

СССР - МПС

ДНЕПРОПЕТРОВСКИЙ ИНСТИТУТ ИНЖЕНЕРОВ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА

На правах рукописи

Инж. Черевацик Б.П.

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ
НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ СИСТЕМ
С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

(Специальность 01.022 - сопротивление
материалов и строительная
механика)

А в т о р е ф е р а т
диссертации на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Днепропетровск
1970

Работа выполнена в Днепропетровском институте инженеров железнодорожного транспорта.

Научные руководители

доктор технических наук профессор Бондарь Н.Г.

кандидат технических наук доцент Маневич Л.И.

Официальные оппоненты:

доктор технических наук профессор Прусаков А.П.

кандидат технических наук доцент Крюков Б.И.

Ведущее предприятие - Институт Механики АН УССР

/ Днепропетровское отделение /.

Автореферат разослан

2 ноября

1970г.

Защита диссертации состоится

10 декабря

1970г.

на заседании Учёного Совета Днепропетровского института инженеров железнодорожного транспорта.

Просим Вас и сотрудников Вашего учреждения, интересующихся темой диссертации, принять участие в заседании Учёного Совета или прислать свои отзывы о работе в двух экземплярах по адресу г. Днепропетровск, 10, ул. Университетская, 2, ДИИТ.

Учёный секретарь Совета, доцент

Л.Н. Лебединец

СССР - МПС

ДНЕПРОПЕТРОВСКИЙ ИНСТИТУТ ИНЖЕНЕРОВ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА

На правах рукописи

Инж. Череватский Б.П.

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ
НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ СИСТЕМ
С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

(Специальность 01 . 022 - сопротивление
материалов и строительная
механика)

А в т о р е ф е р а т
диссертации на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Днепропетровск
1970

4350a

Совершенствование методов расчета гибких конструкций, подверженных действию динамических нагрузок, требует рассмотрения специальных разделов динамики сооружений, посвященных нелинейным колебаниям. Исследование колебаний конструкций с большими деформациями примыкает к общим задачам теории нелинейных колебаний, имеющим важное значение также в электротехнике, электротехнике и радиотехнике, системах связи, газовой динамике, акустике, оптике, ускорительной технике, астрономии, механике и т.д.

Основополагающими работами в области нелинейных колебаний являются исследования А. Пуанкаре и А.М. Ляпунова. Дальнейшее развитие методов нелинейной механики связано с именами Г. Дуффинга, Ван-дер-Поля, Л.И. Мандельштама, Н.Д. Папалекси, Н.М. Крылова, Н.Н. Боголюбова, А.А. Андропова, Б.В. Булгакова, Н.Г. Четаева, И.Г. Малкина, Ю.А. Митропольского, В.О. Кононенко и др. В работах этих авторов рассматривались, в основном, системы, описываемые квазилинейными дифференциальными уравнениями. Исключением являются работы И.Г. Малкина, в которых разработан строго обоснованный метод исследования систем, близких к произвольным нелинейным системам. Этот метод, однако, не является конструктивным, т.е. не может быть использован для практического нахождения решений.

В последнее десятилетие в области сильно нелинейных многомассовых систем наметился иной подход, связанный с методом нормальных колебаний — понятием, заимствованным из теории линейных колебаний. Значительные результаты в развитии этого подхода принадлежат Р.М. Розенбергу, Св. Аткинсону, В.О. Кононенко, Н.Г. Бондарю. В нелинейных многомассовых системах Р.М. Розенбергом нормальные колебания определены как частные периодические решения, обладающие следующими свойствами:

- а) все массы имеют одинаковую частоту колебаний ;
- б) все массы пересекают положение равновесия одновременно в некоторый момент времени t_1
- в) все массы достигают одновременно максимального отклонения в момент времени $t_2 \neq t_1$
- г) перемещение каждой массы в любой момент времени является однозначной функцией перемещения любой другой из них в тот же момент времени .

Неприменимость принципа суперпозиции в нелинейных системах снижает роль нормальных колебаний, однако, как и в линейных системах, эти частные решения характеризуют основные свойства, присущие данной системе. Кроме того, при действии на заданную систему периодических внешних сил малой амплитуды в области резонанса реализуются движения, близкие к нормальным колебаниям. Поскольку одними из основных задач теории колебаний являются либо использование резонанса, либо его предотвращение, то становится ясной актуальность проблемы отыскания нормальных колебаний.

