)}{\varphi(x)-\varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}$, де $a < c < x$.

За умовою теореми $f(a)=\varphi(a)=0$, тому $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\dfrac{f'(c)}{\varphi'(c)}$.

Нехай $x\to a$, тоді й $c\to a$. Тому

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}=\lim_{c\to a}\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}. \qquad (15)$$

Тобто, якщо існує остання границя в рівностях (15), то існує і перша границя і ці границі рівні. Маємо формулу (14).

За допомогою сформульованої теореми (правила Лопіталя) розкривають невизначеність виду $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$. Як користуються цим правилом?

Спочатку перевіряють, чи дійсно у прикладі є невизначеність $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$, а потім обчислюють похідні чисельника і знаменника (окремо, а не похідну частки!)

Приклад. Обчислити границю: $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x^2-3x-28}{x^2-49}$.

Розв'язання:

$$\lim_{x\to 7}\frac{x^2-3x-28}{x^2-49}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 7}\frac{\left(x^2-3x-28\right)'}{\left(x^2-49\right)'}=\lim_{x\to 7}\frac{2x-3}{2x}=\frac{11}{14}.$$

Зауваження. Якщо після застосування правила Лопіталя невизначеність залишилась і похідні задовольняють умови теореми Коші, то правило Лопіталя можна застосувати повторно.

Теорема 2. Правило Лопіталя

Розкриття невизначеності виду $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$**.** Нехай функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ неперервні й дифереційовані (при всіх $x\neq a$) в околі точки a, похідна $\varphi'(x)\neq 0$ і $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\infty$. Тоді, *якщо існує* границя $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, то існує і границя $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ і ці границі рівні:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}. \tag{16}$$

Цю теорему приймемо без доведення.

Зауваження 1. Можна довести, що в теоремах 1 і 2 змінна x може прямувати і до нескінченності.

Зауваження 2. Нагадаємо, що формули (14) і (16) справедливі тільки тоді, коли в рівностях існує границя відношення похідних.

Розглянемо приклад.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\left\{\begin{matrix}\text{застосуємо}\\ \text{правило Лопіталя}\end{matrix}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\cos x}{1}=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\cos x\right)=1+\lim_{x\to\infty}\cos x$$

– границя не існує, тому що функція $y=\cos x$ при $x\to\infty$ не має границі. Тобто правило Лопіталя застосувати не можна. До речі, цей приклад можна розв’язати дуже просто таким чином:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)=1+\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=1+0=1.$$

Запам’ятаємо, що за допомогою правила Лопіталя можна розкривати тільки невизначеності виду $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$ і $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$. Решту п’ять невизначеностей потрібно спочатку привести до виду $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$ або $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$, а вже потім користуватися правилом.

Розкриття невизначеності виду $\{\mathbf{0}\cdot\infty\}$. Нехай $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\infty$ (зауважимо, що x може прямувати і до нескінченності).

Потрібно знайти

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\cdot\varphi(x)\right], \tag{17}$$

тобто розкрити невизначеність $\{0\cdot\infty\}$. У цьому випадку вираз (17) можна записати у вигляді

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\cdot\varphi(x)\right]=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{1/\varphi(x)},$$

й одержимо невизначеність виду $\left\{\frac{0}{0}\right\}$, або у вигляді:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\cdot\varphi(x)\right]=\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{1/f(x)},$$

й одержимо невизначеність виду $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$.

Приклад. Обчислити границю: $\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot e^{-x}=\{0\cdot\infty\}$.

Розв'язання. Розглянемо обидва варіанти переходу до невизначеностей $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ і $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$.

I. $\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot e^{-x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^{-x}}{1/x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}$.

II. $\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot e^{-x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{e^{x}}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$.

Другий варіант простіший, його й оберемо.

$$\lim_{x\to\infty}x\cdot e^{-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^{x}}=0.$$

Розкриття невизначеності виду $\{\infty - \infty\}$. Зазвичай ця невизначеність перетворюється у невизначеності виду $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ або $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$ зведенням до спільного знаменника.

Розкриття невизначеностей виду $\{1^{\infty}\}$, $\{0^{0}\}$, $\{\infty^{0}\}$. Невизначеності цих видів розв'язуються однаковим методом. За допомогою логарифмування ці невизначеності приводять до виду $\{0 \cdot \infty\}$, потім до виду $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ або $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$. Нарешті знаходять границю логарифма, а потім і границю функції. Детальніше цей метод пояснимо на прикладі.

Приклад. Знайти границю: $\lim\limits_{x\to 0}(\mathrm{ctg}x)^{\frac{1}{\ln x}}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність $\{\infty^{0}\}$. Позначимо

$$A = \lim_{x\to 0}(\mathrm{ctg}x)^{\frac{1}{\ln x}}$$

і прологарифмуємо рівність:

$$\ln A = \ln \lim_{x\to 0}(\mathrm{ctg}x)^{\frac{1}{\ln x}}. \qquad (18)$$

До рівності (18) ми повернемося в кінці розв'язання прикладу. Розглянемо праву частину цієї рівності:

$$\ln \lim_{x\to 0}(\mathrm{ctg}x)^{\frac{1}{\ln x}} = \lim_{x\to 0} \ln(\mathrm{ctg}x)^{\frac{1}{\ln x}} = \lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{\ln x}\cdot \ln(\mathrm{ctg}x)\right] = \{0\cdot\infty\} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\ln(\mathrm{ctg}x)}{\ln x} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \left\{\begin{matrix}\text{застосуємо}\\ \text{правило Лопіталя}\end{matrix}\right\} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\mathrm{ctg}x}\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)}{\frac{1}{x}} =$$

$$= -\lim_{x\to 0}\frac{x}{\cos x\cdot\sin x} = \left\{\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = 1\right\} = -1.$$

Повернемося до рівності (18). $\ln A = -1$. Звідси $A = e^{-1} = \frac{1}{e}$.

Ще раз нагадуємо, що правило Лопіталя можна застосовувати для розкриття невизначеностей $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ і $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$. Останні п’ять невизначеностей спочатку потрібно привести до однієї з невизначеностей $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ або $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$, а вже потім застосовувати правило Лопіталя.

Запитання для самоперевірки

1. У чому полягає геометричний зміст теореми Лагранжа?
2. Які невизначеності можна розкрити за допомогою правила Лопіталя?
3. Як зводиться невизначеність $\{0 \cdot \infty\}$ до невизначеності $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ або $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$?

4.2. Розв’язання прикладів

Розділ I (найпростіші приклади)

Приклад 1. За правилом Лопіталя знайти границі:

1) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{\ln x}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{4x} - e^{2x}}{x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3 - 4x^2 + 4x}{x^3 - 12x + 16}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{3x} - \cos 8x}{e^{2x} - \cos x}$;

5) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x+1}{e^{3x} + 3^x}$;

6) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\cos 3x}$.

Розв'язання. У кожному прикладі перевіряємо наявність однієї з двох невизначеностей $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ або $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$, а потім застосовуємо правило Лопіталя, тобто обчислюємо похідні чисельника і знаменника.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{\ln x}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x)'}{(\ln x)'}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{1/x}=\lim\limits_{x\to\infty}x=\infty$.

2. $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{4x}-e^{2x}}{x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\left(e^{4x}-e^{2x}\right)'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to0}\frac{4e^{4x}-2e^{2x}}{1}=2$.

3. $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^3-4x^2+4x}{x^3-12x+16}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim\limits_{x\to2}\frac{3x^2-8x+4}{3x^2-12}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim\limits_{x\to2}\frac{6x-8}{6x}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$.

4. $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{3x}-\cos 8x}{e^{2x}-\cos x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim\limits_{x\to0}\frac{3e^{3x}+8\sin 8x}{2e^{2x}+\sin x}=\frac{3}{2}$.

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+1}{e^{3x}+3^x}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{3e^{3x}+3^x\ln 3}=0$.

6. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\cos 3x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\sin x}{-3\sin 3x}=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{3\pi}{2}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{-1}=-\frac{1}{3}$.

Приклад 2. За правилом Лопіталя знайти границі:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot 3^{-2x}$; 2) $\lim\limits_{x\to\pi}(x-\pi)\operatorname{ctg}x$.

Розв'язання.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot 3^{-2x}=\{\infty\cdot 0\}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{3^{2x}}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{2\cdot 3^{2x}\cdot\ln 3}=0$.

2. $\lim\limits_{x\to\pi}(x-\pi)\operatorname{ctg}x=\{0\cdot\infty\}=\left\{\begin{array}{c}\text{тут можна застосувати формули :}\\ \operatorname{ctg}x={}^{1}\!\big/_{\operatorname{tg}x}\ \text{ або }\ \operatorname{ctg}x={}^{\cos x}\!\big/_{\sin x}.\\ \text{Виберемо першу формулу.}\end{array}\right\}=$

$$=\lim_{x\to\pi}\frac{x-\pi}{\operatorname{tg}x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to\pi}\frac{1}{{}^{1}\!\big/_{\cos^2 x}}=\lim_{x\to\pi}\cos^2 x=(\cos\pi)^2=1.$$

Розділ II

Приклад 1. За правилом Лопіталя знайти границі:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 7x}{\operatorname{arc\,tg}3x}$;

2) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\operatorname{tg}\pi x$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos 2x}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln\sin x}{\ln\sin 5x}$;

5) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{x}{x-1}\right)$;

6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arcsin x}{\sin^3 x}$.

Розв'язання.

1. $$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin 7x}{\operatorname{arc\,tg}3x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{{}^{7}\!\big/_{\sqrt{1-49x^2}}}{{}^{3}\!\big/_{1+9x^2}}=\frac{7}{3}\lim_{x\to 0}\frac{1+9x^2}{\sqrt{1-49x^2}}=\frac{7}{3}.$$

2. $$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\operatorname{tg}\pi x=\{0\cdot\infty\}=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{x-\frac{1}{2}}{\operatorname{ctg}\pi x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{1}{\left(-\frac{1}{\sin^2\pi x}\right)\pi}=$$

$$=-\frac{1}{\pi}\lim_{x\to\frac{1}{2}}\sin^2\pi x=-\frac{1}{\pi}.$$

3. $$\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos 2x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{2\sin 2x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{4\cos 2x}=\frac{1}{2}.$$

4. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln\sin x}{\ln\sin 5x}=\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\dfrac{1}{\sin x}\cos x}{\dfrac{1}{\sin 5x}5\cos 5x}.$

Зауважимо, що: $\lim\limits_{x\to 0^+}\cos x=\lim\limits_{x\to 0^+}\cos 5x=1$. Тобто в множниках, границя яких не дорівнює 0 або ∞, краще перейти одразу до границі.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\dfrac{1}{\sin x}\cos x}{\dfrac{1}{\sin 5x}5\cos 5x}=\frac{1}{5}\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin 5x}{\sin x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\frac{1}{5}\lim_{x\to 0^+}\frac{5\cos 5x}{\cos x}=1.$$

5. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{x}{x-1}\right)=\{\infty-\infty\}=\left\{\begin{matrix}\text{зведемо вираз до}\\ \text{спільного знаменника}\end{matrix}\right\}=$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x-1-x\ln x}{\ln x(x-1)}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 1}\frac{1-\ln x-x\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}(x-1)+\ln x}=\lim_{x\to 1}\frac{-\ln x}{1-\dfrac{1}{x}+\ln x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=$$

$$-\lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}}=\left\{\begin{matrix}\text{не будемо спрощувати дріб,}\\ \text{а просто підставимо границю}\end{matrix}\right\}=-\frac{1}{2}.$$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arcsin x}{\sin^3 x}=\left\{\dfrac{0}{0}\right\}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{3\sin^2 x\cos x}=\dfrac{1}{3}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x^2}-1}{\sqrt{1-x^2}\sin^2 x\cos x}.$

Підставимо в одержаний вираз значення $x=0$ і знову одержимо невизначеність. По суті, ми знову можемо застосувати правило Лопіталя, але похідна знаменника буде досить складною (добуток трьох функцій). Якщо уважно розглянути вираз, можна зробити висновок, що у знаменнику $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{1-x^2}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$. Тобто одразу перейдемо до границі в цих виразах.

$$\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{\sqrt{1-x^2}\sin^2 x\cos x}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{\sin^2 x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(-2x)}{2\sin x\cos x}=-\frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}\sin x\cos x}=$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\text{формально ми знову отримали невизначеність } \left\{\frac{0}{0}\right\}. \\ \text{Але, } \lim\limits_{x\to 0}\sqrt{1-x^2}=1,\ \lim\limits_{x\to 0}\cos x=1,\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1\end{array}\right\}=-\frac{1}{6}.$$

Зауваження. Там, де можливо, потрібно комбінувати правило Лопіталя з іншими методами розкриття невизначеностей. Тоді час розв’язання прикладів значно скоротиться.

