

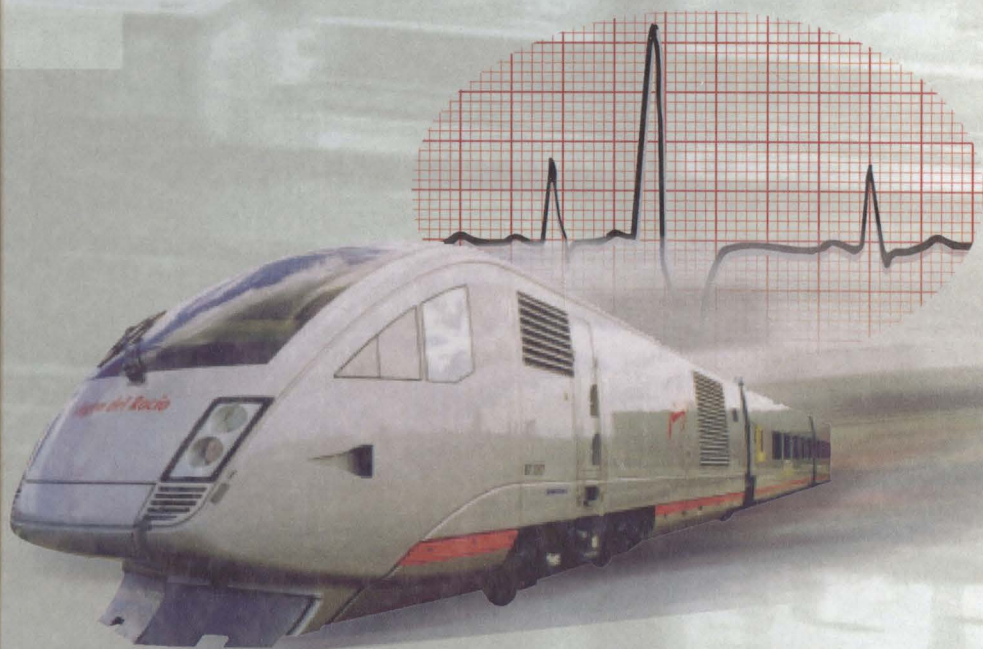
С.В. МЯМЛИН

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ
РЕЛЬСОВЫХ ЭКИПАЖЕЙ

529.4
199

С.В. МЯМЛИН

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ РЕЛЬСОВЫХ ЭКИПАЖЕЙ



С.В. МЯМЛИН

**МОДЕЛИРОВАНИЕ
ДИНАМИКИ
РЕЛЬСОВЫХ
ЭКИПАЖЕЙ**

Монография

У/к 5429/4

**Днепропетровск
Новая идеология
2002**

ББК 39.12–046

М99

УДК 629.4.015.001.57

Научный редактор – д-р техн. наук, проф. В.Д. Данович

Рецензенты: д-р техн. наук, проф. А.А. Босов,

д-р техн. наук, проф. Г.И. Богомаз

Рекомендовано к печати по решению ученого совета Днепропетровского национального университета железнодорожного транспорта имени академика В. Лазаряна

М99 Мямлин С.В.

Моделирование динамики рельсовых экипажей. –Д.:

Новая идеология, 2002. – 240 с.

ISBN 966-8050-04-05

Описано методику та алгоритми розв'язання задач динаміки рейкових екіпажів і наведене їх програмне забезпечення із використанням об'єктно-орієнтованого програмування для моделювання складних нелінійних механічних систем.

Розглянуто методи чисельного інтегрування, які застосовувались під час моделювання. Запропоновано методику задання збурень, що діють на рейковий екіпаж з боку колії, наведені приклади моделювання динамічних процесів у рейкових екіпажах. Виконано порівняння результатів теоретичних і експериментальних досліджень динамічної навантаженості деяких типів рейкових екіпажів.

Для наукових співробітників та інженерно-технічних працівників залізничного транспорту і транспортного машинобудування, чия діяльність пов'язана з проектуванням рухомого складу і вивченням його динамічних якостей. Також може бути корисна викладачам і аспірантам вищих навчальних закладів.

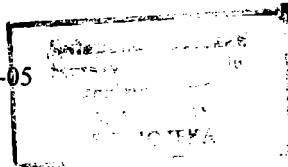
Описаны методика и алгоритмы решения задач динамики рельсовых экипажей и подано их программное обеспечение с использованием объектно-ориентированного программирования для моделирования сложных нелинейных механических систем.

Рассмотрены методы численного интегрирования, применяемые при моделировании. Предложена методика задания возмущений, действующих на рельсовый экипаж со стороны пути, приведены примеры моделирования динамических процессов в рельсовых экипажах. Выполнено сравнение результатов теоретических и экспериментальных исследований динамической нагруженности некоторых типов рельсовых экипажей.

Для научных сотрудников и инженерно-технических работников железнодорожного транспорта и транспортного машиностроения, деятельность которых связана с проектированием подвижного состава и изучением его динамических качеств. Также может быть полезна преподавателям и аспирантам высших учебных заведений.

Ил. 81, табл. 7, библиогр.: 88 назв.

ISBN 966-8050-04-05



ББК 39.12–046

© Мямлин С.В., 2002

ВВЕДЕНИЕ

Решение задач динамики рельсовых экипажей становится с каждым годом все более актуальным как для проектировщиков подвижного состава, так и для эксплуатационников. Это связано, с одной стороны, с возросшей конкуренцией на рынке транспортных услуг, с другой – с необходимостью в новых экономических условиях гарантировать грузоотправителю безопасность и сохранность груза во время перевозок. Кроме того, в Украине продолжают развиваться вагоно- и локомотивостроительная отрасли, в которых осваивается выпуск новых моделей подвижного состава. Снижение динамической нагруженности экипажей во время движения является одним из основных резервов оптимизации технико-экономических показателей железнодорожных перевозок и повышения их конкурентоспособности, позволяющих ускорить доставку, улучшить условия транспортировки грузов и обеспечить комфорт езды пассажиров.

Силы, действующие на экипаж во время движения, могут достигать значительных величин и вызывать интенсивные колебания узлов конструкции. Характер этих колебаний во многом определяется структурой и свойствами экипажа как динамической системы: величинами колеблющихся масс, моментами инерции, высотой центра тяжести, типами связей между элементами конструкции, характеристиками перевозимого груза и т.д. Анализ этих процессов требует совершенствования и универсализации математических моделей и программного обеспечения, предназначенных для исследования динамической нагруженности узлов и всей конструкции рельсовых экипажей в целом, а также оценки ходовых качеств проектируемых и изготавливаемых экипажей в условиях эксплуатации. На этапе эскизного, или рабочего, проектирования новых экипажей основной целью расчетов является оценка динамических качеств и выбор рациональных параметров узлов конструкции экипажа. В этом случае можно использовать унифицированные и достаточно простые расчетные схемы, линейные или линеаризованные модели экипажей и упрощенные модели возмущений. При доводке опытных образцов в целях сокращения объемов натурных испытаний необходимо выполнять более сложные расчеты с использованием подробных расчетных схем, нелинейных математических моделей, обоснованных моделей возмущений, действующих на экипаж со стороны пути.

Многими учеными исследовались вопросы динамики и устойчивости движения рельсовых экипажей; предложены различные расчетные схемы

экипажей [1; 2; 7–9; 14–18; 22; 24; 27–32; 38–41; 52; 57; 59; 61; 62; 73; 78–81; 87; 88], изучены факторы, влияющие на характер возмущений и сцепление колеса с рельсом [7–9; 12; 18; 23; 26; 36; 41; 48–50; 57; 61–63; 66; 67; 69–71; 75–77; 82; 84–86]. К настоящему времени накоплен большой опыт математического моделирования колебаний как отдельного экипажа, так и экипажа в составе поезда. В различных учебных и научных учреждениях разработано программное обеспечение для моделирования динамических процессов и оценки динамических качеств различных типов подвижного состава. Так, в Днепропетровском национальном университете железнодорожного транспорта под руководством профессоров В.Д. Дановича и М.Л. Коротенко [2; 14–16; 27; 29–32] разработано и широко используется программное обеспечение для моделирования грузовых вагонов, полувагонов, цистерн, хопперов, платформ, цельнометаллических пассажирских вагонов, отдельных типов тягового подвижного состава. Для моделирования динамики экипажей применяются также другие пакеты прикладных программ (Medyna, Adams/Car, Adams/Rail). Некоторые исследователи используют популярные в последнее время интегрированные пакеты, например MATLAB [72]. По мнению автора, при всех достоинствах этих программных продуктов они имеют один, в ряде случаев существенный, недостаток: эти программы разработаны для одного типа подвижного состава, и их использование для других типов весьма затруднительно, а подчас и невозможно.