Методы определения нормальных колебаний и исследования их устойчивости разработаны Р.М.Розенбергом и его последователями для равномерно распределенных систем (все массы равны, все связи между массами одинаковы и имеют нечетные нелинейные характеристики) и для однородных систем (массы произвольны, характеристики пружин являются однородными функциями деформаций порядка k ; $k=1,3,\dots$) .

Очевидно, что большой класс практически важных задач не решен в рамках этой теории .

Новый подход к проблеме нормальных колебаний, основанный на анализе групповых свойств уравнений движения, развит Л.И.Маневичем, который установил связь между нормальными колебаниями и

инвариантно-групповыми решениями дифференциальных уравнений. Эти результаты позволили существенно расширить возможности фактического определения нормальных колебаний и создали основу для детального изучения обширного класса практически важных задач.

Настоящая работа является попыткой расширить круг систем с двумя степенями свободы, в которых метод нормальных колебаний может привести к значительному упрощению исследования. В диссертации рассматриваются многие случаи, не попавшие в поле зрения метода нормальных колебаний системы, близкие к равномерно распределенным и однородным, вырожденные системы (консервативные и диссипативные), построение амплитудно-частотных характеристик различных видов систем при периодическом возбуждении.

В качестве объекта исследования в работе принята, как правило, нелинейная система с двумя степенями свободы, которая являлась простейшим примером многомассовой системы, отражает, тем не менее, основные свойства общего класса нелинейных систем. Принятая модель позволяет провести детальный анализ движений по нормальным формам. Следует отметить, что распространение полученных результатов на системы с большим числом степеней свободы почти всегда возможно.

Диссертационная работа объемом в 169 страниц машинописного текста с 36 иллюстрациями и 16 таблицами состоит из введения, четырех глав, заключения, приложений и списка литературы. Библиография содержит 119 названий.

В первой главе изложены основные способы приближенного определения нормальных колебаний в нелинейных консервативных системах с двумя степенями свободы различного вида.

Рассмотрены частные случаи, допускающие точное определение нормальных колебаний. При этом выявлен дополнительно и ранее из-

известным особым случаем симметричной по конфигурации системы, когда существует только одна нормальная форма колебаний (крайние пружины обладают несимметричными характеристиками восстанавливающих сил).

Исследованы нормальные колебания в квазилинейных системах вида

$$m_i \ddot{x}_i + \sum_{j=1}^n a_{ij}^{(0)} (x_i - x_j) = \varepsilon f_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (I)$$

($i, j = 1, 2, \dots, n$)

где ε - малый безразмерный параметр ($\varepsilon \ll 1$)

Для нахождения нормальных форм колебаний предложена модификация классического метода Крылова-Боголюбова, приводящая к асимптотическим разложениям

$$\begin{aligned} x_1 &= A \cos \psi + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots, \\ x_j &= c A \cos \psi + \varepsilon v_{1j} + \varepsilon^2 v_{2j} + \dots, \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega + \varepsilon W_1(A) + \varepsilon^2 W_2(A) + \dots, \\ \frac{dA}{dt} &= \varepsilon D_1(A) + \varepsilon^2 D_2(A) + \dots, \quad c = c_0 + \varepsilon c_1 + \varepsilon^2 c_2 + \dots \end{aligned} \quad (2)$$

Отличие от одночастотного метода Крылова-Боголюбова заключается в разложении модальных соотношений c . В качестве нулевого приближения принимается решение линейной консервативной системы. Используя далее известный алгоритм метода Крылова-Боголюбова для двухмассовой квазилинейной системы с характеристиками типа ДUFFинга, получены в первом приближении поправки по частоте и форме.

На основе идей И.Г.Малкина показана возможность использования полученных частных решений для построения приближенного общего решения в виде

$$\begin{aligned}x_1 &= A_1 \cos \bar{\omega}_1 t + A_2 \cos \bar{\omega}_2 t, \\x_2 &= \bar{b}_1 A_1 \cos \bar{\omega}_1 t + \bar{b}_2 A_2 \cos \bar{\omega}_2 t,\end{aligned}\quad (3)$$

где частоты $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2$ и модальные соотношения $\bar{b}_1, \bar{b}_2$ зависят от обеих амплитуд A_1 и A_2