Приклад 2. За правилом Лопіталя знайти границі:

1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\cos x)^{\frac{\pi}{2}-x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}$.

Розв’язання.

1. Маємо невизначеність $\{0^0\}$. Нагадуємо метод розкриття невизначеностей виду $\{1^\infty\},\{0^0\},\{\infty^0\}$.

Спочатку позначаємо границю деякою буквою:

$$A=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\cos x)^{\frac{\pi}{2}-x}.$$

Потім логарифмуємо одержану рівність:

$$\ln A=\ln\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\cos x)^{\frac{\pi}{2}-x}.$$

Далі розглядаємо праву частину одержаної рівності:

$$\ln\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\cos x\right)^{\frac{\pi}{2}-x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\ln\left(\cos x\right)^{\frac{\pi}{2}-x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\ln\left(\cos x\right)\right]=\left\{0\cdot\infty\right\}=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln\cos x}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^{-1}}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{1}{\cos x}\cdot\left(-\sin x\right)}{-\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^{-2}\left(-1\right)}=-\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\cdot\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^{2}}{\cos x}=$$

$$=\left\{\begin{array}{c}\text{маємо невизначеність}\\ \left\{\frac{0}{0}\right\},\ \text{причому}\ \lim\limits_{x\to\pi/2}\sin x=1\end{array}\right\}=-\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^{2}}{\cos x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=$$

$$=-\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\left(-1\right)}{-\sin x}=-2\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{\pi}{2}-x}{\sin x}=-2\cdot 0=0.$$

Тобто права частина рівності дорівнює 0. Тоді $\ln A=0$, звідси $A=1$.

2. Аналогічно розв'яжемо і цей приклад. Маємо невизначеність $\left\{1^{\infty}\right\}$.

$$A=\lim_{x\to 1}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}};\ \ln A=\ln\lim_{x\to 1}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}.$$

Обчислюємо праву частину рівності:

$$\ln\lim_{x\to 1}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}=\lim_{x\to 1}\ln\left(\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}=\lim_{x\to 1}\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}\cdot\ln\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}=\left\{\infty\cdot 0\right\}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\ln\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}}{\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{2}}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{\pi x}{4}}\cdot\frac{\pi}{4}}{-\frac{1}{\sin^2\frac{\pi x}{2}}\cdot\frac{\pi}{2}}=$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 1}\frac{\sin^2\frac{\pi x}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}\cdot\cos^2\frac{\pi x}{4}}=-1.$$

Тоді $\ln A=-1$. Звідси $A=e^{-1}$.

І нарешті, розв’яжемо ще один приклад.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\left\{\begin{array}{c}\text{користуємося}\\ \text{правилом Лопіталя}\end{array}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=$$

$$=\left\{\begin{array}{c}\text{якщо ми ще раз застосуємо правило Лопіталя, то}\\ \text{повернемося до умови прикладу. Тобто не завжди}\\ \text{за правилом Лопіталя можна розв’язати приклад}\end{array}\right\}.$$

Розв’яжемо цей приклад іншим методом:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x\left(1+e^{-2x}\right)}{e^x\left(1-e^{-2x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+e^{-2x}}{1-e^{-2x}}=1.$$

5. Дослідження функцій за допомогою похідних

5.1. Інтервали зростання і спадання функцій

Нагадаємо означення зростаючої і спадної функцій.

Означення. Функція $y = f(x)$ називається *зростаючою* на деякому інтервалі, якщо для будь-яких значень x_1 і x_2 з інтервалу, таких, що $x_1 < x_2$, виконується нерівність $f(x_1) < f(x_2)$.

Якщо виконується нерівність $f(x_1) \le f(x_2)$, то функція називається *неспадною*.

Означення. Функція $y = f(x)$ і називається *спадною* на деякому інтервалі, якщо для будь-яких значень x_1 і x_2 з інтервалу, таких, що $x_1 < x_2$, виконується нерівність $f(x_1) > f(x_2)$.

Якщо виконується нерівність $f(x_1) \ge f(x_2)$, то функція називається *незростаючою*.

Інтервали зростання (неспадання) і спадання (незростання) функції називають *інтервалами монотонності*.

З'ясуємо тепер, як пов'язані зростання і спадання функції із знаком похідної цієї функції.

Теорема. Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$ і диференційована на інтервалі (a, b). Для того щоб функція $f(x)$ була неспадною на $[a, b]$, необхідно і достатньо, щоб похідна $f'(x)$ була невід'ємною на (a, b), тобто $f'(x) \ge 0$.

Доведення. Необхідність. Нехай $f(x)$ неспадна на $[a, b]$. Візьмемо між a і b точки x і $x + \Delta x$. Нехай, наприклад, $\Delta x > 0$. Тоді $f(x + \Delta x) \ge f(x)$, або $f(x + \Delta x) - f(x) \ge 0$, або $\dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \ge 0$.

Зазначимо, що остання нерівність буде правильною і для $\Delta x > 0$, і для $\Delta x < 0$. Перейдемо до границі, коли $\Delta x \to 0$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x) \geq 0.$$

Тут ми застосували теорему: якщо функція невід'ємна і прямує до границі, то і границя функції буде невід'ємною.

Достатність. Нехай $f'(x) \geq 0$ на (a, b). Візьмемо два довільних значення x_1 і x_2 $(x_1 < x_2)$ з проміжку $[a, b]$ і до функції $f(x)$ застосуємо на $[x_1, x_2]$ теорему Лагранжа:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1), \ (x_1 < c < x_2).$$

Оскільки $f'(c) \geq 0$, то $f(x_2) \geq f(x_1)$ і функція $f(x)$ буде неспадною.

Аналогічну теорему маємо для незростаючої функції.

Із доведеної теореми для функції $f(x)$ не виключена можливість на деяких проміжках бути сталою, а для її похідної перетворюватися на цих проміжках тотожньо у 0.

Аналогічні теореми маємо і для зростаючих і спадних функцій (рис. 11).

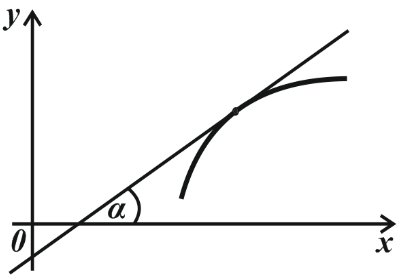
Надалі не будемо приділяти великої уваги тому, чи буде функція $f(x)$ на деякому інтервалі зростаючою або неспадною, а похідна $f'(x) > 0$ або $f'(x) \geq 0$. Також, чи буде функція $f(x)$ на деякому інтервалі спадною або незростаючою, а похідна $f'(x) < 0$ або $f'(x) \leq 0$.

Тому будемо користуватися такою достатньою ознакою. Якщо похідна $f'(x)$ на деякому проміжку додатна, тобто $f'(x) > 0$ (за винятком лише деякої кількості точок х), то функція $f(x)$ на цьому проміжку буде зростаючою. Якщо ж на проміжку $f'(x) < 0$, то функція буде спадною.

Означення. Точки, у яких похідна функції $y = f(x)$ дорівнює нулю або не існує, називаються *стаціонарними* (*критичними*) точками першої похідної.

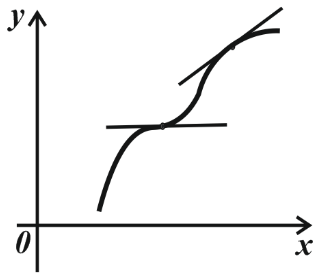
Інтервал (a, b), в усіх точках якого виконується нерівність $y' \geq 0$ (або $y' \leq 0$), називається інтервалом монотонності функції $y = f(x)$.

Функція зростаюча
$y' > 0$



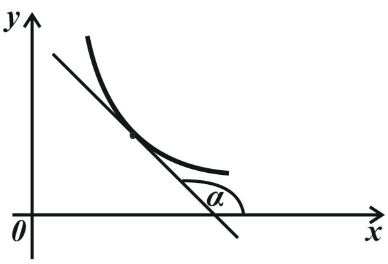
Дотична до кривої утворює гострий кут з додатним напрямом осі Ох

Функція неспадна
$y' \geq 0$



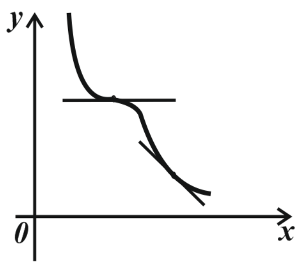
Є точки, у яких дотична паралельна осі Ох

Функція спадна
$y' < 0$



Дотична до кривої утворює тупий кут з додатним напрямом осі Ох

Функція незростаюча
$y' \leq 0$



Є точки, у яких дотична паралельна осі Ох

Рис. 11

Схема визначення інтервалів зростання і спадання функції (інтервалів монотонності). Для того щоб знайти інтервали монотонності функції, потрібно:

1) знайти область визначення функції;

2) знайти першу похідну функції;

3) знайти стаціонарні точки похідної (для цього потрібно похідну прирівняти до нуля і розв’язати одержане рівняння, до речі, якщо похідна функції – це дріб, потрібно прирівняти до нуля не тільки чисельник, а й знаменник);

4) область визначення функції поділити стаціонарними точками на інтервали, на кожному з яких функція буде або зростати, або спадати. У кожному інтервалі обрати довільну точку (головне – всередині інтервалу) і визначити знак похідної в цій точці:

– якщо $y' > 0$, то функція зростає;

– якщо $y' < 0$, то функція спадає.

Приклад. Знайти інтервали зростання і спадання функції $y = x^2 - 8x$.

Розв’язання. Користуємося сформульованою вище схемою:

1. Область визначення функції: $(-\infty, \infty)$.

2. Перша похідна функції: $y' = 2x - 8$.

3. Стаціонарні точки похідної знаходимо з рівняння: $2x - 8 = 0$. Звідси $x = 4$ – стаціонарна (критична) точка.

4. 

Одержали два інтервали: $(-\infty, 4)$, $(4, \infty)$, на кожному з яких функція буде або зростати, або спадати.

На інтервалі $(-\infty, 4)$ обираємо довільну точку, наприклад $x = 3$, і підставляємо це значення в похідну: $y'(3) = 2 \cdot 3 - 8 = -2$, похідна від’ємна, тому на інтервалі $(-\infty, 4)$ функція спадає.

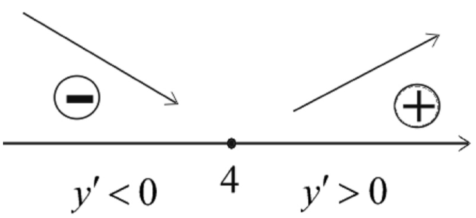


Рис. 12

Аналогічно розглянемо інтервал $(4, \infty)$. Виберемо точку, наприклад $x = 5$, і підставимо в похідну. До речі, нам потрібний тільки знак похідної (а не її значення), тому просто запишемо: $y'(5) > 0$. На цьому інтервалі функція зростає. Маємо схему (рис. 12).

Тобто, на інтервалі $(-\infty; 4)$ функція спадає, а на інтервалі $(4; \infty)$ функція зростає.

5.2. Максимум і мінімум (екстремум) функції

Означення. Функція $y = f(x)$ має *максимум* $(\max)$ у точці x_1, якщо значення функції в точці x_1 більше, ніж її значення в усіх точках деякого інтервала, який містить точку x_1.

Інакше: якщо можна знайти окіл точки x_1 $(\alpha < x_1 < \beta)$, що для всіх точок x цього околу $(x \neq x_1)$ буде виконуватись нерівність $f(x_1) > f(x)$, то в точці x_1 функція має максимум (рис. 13).

Аналогічно формулюється означення мінімуму.

Означення. Функція $y = f(x)$ має *мінімум* $(\min)$ в точці x_2, якщо існує окіл точки x_2 $(\alpha < x_2 < \beta)$, що для всіх точок x цього околу $(x \neq x_2)$ буде виконуватись нерівність $f(x_2) < f(x)$ (рис. 14).