Вместе с тем современные методы разработки программного обеспечения позволяют использовать новые подходы к построению программных моделей объектов различной сложности. Речь здесь идет о ставшем популярным в последнее время объектно-ориентированном программировании (ООП). Если до появления ООП при разработке программного обеспечения для моделирования поведения сложной системы параметры объектов, входящих в состав такой системы, представлялись отдельными векторами данных и понятие «объекта системы» выглядело весьма неопределенно, то использование ООП позволяет объединить в рамках объекта все его параметры и методы работы с ними и, в итоге, построить программную модель системы как вектор объектов. Такой подход представляется достаточно естественным, поскольку в реальном мире мы имеем дело с объектами (людьми, предметами, техническими устройствами), взаимодействующими друг с другом. При использовании ООП главными являются не процедуры работы с векторами параметров объектов, а сами объекты. Таким образом, объектно-ориентированная программа – это со-

вокупность объектов и способов их взаимодействия. Объект можно определить как некую совокупность данных (характеристик объекта) и методов работы с ними (функций для расчета «поведения» объекта).

Собственно программа моделирования колебаний сложной механической системы должна: во-первых, обеспечить процедуру создания объектов с использованием их характеристик, заданных пользователем; во-вторых, организовать процедуру расчета состояния системы в целом и объектов, ее составляющих; в-третьих, сохранить результаты расчетов в виде переменных состояния объектов и системы и, наконец, в-четвертых, представить в удобном для пользователя виде полученные результаты изменения состояния системы и ее объектов в процессе моделирования. Использование ООП для разработки программ моделирования поведения сложных механических систем полностью оправдано, тем более что рельсовый экипаж достаточно легко разделить на объекты и установить связи между ними. Так, для грузового вагона с трехэлементными тележками в качестве объектов можно выбрать колесные пары, боковые рамы тележек, надрессорные балки, кузов и груз.

Описанные в этой книге методика и программное обеспечение предназначены для моделирования сложных нелинейных механических систем, к которым относятся рельсовые экипажи. Программное обеспечение выполнено с использованием среды разработки приложений Borland C++ Builder версии 4.0, предназначенной для работы в операционной среде Win32 (операционные системы Windows 9x, Windows NT), и функции стандартных библиотек C++ стандарта ANSI и RTL библиотеки C++ Builder 4.0.

С помощью разработанного программного обеспечения выполнен ряд теоретических исследований динамической нагруженности разных типов рельсовых экипажей и устойчивости их движения. Результаты расчетов сопоставлены с многочисленными экспериментальными данными и хорошо согласуются. Это позволяет сделать вывод о достоверности разработанной методики и программного обеспечения, что, в свою очередь, дает возможность проводить теоретические исследования динамических качеств рельсовых экипажей на стадии проектирования и анализировать динамику существующих конструкций подвижного состава при внесении изменений в конструктивные схемы и выборе рациональных параметров межэлементных связей.

ГЛАВА 1. МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

1.1. Введение

Как известно, уравнение колебаний тела на упруго-вязкой связи имеет вид

$$m\ddot{X} + \beta\dot{X} + kX = F(t), \quad (1.1)$$

где m , β , k – соответственно масса тела, вязкость и жесткость связи; $\ddot{X}$, $\dot{X}$, X – соответственно ускорение, скорость и перемещение тела вдоль оси действия внешней силы; $F(t)$ – функция, описывающая изменение во времени внешней силы, которая действует на тело.

Подобными уравнениями, только в матричном виде, описываются колебания любой сложной динамической системы. Причем коэффициенты вязкости и жесткости связей могут быть нелинейными.

Для получения решения уравнения (1.1) или системы аналогичных уравнений используются различные численные методы интегрирования [9; 54; 55]. Эти методы основаны на разложении решений дифференциальных уравнений в ряд Тейлора с сохранением нескольких членов ряда, на использовании различных интерполяционных формул и на непосредственной замене производных в дифференциальных уравнениях их приближенными разностными выражениями. Численные методы первой группы, например метод Эйлера со всеми его модификациями, хотя и могут быть использованы для решения дифференциальных уравнений высших порядков, однако либо обладают недостаточной точностью, либо их модификации, использующие итерационные процедуры, требуют значительных затрат времени для получения приемлемой точности решения. Методы второй группы предназначены для решения систем дифференциальных уравнений первого порядка и требуют приведения исходной системы уравнений к системе уравнений первого порядка. В результате решение строится в два этапа: вначале на очередном шаге интегрирования получают значения скорости $\dot{X}$, а затем перемещения X . Кроме того, некоторые методы основаны на двухшаговом принципе «прогноз-коррекция». При таком подходе на первом шаге оценивают решение, а на втором выполняют коррекцию результата первого шага, используя полу-

ченную оценку. Эти методы обладают высокой точностью результатов, однако применительно к такой сложной механической системе, как рельсовый экипаж требуют значительных затрат времени. Поэтому численные методы первой группы в настоящей работе не рассматриваются вообще, а из методов второй группы акцентируем внимание лишь на методе Адамса – Башфорта как широко используемом при решении задач продольной и поперечной динамики поезда [55].

С точки зрения автора, для решения задач динамики рельсового экипажа особый интерес представляют методы численного интегрирования дифференциальных уравнений, основанные на построении разностного аналога дифференциального уравнения путем замены производных их приближенными разностными значениями. Эти методы иначе называются прямыми методами решения дифференциальных уравнений, так как не требуют никаких предварительных преобразований исходных дифференциальных уравнений типа (1.1). Ошибки в решениях дифференциальных уравнений таким способом связаны с ошибками приближенного представления производных. Так как колебания элементов рельсового экипажа представляют собой процессы, имеющие достаточно широкий спектральный состав из-за наличия нелинейностей и жестких связей, то целесообразно оценить точность приближения производных в частотной области, а также фазовые искажения, порожденные аппроксимацией производных конечно-разностными выражениями. Это позволит понять, какие искажения амплитуд и фаз – составляющих сложных колебательных процессов – в зависимости от их частоты вносятся в результат при применении того или иного численного метода решения дифференциальных уравнений типа (1.1).

Далее рассмотрим пять численных методов решения дифференциальных уравнений: метод центральных разностей, метод Губольта, метод Ньюмарка, метод Парка и метод Адамса – Башфорта. Результаты аппроксимации производных конечно-разностными выражениями в частотной области сравним с точными значениями комплексного представления операций дифференцирования первого и второго порядка, т.е. с амплитудно-частотными и фазочастотными передаточными функциями идеальных дифференциаторов первого и второго порядка. Как известно, в комплексной форме эти операторы выглядят так:

$$H \dot{X}(\omega) = j\omega,$$

$$H \ddot{X}(\omega) = -\omega^2,$$

где $H \dot{X}$ – передаточная функция дифференциатора первого порядка;
 $H \ddot{X}$ – передаточная функция дифференциатора второго порядка.

Соответствующие амплитудно-частотные и фазочастотные характеристики этих операторов описываются выражениями

$$|H \dot{X}| = \omega,$$

$$\varphi \dot{X} = \frac{\pi}{2},$$

$$|H \ddot{X}| = \omega^2,$$

$$\varphi \ddot{X} = \pi,$$

где $|H \dot{X}|$ и $\varphi \dot{X}$ – амплитудно-частотная и фазочастотная функции идеального дифференциатора первого порядка соответственно, а $|H \ddot{X}|$ и $\varphi \ddot{X}$ – амплитудно-частотная и фазочастотная функции идеального дифференциатора второго порядка соответственно.