Для двух классов сильно нелинейных систем, близких к симметричным и однородным, разработан способ определения нормальных колебаний на основе метода возмущений. При этом возмущения не связаны с наличием нелинейных членов в уравнениях движения, а характеризуют отклонения рассматриваемых систем от интегрируемых. Уравнения движения систем, близких к однородным, имеют вид

$$\begin{aligned}\ddot{x} + a_{11}^{(K)} x^K + a_{12}^{(K)} \left(x - \frac{y}{\sqrt{\mu}}\right)^K &= \varepsilon \varphi_x(x, y) \\ \ddot{y} + \frac{a_{22}^{(K)}}{\sqrt{\mu}} \left(\frac{y}{\sqrt{\mu}}\right)^K - \frac{a_{12}^{(K)}}{\sqrt{\mu}} \left(x - \frac{y}{\sqrt{\mu}}\right)^K &= \varepsilon \varphi_y(x, y),\end{aligned}\quad (4)$$

а близких к симметричным записываются так

$$\begin{aligned}\ddot{x} + \sum_{K=1}^{\infty} a_{11}^{(K)} x^K + \sum_{K=1}^{\infty} a_{12}^{(K)} (x-y)^K &= \varepsilon \varphi_x(x, y) \\ \ddot{y} + \sum_{K=1}^{\infty} a_{11}^{(K)} y^K - \sum_{K=1}^{\infty} a_{12}^{(K)} (x-y)^K &= \varepsilon \varphi_y(x, y),\end{aligned}\quad (5)$$

где $\mu = \frac{m_2}{m_1}$, $\varphi(x, y)$ - возмущение потенциала однородной или симметричной системы.

Для (4) и (5) построены уравнения в вариациях и показаны способы нахождения поправок. В качестве нулевого приближения приняты соответствующие однородная и симметричная системы. Несмотря на то, что уравнения в вариациях являются уравнениями с переменными коэффициентами, их удастся проинтегрировать в задаче о

нахождении нормальных колебаний. Применение разработанной методики позволило получить известные ранее результаты для двух частных случаев.

При определении нормальных колебаний в вырожденных системах вводится малый параметр $\mu = \frac{m_2}{m_1}$, который связан с физической структурой системы. Используя метод асимптотического интегрирования по малому параметру μ , получаем упрощенную систему уравнений нулевого приближения для синфазной формы колебаний

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{11}^{(k)} x^k + \sum_{k=1}^{\infty} a_{12}^{(k)} (x-y)^k &= 0 \\ \sum_{k=1}^{\infty} a_{22}^{(k)} y^k - \sum_{k=1}^{\infty} a_{21}^{(k)} (x-y)^k &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

и первого приближения для антифазной формы

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{12}^{(k)} (-y)^k &= 0 \\ m_2 \ddot{y} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_{22}^{(k)} + a_{21}^{(k)}] y^k &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

Полученные системы уравнений проще исходной, что позволяет найти интересующие нас решения из разрешающих уравнений

для синфазной формы

$$\ddot{x} + \sum a^{(k)} x^k = 0,$$

для антифазной формы

$$\ddot{y} + \sum b^{(k)} y^k = 0.$$

Последующие приближения могут быть найдены в виде асимптотических рядов по малому параметру μ

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \sum_{m=1}^{\infty} x_m \mu^m, \\ y &= y_0 + \sum_{m=1}^{\infty} y_m \mu^m. \end{aligned} \quad (8)$$

В работе определены модальные соотношения и периоды колебаний при симметричных и несимметричных характеристиках восстанавливающих сил.

Разработанная методика применена к расчету колебаний растяжимой невесомой нити с сосредоточенными массами. Показано хорошее совпадение результатов с данными, полученными методом Крылова-Боголюбова. Такой прием имеет значительные преимущества и при анализе линейных многомассовых систем, что подтверждается исследованием пространственных колебаний пролетного строения моста с подъемной проезжей частью, движение среднего сечения которого описывается системой семи дифференциальных уравнений вида

$$\ddot{X}_i(t) = \sum_{j=1}^7 M_i \delta_{ij} \ddot{X}_j(t) \quad (i, j = 1, 2, \dots, 7), \quad (9)$$

где M_i - приведенные массы, соответствующие направлениям перемещений; $X(t)$ - перемещения приведенных масс; δ_{ij} - коэффициенты влияния.

Расчет частот колебаний по методике вырожденных систем дает результаты, близкие к экспериментальным.