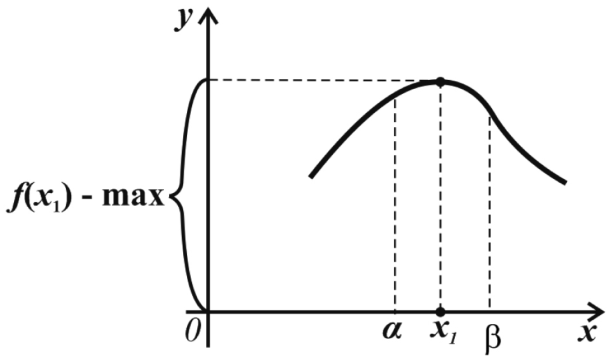


Рис. 13

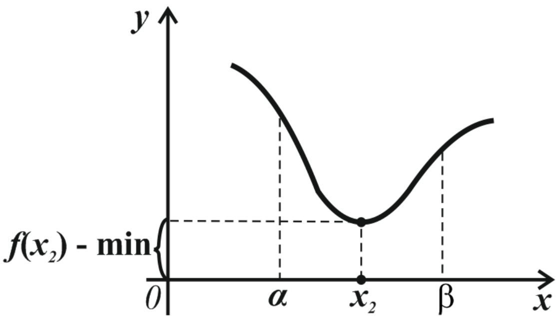


Рис. 14

Зауважимо, що функція, яка визначена на відрізку, може досягати $\max$ або $\min$ тільки у внутрішніх точках відрізка. Не слід думати, що $\max$ і $\min$ функції є відповідно її найбільшим і найменшим значеннями. Надалі ми повернемося до цього питання. Максимуми й мінімуми функції називають *екстремумами* функції.

Теорема (необхідні умови існування екстремуму функції). Якщо диференційована функція $y = f(x)$ має в точці $x = x_0$ екстремум, то в цій точці похідна функції дорівнює нулю: $f'(x_0) = 0$.

Доведення. Нехай для визначеності в точці x_0 маємо максимум. Тоді при достатньо малих значеннях Δx маємо: $f\left(x_0+\Delta x\right)<f\left(x_0\right)$ або $f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)<0$. Далі складемо відношення:

$$\frac{f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)}{\Delta x}.$$

Зауважимо, що знак цього відношення визначається знаком Δx:

– якщо $\Delta x<0$

$$\frac{f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)}{\Delta x}>0, \tag{19}$$

– якщо $\Delta x>0$

$$\frac{f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)}{\Delta x}<0. \tag{20}$$

Згадаємо означення похідної:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)}{\Delta x}=f'\left(x_0\right). \tag{21}$$

Якщо $f\left(x\right)$ має похідну при $x=x_0$, то границя в рівності (21) не залежить від того, чи буде $\Delta x>0$, чи $\Delta x<0$. Перейдемо до границі, коли $\Delta x\to 0$, у виразах (19) і (20). Одержимо:

– коли $\Delta x<0$

$$f'\left(x_0\right)\geq 0,$$

– коли $\Delta x>0$

$$f'\left(x_0\right)\leq 0.$$

Ці нерівності можуть бути правильними водночас тільки у випадку, коли $f'\left(x_0\right)=0$. Теорему доведено.

Аналогічно можна довести теорему і у випадку, коли функція $y=f\left(x\right)$ має в точці $x_0=0$ мінімум.

Наведена теорема формулює лише необхідні умови існування екстремуму: якщо екстремум у точці x_0 існує і функція диференційована, то в точці x_0, $f'\left(x_0\right)=0$ (дотична до кривої в цій точці паралельна осі *Ox*). Обернена теорема не існує. Тобто не завжди в точках, у яких $f'(x_0)=0$, буде екстремум.

Більше того, екстремум може бути в точках, у яких похідна не існує. Розглянемо приклади.

$y=x^3$ – ця *функція має похідну* в точці $x_0=0$ $\left(y'(0)=0\right)$, але з рис. 15 видно, що в цій точці *функція не має ні максимуму, ні мінімуму*.

$y=|x|$ – ця *функція не має похідної* в точці $x_0=0$ (при знаходженні похідної в точці $x_0=0$ при $\Delta x<0$ і $\Delta x>0$ одержуємо різні границі), але з рис. 16 видно, що в цій точці *функція має мінімум*.

$y=\left(1-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$ – ця *функція не має похідної* в точці $x_0=0$ $\left(y'(0)=\infty\right)$, але з рис. 17 видно, що в цій точці *функція має максимум*.

$y=x^{\frac{1}{3}}$ – ця *функція не має похідної* в точці $x_0=0$ $\left(y'(0)=\infty\right)$ і в цій точці *функція не має ні максимуму, ні мінімуму* (теж видно з рис. 18).

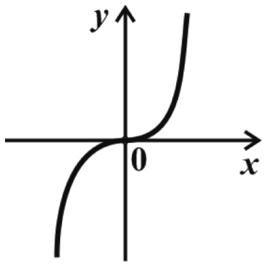


Рис. 15

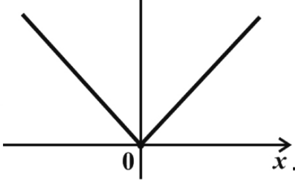


Рис. 16

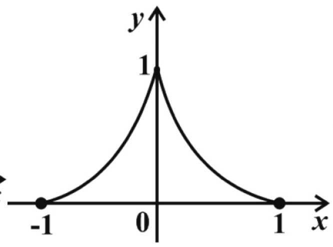


Рис. 17

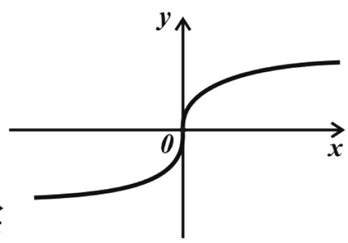


Рис. 18

Таким чином, функція $y=f(x)$ може мати екстремум у точці x_0 лише у двох випадках:

1) похідна функції в точці x_0 існує і дорівнює нулю;

2) похідна функції в точці x_0 не існує.

Нагадаємо, що значення аргументу $x=x_0$, при яких похідна дорівнює нулю або не існує, називають стаціонарними (критичними) точками похідної. Робимо висновок: не в кожній стаціонарній точці функція буде мати екстремум (але якщо функція в деякій точці має екстремум, то це точка стаціонарна). Тому для знаходження точок екстремуму потрібно спочатку знайти всі стаціонарні точки, а потім кожну з них перевірити на наявність в ній максимуму або мінімуму.

Як зробити таку перевірку, ми дізнаємося з наступної теореми.

Теорема (достатні умови існування екстремуму функції). Нехай функція $y = f(x)$ неперервна на деякому інтервалі, який містить у собі стаціонарну точку x_0 і диференційована в усіх точках цього інтервалу (за винятком, можливо, самої точки x_0). Тоді, якщо при переході (зліва направо) через цю точку похідна змінює знак з «плюса» на «мінус», то в точці $x = x_0$ функція має максимум. Якщо при переході через точку x_0 похідна змінює знак з «мінуса» на «плюс», то функція в цій точці має мінімум.

Схема дослідження функції на екстремум (max і min) (за допомогою першої похідної). Для того щоб знайти точки екстремуму функції, потрібно:

1) знайти область визначення функції;

2) знайти першу похідну функції;

3) знайти стаціонарні точки похідної (для цього потрібно похідну прирівняти до нуля і розв'язати одержане рівняння, до речі, якщо похідна функції – це дріб, потрібно прирівняти до нуля не тільки чисельник, а і знаменник);

4) область визначення функції поділити стаціонарними точками на інтервали, на кожному з яких функція буде або зростати, або спадати. У кожному інтервалі обрати довільну точку (головне – всередині інтервалу) і визначити знак похідної в цій точці:

– якщо $y' > 0$, то функція зростає;

– якщо $y' < 0$, то функція спадає;

5) для знаходження точок екстремуму потрібно перевірити кожну стаціонарну точку за такою схемою:

– стаціонарна точка повинна належати області визначення функції;

– при переході через цю точку перша похідна повинна змінювати знак.

Далі користуємося рис. 19, 20:

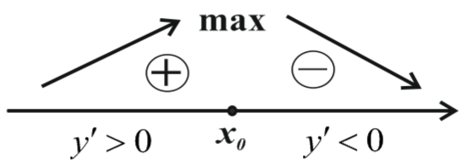


Рис. 19

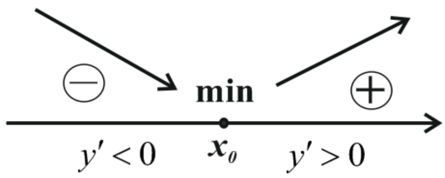


Рис. 20

6) обчислюємо значення функції в точці екстремуму.

Зауважимо, що коли перша похідна при переході через стаціонарну точку не змінює знак, то в стаціонарній точці екстремуму немає.

Досліджувати на екстремум функцію можна і за допомогою другої похідної (див. [1]).

Приклад. Дослідити на екстремум функцію $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$.

Розв'язання. За схемою:

1. Область визначення функції: $(-\infty; \infty)$.

2. Знайдемо похідну: $y' = x^2 - 4x + 3$.

3. Знайдемо стаціонарні точки: $x^2 - 4x + 3 = 0$. Корені рівняння: $x_1 = 1$, $x_2 = 3$ – стаціонарні точки (обидві точки належать області визначення функції).

4. Маємо три інтервали монотонності:

1) $(-\infty; 1)$: $y'(0) = 3 > 0$, функція зростає.

2) $(1; 3)$: $y'(2) = -1 < 0$, функція спадає.

3) $(3; \infty)$: $y'(4) = 3 > 0$, функція зростає.

Робимо висновок: інтервал спадання: $(1; 3)$; інтервали зростання: $(-\infty; 1)$, $(3; \infty)$.

5. Перевіряємо стаціонарні точки:

– стаціонарні точки належать області визначення функції;

– користуємося рис. 19, 20:

Отже, у точці $x_1 = 1$ маємо максимум, у точці $x_2 = 3$ – мінімум (рис. 21).

6. Знайдемо значення функції в точках екстремуму: $y(1)=7/3$ – максимум; $y(3)=1$ – мінімум.

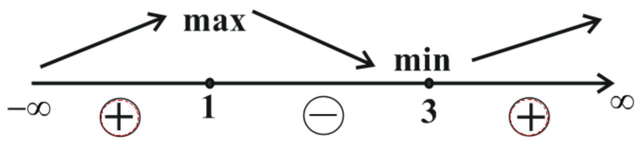


Рис. 21

Зауважимо, що крім знаходження точок екстремуму в цьому прикладі ми ще й визначили інтервали зростання і спадання функції. Тобто знаходження інтервалів монотонності й точок екстремуму практично можна розв’язати за однаковою схемою. Тому надалі в кожному прикладі ми будемо знаходити й інтервали монотонності, і точки екстремуму.

Крім того, слід запам’ятати: при знаходженні інтервалів монотонності не важливо, чи належить стаціонарна точка області визначення (всередині області визначення), чи не належить. Все одно, визначаємо знак похідної ліворуч і праворуч стаціонарної точки. А коли потрібно дослідити функцію на екстремум у стаціонарній точці, то перше, що потрібно перевірити, чи належить стаціонарна точка області визначення (всередині області визначення). Якщо не належить, то дослідження на екстремум не виконуємо.

Зауважимо, що не завжди кожна функція буде мати інтервали зростання, спадання, максимум і мінімум. Може бути, що функція буде тільки зростати (наприклад, $y=\ln x$), а інтервалів спадання і точок екстремуму не буде і т. д. Головне, чітко за схемою провести дослідження функції і потім зробити висновки.

Запитання для самоперевірки

1. Яка функція називається незростаючою на інтервалі?
2. Яка точка називається стаціонарною (критичною) точкою першої похідної?
3. Що таке інтервали монотонності функції?
4. Якою буде функція $y=f(x)$ на інтервалі, якщо її похідна від’ємна?
5. Як формулюється означення мінімуму функції в точці?

5.3. Розв’язання прикладів

Розділ I (найпростіші приклади)

Приклад 1. Знайти інтервали зростання, спадання і точки екстремуму функції $y = 3x^2 - 2x^3$.

Розв’язання.

1. Область визначення функції: $(-\infty; \infty)$.
2. Знайдемо похідну: $y' = 6x - 6x^2$.
3. Знайдемо стаціонарні точки:

$$6x - 6x^2 = 0 \Rightarrow x - x^2 = 0 \Rightarrow x(1 - x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 1.$$

Маємо дві стаціонарні точки.

4. Маємо три інтервали монотонності:

1) $(-\infty; 0)$: $y'(-1) = -12 < 0$, функція спадає.

2) $(0;1)$: $y'\left(\frac{1}{2}\right) = 3 - \frac{3}{2} > 0$, функція зростає.

3) $(1;\infty)$: $y'(2) = 12 - 24 < 0$, функція спадає.

Робимо висновок: інтервали спадання: $(-\infty; 0)$, $(1;\infty)$; інтервал зростання: $(0;1)$.