Так как численные методы решения дифференциальных уравнений позволяют получить решения в дискретные моменты времени, то, используя постоянный шаг интегрирования h , имеем дискретный аналог искомого решения. Амплитудно-частотные и фазочастотные функции операций аппроксимации производных будем рассматривать для относительных циклических частот: $\bar{f} = f/f_{kv}$ или относительных угловых частот: $\bar{\omega} = \omega/f_{kv}$, где $f_{kv} = 1/h$ – частота квантования. Диапазон изменения относительных частот будет соответственно равен $0 < \bar{f} < 0,5$, $0 < \bar{\omega} < \pi$. Максимальные значения циклической и угловой относительных частот соответствуют частоте Найквиста. Учитывая, что мы будем иметь дело не с непрерывными, а с дискретными процессами, обозначим амплитудно-частотные и фазочастотные функции идеальных дифференциаторов следующим образом:

$$|H \dot{X}_0| = \bar{\omega},$$

$$\varphi \dot{X}_0 = \frac{\pi}{2},$$

$$|H\ddot{x}_0| = -\bar{\omega}^2,$$

$$\Phi\ddot{x}_0 = \pi.$$

Будем оценивать точность аппроксимации амплитудно-частотных и фазочастотных функций идеального дифференциатора первого порядка с помощью следующих показателей, выраженных в процентах:

$$\delta_{H_1} = \frac{\left| \left(|H\dot{x}_i| - |H\dot{x}_0| \right) \right|}{|H\dot{x}_0|} \cdot 100 \%, \quad (1.2)$$

$$\delta_{\Phi_1} = \frac{\left| \left(|\Phi\dot{x}_i| - |\Phi\dot{x}_0| \right) \right|}{|\Phi\dot{x}_0|} \cdot 100 \%, \quad (1.3)$$

где $|H\dot{x}_i|$ и $|\Phi\dot{x}_i|$ – соответственно амплитудно-частотные и фазочастотные функции одного из пяти вышеперечисленных методов аппроксимации производных первого порядка.

Аналогичные показатели будут применяться и для оценки точности аппроксимации амплитудно-частотных и фазочастотных функций идеального дифференциатора второго порядка.

Существующие методы численного интегрирования дифференциальных уравнений с переменным шагом интегрирования в данной работе не рассматриваются в основном потому, что процедуры изменения шага интегрирования не всегда очевидны.

1.2. Частотные характеристики методов аппроксимации производных

1.2.1. Метод центральных разностей

Конечно-разностные формулы для вычисления скорости и ускорения записываются через перемещения следующим образом [9; 54]:

$$\dot{x}_t = \frac{x_{t+h} - x_{t-h}}{2h}, \quad (1.4)$$

$$\ddot{x}_t = \frac{x_{t+h} - 2x_t + x_{t-h}}{h^2}. \quad (1.5)$$

С точки зрения теории цифровых фильтров этими формулами описываются цифровые дифференциаторы первого и второго порядков, у которых входной функцией является X , а выходными функциями $\dot{X}$ и $\ddot{X}$ соответственно.

Для получения частотных характеристик поступим следующим образом.

Будем считать, что входная функция представлена в виде $X = e^{j\omega t}$ [68]. Поскольку формулы (1.4) и (1.5) линейны по отношению к входной функции, то такие же функции, только умноженные на передаточные функции $H_{\dot{X}}$ и $H_{\ddot{X}}$ соответственно, будут на выходе. Подставив комплексную экспоненту в формулы (1.4) и (1.5) и учитывая, что $\omega h = \omega / f_{кв} = \bar{\omega}$, получим:

$$H_{\dot{X}} = j \sin \bar{\omega}, \quad (1.6)$$

$$|H_{\dot{X}}| = \sin \bar{\omega},$$

$$\varphi_{\dot{X}} = \frac{\pi}{2},$$

$$H_{\ddot{X}} = 2 \cos \bar{\omega} - 2, \quad (1.7)$$

$$|H_{\ddot{X}}| = 2 \cos \bar{\omega} - 2,$$

$$\varphi_{\ddot{X}} = \pi.$$

Передаточная функция (1.6) является чисто мнимой, а передаточная функция (1.7) не содержит мнимой части, так же как и у идеальных дифференциаторов. Следовательно, метод центральных разностей не вносит фазовых искажений в выходные функции. Что касается амплитудно-частотных функций, то они имеют те же углы наклона в точке $\bar{\omega} = 0$, что и амплитудно-частотные функции идеальных дифференциаторов: единственный угол наклона для дифференциатора первого порядка и нулевой для дифференциатора второго порядка.

1.2.2. Метод Губольта

Метод Губольта основан на интерполяционной формуле перемещений третьего порядка. В этом методе численного интегрирования записываются многошаговые неявные формулы для скорости и ускорения через перемещение с использованием формулы для левых односторонних конечных разностей [9].

Конечно-разностные формулы в методе Губольта имеют следующий вид:

$$\dot{X}_{t+h} = \frac{11X_{t+h} - 18X_t + 9X_{t-h} - 2X_{t-2h}}{6h},$$

$$\ddot{X}_{t+h} = \frac{2X_{t+h} - 5X_t + 4X_{t-h} - X_{t-2h}}{h^2}.$$

Поступая так же, как для метода центральных разностей, получим частотные характеристики метода Губольта.

$$H_{\dot{X}} = \frac{1}{6} [20 \cos \bar{\omega} - 18 - 2 \cos 2\bar{\omega} + j(2 \sin \bar{\omega} + 2 \sin 2\bar{\omega})], \quad (1.8)$$

$$H_{\ddot{X}} = 6 \cos \bar{\omega} - 5 - \cos 2\bar{\omega} + j(-2 \sin \bar{\omega} + \sin 2\bar{\omega}). \quad (1.9)$$

Формулы (1.8) и (1.9) имеют и действительную, и мнимую части. Следовательно, метод Губольта будет вносить в выходную функцию не только амплитудные, но и фазовые искажения. Амплитудно-частотные и фазочастотные функции этого метода имеют следующий вид:

$$|H_{\dot{X}}| = \frac{1}{6} \sqrt{(20 \cos \bar{\omega} - 18 - 2 \cos 2\bar{\omega})^2 + 4(\sin \bar{\omega} + \sin 2\bar{\omega})^2},$$

$$\varphi_{\dot{X}} = \arctg \frac{4(\sin \bar{\omega} + \sin 2\bar{\omega})}{20 \cos \bar{\omega} - 18 - 2 \cos 2\bar{\omega}},$$

$$|H_{\ddot{X}}| = \sqrt{(6 \cos \bar{\omega} - 5 - \cos 2\bar{\omega})^2 + (-2 \sin \bar{\omega} + \sin 2\bar{\omega})^2},$$

$$\varphi_{\dot{X}} = \arctg \frac{-2 \sin \bar{\omega} + \sin 2\bar{\omega}}{6 \cos \bar{\omega} - 5 - 2 \cos 2\bar{\omega}}.$$

1.2.3. Метод Ньюмарка

В методе Ньюмарка предполагается, что в пределах шага интегрирования h ускорение остается постоянным [9; 54]. Конечно-разностные выражения для вычисления скоростей и ускорений в этом методе выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned}\dot{X}_{t+h} &= \frac{2X_{t+h} - 2X_t - \dot{X}_t h}{h}, \\ \ddot{X}_{t+h} &= \frac{4X_{t+h} - 4X_t - 4\dot{X}_t h}{h^2} - \ddot{X}_t.\end{aligned}$$

Частотные характеристики метода Ньюмарка получаем аналогично:

$$\begin{aligned}H_{\dot{X}} &= j2 \frac{\sin \bar{\omega}}{\cos \bar{\omega} + 1}, \\ H_{\ddot{X}} &= 4 \frac{\cos \bar{\omega} - 1}{\cos \bar{\omega} + 1}.\end{aligned}$$

Этот метод, как и метод центральных разностей, не вносит фазовых искажений в выходную функцию, т.к. передаточная функция $H_{\dot{X}}$ чисто мнимая, а $H_{\ddot{X}}$ не имеет мнимой части. Амплитудно-частотные и фазочастотные характеристики для этого случая имеют вид

$$|H_{\dot{X}}| = 2 \frac{\sin \bar{\omega}}{\cos \bar{\omega} + 1}, \quad (1.10)$$

$$\varphi_{\dot{X}} = \pi/2,$$

$$|H_{\ddot{X}}| = 4 \frac{\cos \bar{\omega} - 1}{\cos \bar{\omega} + 1}, \quad (1.11)$$

$$\varphi_{\ddot{X}} = \pi.$$

1.2.4. Метод Парка

Формулы метода Парка получены на основе сочетания двухшаговой трехшаговой схем Гира. Двухшаговая схема Гира, в которой выражение для скорости имеет вид [9]

$$\dot{X}_{t+h} = \frac{2X_{t+h} - 4X_t + X_{t-h}}{2h}, \quad (1.12)$$

вносит в решение сильное численное демпфирование, тогда как трехшаговая, использующая формулу вида

$$\dot{X}_{t+h} = \frac{11X_{t+h} - 18X_t + 9X_{t-h} - 2X_{t-2h}}{6h}, \quad (1.13)$$