В главе приведено изложение разработанного способа определения динамических характеристик многомассовых сильно нелинейных систем, основанного на приведении заданной системы к интегрируемой при условии равенства их потенциальных энергий. В качестве модели принята система n масс m_i , соединенных между собой и с неподвижными точками с помощью нелинейных пружин, характеристики которых являются аналитическими функциями обобщенных координат X_i .

Движение модели описывается системой уравнений:

$$m_i \ddot{X}_i = - \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{\infty} a_{ij}^{(k)} (X_i - X_j)^k \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (10)$$

где $a_{ij}^{(k)}$ - коэффициенты упругости, $X_0 = X_{n+1} = 0$

Потенциальная энергия заданной системы имеет вид

$$H_1 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{ij}^{(k)}}{k+1} (x_i - x_j)^{k+1} \quad (II)$$

а потенциальная энергия соответствующей интегрируемой равнораспределенной системы —

$$H_2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_{ij}^{(k)}}{k+1} (x_i - x_j)^{k+1}, \quad (I2)$$

и однородной —

$$H_2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \frac{b_{ij}}{k+1} (x_i - x_j)^{k+1} \quad (I3)$$

Ставится задача о наилучшей аппроксимации экипотенциального овалоида $H_1 - H_0 = 0$ (H_0 — начальный уровень энергии) некоторым овалом $H_2 - H_0 = 0$. За критерий наилучшего приближения принимается минимум функционала среднеквадратичного отклонения потенциальной энергии H_1 заданной и H_2 аппроксимирующей системы в n -мерном прямоугольном параллелепипеде Q , параметры которого задаются начальными условиями.

Искомые коэффициенты $b_{ij}^{(k)}$ или b_{ij} определяются из системы алгебраических уравнений

$$\delta J = \frac{\partial J}{\partial b} = 0, \quad (I4)$$

где

$$J = \int \int \dots \int_Q [H_1 - H_2]^2 \rho^2(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n,$$

$\rho(x_1, \dots, x_n)$ — весовая функция вида

$$\rho = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \quad \text{или} \quad \rho = \sqrt{\prod_{i=1}^n x_i}$$

Изложенный способ замены исходной системы интегрируемой для систем, близких к однородным, при $k=1$ приводит к линеаризации уравнений движения. В качестве иллюстраций разработанной методики линеаризации рассмотрены колебания двойного маятника и гладкой цилиндрической оболочки, опирающейся на торцевые диафрагмы. Показано, что частоты колебаний, определенные описанным способом и на ЭВМ, близки.

Во второй главе приведено исследование устойчивости нормальных колебаний нелинейных систем симметричных и вырожденных. Для всех видов нелинейных систем нормальные колебания неустойчивы по Ляпунову, однако могут быть устойчивы орбитально (по Пуанкаре) при некоторых условиях, зависящих как от параметров самой системы, так и от уровня энергии.

Уравнения в вариациях записаны в удобной для исследования форме

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\xi}_1 &= \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)^* \xi_1 + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \right)^* \xi_2 \\ m_2 \ddot{\xi}_2 &= \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} \right)^* \xi_1 + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right)^* \xi_2, \end{aligned} \quad (15)$$

где U - силовая функция системы, а $(*)$ означает, что значения производных входят невозмущенные нормальные решения $x = x^*(t)$, $y = y^*(t)$.

Система (15) для интегрируемых случаев приводится к уравнениям Матвея, свойства решений которых хорошо изучены.

Исследованы вопросы устойчивости симметрических систем, причем отмечено, что условие устойчивости систем с несимметричными характеристиками восстанавливающих сил отличны от соответствующих условий для систем с симметричными характеристиками.

Для исследования устойчивости вырожденных систем применен разработанный в первой главе способ упрощения исходной системы уравнений . С его помощью удается выявить условия устойчивости систем этого вида . Для характеристики в виде кубического полинома получены условия первого изменения устойчивости

В третьей главе обобщено понятие нормальных колебаний на системы с вязким трением. Для нахождения частных решений квазипериодических систем применена модификация метода Крылова-Боголюбова в форме (2) с дополнительным учетом сдвига фаз в виде

$$x_j = c A \cos (\psi + \varepsilon \theta_j) + \varepsilon v_j + \varepsilon^2 w_j + \quad (2')$$

В таком виде методика пригодна для определения квазинормальных колебаний в системах с n степенями свободы .