5. Стаціонарні точки $x_1 = 0,\ x_2 = 1$ належать області визначення.

Досліджуємо точку $x_1 = 0$: похідна змінює знак з мінуса на плюс, тому в точці $x_1 = 0$ маємо мінімум. Досліджуємо точку $x_2 = 1$: похідна змінює знак з плюса на мінус, тому в точці $x_2 = 1$ маємо максимум (рис. 22).

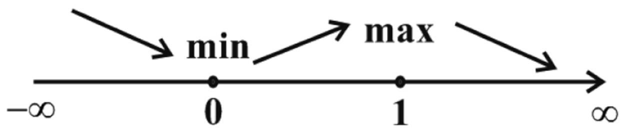


Рис. 22

6. Знайдемо значення екстремумів функції: $y(0) = 0$, тобто в точці $A(0; 0)$ маємо мінімум, $y(1) = 1$, тобто в точці $B(1;1)$ – максимум.

Приклад 2. Знайти інтервали зростання, спадання і точки екстремуму функції $y = x + e^x$.

Розв'язання.

1. Область визначення функції: $(-\infty; \infty)$.

2. Знайдемо похідну: $y' = 1 + e^x$.

3. Знайдемо стаціонарні точки: $1 + e^x = 0$. Звідси $e^x = -1$. Але функція $y = e^x$ завжди додатна, тобто немає такого значення x, яке задовольняє рівняння. Тому $e^x \neq -1$. Стаціонарних точок функція не має і похідна $y' = 1 + e^x$ завжди додатна (нагадаємо, що $e^x > 0$).

4. Маємо один інтервал $(-\infty; \infty)$, і на цьому інтервалі $y' > 0$, тому функція всюди зростає. Робимо висновок: інтервали спадання: немає; інтервал зростання: $(-\infty; \infty)$. Точок екстремуму немає.

Приклад 3. Знайти інтервали монотонності й точки екстремуму функції $y = x - e^x$.

Розв'язання.

1. Область визначення функції: $(-\infty; \infty)$.

2. Знайдемо похідну: $y' = 1 - e^x$.

3. Знайдемо стаціонарні точки: $1 - e^x = 0 \Rightarrow e^x = 1 \Rightarrow x = 0$. Маємо одну стаціонарну точку $x = 0$.

4. Маємо два інтервали монотонності:

1) $(-\infty, 0)$: $y'(-1) = 1 - e^{-1} = 1 - \dfrac{1}{e} > 0$ (нагадаємо, що $e \approx 2{,}71\ldots$), функція зростає;

2) $(0, \infty)$: $y'(1) = 1 - e < 0$, функція спадає.

5. Точка $x = 0$ належить області визначення функції. Перша похідна при переході через цю точку змінює знак з плюса на мінус. У точці $x = 0$ маємо максимум (рис. 23).

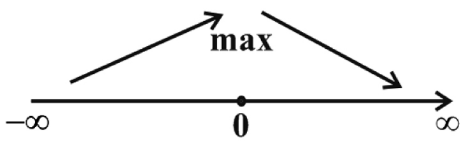


Рис. 23

6. Знайдемо координати точки максимуму $y(0) = -1$, тобто в точці $A(0, -1)$ маємо максимум.

Приклад 4. Знайти інтервали монотонності й точки екстремуму функції $y = \ln(4x + 1)$.

Розв'язання.

1. Область визначення функції: $4x+1>0 \Rightarrow x>-\frac{1}{4}$, тобто $\left(-\frac{1}{4}, \infty\right)$. (Нагадаємо, що область визначення функції $y=\ln x$: $x>0$.)

2. Знайдемо похідну: $y'=\frac{4}{4x+1}$.

3. Знайдемо стаціонарні точки. У чисельнику $4 \neq 0$. Прирівнюємо знаменник до нуля: $4x+1=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{4}$. Але ця стаціонарна точка не належить області визначення функції. Тому стаціонарних точок функція не має. Звідси випливає, що похідна в області визначення буде або від'ємною, або додатною.

4. Знайдемо знак похідної в довільній точці, наприклад у точці $x=0$: $y'(0)>0$. Тобто, похідна на інтервалі $\left(-\frac{1}{4}, \infty\right)$ (область визначення) додатна, тому функція $y=\ln(4x+1)$ на цьому інтервалі буде зростаючою.

Інтервал зростання: $\left(-\frac{1}{4}, \infty\right)$. Інтервалів спадання і точок екстремуму немає.

Приклад 5. Знайти інтервали монотонності й точки екстремуму функції $y=x^2-2\ln x$.

Розв'язання.

1. Область визначення функції: $(0, \infty)$.

2. Знайдемо похідну: $y'=2x-\frac{2}{x}=2\frac{x^2-1}{x}$.

3. Знайдемо стаціонарні точки. Похідна функції – дріб, тому прирівнюємо до нуля чисельник і знаменник.

$$x^2-1=0 \Rightarrow x_1=-1,\ x_2=1; \quad x=0 \Rightarrow x_3=0.$$

По суті, маємо три стаціонарні точки. Але (будьте уважними!) точки $x_1=-1$ і $x_3=0$ не належать області визначення функції, тому маємо тільки одну стаціонарну точку $x_2 = 1$, яка ділить область визначення функції $(0, \infty)$ на два інтервали: $(0, 1)$ і $(1, \infty)$.

4. Маємо два інтервали монотонності:

1) $(0,1)$: $y'\left(\frac{1}{2}\right) < 0$, функція спадає;

2) $(1,\infty)$: $y'(2) > 0$, функція зростає.

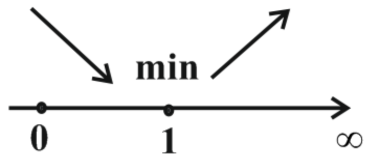


Рис. 24

5. Точка $x_2 = 1$ належить області визначеня функції. Похідна при переході через цю точку змінює знак. У точці $x_2 = 1$ маємо мінімум (рис. 24).

6. Знайдемо координати точки мінімуму $y(1) = 1$, тобто в точці $A(1, 1)$ функція має мінімум.

Приклад 6. Знайти інтервали монотонності й точки екстремуму функції $y = \operatorname{arcctg} x$.

Розв'язання.

1. Область визначення функції: $(-\infty, \infty)$.

2. Знайдемо похідну: $y' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

3. Стаціонарних точок немає, оскільки $1 + x^2 \neq 0$.

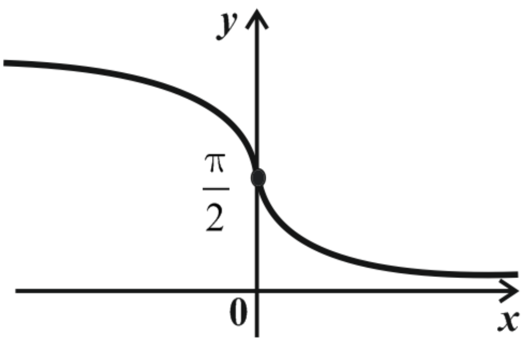


Рис. 25

4. На $(-\infty, \infty)$ похідна від'ємна: $y' < 0$, і функція на $(-\infty, \infty)$ спадає.

Робимо висновок: інтервал спадання: $(-\infty, \infty)$; інтервали зростання: немає; екстремуми: немає.

Зауваження. Якщо знати графік функції $y = \operatorname{arcctg} x$, то поетапне розв'язання виконувати не потрібно (рис. 25).

Розділ II

Приклад 1. Знайти інтервали монотонності й точки екстремуму функції $y = \dfrac{\ln x}{x}$.

Розв'язання.

1. Область визначення функції: $(0, \infty)$.

2. Знайдемо похідну: $y' = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$.

3. Знайдемо стаціонарні точки: $1 - \ln x = 0 \Rightarrow x_1 = e$; $x_2 = 0$. Одержали дві стаціонарні точки, але одна з них $x_2 = 0$ не належить області визначення.

4. Маємо два інтервали монотонності:

1) $(0, e)$: $y'\left(e^{-1}\right) = \dfrac{1 - \ln e^{-1}}{\left(e^{-1}\right)^2} = \dfrac{2}{e^{-2}} = 2e^2 > 0$, функція зростає;

2) (e, ∞): $y'\left(e^2\right) = \dfrac{1 - \ln e^2}{e^4} = -\dfrac{1}{e^4} < 0$, функція спадає.

Робимо висновок: інтервал зростання: $(0, e)$; інтервал спадання: (e, ∞).

5. У стаціонарній точці $x_1 = e$ маємо максимум, тому що: 1) ця точка належить області визначення функції; 2) при переході через цю точку похідна змінює знак з плюса на мінус (рис. 26).

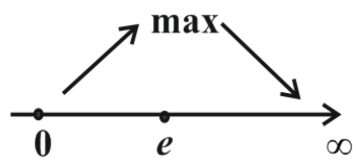


Рис. 26

6. Знайдемо координати точки максимуму: $y(e) = \dfrac{\ln e}{e} = \dfrac{1}{e}$, тобто точка $A\left(e, \dfrac{1}{e}\right)$ – точка максимуму.

Приклад 2. Знайти інтервали монотонності й точки екстремуму функції $y = x \cdot e^{-2x}$.

Розв'язання.

1. Область визначення функції: $(-\infty, \infty)$.

2. Знайдемо похідну: $y' = e^{-2x} - 2xe^{-2x} = e^{-2x}(1 - 2x)$.

3. Знайдемо стаціонарні точки: $e^{-2x}\left(1-2x\right)=0$. Оскільки $e^{-2x}\neq 0$, то $1-2x=0$. Звідси $x=\dfrac{1}{2}$ – стаціонарна точка.

4. Маємо два інтервали монотонності:

1) $\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right)$: $y'(0)>0$ (нагадаємо, що $e^{-2x}>0$), функція зростає;

2) $\left(\dfrac{1}{2},\infty\right)$: $y'(1)<0$, функція спадає.

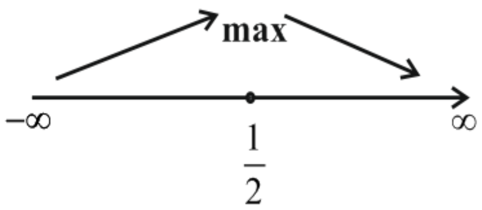


Рис. 27

5. У точці $x=\dfrac{1}{2}$ маємо максимум (стаціонарна точка належить області визначення, при переході через цю точку похідна змінює знак) (рис. 27).

6. Знаходимо координати точки максимуму: $y\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}\cdot e^{-1}=\dfrac{1}{2e}$. Тобто, точка $A\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2e}\right)$ – точка максимуму.

Приклад 3. Знайти інтервали монотонності й точки екстремуму функції $y=\dfrac{x+2}{\left(x-3\right)^2}$.

Розв'язання.

1. Область визначення функції: $\left(-\infty,3\right)\cup\left(3,\infty\right)$, або $x\neq 3$.

2. Знайдемо похідну:

$$y'=\frac{\left(x-3\right)^2-2\left(x-3\right)\left(x+2\right)}{\left(x-3\right)^4}=\frac{x-3-2\left(x+2\right)}{\left(x-3\right)^3}=-\frac{x+7}{\left(x-3\right)^3}.$$

3. Знайдемо стаціонарні точки:

$x+7=0\Rightarrow x_1=-7$; $\left(x-3\right)^3=0\Rightarrow x_2=3$.

Друга стаціонарна точка не належить області визначення, але все одно вона бере участь у розбитті області визначення на інтервали монотонності.

4. Маємо три інтервали монотонності:

1) $(-\infty, -7)$: $y'(-8) < 0$, функція спадає;

2) $(-7, 3)$: $y'(0) > 0$, функція зростає;

3) $(3, \infty)$: $y'(4) < 0$, функція спадає.

5. Визначаємо точки екстремуму. У точці $x_1 = -7$ функція має мінімум. А ось в точці $x_2 = 3$ екстремуму не буде, хоча похідна і змінює знак при переході через цю точку. Справа в тому, що в цій точці функція не існує (точка $x_2 = 3$ не належить області визначення) (рис. 28).

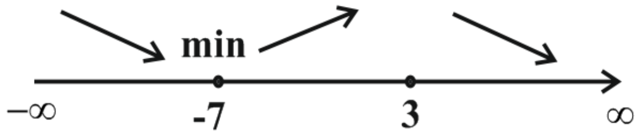


Рис. 28

6. Знайдемо координати точки мінімуму: $y(-7) = -\frac{5}{100} = -\frac{1}{20}$, або $A\left(-7, -\frac{1}{20}\right)$ – точка мінімуму.

Приклад 4. Знайти інтервали монотонності й точки екстремуму функції $y = \frac{e^x}{x+2}$.