является неустойчивой в верхней полосе частот вплоть до частоты Найквиста. Сочетание этих схем позволило создать метод точный и устойчивый как в диапазоне низких частот, так и для всех высокочастотных составляющих. Конечно-разностные выражения для скорости и ускорения получены с помощью линейной комбинации выражений (1.12) и (1.13):

$$\begin{aligned} \dot{X}_{t+h} &= \frac{10X_{t+h} - 15X_t + 6X_{t-h} - X_{t-2h}}{6h}, \\ \ddot{X}_{t+h} &= \frac{10\dot{X}_{t+h} - 15\dot{X}_t + 6\dot{X}_{t-h} - \dot{X}_{t-2h}}{6h}. \end{aligned}$$

Частотные характеристики конечно-разностных выражений метод Парка выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} H_{\dot{X}} &= \frac{1}{6} [16 \cos \bar{\omega} - 15 - \cos 2\bar{\omega} + j(4 \sin \bar{\omega} + \sin 2\bar{\omega})], \\ |H_{\dot{X}}| &= \frac{1}{6} \sqrt{(16 \cos \bar{\omega} - 15 - \cos 2\bar{\omega})^2 + (4 \sin \bar{\omega} + \sin 2\bar{\omega})^2}, \\ \varphi_{\dot{X}} &= \arctg \frac{4 \sin \bar{\omega} + \sin 2\bar{\omega}}{16 \cos \bar{\omega} - 15 - \cos 2\bar{\omega}}. \end{aligned}$$

Для производной второго порядка частотные характеристики определяются из соответствующих характеристик для производной первого порядка:

$$|H \ddot{X}| = |H \dot{X}|^2,$$

$$\varphi \ddot{X} = 2 \varphi \dot{X}.$$

1.2.5. Метод Адамса – Башфорта

Этот метод используется для численного интегрирования дифференциальных уравнений первого порядка [55]. Формулы численного интегрирования в этом методе получены с помощью второй интерполяционной формулы Ньютона и выглядят так: $X_{t+h} = X_t + \frac{h}{2}(3\dot{X}_t - \dot{X}_{t-h})$. Решив это выражение относительно $\dot{X}_t$, получим конечно-разностное выражение для производной первого порядка:

$$\dot{X}_t = \frac{2X_{t+h} - 2X_t + \dot{X}_{t-h}h}{3h}.$$

Соответствующие частотные характеристики определяются выражениями

$$H \dot{X} = \frac{4 \cos \bar{\omega} - 3 - \cos 2\bar{\omega} + j(4 \sin \bar{\omega} - \sin 2\bar{\omega})}{5 - 3 \cos \bar{\omega}},$$

$$|H \dot{X}| = \frac{1}{5 - 3 \cos \bar{\omega}} \sqrt{(4 \cos \bar{\omega} - 3 - \cos 2\bar{\omega})^2 + (4 \sin \bar{\omega} - \sin 2\bar{\omega})^2},$$

$$\varphi \dot{X} = \arctg \frac{4 \sin \bar{\omega} - \sin 2\bar{\omega}}{4 \cos \bar{\omega} - 3 - \cos 2\bar{\omega}}.$$

Частотные характеристики разностных уравнений для производной второго порядка определяются аналогично методу Парка.

$$|H \ddot{X}| = |H \dot{X}|^2, \quad (1.14)$$

$$\varphi \ddot{X} = 2 \varphi \dot{X}. \quad (1.15)$$

1.3. Сравнительная оценка численных методов интегрирования в частотной области

Для сравнения в частотной области результатов, полученных с помощью конечно-разностных формул аппроксимации производных первого и второго порядка, построим графики их амплитудно-частотных и фазочастотных характеристик. Напомним, что фазочастотные характеристики метода центральных разностей и метода Ньюмарка совпадают с фазочастотными характеристиками идеальных дифференциаторов первого и второго порядка. Все графики построены для частот, расположенных в нижней половине частоты Найквиста, т.к. уже на границе этого диапазон частот – при $\bar{f} = 0,25$ – отклонения частотных характеристик от характеристик идеальных дифференциаторов достаточно велики.

На всех графиках введены следующие обозначения:

- 1 – метод центральных разностей;
- 2 – метод Губольта;
- 3 – метод Ньюмарка;
- 4 – метод Парка;
- 5 – метод Адамса–Башфорта.

Жирной линией показаны характеристики идеальных дифференциаторов первого и второго порядка.

В качестве аргумента на графиках показана не угловая относительная частота $\bar{\omega}$, а циклическая относительная частота $\bar{f}$. По мнению автора это упрощает понимание вопроса о выборе частоты квантования (в нашем случае это шаг интегрирования). Действительно, если выбрать точность аппроксимации производных в частотной области и определить соответствующую этой точности относительную частоту, то вопрос о выборе необходимой частоты квантования решается очень просто: количество точек на период самой высокочастотной составляющей определяется как обратная величина относительной частоты.

На рис.1.1 показаны амплитудно-частотные, а на рис.1.2 фазочастотные характеристики конечно-разностных выражений для производных первого порядка всех рассмотренных методов. На рис.1.3 и рис.1.4 – соответствующие характеристики конечно-разностных выражений для производных второго порядка.

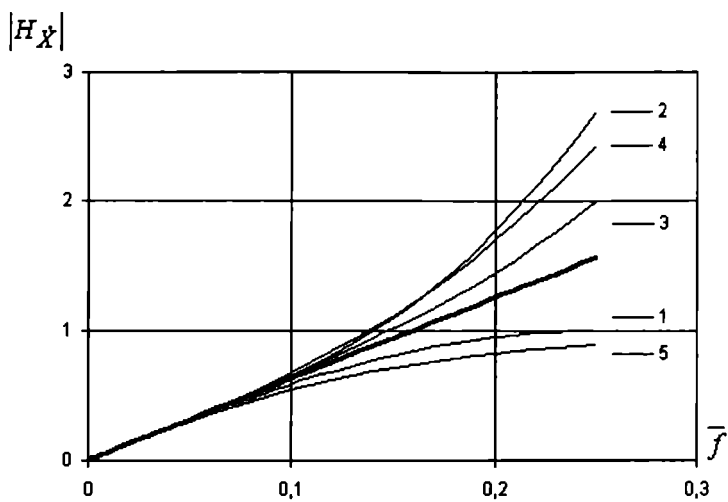


Рис.1.1. Амплитудно-частотные характеристики конечно-разностных выражений первой производной

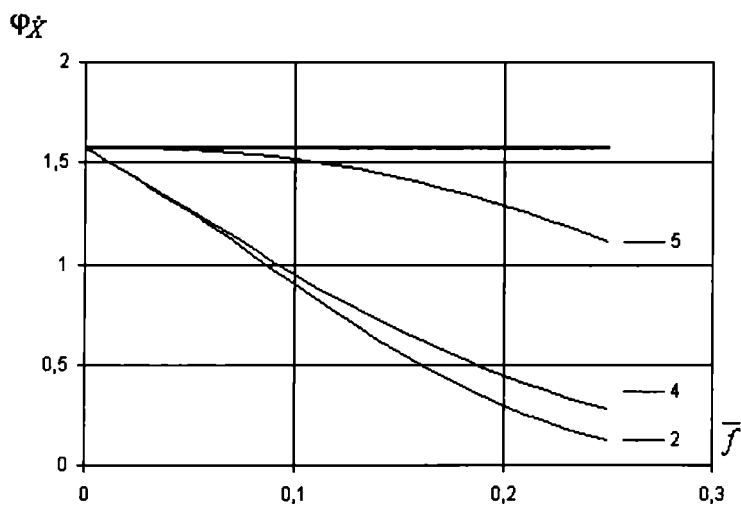


Рис.1.2. Фазочастотные характеристики конечно-разностных выражений первой производной

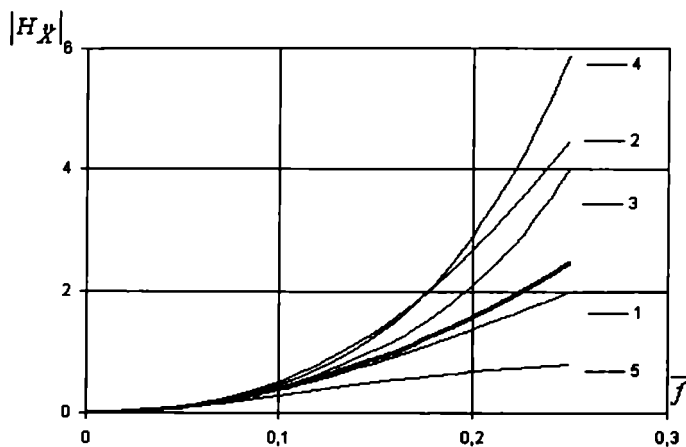


Рис.1.3. Амплитудно-частотные характеристики конечно-разностных выражений второй производной