Разработанный подход в первом приближении приводит к системе $(n+2)$ алгебраических уравнений , из которых находятся поправки по форме и частоте , а также сдвиги фазы и коэффициенты затухания. Если трение в системе мало, то оно не оказывает в первом приближении влияния на модальные соотношения .

Предложенный в первой главе способ нахождения нормальных колебаний применен для упрощения вырожденных систем с вязким трением. Как и ранее, этот способ учитывает физическую структуру системы. Получены системы уравнений для синфазной и антифазной форм колебаний . Поскольку антифазная форма соответствует "быстрому" затуханию колебаний , сделан вывод о том, что через некоторый интервал времени движение системы может быть приближенно описано в виде синфазной формы колебаний .

В четвертой главе показано применение теории нормальных колебаний для решения задачи о воздействии возмущающих периодических сил на двухмассовые нелинейные системы .

В основе разработанной методики лежит применение метода Раушера для обращения возмущающих периодических функций и сведение задачи о вынужденных колебаниях в резонансных областях к задаче о нормальных колебаниях соответствующей автономной системы.

Так, для квазилинейной системы

$$\begin{aligned} \ddot{x} + a_{11}^{(1)}x + a_{11}^{(2)}x^3 + a_{12}^{(1)}(x-y) + a_{12}^{(3)}(x-y)^3 &= F \cos \gamma t \\ \mu \ddot{y} + a_{22}^{(1)}y + a_{22}^{(3)}y^3 - a_{12}^{(1)}(x-y) - a_{12}^{(3)}(x-y)^3 &= 0 \end{aligned} \quad (I7)$$

после обращения возмущающей функции, получаем

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \left(a_{11}^{(1)} - \frac{F}{X_{1,2}} \right) x + a_{11}^{(2)}x^3 + a_{12}^{(1)}(x-y) + a_{12}^{(3)}(x-y)^3 &= 0 \\ \mu \ddot{y} + a_{22}^{(1)}y + a_{22}^{(3)}y^3 - a_{12}^{(1)}(x-y) - a_{12}^{(3)}(x-y)^3 &= 0, \end{aligned} \quad (I8)$$

где $\mu = \frac{m_2}{m_1}$ $X_{1,2}$ - амплитуда установившихся вынужденных колебаний в первой и второй резонансных областях. Очевидно, что система (I8) по форме близка к системе (I) и потому допускает определение частных периодических решений вида (2), которые и определяют реакции системы (I7) на внешнее возмущение.

Аналогично исследованы вынужденные колебания симметричных и вырожденных сильно нелинейных систем и построены амплитудно-частотные характеристики в обеих резонансных областях. Сравнение аналитических результатов с решениями, полученными на аналоговых и цифровых машинах, указывает на удовлетворительное качественное и количественное совпадение.

В свете этого подхода к анализу вынужденных колебаний многомассовых систем становится ясной конструктивность теории нормаль-

ных колебаний, как простого и наглядного способа исследования динамического воздействия периодических сил на сильно нелинейные системы .

З а к л ю ч е н и е

Диссертация посвящена разработке способов исследования нелинейных систем с двумя степенями свободы различного вида

Основные результаты работы

1. Выявлен неизвестный интегрируемый случай сильно нелинейной симметричной системы, допускающей лишь одно колебание в нормальной форме .

2. Для определения нормальных колебаний в квазилинейных системах разработана модификация метода Крылова-Боголюбова, позволяющая эффективно находить частные решения в системах с неаналитическим потенциалом .

3. Для систем, близких к интегрируемым, разработан алгоритм определения нормальных колебаний, основанный на теории возмущений, при этом возмущения связаны с физической структурой самой системы.

4. Для систем с несимметричной конфигурацией предложен подход, основанный на методе асимптотического интегрирования. Этот подход позволяет упростить заданную систему и дает значительные преимущества при анализе многомассовых объектов .

5. Разработан новый прием приведения исследуемых много-массовых систем к интегрируемым, в основе которого лежит понятие о близости потенциала. Этот надежный и эффективный способ, обладающий геометрической наглядностью, позволяет достаточно просто определять динамические характеристики сильно нелинейных колебательных систем. Предложенный способ является обобщением известных методов линеаризации.

6. Разработанные способы применимы к нахождению частных решений в системах с рассеянием энергии, где они также оказываются эффективными.