Розв'язання.

1. Область визначення функції: $(-\infty, -2) \cup (-2, \infty)$, або $x \neq -2$.

2. Знайдемо похідну: $y' = \frac{e^x(x+2) - e^x}{(x+2)^2} = \frac{e^x(x+1)}{(x+2)^2}$.

3. Стаціонарні точки: $x_1 = -2$; $x_2 = -1$. Нагадаємо, що $e^x \neq 0$.

4. Маємо три інтервали монотонності (нагадаємо, що $e^x > 0$ для всіх x):

1) $(-\infty; -2)$: $y'(-4) < 0$, функція спадає.

2) $(-2; -1)$: $y'(-1{,}5) < 0$, функція спадає.

3) $(-1; \infty)$: $y'(0) > 0$, функція зростає.

Робимо висновок: інтервали спадання: $(-\infty; -2)$, $(-2; -1)$; інтервал зростання: $(-1; \infty)$.

5. У стаціонарній точці $x_1 = -2$ екстремуму немає, тому що точка $x_1 = -2$ не належить області визначення функції. У точці $x_2 = -1$ маємо мінімум (рис. 29).

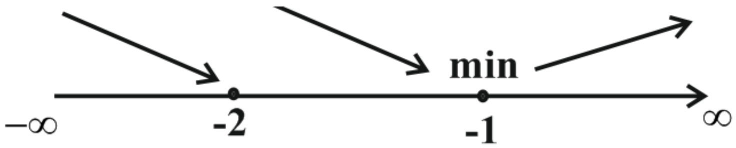


Рис. 29

6. $y(-1) = \frac{1}{e}$. Координати точки мінімуму: $A\left(-1, \frac{1}{e}\right)$.

5.4. Інтервали опуклості й увігнутості функції. Точки перегину

Розглянемо криву $y = f(x)$, яка є графіком диференційованої на (a, b) функції $f(x)$.

Означення. Крива $y = f(x)$ називається *опуклою* на (a, b), якщо всі точки кривої лежать нижче будь-якої дотичної, проведеної до кривої на (a, b) (крім точки дотику) (рис. 30).

Аналогічне означення можна сформулювати для *увігнутої* кривої, але тут точки кривої лежать вище дотичної (рис. 31).

Означення. Точка M_0, яка відокремлює опуклу частину неперервної кривої від увігнутої частини, називається *точкою перегину* (рис. 32).

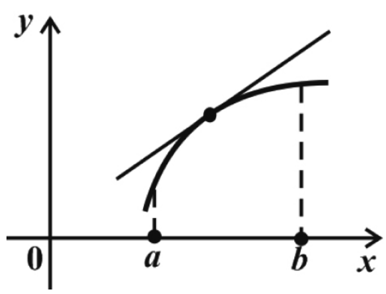


Рис. 30

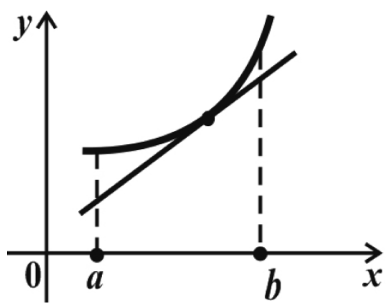


Рис. 31

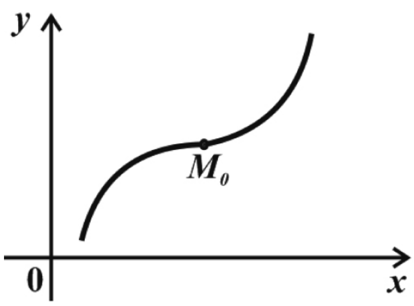


Рис. 32

Теорема (зв'язок опуклості функції зі знаком другої похідної). Якщо на інтервалі (a, b) друга похідна функції $f(x)$ від'ємна, тобто $f''(x) < 0$, то крива $y = f(x)$ на цьому інтервалі опукла.

Аналогічну теорему можна сформулювати і для увігнутої функції.

Ці теореми можна представити у вигляді такої схеми:

Якщо $y'' < 0$ на (a, b), то крива $y = f(x)$ опукла: .

Якщо $y'' > 0$ на (a, b), то крива $y = f(x)$ увігнута: .

Означення. Точки, у яких друга похідна дорівнює нулю або не існує, називаються *стаціонарними* (критичними) точками другої похідної.

Теорема (достатні умови існування точки перегину). Нехай функція $y = f(x)$ неперервна на деякому інтервалі (a, b), який містить стаціонарну точку x_0, двічі диференційована в кожній точці цього інтервалу (за винятком, можливо, самої точки x_0). Тоді, якщо при переході через стаціонарну точку x_0, друга похідна змінює знак, то точка x_0 є точкою перегину.

Схема, яку ми зараз розглянемо, дозволяє знайти й інтервали опуклості та увігнутості, і точки перегину практично водночас. Якщо ж потрібно у завданні знайти тільки, наприклад, інтервали опуклості, то просто виберемо ті пункти схеми, які будуть нам потрібні.

Схема визначення інтервалів опуклості, увігнутості й точок перегину:

1) знаходимо область визначення функції;

2) знаходимо першу похідну функції;

3) знаходимо другу похідну функції;

4) знаходимо стаціонарні точки другої похідної (для цього розв'язуємо рівняння $f''(x) = 0$. Якщо друга похідна – це дріб, то прирівнюємо до нуля окремо чисельник і знаменник);

5) область визначення ділимо стаціонарними точками на інтервали, у кожному з яких крива або опукла, або увігнута. Якщо на інтервалі друга похідна від'ємна, то крива опукла; якщо на інтервалі друга похідна додатна, то крива увігнута;

6) для знаходження точок перегину перевіряємо кожну стаціонарну точку за такою схемою:

– стаціонарна точка повинна належати області визначення функції;

– при переході через цю точку друга похідна повинна змінювати знак. Якщо хоча б один з пунктів не виконується, точки перегину не буде;

7) знаходимо координати точок перегину.

5.5. Розв'язання прикладів

Розділ I (найпростіші приклади)

Приклад 1. Знайти інтервали опуклості, увігнутості й точки перегину кривої $y = x^3 - 3x^2 + 1$.

Розв'язання. Розв'яжемо приклад за розглянутою вище схемою.

1. Область визначення: $(-\infty, \infty)$.

2. Знайдемо першу похідну: $y' = 3x^2 - 6x$.

3. Знайдемо другу похідну: $y'' = 6x - 6$.

4. Знайдемо стаціонарні точки другої похідної: $6x - 6 = 0 \Rightarrow x = 1$ – стаціонарна точка.

5. Область визначення функції цією точкою ділиться на два інтервали, на кожному з яких крива буде або опуклою, або увігнутою. Знаходимо знак другої похідної на кожному інтервалі:

1) $(-\infty, 1)$: $y''(0) < 0$, крива опукла;

2) $(1, \infty)$: $y''(2) > 0$, крива увігнута.

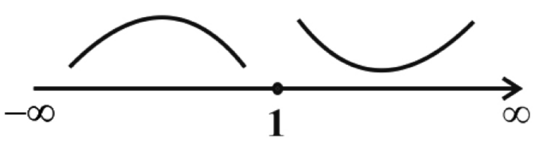


Рис. 33

Робимо висновок: інтервал, на якому крива увігнута: $(1, \infty)$; інтервал, на якому крива опукла: $(-\infty, 1)$ (рис. 33).

6. Перевіримо стаціонарну точку $x = 1$ за двома пунктами:

– точка $x = 1$ належить області визначення функції;

– друга похідна змінює знак при переході через цю точку.

Отже, $x = 1$ є точкою перегину.

7. Знаходимо координати цієї точки: $y(1)=-1$, тобто $A(1,-1)$ – точка перегину.

Ще раз зазначимо, що якби в розглянутому прикладі потрібно було знайти тільки інтервали опуклості (або увігнутості), то його розв'язання ми закінчили б пунктом 5.

Приклад 2. Знайти інтервали опуклості, увігнутості й точки перегину кривої $y=(2-x)^3$.

Розв'язання.

1. Область визначення: $(-\infty, \infty)$.

2. Знайдемо першу похідну: $y' = 3(2-x)^2(-1) = -3(2-x)^2$.

3. Знайдемо другу похідну: $y'' = (-3)2(2-x)(-1) = 6(2-x)$.

4. Знайдемо стаціонарні точки другої похідної: $6(2-x)=0 \Rightarrow x=2$ – стаціонарна точка.

5. Область визначення стаціонарною точкою ділиться на два інтервали. Знайдемо знак другої похідної на кожному інтервалі:

1) $(-\infty, 2)$: $y''(0)>0$, крива увігнута;

2) $(2, \infty)$: $y''(3)<0$, крива опукла.

Інтервал, на якому крива увігнута: $(-\infty, 2)$; інтервал, на якому крива опукла: $(2, \infty)$ (рис. 34).

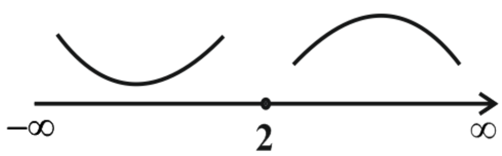


Рис. 34

6. Перевіряємо стаціонарну точку $x=2$ за двома пунктами:

– ця точка належить області визначення функції;
– друга похідна змінює знак при переході через цю точку.

Тобто $x=2$ є точкою перегину.

7. Знайдемо координати цієї точки: $y(2)=0$, тобто точка $A(2,0)$ – точка перегину.

Приклад 3. Знайти інтервали опуклості, увігнутості й точки перегину кривої $y=e^{-5x}$.

Розв'язання.

1. Область визначення: $(-\infty, \infty)$.

2. Перша похідна: $y' = -5e^{-5x}$.

3. Друга похідна: $y'' = 25e^{-5x}$.

4. Знайдемо стаціонарні точки другої похідної: $25e^{-5x}=0$. Але $e^{-5x}\neq 0$ (крім того, $e^{-5x}>0$), тому робимо висновок, що функція стаціонарних точок не має, тому точок перегину не буде.

5. Оскільки $e^{-5x}>0$ на $(-\infty,\infty)$, то крива буде всюди увігнутою.

Розділ II

Приклад 1. Знайти інтервали опуклості, увігнутості й точки перегину кривої $y=\dfrac{1}{x+2}$.

Розв'язання.

1. Область визначення: $(-\infty,-2)\cup(-2,\infty)$ або $x\neq -2$.

2. Перша похідна: $y=(x+2)^{-1}$, $y'=-(x+2)^{-2}$.

3. Друга похідна: $y''=2(x+2)^{-3}=\dfrac{2}{(x+2)^3}$.

4. Знайдемо стаціонарні точки. Друга похідна є дріб, тому прирівнюємо до нуля окремо чисельник і знаменник:

$(x+2)^3=0\Rightarrow x+2=0\Rightarrow x=-2$. Тобто маємо одну стаціонарну точку $x=-2$.

5. Область визначення функції цією стаціонарною точкою ділиться на два інтервали:

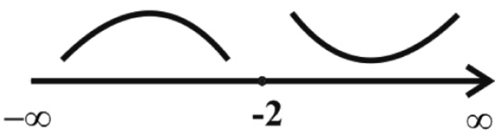


Рис. 35

1) $(-\infty,-2)$: $y''(-3)<0$, крива опукла;

2) $(-2,\infty)$: $y''(0)>0$, крива увігнута (рис. 35).

6. Стаціонарна точка $x=-2$ точкою перегину не буде, оскільки вона не належить області визначення функції (хоча друга похідна і змінює знак при переході через точку $x=-2$).

Приклад 2. Знайти інтервали опуклості, увігнутості й точки перегину кривої $y=(x+1)e^{-4x}$.

Розв'язання.

1. Область визначення: $(-\infty,\infty)$.

2. Перша похідна: $y' = e^{-4x} - 4(x+1)e^{-4x} = e^{-4x}(-3-4x)$.

3. Друга похідна:

$$y'' = -4e^{-4x}(-3-4x) - 4e^{-4x} = -4e^{-4x}(-3-4x+1) = 8e^{-4x}(1+2x).$$

4. Стаціонарні точки: оскільки $e^{-4x} \neq 0$, то $1+2x=0 \Rightarrow x = -\dfrac{1}{2}$ – стаціонарна точка.