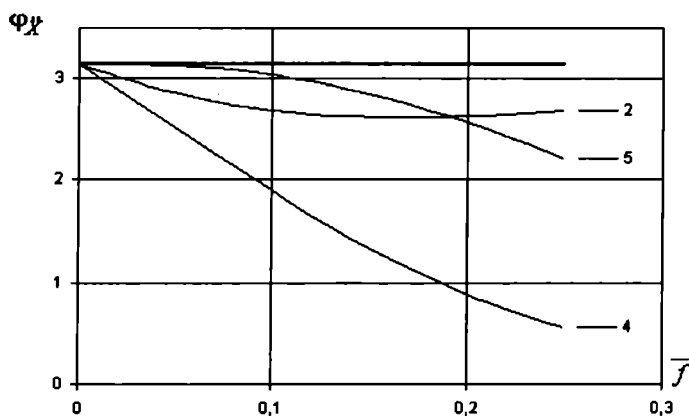


Рис.1.4. Фазочастотные характеристики конечно-разностных выражений второй производной

В результате анализа приведенных рисунков можно сделать следующие выводы:

- при значении относительной частоты $\bar{f} > 0,1$ амплитудно-частотные характеристики всех конечно-разностных выражений существенно отличаются от амплитудно-частотных характеристик идеальных дифференциаторов;

- фазочастотные характеристики конечно-разностных уравнений всех методов за исключением методов центральных разностей и Ньюмарка даже при $\bar{f} < 0,1$ существенно отличаются от теоретических значений: $\pi/2$ для дифференциатора первого порядка и π для дифференциатора второго порядка;

- амплитудно-частотные характеристики идеального дифференциатора первого порядка наиболее хорошо аппроксимируются конечно-разностными выражениями метода Ньюмарка;

- амплитудно-частотные характеристики идеального дифференциатора второго порядка наиболее хорошо аппроксимируются конечно-разностными выражениями метода центральных разностей.

Если учесть, что именно эти два метода не вносят фазовых искажений, то становится очевидным – выбирать метод интегрирования следует из них.

Для более детального исследования вопроса о погрешностях аппроксимации производных конечно-разностными выражениями во всей частотной области оценим точность по показателям (1.2) и (1.3). Результаты этих оценок приведены на рис. 1.5 – 1.8.

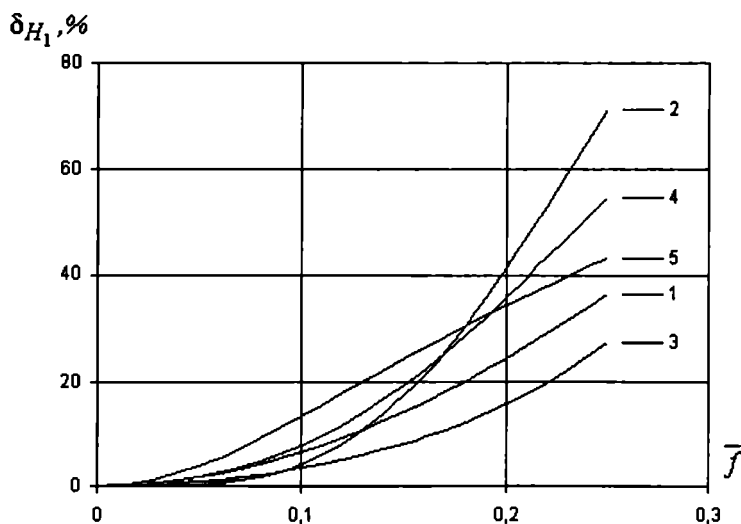


Рис.1.5. Погрешность аппроксимации амплитудно-частотной характеристики первой производной

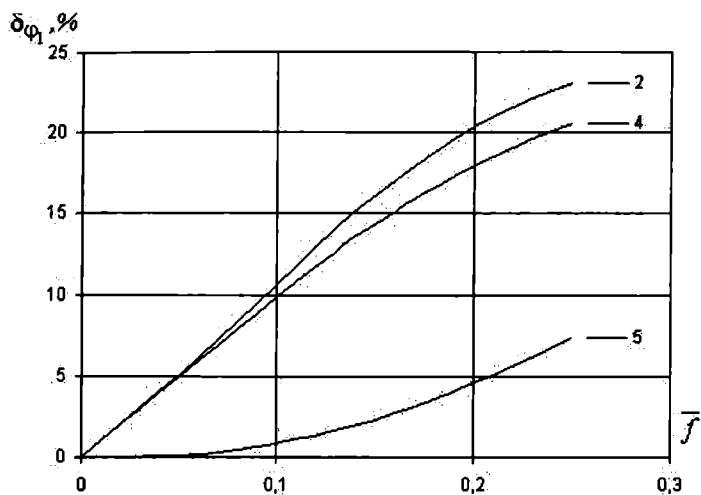


Рис.1.6. Погрешность аппроксимации фазочастотной характеристики первой производной

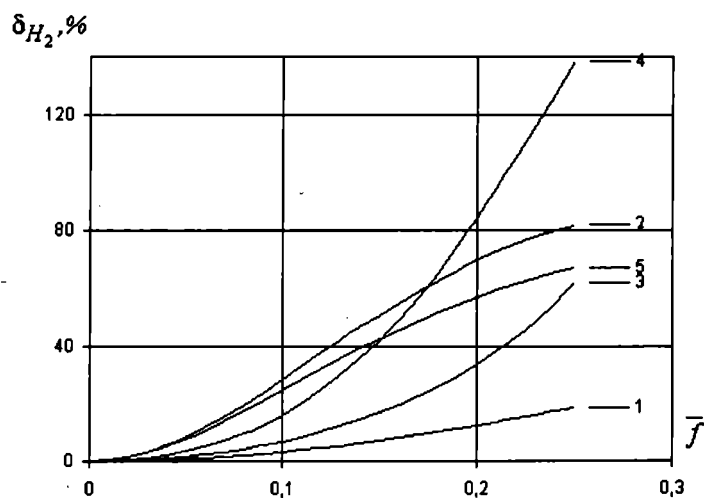


Рис.1.7. Погрешность аппроксимации амплитудно-частотной характеристики второй производной

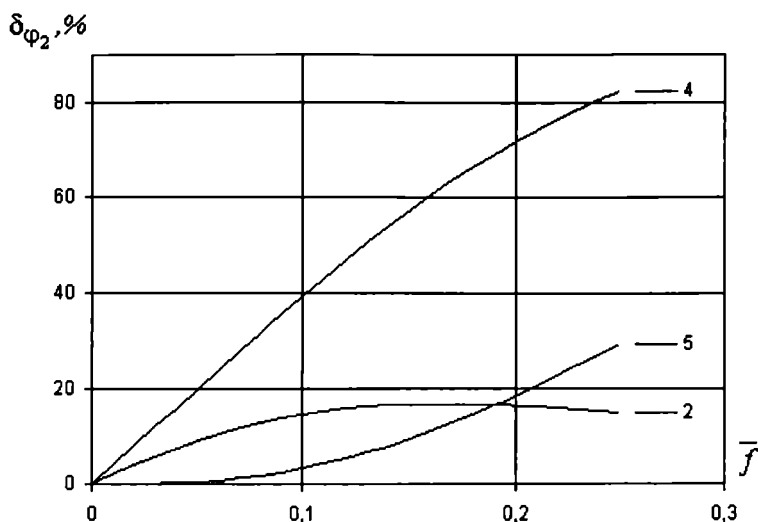


Рис.1.8. Погрешность аппроксимации фазочастотной характеристики второй производной

Как видно из рис.1.5 – 1.8, фазовые искажения при $\bar{f} \leq 0,1$, вносимые методами Губольта и Парка, достаточно велики. Метод Адамса–Башфорта дает гораздо меньшие фазовые искажения, но достаточно большие искажения амплитудно-частотной характеристики. Наименьшей погрешностью аппроксимации первой производной обладает метод Ньюмарка, второй производной – метод центральных разностей. Это подтверждает предварительный вывод о целесообразности применения одного из этих методов.

Для сравнения методов следует ввести еще один показатель, с помощью которого можно оценить качество аппроксимации тем или иным методом всех четырех составляющих (две амплитудно-частотные и две фазочастотные характеристики). Выберем в качестве такого показателя среднее арифметическое четырех погрешностей, т.е. $\delta = \frac{1}{4} (\delta_{H_1} + \delta_{\varphi_1} + \delta_{H_2} + \delta_{\varphi_2})$. Графики, иллюстрирующие зависимость величины δ от $\bar{f}$, приведены на рис.1.9.