7. Предложенный способ исследования вырожденных систем применен к исследованию устойчивости этих систем, в связи с чем удалось исследовать обширный класс практически важных задач.

8. Указаны практические способы определения характеристик систем последовательно соединенных нелинейных упругих и вязко - упругих элементов. Полученные формулы позволяют во многих случаях упрощать решения многомассовых задач.

9. Показана "близость" вынужденных установившихся колебаний нелинейных систем с нормальными колебаниями соответствующей автономной системы. Разработан способ исследования резонансных режимов сильно нелинейных систем.

Основное содержание диссертации опубликовано в работах

1. Маневич Л.И., Череватский Б.П. О приближенном определении нормальных колебаний нелинейной системы с двумя степенями свободы. Третий Всесоюзный съезд по теоретической и прикладной механике. Аннотации докладов, М., 1968
2. Маневич Л.И., Череватский Б.П. Приближенное определение квазинормальных колебаний нелинейной системы с двумя степенями свободы при наличии вязкого трения. Труды ДИИТ"а, вып. IIО, "Строительная механика и мосты", изд. "ПромІнь", Днепропетровск, 1970 .
3. Маневич Л.И., Череватский Б.П. Приближенный способ определения нормальных колебаний в нелинейных системах, близких к симметричным и однородным системам. Сб. "Гидроаэромеханика и теория упругости", № 12, изд. ДГУ, Днепропетровск, 1970
4. Маневич Л.И., Череватский Б.П. Приближенный способ определения эквивалентных характеристик системы последовательно соединенных нелинейных пружин. Труды ДИИТ"а, вып. IIО, "Строительная механика и мосты". изд. "ПромІнь", Днепропетровск, 1970 .
5. Карновский И.А., Череватский Б.П. О линеаризации нелинейных колебательных систем с произвольным числом степеней свободы, Прикладная механика, т. УІ, вып. 9, Киев, 1970.
6. Маневич Л.И., Череватский Б.П. Об учете вязкого трения при определении нелинейных колебаний с двумя степенями свободы. Тезисы докладов Всесоюзной научной конференции по проблеме колебаний механических систем, Киев, 1968 .

7. Карновский И.А., Череватский Б.П. О линеаризации консервативных квазилинейных колебательных систем с n степенями свободы. Тезисы докладов первой республиканской конференции молодых ученых-железнодорожников, Днепропетровск, 1969 .
8. Череватский Б.П. Об определении эквивалентных характеристик системы последовательно соединенных нелинейных пружин. Тезисы докладов первой республиканской конференции молодых ученых-железнодорожников, Днепропетровск, 1969 .
9. Череватский Б.П. Приближенные квазинормальные колебания в многомерных нелинейных системах с вязким трением . Материалы юбилейной научно-технической конференции ДИИТ"а, Днепропетровск, 1970 .
10. Череватский Б.П. Влияние вязкого трения на нормальные формы сильно нелинейных многомерных систем . Материалы юбилейной научно-технической конференции ДИИТ"а, Днепропетровск, 1970
11. Борцов В.И., Череватский Б.П. Свободные пространственные колебания совмещенных пролетных строений с вертикально-подъемной железнодорожной проезжей частью . Материалы юбилейной научно-технической конференции ДИИТ"а, Днепропетровск, 1970 .
12. Борцов В.И., Череватский Б.П. Свободные колебания пролетного строения, несущего балки подъемного пролета . Материалы юбилейной научно-технической конференции ДИИТ"а, Днепропетровск, 1970 .

По результатам проведенных исследований сделаны доклады

на третьем Всесоюзном съезде по теоретической и прикладной механике (Москва, 1968 г.)

на Всесоюзной научной конференции по проблеме колебаний механических систем (Киев, 1968 г.) ;

на первой республиканской конференции молодых ученых-железнодорожников (Днепропетровск, 1969 г.) ;

на юбилейной научно-технической конференции ДННТ"а (Днепропетровск, 1970 г.)

на заседании семинара по механике Днепропетровского института инженеров железнодорожного транспорта, 1970 г.;

на семинаре Днепропетровской секции строительной механики НТО стройиндустрии, 1970 г.

Подписано к печати 22/10-70г. БТ-280II

Зак. 28I Тираж 180 Объем I, 25л.л.

Днепропетровск 1970г. Ротапринт ДМетИ