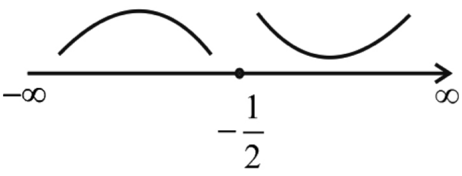


Рис. 36

5. Інтервали опуклості й увігнутості:

1) $\left(-\infty, -\dfrac{1}{2}\right)$: $y''(-1) < 0$ $(e^{-4x} > 0)$, функція опукла;

2) $\left(-\dfrac{1}{2}, \infty\right)$: $y''(0) > 0$, функція увігнута (рис. 36).

6. Стаціонарна точка $x = -\dfrac{1}{2}$ належить області визначення функції, і друга похідна змінює знак при переході через цю точку. Тому $x = -\dfrac{1}{2}$ – точка перегину кривої.

7. Координати цієї точки: $y\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2}e^2$, або точка $A\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}e^2\right)$ – точка перегину кривої.

Приклад 3. Знайти інтервали опуклості, увігнутості й точки перегину кривої $y = x\ln 3x$.

Розв'язання.

1. Область визначення: $3x > 0 \Rightarrow x > 0$.

2. Перша похідна: $y' = \ln 3x + x\dfrac{1}{3x}3 = \ln 3x + 1$.

3. Друга похідна: $y'' = \dfrac{1}{3x}3 = \dfrac{1}{x}$.

4. Стаціонарна точка: $x = 0$ – не належить області визначення. Тому крива або опукла, або увігнута на інтервалі $(0, \infty)$.

5. На цьому інтервалі друга похідна додатна.

Висновок: інтервалів опуклості немає; інтервал увігнутості: $(0,\infty)$; точок перегину немає.

Зауваження. Ми розглянули схеми визначення інтервалів зростання та спадання кривої; точок екстремуму; інтервалів опуклості й увігнутості кривої; точок перегину. Нагадаємо, що інтервали зростання і спадання визначаються за допомогою першої похідної, а інтервали опуклості й увігнутості визначаються за допомогою другої похідної. Не плутати!

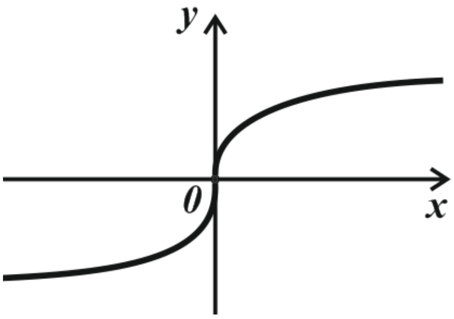


Рис. 37

Іноді для розв’язання перелічених задач достатньо знати графік кривої. Наприклад, розглянемо функцію $y = \mathrm{arctg} x$. Побудуємо графік (рис. 37).

Робимо висновки: інтервал зростання: $(-\infty, \infty)$; інтервал спадання: немає; точки екстремуму: немає; інтервал опуклості: $(0, \infty)$; інтервал увігнутості: $(-\infty, 0)$; точка $A(0, 0)$ – точка перегину.

5.6. Асимптоти кривої

Означення. Пряма P називається асимптотою кривої $y = f(x)$, якщо відстань d від точки M, яка належить кривій, до P прямує до нуля, коли точка M рухається вздовж кривої в нескінченність (рис. 38).

Існують два види асимптот: похилі й вертикальні.

Вертикальні асимптоти. Означення. Якщо хоча б одна з однобічних границь функції $y = f(x)$ в точці $x = a$ дорівнює нескінченності, то пряма $x = a$ є вертикальною асимптотою.

На рис. 39 $x = a$ – вертикальна асимптота, тому що

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty.$$

Зазначимо, що знаходження вертикальних асимптот можна спростити. Достатньо знайти область визначення функції. Далі виділити точки всередині області визначення, у яких функція не існує (наприклад, це дві точки x_1 і x_2) і записати рівняння асимптот: $x = x_1$, $x = x_2$. Але на кінцях області визначення функції потрібно користуватися означенням.

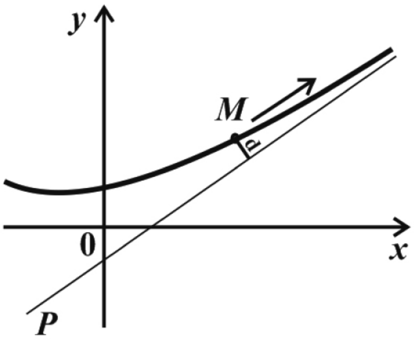


Рис. 38

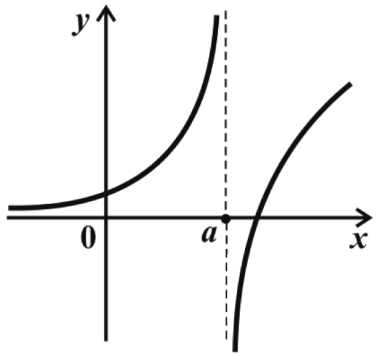


Рис. 39

Приклад. Знайти вертикальну асимптоту кривої $y = \dfrac{1}{x-4}$.

Розв'язання. Знайдемо область визначення функції:

$$(-\infty, 4) \cup (4, \infty), \text{ або } x \neq 4.$$

Тоді $x = 4$ і буде вертикальною асимптотою. Дійсно, за означенням границя функції в точці $x = 4$ (наприклад, праворуч):

$$\lim_{x \to 4^+} \frac{1}{x-4} = \infty.$$

Не слід думати, що яка завгодно крива має вертикальні асимптоти. Наприклад, крива $y = \dfrac{1}{x^2+4}$ не має вертикальних асимптот (область визначення: $(-\infty, \infty)$).

Похилі асимптоти. Похила асимптота кривої $y = f\left(x\right)$ обчислюється за формулою $y = kx + b$, де $k = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f\left(x\right)}{x}$, $b = \lim\limits_{x\to\infty}\left[f\left(x\right) - kx\right]$;

або $k = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f\left(x\right)}{x}$, $b = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[f\left(x\right) - kx\right]$.

Якщо хоча б одна з границь не існує або дорівнює нескінченності, крива похилої асимптоти не має.

Виникає питання, а яку границю вибирати: $x \to -\infty$ чи $x \to \infty$?

Коли функція $y = f\left(x\right)$ містить $\mathrm{arctg}x$, $e^{\alpha x}$(де α – додатне або від'ємне число) і т. д., потрібно розглядати обидва випадки ($x \to -\infty$, $x \to \infty$). В інших випадках достатньо розглянути тільки варіант $x \to +\infty$.

Якщо в рівнянні $y = kx + b$, $k = 0$, то рівняння $y = b$ називають *горизонтальною асимптотою*. Тобто горизонтальна асимптота $y = b$ є окремим випадком похилої асимптоти $y = kx + b$.

5.7. Розв'язання прикладів

Розділ I (найпростіші приклади)

Приклад 1. Знайти вертикальні асимптоти кривих:

1) $y = \dfrac{1}{3 - 2x}$;

2) $y = e^{\frac{2}{x}}$;

3) $y = \dfrac{4x}{x^2 - 9}$;

4) $y = \dfrac{x - 1}{x^2 + 1}$;

5) $y = \dfrac{x + 2}{6x^2 - x}$.

Розв'язання.

1. Область визначення: $x \neq \dfrac{3}{2}$. Тоді $x = \dfrac{3}{2}$ – вертикальна асимптота. Дійсно: $\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}^-}\dfrac{1}{3 - 2x} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}^+}\dfrac{1}{3 - 2x} = -\infty$.

2. Область визначення: $x \neq 0$. Тоді $x = 0$ – вертикальна асимптота. Дійсно: $\lim\limits_{x \to 0^-} e^{\frac{2}{x}} = 0$, $\lim\limits_{x \to 0^+} e^{\frac{2}{x}} = \infty$.

Надалі не будемо знаходити однобічні границі.

3. Область визначення: $x \neq \pm 3$. Тоді вертикальні асимптоти: $x = 3$, $x = -3$.

4. Область визначення: $(-\infty, \infty)$. Тому вертикальних асимптот немає.

5. Область визначення: $x \neq 0$, $x \neq \dfrac{1}{6}$. Тоді вертикальні асимптоти: $x = 0$, $x = \dfrac{1}{6}$.

Приклад 2. Знайти похилі асимптоти кривих:

1) $y = \dfrac{x^2 + 2x}{x - 5}$;
2) $y = \dfrac{x^2}{(x+5)^2}$;
3) $y = \dfrac{3}{x^2 - 1}$;
4) $y = \dfrac{x^3 - 1}{2x + 1}$.

Розв'язання. В усіх чотирьох прикладах користуємося формулами: $y = kx + b$, де $k = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x}$, $b = \lim\limits_{x \to \infty} \left[f(x) - kx \right]$, причому розглядаємо тільки випадок, коли $x \to \infty$ (коли $x \to -\infty$, одержимо той самий результат).

Починаємо розв'язання завжди із знаходження k.

$$1.\ k = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x^2 + 2x}{x - 5}}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + 2x}{x^2 - 5x} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \text{для розв'язання приклада} \\ \text{застосуємо, наприклад,} \\ \text{правило Лопіталя} \end{array} \right\} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{2x + 2}{2x - 5} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \frac{2}{2} = 1.$$

Тепер знайдемо b:

$$b = \lim_{x \to \infty} \left[\frac{x^2 + 2x}{x - 5} - 1 \cdot x \right] = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + 2x - x^2 + 5x}{x - 5} = \lim_{x \to \infty} \frac{7x}{x - 5} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = 7.$$

Маємо рівняння похилої асимптоти: $y = x + 7$.

2. Розв'язання аналогічне. Знайдемо k:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2}{(x+5)^2}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{(x+5)^2} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \left\{\begin{matrix}\text{застосовуємо} \\ \text{правило Лопіталя}\end{matrix}\right\} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2(x+5)} = 0.$$

Знайдемо b:

$$b = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{x^2}{(x+5)^2} - 0 \cdot x \right] = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{(x+5)^2} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{2(x+5)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x+5} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = 1.$$

Одержали горизонтальну асимптоту: $y = 1$.

3. $k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{3}{x^2-1}}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3}{x(x^2-1)} = 0$; $b = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3}{x^2-1} = 0$.

Отже, рівняння асимптоти: $y = 0$ (до речі, теж горизонтальна).

4. Знайдемо k:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^3-1}{2x+1}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3-1}{2x^2+x} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2}{4x+1} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \lim_{x\to\infty} \frac{6x}{4} = \infty.$$

Крива похилої асимптоти не має.

Розділ II

У цьому розділі будемо знаходити для кожної кривої і вертикальні, і похилі асимптоти.

Приклад 1. Знайти асимптоти кривої: $y = \dfrac{x^2+3}{2x^2-7x}$.

Розв'язання. Починаємо із знаходження вертикальних асимптот. Область визначення: $x \neq 0$, $x \neq 7/2$. Тому рівняння вертикальних асимптот: $x = 0$, $x = 7/2$.

Переходимо до знаходження похилої асимптоти.

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{x^2+3}{2x^2-7x}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+3}{2x^3-7x^2} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} =$$

$$= \left\{\begin{matrix}\text{нагадаємо, що розкрити невизна-}\\ \text{ченість можна й іншим способом,}\\ \text{наприклад діленням на } x^n\text{, де } n -\\ \text{вищий степінь у прикладі. Тут } n=3\end{matrix}\right\} = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{x^3}}{2-\dfrac{7}{x^2}} = 0.$$

$$b = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2+3}{2x^2-7x} - 0\cdot x\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+3}{2x^2-7x} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \left\{\begin{matrix}\text{застосовуємо}\\ \text{правило Лопіталя}\end{matrix}\right\} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{4x-7} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \frac{1}{2}.$$

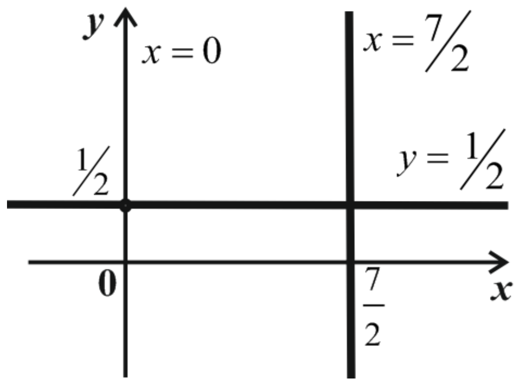


Рис. 40

Отже, похила (горизонтальна) асимптота: $y = \dfrac{1}{2}$ (рис. 40).

Приклад 2. Знайти асимптоти кривої: $y = \ln x$.

Розв'язання. Область визначення функції: $(0, \infty)$.

Знайдемо вертикальну асимптоту: $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$.

Тобто $x = 0$ – вертикальна асимптота.