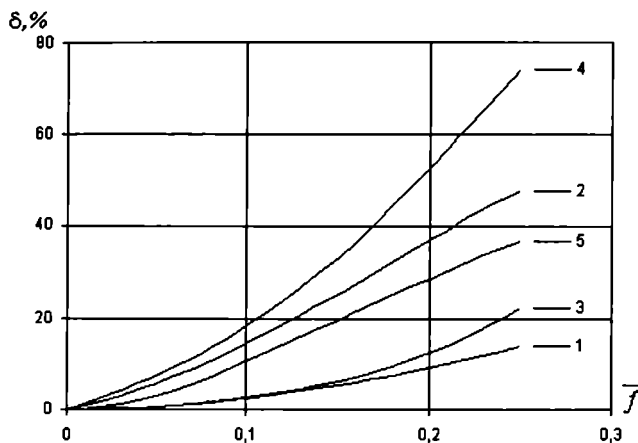


Рис.1.9. Обобщенная погрешность аппроксимации производных

Из всего вышеизложенного можно сделать следующие выводы:

- из рассмотренных методов численного интегрирования только методы центральных разностей и Ньюмарка не вносят в решение фазовых искажений;
- во всем диапазоне частот метод центральных разностей дает наименьшее значение обобщенной погрешности;
- метод Ньюмарка дает практически такую же погрешность, как и метод центральных разностей в диапазоне $\bar{f} \leq 0,12$. При больших частотах погрешность метода Ньюмарка значительно больше. При частотах близких к частоте Найквиста, амплитудно-частотная характеристика метода Ньюмарка неограниченно возрастает, что в нелинейных системах может привести к нежелательным результатам (см. знаменатель формул 1.10 и 1.11);
- при выборе шага интегрирования дифференциальных уравнений необходимо исходить из условия $h \leq 0,1 \cdot T_{\min}$, где $T_{\min}$ – период колебаний наивысшей частоты системы (рис.1.5 и 1.7). Так, на этой частоте метод центральных разностей дает ошибку аппроксимации первой производной 6,4%, второй производной – 3,2%. При увеличении шага интегрирования погрешности аппроксимации производных значительно возрастают.

ГЛАВА 2. ВОЗМУЩЕНИЯ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ НА РЕЛЬСОВЫЙ ЭКИПАЖ СО СТОРОНЫ ПУТИ

2.1. Введение

Обеспечение безопасности железнодорожных перевозок, комфортности езды пассажиров и сохранности грузов зависит как от параметров динамической системы «железнодорожный путь – экипаж», так и от состояния железнодорожного пути, которым определяются условия возникновения колебаний экипажа во время движения. Уровень этих колебаний при определенных условиях может достигать критических значений. Поэтому вопрос об описании возмущений, действующих на рельсовый экипаж со стороны пути, представляется очень важным. Причинами колебаний экипажей являются различные несовершенства железнодорожного пути и экипажа: геометрические и динамические неровности рельсовых нитей, непостоянство свойств железнодорожного пути по длине, конечность и неровности поверхности катания колес [9; 38; 65]. Интенсивность воздействия перечисленных факторов на экипаж и уровень колебаний экипажа как результат воздействия этих факторов зависят от скорости движения экипажа, нагрузки на ось и т.д. Степень износа колес и рельсов, непостоянство свойств пути по длине носят случайный характер, следовательно, случайный характер носят и возмущения, порождаемые этими факторами. С другой стороны, стыки рельсовых плетей, расположенные на определенном более или менее постоянном расстоянии друг от друга, порождают периодические возмущающие воздействия в системе «рельсовый экипаж – путь», хотя их параметры также носят случайный характер.

На разных участках пути параметры неровностей могут существенно отличаться друг от друга. Для того чтобы внести определенность в методики расчета и теоретические исследования динамической нагруженности рельсовых экипажей, в некоторых странах все участки железных дорог подразделяются на классы. Например, на железных дорогах США введены 6 классов участков. В качестве критериев классификации участков используются максимальные отклонения оси пути в вертикальном и горизонтальном направлениях от середины хорды путеизмерителя, а также превышение одного конца хорды над другим. Кроме того, для каждого

класса приняты типовые спектральные плотности неровностей как функции пространственной координаты [37].

Известны исследования [9; 38; 69], посвященные вопросам изучения математического описания возмущений, действующих на экипаж. Предпринимались попытки описать аналитическими выражениями с детерминированными или случайными параметрами экспериментально полученные характеристики возмущений. В первых работах, посвященных исследованию колебаний рельсовых экипажей, учитывались только наиболее явные существенные факторы, приводящие к появлению возмущений со стороны пути [7; 8]. Это, прежде всего, наличие рельсовых стыков, неровности поверхности катания колес и непостоянство параметров основания. Позже были сделаны попытки перехода от детерминированных моделей к моделям учитывающим случайный характер возмущений [63].

В целом принята следующая классификация неровностей:

- по распределению вдоль пути – детерминированные и случайные;
- по положению плоскости, в которой они находятся, – вертикальные и горизонтальные;
- по природе своего появления – геометрические, определяемые неравномерным износом рельсов и их искривлениями, и силовые, появляющиеся только под воздействием нажатия колеса на рельс и обусловленные неравномерностью упругих характеристик пути по длине.

На практике подразделение неровностей на детерминированные и случайные весьма условно. Так, стыковую неровность можно рассматривать и как детерминированную, т.е. повторяющуюся через равные расстояния, имеющую постоянную глубину и длину, и как случайную, т.к. длина рельсов, глубина и длина стыковых неровностей величины случайные с тем или иным рассеиванием.

2.2. Методика задания неровностей пути

Для получения статистических оценок динамических показателей качества рельсового экипажа необходимо иметь статистически однородный набор неровностей. Получить такой набор в ходе натурных измерений неровностей не всегда удастся, потому что статистические параметры неровностей могут существенно изменяться по длине пути. Представляется затруднительным (если вообще возможным) или, во всяком случае, весь

ма трудоемким создание банка данных неровностей для различных участков пути. Автором предложен альтернативный способ задания статистически однородных реализаций неровностей пути. Этот способ заключается в следующем: выполняется анализ статистических параметров и пространственного спектра полученной в ходе эксперимента реализации неровностей рельсовой нити, далее с использованием этих параметров генерируется случайная последовательность, которая и является реализацией модели неровностей пути. Такой подход позволяет без существенных затрат времени получить достаточное количество реализаций моделей неровностей пути.

Рассмотрим применение данного метода с учетом экспериментально полученных неровностей пути на реальном участке железной дороги.

На рис. 2.1. представлена реализация вертикальной неровности рельсовой нити. Длина реализации, полученной путем непосредственного измерения неровностей в вертикальной плоскости, составляет 200 м.

Амплитуда, м

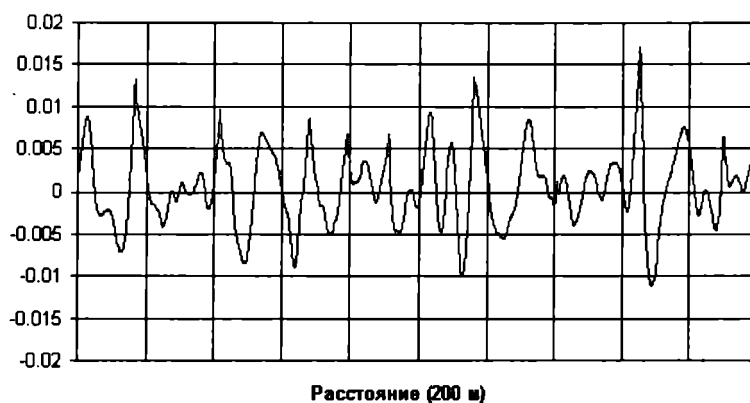


Рис. 2.1. Экспериментально измеренные вертикальные неровности рельсовой нити

Рассмотрим эту реализацию как выборку из случайного процесса и определим основные характеристики (среднее значение, среднее квадратическое отклонение, эксцесс и асимметрию) закона распределения случайного процесса и его пространственный спектр. Как видно из рис. 2.3, диапазон пространственных частот неровности составляет $0,04 \dots 0,2 \text{ м}^{-1}$, что соответствует интервалу длин неровностей $25 \dots 5 \text{ м}$.

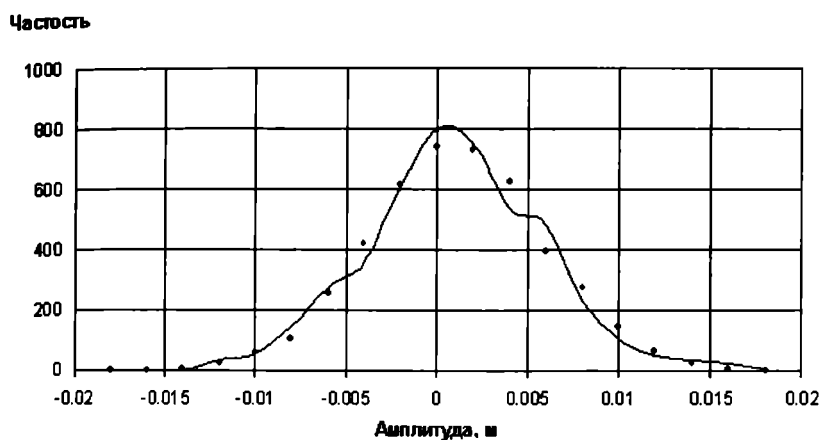


Рис. 2.2. Гистограммы экспериментально полученной реализации неровности (сплошная линия) и реализации, полученной методом моделирования (точки)

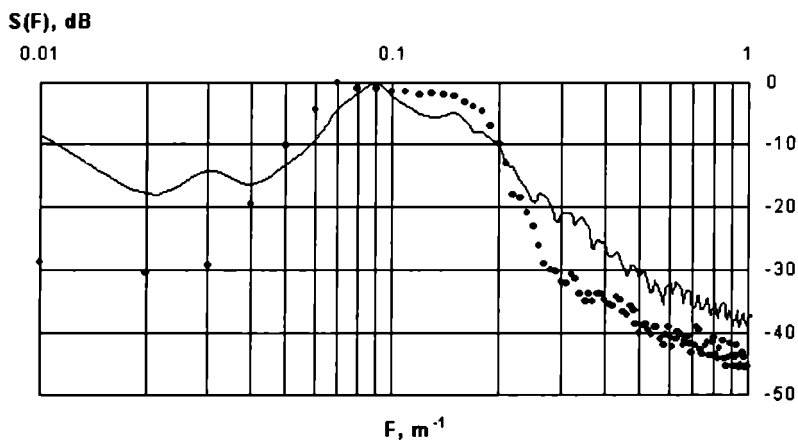


Рис. 2.3. Пространственные нормированные спектральные плотности мощности экспериментально полученной реализации неровности (сплошная линия) и реализации, полученной путем моделирования (точки)

Далее, используя полученные характеристики, необходимо сгенерировать псевдослучайную последовательность чисел. В настоящее время известно несколько способов генерации псевдослучайных чисел с заданными статистическими характеристиками [37]. Как правило, вначале генерируется последовательность псевдослучайных чисел с равномерным распределением. Для этого можно воспользоваться мультипликативным методом, методами Неймана или Коробова, дающими достаточно хорошие результаты. Далее полученные последовательности преобразуют в последовательность с нормальным распределением, например, с помощью метода, основанного на известной центральной теореме [19; 21], используя $m \geq 6$ равномерно распределенных псевдослучайных чисел V_n :

$$R_n = \frac{\left(\sum_{n=1}^m V_n - m/2 \right)}{\left(m/2 \right)^{1/3}}.$$

Или с помощью метода, предложенного Нейманом, который заключается в последовательном отборе чисел с нормальным распределением из массива V_n :

$$R_n = c(2V_n - 1)$$

при условии

$$-c^2(V_n - 0,5)^2 \geq \ln V_{n+1}.$$

Существует также метод получения пары сопряженных случайных чисел с нормальным распределением (метод Муллера):

$$R_n' = \sqrt{2 \ln(1/V_n)} \cos(2\pi V_{n-1}),$$

$$R_n'' = \sqrt{2 \ln(1/V_n)} \sin(2\pi V_{n-1}).$$

Далее, применяя один из методов цифровой фильтрации, получают окончательную реализацию псевдослучайного процесса. В данном примере фильтрацию необходимо проводить в диапазоне частот исходного процесса, т.е. $0,04 \dots 0,2 \text{ м}^{-1}$. Как видно из рис. 2.2 и 2.3, гистограммы и пространственные спектры в указанном диапазоне частот хорошо совпадают, следовательно, модель неровности достаточно близка к реализации, полученной в эксперименте. На рис. 2.4 показана полученная реализация вертикальной неровности рельсовой нити длиной 200 м.

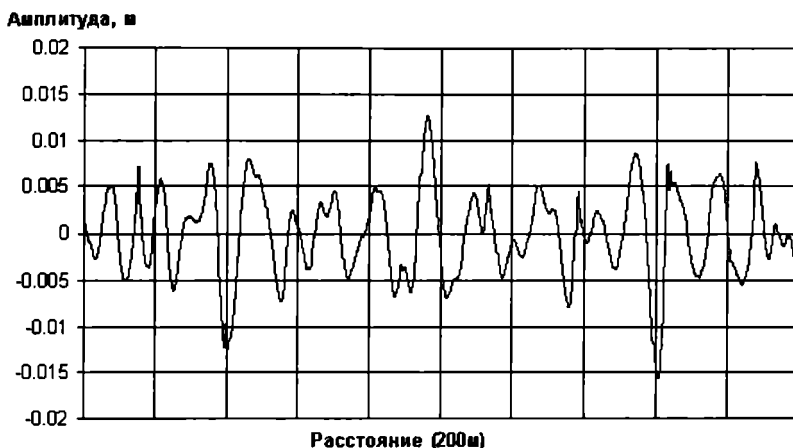


Рис. 2.4. Вертикальные неровности рельсовой нити, полученные путем моделирования

Таким образом, предложенный метод позволяет получить достаточное количество реализаций случайных процессов (неровностей) для статистической оценки поведения рельсового экипажа на участке пути, для которого неровности измерены в ходе эксперимента.

Далее рассмотрим неровности в вертикальной и горизонтальной плоскостях, подразделяя их при этом на детерминированные и случайные.

2.3. Вертикальные неровности пути

К основным причинам, приводящим к появлению возмущений в вертикальной плоскости, относятся, прежде всего, стыки, неравномерный (волнообразный) износ рельсов, просадки рельсовых нитей, неоднородность свойств основания по длине пути и зазоры между рельсами и осно-

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Автоколебания и устойчивость движения рельсовых экипажей / Ю.В. Демин, Л.А. Длугач, М.Л. Коротенко и др. – К.: Наук. думка, 1984. – 160 с.
2. Блохин Е.П., Данович В.Д., Морозов Н.И. Математическое моделирование пространственных колебаний четырехосного экипажа / ДИИТ. – Д., 1986. – 39 с. – Деп. в ЦНИИТЭИ МПС 29.09.86, №7252 ж.д.
3. Быков В.В. Цифровое моделирование в цифровой радиотехнике. – М.: Сов. радио, 1971. – 328 с.
4. Вагоны: Конструкция, теория и расчет / Л.А. Шадур, И.И. Челноков, Л.Н. Никольский и др.; Под ред. Л.А. Шадура. – 3-е изд. – М.: Транспорт, 1980. – 439 с.
5. Вагоны: Проектирование, устройство и методы испытаний / Л.Д. Кузьмич, А.В.Кузнецов, Б.А. Ржавинский и др.; Под ред. Л.Д. Кузьмича. – М.: Машиностроение, 1978. – 376 с.
6. Вейсхаупт З. Экспериментальные исследования подвижного состава и пути с помощью спектрального анализа: Экспресс-информ // Локомотивостроение и вагоностроение. – 1973. – №21. – С. 13-21.
7. Вериго М.Ф., Коган А.Я. Взаимодействие пути и подвижного состава. – М.: Транспорт, 1986. – 560 с.
8. Вершинский С.В., Данилов В.Н., Хусидов В.Д. Динамика вагона. – М.: Транспорт, 1991. – 359 с.
9. Гарг В.К., Дуккипати Р.В. Динамика подвижного состава. – М.: Транспорт, 1988. – 391 с.
10. Гаркави Н.Я., Добров И.В. О способах имитации вибрационного состояния объектов // Вестн. машиностроения. – 1999. – №4. – С. 52–54.
11. Гаркави Н.Я., Ковалев И.Е. Система измерения и автоматической обработки результатов виброиспытаний механических конструкций с целью определения их динамических характеристик // 11-й Всесоюз. симп. по динамическим измерениям. Тез. докл. – Л.: Наука, 1978.
12. Голубенко А.Л. Сцепление колеса с рельсом. – К.: Випол, 1993. – 448 с.
13. Грачева Л.О. Взаимодействие вагонов и железнодорожного пути. – М.: Транспорт, 1968. – 207 с.
14. Данович В.Д. Пространственные колебания вагонов на инерционном пути: Дис. ... д-ра техн. наук / ДИИТ. – Д., 1982. – С. 465.