Знайдемо похилу асимптоту:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \left\{\begin{matrix}\text{застосовуємо}\\ \text{правило Лопіталя}\end{matrix}\right\} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

$$b = \lim_{x\to\infty}\left[\ln x - 0\cdot x\right] = \lim_{x\to\infty} \ln x = \infty.$$

Оскільки $b=\infty$, то похилої асимптоти крива не має.

До речі, якщо розглянути графік кривої $y=\ln x$, то буде видно і без обчислень, що крива має тільки вертикальну асимптоту: $x=0$ (рис. 41).

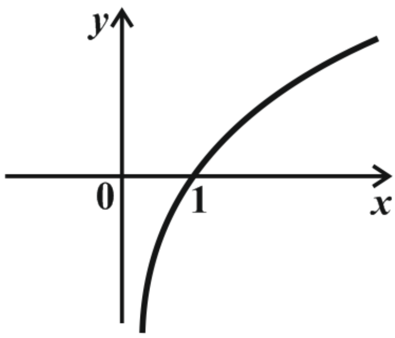


Рис. 41

Приклад 3. Знайти асимптоти кривої: $y=x\cdot \mathrm{arctg}x$.

Розв'язання. Починаємо із знаходження вертикальних асимптот. Область визначення функції: $(-\infty,\infty)$. Тому вертикальних асимптот немає.

Переходимо до знаходження похилих асимптот.

Тут потрібно розглянути два випадки: коли $x\to\infty$ і коли $x\to-\infty$, тому що: $\lim\limits_{x\to\infty}\mathrm{arctg}x=\frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{arctg}x=-\frac{\pi}{2}$.

Нехай $x\to\infty$:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{x\cdot\mathrm{arctg}x}{x}=\lim_{x\to\infty}\mathrm{arctg}x=\frac{\pi}{2}.$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left[x\cdot\mathrm{arctg}x-\frac{\pi}{2}\cdot x\right]=\lim_{x\to\infty}\left[x\left(\mathrm{arctg}x-\frac{\pi}{2}\right)\right]=\{\infty\cdot 0\}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\mathrm{arctg}x-\frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\left\{\begin{matrix}\text{застосовуємо}\\ \text{правило Лопіталя}\end{matrix}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^2+1}}{-\frac{1}{x^2}}=$$

$$=-\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2+1}=-1.$$

Таким чином, похила асимптота при $x\to\infty$ має вигляд $y=\frac{\pi}{2}x-1$.

Нехай $x\to-\infty$:

$$k=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\cdot\mathrm{arctg}x}{x}=\lim_{x\to-\infty}\mathrm{arctg}x=-\frac{\pi}{2}.$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}\left[x\cdot\operatorname{arctg}x-\frac{\pi}{2}\cdot x\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[x\left(\operatorname{arctg}x-\frac{\pi}{2}\right)\right]=\{\infty\cdot 0\}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\operatorname{arctg}x-\frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{1}{x^2+1}}{-\frac{1}{x^2}}=-\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2+1}=-1.$$

Отже, похила асимптота при $x\to-\infty$ має вигляд $y=-\frac{\pi}{2}x-1$ (рис. 42).

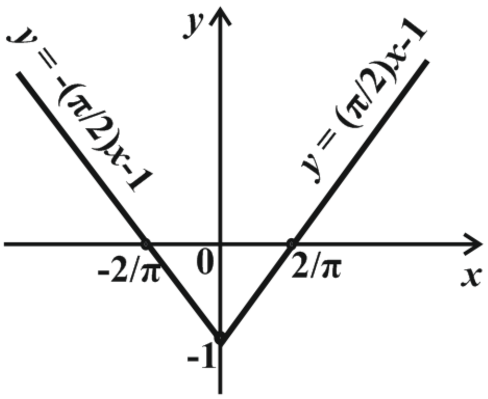


Рис. 42

Запитання для самоперевірки

1. Яка функція називається увігнутою на інтервалі?
2. Яку точку називають точкою перегину?
3. Якщо $y''<0$ на (a,b), то якою буде крива $y=f(x)$ (опуклою чи увігнутою)?
4. За якою формулою обчислюється вертикальна асимптота?
5. За якою формулою обчислюється похила асимптота? Як обчислюється k і b (при знаходженні похилої асимптоти)?
6. Яку формулу має горизонтальна асимптота?

5.8. Загальне дослідження функцій та побудова їх графіків

Повне дослідження функції і побудову її графіка будемо виконувати за такою схемою (попередимо, що ця схема приблизна і деякі пункти можна переставляти місцями й іноді не виконувати):

1. Знаходимо область визначення функції.

2*. Визначаємо, чи є функція парною, непарною, періодичною.

3*. Досліджуємо функцію на неперервність, визначаємо точки розриву і їх вид.

4. Знаходимо точки перетину кривої з осями координат.

5. Знаходимо інтервали зростання, спадання і точки екстремуму.

6. Знаходимо інтервали опуклості, увігнутості й точки перегину.

7. Знаходимо асимптоти.

За результатами цього дослідження будуємо графік функції. Пункти, позначені зірочкою (*), можна виконувати, а можна й не виконувати.

Приклад. Дослідити функцію $y=\dfrac{2x-1}{\left(x-1\right)^2}$ і побудувати графік цієї функції.

Розв'язання.

1. Область визначення: $\left(-\infty,1\right)\cup\left(1,\infty\right)$, або $x\neq 1$.

2*. Зрозуміло, що функція не є періодичною. Перевіряємо функцію на парність і непарність:

$$y\left(-x\right)=\frac{-2x-1}{\left(-x-1\right)^2}=\frac{-2x-1}{\left(x+1\right)^2}\neq y\left(x\right)\neq -y\left(x\right).$$

Нагадуємо, що ознака парності: $y\left(x\right)=y\left(-x\right)$, ознака непарності: $y\left(-x\right)=-y\left(x\right)$.

У нашому випадку обидві рівності не виконуються, тому функція не є ні парною, ні непарною.

4. Знаходимо точки перетину кривої з осями координат:

– якщо $y=0$, то $\dfrac{2x-1}{\left(x-1\right)^2}=0\Rightarrow 2x-1=0\Rightarrow x=\dfrac{1}{2}$;

– якщо $x=0$, то $y=-1$. Маємо точки перетину $A\left(\frac{1}{2},0\right)$, $B(0,-1)$.

5. Знаходимо першу похідну функції:

$$y'=\frac{2(x-1)^2-(2x-1)2(x-1)}{(x-1)^4}=\frac{2(x-1)\left[(x-1)-(2x-1)\right]}{(x-1)^4}=$$

$$=-2\frac{x}{(x-1)^3}.$$

Знаходимо стаціонарні точки першої похідної:

$$x_1=0,\ (x-1)^3=0\Rightarrow x-1=0\Rightarrow x_2=1.$$

Одержали дві стаціонарні точки: $x_1=0$, $x_2=1$.

Маємо три інтервали монотонності:

1) $(-\infty,0)$: $y'(-1)<0$, функція спадає;

2) $(0,1)$: $y'\left(\frac{1}{2}\right)>0$, функція зростає;

3) $(1,\infty)$: $y'(2)<0$, функція спадає (рис. 43).

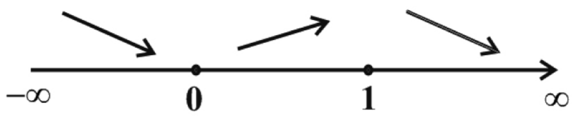


Рис. 43

Перевіряємо, чи будуть у стаціонарних точках екстремуми.

Точка $x_1=0$ належить області визначення функції. Перша похідна змінює знак при переході через цю точку з мінуса на плюс. Тому в точці $x_1=0$ маємо мінімум. Знайдемо координати цієї точки: $y(0)=-1$ або $C(0,-1)$ – точка мінімуму.

Точка $x_2=1$ не належить області визначення функції. Тому в цій точці екстремуму не буде (хоча перша похідна і змінює знак при переході через цю точку).

6. Знаходимо другу похідну:

$$y''=-2\frac{(x-1)^3-x\cdot 3(x-1)^2}{(x-1)^6}=-2\frac{x-1-3x}{(x-1)^4}=2\frac{2x+1}{(x-1)^4}.$$

Знайдемо стаціонарні точки другої похідної:

$$2x+1=0 \Rightarrow x_1=-\frac{1}{2}; \quad (x-1)^4=0 \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x_2=1.$$

Маємо дві стаціонарні точки другої похідної, які розділяють область визначення функції на три інтервали:

1) $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$: $y''(-1)<0$, функція опукла;

2) $\left(-\frac{1}{2}; 1\right)$: $y''(0)>0$, функція увігнута;

3) $(1;\infty)$: $y''(2)>0$, функція увігнута (рис. 44).

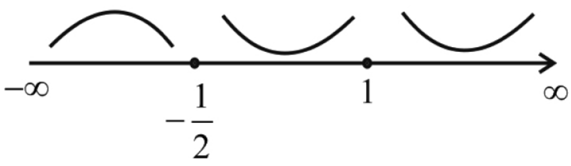


Рис. 44

Перевіряємо, чи будуть у стаціонарних точках точки перегину.

Точка $x_1=-\frac{1}{2}$ належить області визначення функції, і крім того, друга похідна змінює знак при переході через цю точку. Тому в точці $x_1=-\frac{1}{2}$ маємо точку перегину. Знайдемо координати цієї точки: $y\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{8}{9}$ або $D\left(-\frac{1}{2}, -\frac{8}{9}\right)$ – точка перегину. Точка $x_2=1$ не належить області визначення функції.

7. Знайдемо асимптоти кривої.

Вертикальна асимптота: $x=1$. Знайдемо похилу асимптоту.

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x-1}{x(x-1)^2}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x-1}{x^3-2x^2+x}=$$

$$=\left\{\begin{array}{c}\text{застосовуємо}\\ \text{правило Лопіталя}\end{array}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{3x^2-4x+1}=0.$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\frac{2x-1}{(x-1)^2}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{2(x-1)}=0.$$

Похила (горизонтальна) асимптота має вигляд: $y = 0$.

Починаємо побудову графіка. Спочатку відмічаємо точки перетину кривої з осями координат (A і B), точку мінімуму (C) і точку перегину (D). Точки B і C збігаються. Крім того, будуємо асимптоти: $x = 1$, $y = 0$ (рис. 45).

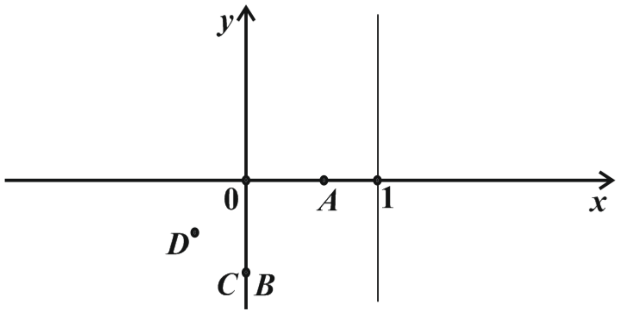


Рис. 45

А тепер застосовуємо схеми знаходження інтервалів монотонності (рис. 46) і інтервалів опуклості й увігнутості (рис. 47):

Рис. 46

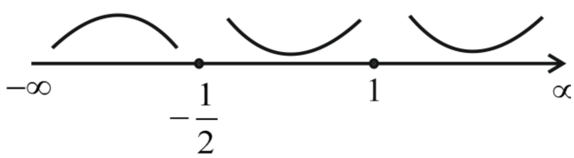


Рис. 47

Будуємо графік (рис. 48).

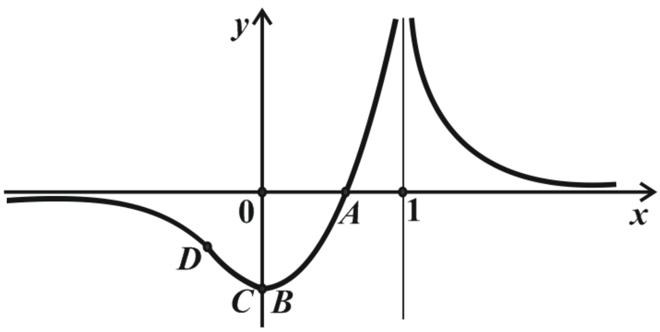


Рис. 48

5.9. Найбільше й найменше значення функції на відрізку

Неперервна на відрізку $[a, b]$ функція $y = f(x)$ досягає на цьому відрізку хоча б один раз найбільшого значення M і найменшого значення m. Тобто на $[a, b]$ знайдеться хоча б одна точка x_1, у якій $f(x_1) \geq f(x)$ (x – будь-яка інша точка відрізку), і знайдеться хоча б одна точка x_2, у якій $f(x_2) \leq f(x)$. Тут $f(x_1) = M$, $f(x_2) = m$.