15. Данович В.Д., Липовский Р.С., Грановский Р.Б. Пространственные колебания грузового вагона при движении по пути с детерминированными и случайными неровностями // Механика наземного транспорта / Под ред. В.А. Лазаряна – К.: Наук. думка, 1977. – С. 37–41.
16. Данович В.Д., Мокрый Т.Ф., Трубицкая Е.Ю. Исследование пространственных колебаний пассажирского вагона, движущегося по пути с вертикальными и горизонтальными неровностями // Проблемы динамики и прочности подвижного состава: Межвуз. сб. науч. тр. – Д.: ДИИТ, 1979. – Вып. 205/26. – С. 76–82.
17. Динамика установившегося движения локомотивов в кривых / С.М. Куценко, Э.П. Руссо, Э.П. Елбаев и др. – Х.: ХГУ, 1975. – 132 с.
18. Докейниш М.А., Сиддел Дж.Н., Элмрой В. О влиянии неровностей рельсового пути на динамическую характеристику железнодорожных экипажей // Конструирование и технология машиностроения. – 1974. – Сер. Б, т. 96. – С. 50–62.
19. Дьяконов В.П. Расчет нелинейных и импульсных устройств на программируемых калькуляторах. – М.: Радио и связь, 1984. – 176 с.
20. Жуковский Н.Е. Колебания паровоза на рессорах (1920): Полн. собр. соч. – М.; Л.: ОНТИ НКТП. – Т. 8, 1937. – С. 271–279.
21. Математическая статистика / В.М. Иванова, В.Н. Калинина, Л.А. Нешумова, И.О. Решетникова. – М.: Высш. шк., 1981. – 368 с.
22. Исследование динамики и прочности вагонов / С.И. Соколов, В.В. Новарро, Г.Ф. Левенсон и др. – М.: Машиностроение, 1976. – 224 с.
23. Калкер И.И., Де Патер А.Д. Обзор теории локального скольжения в области упругого контакта с сухим трением // Прикладная механика. – 1971. – Т. 7, № 5. – С. 9–20.
24. Камаев В.А. Оптимизация параметров ходовых частей железнодорожного подвижного состава. – М.: Машиностроение, 1980. – 215 с.
25. Каппелини В., Константи́нидис А. Дж., Эмилиани П. Цифровые фильтры и их применения. – М.: Энергоатомиздат, 1983. – 360 с.
26. Ковалев Н.А. Боковые колебания подвижного состава. – М: Трансжелдориздат, 1957. – 248 с.
27. Коротенко М.Л., Данович В.Д. Дифференциальные уравнения пространственных колебаний четырехосного вагона с учетом конечной жесткости кузова и инерционных свойств основания // Проблемы механики наземного транспорта.: Межвуз. сб. науч. тр. – Д.: ДИИТ, 1973. – Вып. 199/25. – С. 3–13.
28. Куперрайдер Н.К. Колебания железнодорожной тележки, вызванные случайными неровностями рельсов // Конструирование и технология машиностроения. – 1975. Сер. Б, т. 97, №3. – С. 173–180.

29. Лазарян В.А. Динамика вагона. – М.: Транспорт, 1964. – 255 с.
30. Лазарян В.А. Колебания железнодорожного состава // Вибрации в технике / Под ред. Ф.М. Диментберга – М.: Машиностроение, 1980. – Т. 3. – С. 398–433.
31. Лазарян В.А., Длугач Л.А., Коротенко М.Л. Устойчивость движения рельсовых экипажей. – К.: Наук. думка, 1972. – 198 с.
32. Дифференциальные уравнения пространственных колебаний четырехосного грузового вагона при движении по инерционному пути, рассматриваемому как дискретная система / В.А. Лазарян, М.Л. Коротенко, Р.С. Липовский, В.Д. Данович // Тр. / ДИИТ. – 1972. – Вып.138. – С. 3-15.
33. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. – М.: Сов. радио, 1969. – 752 с.
34. Ленк А., Ренитц Ю. Механические испытания приборов и аппаратов. – М.: Мир, 1976. – 271 с.
35. Динамические показатели некоторых типов вагонов / В.А. Литвин, С.В. Мямлин, А.А. Малышева, Л.А. Недужая // Механика транспорта: вес поезда, скорость, безопасность движения: Межвуз. сб. науч. тр. – Д.: ДИИТ, 1994. – с. 95–104.
36. Львов А.А., Грачева Л.О. Современные методы исследования динамики вагонов // Тр. / ЦНИИ МПС. – 1972. – Вып. 457. – 160 с.
37. Мартин Ф. Моделирование на вычислительных машинах. – М.: Сов. радио, 1972. – 272 с.
38. Математическое моделирование колебаний рельсовых транспортных средств / Под ред. В.Ф. Ушкалова. – К.: Наук. думка, 1989. – 240 с.
39. Медель В.Б. Основные уравнения динамики подвижного состава железных дорог // Тр. / МЭМИИТ. – 1948. – Вып. 55. – С. 3-31.
40. Медель В.Б. Взаимодействие электровоза и пути. – М.: Трансжелдориздат, 1956. – 336 с.
41. Механическая часть тягового подвижного состава: Учеб. для вузов ж.-д. транспорта / Под. ред. И.В. Бирюкова. – М.: Транспорт, 1992. – 400 с.
42. Мямлин С.В. Программа моделирования пространственных колебаний подвижного состава // Залізничний транспорт України. – 2000. – №3. – С. 52–54.
43. Мямлин С.В. Методика моделирования пространственных колебаний железнодорожного экипажа // Залізничний транспорт України. – 2001. – №2. – С. 2–5.
44. Ходовые (динамические) испытания полувагонов с опытными тележками: Отчет о НИР / ДИИТ. – № ГР. 01900030849. – Д., 1991. – 152 с.

45. Разработка рекомендаций по снижению износа колес и рельсов за счет снижения сил динамического взаимодействия железнодорожных экипажей и пути с учетом стационарных и нестационарных режимов движения: Отчет о НИР / ДИИТ. № ГР. 0196U023134. – Д., 1998. – 478 с.
46. Разработка мероприятий по уменьшению сходов порожних вагонов (цистерн, хопперов, полувагонов). Экспериментальные и теоретические исследования: Отчет о НИР / ДИИТ. – № ГР. 0197U019258. – Д., 1999. – 120 с.
47. Пановко Я.Г. Основы прикладной теории колебаний и удара. – Л.: Машиностроение, 1976. – 319 с.
48. Панькин Н.А., Гребенюк М.П. Влияние крипа на движение колесной пары. // Тр. / ВНИИЖТ. – 1991. – С. 57–63.
49. Де Патер А.Д. Изложение теории взаимодействия пути и железнодорожного подвижного состава. – Утрехт: Технический университет, 1963. – 64 с.
50. Де Патер А.Д. Колебания нелинейных механических систем с жесткими ограничениями // Тр. междунар. симп. по нелинейным колебаниям. – К., 1963. – Т. 3. – С. 326–346.
51. Прочность. Устойчивость. Колебания: Справ. в 3 т. / Под общ. ред. И.А. Биргера, Я.Г. Пановко. – М.: Машиностроение, 1968. – Т. 1. – 832 с.
52. Пэтади С., Крафт В.И. Исследование динамики локомотива путем моделирования с большим числом степеней свободы // Конструирование и технология машиностроения. – 1979. – Т. 101, № 4. – С. 117–123.
53. Расчет вагонов на прочность / С.В. Вертинский, Е.Н. Никольский, Л.Н. Никольский и др.; Под ред. Л.Д. Шадура. – М.: Машиностроение, 1971. – 432 с.
54. Расчет грузовых вагонов на прочность при ударах / Под ред. Е.П. Блохина. – М.: Транспорт, 1989. – 228 с.
55. Расчеты и испытания тяжеловесных поездов / Под. ред. Е.П. Блохина. – М.: Транспорт, 1986. – 263 с.
56. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений / Под ред. Дж. Холла, Дж. Уатта. – М.: Мир, 1979. – 312 с.
57. Соколов М.М., Хусидов В.Д., Минкин Ю.Г. Динамическая нагруженность вагона. – М.: Транспорт, 1981. – 208 с.
58. Страуструп Б. Язык программирования C++. – К.: Диасофт, 1993. – 553 с.
59. Тибилов Т.А. Асимптотические методы исследования колебаний подвижного состава // Тр. / РИИЖТ. – 1970. – Вып. 78. – 224 с.



Акционерное общество
ДНЕПРО ВАГОН МАШ®



ВАГОНЫ НА ЛЮБОЙ ГРУЗ