Не слід плутати найбільше значення функції і максимум функції (аналогічно найменше значення і мінімум функції).

Розглянемо рис. 49.

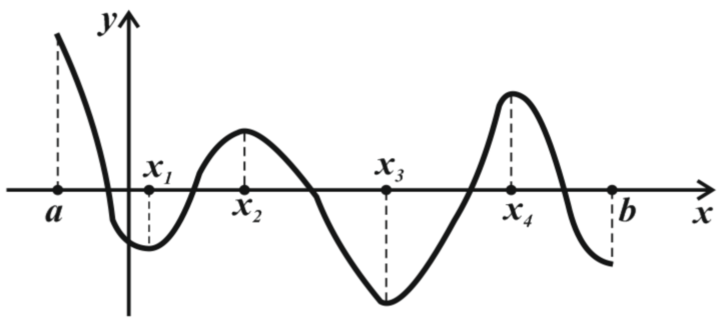


Рис. 49

$f(a)$ – найбільше значення функції на $[a, b]$;

$f(x_3)$ – найменше значення функції на $[a, b]$;

$f(x_2)$, $f(x_4)$ – максимуми функції;

$f(x_1)$, $f(x_3)$ – мінімуми функції.

У точці x_3 маємо і найменше значення, і мінімум.

Таким чином, функція $y = f(x)$ на відрізку $[a, b]$ досягає найбільшого значення або в точках $x = a$, $x = b$, або в точках x, які є точками максимуму.

Аналогічно найменшого значення функція досягає або на кінцях відрізка, або в точках мінімуму.

Сформулюємо схему знаходження найбільшого і найменшого значення функції на відрізку $[a, b]$:

1) знаходимо першу похідну функції;

2) знаходимо стаціонарні точки похідної;

3) знаходимо значення функції в стаціонарних точках, які належать інтервалу (a, b) і в точках $x = a$, $x = b$.

Із одержаних чисел вибираємо найбільше і найменше.

5.10. Розв'язання прикладів

Приклад. Знайти найбільше і найменше значення функції на вказаних відрізках:

1) $y = -3x^4 + 6x^2 - 1$ на $[-2, 2]$;

2) $y = \dfrac{x-1}{x+1}$ на $[0, 4]$;

3) $y = \dfrac{1}{4}x^4 - \dfrac{2}{3}x^3 - \dfrac{3}{2}x^2 + 2$ на $[-2, 1]$.

Розв'язання.

1. Розв'язуємо приклад за схемою.

Знайдемо першу похідну: $y' = -12x^3 + 12x$.

Знайдемо стаціонарні точки:

$$-12x^3 + 12x = 0 \Rightarrow 12x\left(1 - x^2\right) = 0 \Rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1.$$

Знайдемо значення функції в стаціонарних точках (вони всі належать заданому відрізку) і на кінцях відрізка:

$$y(-2) = -25,\ \ y(-1) = 2,\ \ y(0) = -1,\ \ y(1) = 2,\ \ y(2) = -25.$$

Робимо висновок: найбільшого значення $y = 2$ функція досягає в точках $x_1 = -1$ і $x_3 = 1$, тобто: $A(-1, 2)$, $B(1, 2)$; найменшого значення $y = -25$ функція досягає в точках $x = a = -2$ і $x = b = 2$, тобто: $C(-2, -25)$, $D(2, -25)$.

2. Аналогічно:

Знайдемо першу похідну: $y' = \frac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}$.

Знайдемо стаціонарні точки: $\frac{2}{(x+1)^2} = 0 \Rightarrow (x+1)^2 = 0 \Rightarrow x = -1$.

Маємо стаціонарну точку $x = -1$, але вона не належить заданому відрізку, тому надалі ми її не розглядаємо.

Знайдемо значення функції тільки на кінцях відрізка:

$y(0) = -1$ – найменше значення функції,

$y(4) = \frac{3}{5}$ – найбільше значення функції.

3. Перша похідна: $y' = x^3 - 2x^2 - 3x$.

Стаціонарні точки: $x^3 - 2x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 2x - 3) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ – перша стаціонарна точка.

Розв’яжемо квадратне рівняння $x^2 - 2x - 3 = 0$ і одержимо ще дві стаціонарні точки: $x_2 = -1$, $x_3 = 3$. Точка $x_3 = 3$ не належить заданому відрізку.

Знайдемо значення функції в стаціонарних точках, які належать заданому відрізку й на кінцях відрізка:

$$y(-2) = \frac{16}{3}, \quad y(-1) = \frac{17}{12}, \quad y(0) = 2, \quad y(1) = \frac{1}{12}.$$

Найбільше значення дорівнює $y(-2) = \frac{16}{3}$, найменше значення дорівнює $y(1) = \frac{1}{12}$.

У цьому розділі зазвичай розглядаються достатньо цікаві задачі геометричного й фізичного змісту. Розглянемо одну таку задачу.

Задача. Визначити розміри відкритого басейну, який має квадратне дно, щоб на облицювання стін і дна пішла найменша кількість матеріалу, якщо об’єм цього басейну повинен дорівнювати 32 м^3.

Розв'язання.

Позначимо сторону основи через x, а висоту через h. Тоді об'єм басейну буде дорівнювати $V = x^2 \cdot h = 32$. Звідси $h = \frac{32}{x^2}$.

Площа всієї поверхні басейну дорівнює:

$$S = x^2 + 4xh \Rightarrow S = x^2 + 4x\frac{32}{x^2} = x^2 + \frac{128}{x}.$$

Обчислимо похідну цієї функції: $S' = 2x - \frac{128}{x^2}$.

Знайдемо стаціонарні точки:

1) прирівняємо до нуля першу похідну S':

$$2x - \frac{128}{x^2} = 0 \Rightarrow \frac{2x^3 - 128}{x^2} = 0;$$

$$2x^3 - 128 = 0 \Rightarrow x^3 - 64 = 0 \Rightarrow x_1 = 4;$$

2) визначимо точки, у яких перша похідна S' не існує: $x^2 = 0 \Rightarrow x_2 = 0$.

Стаціонарна точка $x_2 = 0$ за змістом задачі не підходить, тому що сторона основи басейну не може дорівнювати нулю. Тоді значення $x_1 = 4$ і буде єдиною відповіддю задачі. Зрозуміло, що це значення потрібно перевірити: чи дійсно при значенні $x = 4$ кількість матеріалу буде найменшою. Перевірку проводять за допомогою дослідження знака похідної в околі точки $x = 4$.

Якщо $x = 4$, то висота басейна буде дорівнювати $h = \frac{32}{x^2} = 2$. Тобто оптимальні розміри басейну: $x = 4$, $h = 2$.

Обчислимо в цьому випадку кількість матеріалу:

$$S = x^2 + 4xh = 16 + 32 = 48 \text{ м}^2.$$

Можна перевірити, що коли змінити розміри (пам'ятайте, що об'єм басейну заданий), то кількість використаного матеріалу обов'язково збільшиться.

ОСНОВНІ ФОРМУЛИ І ТЕОРЕМИ

Таблиця похідних

$\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha x^{\alpha-1}$	$\left(\sin x\right)' = \cos x$
$\left(x\right)' = 1$	$\left(\cos x\right)' = -\sin x$
$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\left(\mathrm{tg}x\right)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	$\left(\mathrm{ctg}x\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
$\left(a^x\right)' = a^x \ln a$	$\left(\arcsin x\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\left(e^x\right)' = e^x$	$\left(\arccos x\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x \ln a}$	$\left(\mathrm{arc\,tg}x\right)' = \frac{1}{1+x^2}$
$\left(\ln x\right)' = \frac{1}{x}$	$\left(\mathrm{arc\,ctg}x\right)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Похідні суми, добутку, частки:

$$\left[u \pm v\right]' = u' \pm v'; \quad \left(u \cdot v\right)' = u' \cdot v + u \cdot v'; \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}.$$

Похідна сталої: $C' = 0$.

$$(C \cdot u)' = C \cdot u'.$$

Похідна складної функції $y = f\left[\varphi\left(x\right)\right]$:

$$y = f\left(u\right), \quad u = \varphi\left(x\right), \quad y'_x = y'_u \cdot u'_x.$$

Похідна оберненої функції:

$$y = f\left(x\right), \quad x = \varphi\left(y\right), \quad y'_x = \frac{1}{x'_y}, \quad x'_y \neq 0.$$

Якщо функція $y = f\left(x\right)$ задана в параметричному вигляді $\begin{cases} y = y\left(t\right) \\ x = x\left(t\right) \end{cases}$, то: $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$, $\quad y''_x = \dfrac{y''_t \cdot x'_t - y'_t \cdot x''_t}{\left(x'_t\right)^3}$.

Диференціал dy функції $y = f\left(x\right)$ обчислюється за формулою:

$$dy = f'\left(x\right)dx, \quad \text{або } dy = y'dx.$$

Геометричний зміст похідної: похідна функції $y = f\left(x\right)$ у точці x_0 дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної до графіка цієї функції в точці x_0, тобто $f'\left(x_0\right) = k$.

Фізичний зміст першої і другої похідних: якщо $S = S(t)$ – шлях, який проходить матеріальна точка за час *t*, то:

– швидкість руху точки в момент часу *t*: $\quad S'\left(t\right) = v\left(t\right)$;

– прискорення точки в момент часу *t*: $\quad S''\left(t\right) = a\left(t\right)$.

Рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = f\left(x\right)$ в точці $M_0\left(x_0, y_0\right)$:

– рівняння дотичної $\; y - y_0 = f'\left(x_0\right)\left(x - x_0\right)$;

– рівнянння нормалі $\; y - y_0 = -\dfrac{1}{f'\left(x_0\right)}\left(x - x_0\right)$.

Правило Лопіталя (розкриває невизначеності $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ і $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$):

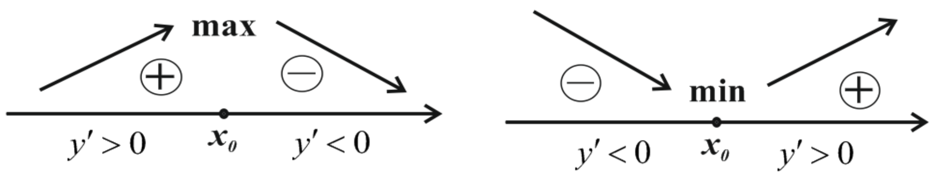
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Інтервали зростання і спадання функції (інтервали монотонності функції):

– якщо $y'>0$, то y зростає;

– якщо $y'<0$, то y спадає.

Точки максимуму й мінімуму функції (точки екстремуму функції):



точка x_0 повинна належати області визначення функції.

Інтервали опуклості і увігнутості функції:

– якщо $y''>0$, то y увігнута;

– якщо $y''<0$, то y опукла.

Асимптоти кривої:

– вертикальна асимптота: $x=a$;

– похила асимптота: $y=kx+b$, де

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x},\quad b=\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-kx\right].$$

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов [Текст] / Н. С. Пискунов. – Москва. – Т. 1, 1970. – Т. 2, 1985.
2. Сборник задач по математике для втузов [Текст] / под ред. А. В. Ефимова и Б. П. Демидовича. – Москва, 1986, 1987. – Ч. I–IV.
3. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах [Текст] / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – Москва, 2000. – Ч. I, II.
4. Герасимчук, В.С. Вища математика. Повний курс вищої математики у прикладах і задачах [Текст] / В. С. Герасимчук, Г. С. Васильченко, В. І. Кравцов. – Київ : Книги України ЛТД, 2009. – Ч. 1–3.

ЗМІСТ

Для нотаток

Для нотаток

Навчальне видання

Кузнецов Віталій Миколайович
Бусарова Тетяна Миколаївна
Агошкова Тетяна Анатоліївна
Клименко Ірина Володимирівна
Міхєєва Наталя Василівна

Похідна та її застосування

Навчальний посібник

Редактор *О. О. Котова*
Комп’ютерна верстка *О. М. Гончаренко*

Формат $60 \times 84\ {}^{1}\!/_{16}$. Ум. друк. арк. 6,16. Обл.-вид. арк. 6,19.
Тираж 300 пр. Зам. №

Дніпропетровський національний університет
залізничного транспорту імені академіка В. Лазаряна
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи ДК № 1315 від 31.03.2003 р.

Адреса видавця та дільниці оперативної поліграфії:
Дніпропетровський національний університет
залізничного транспорту імені академіка В. Лазаряна,
вул. Лазаряна, 2, Дніпро, 49010