

Влияние сопротивления качению на статику и динамику механизмов с качением

Бондаренко В.Д., Бондаренко Л.Н., Колбун В.В., Жаковский А.Д.

Постановка проблемы. В [1] утверждается, что с уменьшением радиуса катка сила необходимая для его перекатывания $W=kP/R$, увеличивается, что очевидно с чисто математической точки зрения.

Но с уменьшением радиуса R , исходя из контактной теории Герца, уменьшается и сила P . А как будет вести в связи с этим коэффициент трения качения k , ввиду отсутствия аналитической зависимости для его определения, однозначно ответить сложно. Отметим, что теория Рейнольдса о физической причине возникновения сопротивления качению оказалась ошибочной. Напомним, что известный ученый, он считал, что основная причина сопротивления качению лежит в трении скольжения в месте контакта катящегося тела. И если это так, в чем никто не сомневался ввиду непререкаемого авторитета автора, то подшипники качения начали смазывать так же, как и подшипники скольжения и это, очевидно, была одна из дорогих ошибок ученого. Только в 1955 г. (через 90 лет после Рейнольдса) Табор [2] экспериментально доказал, что роль скольжения при качении незначительная. Ему же принадлежит и аналитическая зависимость для определения коэффициента трения качения. Однако, наличие в формулах, как для линейного, так и точечного контактов, коэффициента гистерезисных потерь свело на нет их практическое применение. Поскольку эти формулы содержат полуширину пятна контакта, определяемую по формулам Герца, и имеется хорошо апробированные величины коэффициента трения качения для крановых колес [3], то в [4] получены экспериментально – аналитические зависимости для определения коэффициента гистерезисных потерь. При первоначальном линейном контакте $\alpha=\exp(-1,2R)$, при точечном контакте $\alpha=\exp(0,2R)$, где R – в метрах.

Цель статьи. Используя аналитическую зависимость для определения коэффициента трения качения найти зависимости между сопротивлениями и механическими константами тел качения.

Основной материал. Рассмотрим зависимость между радиусом тела качения при линейном контакте и сопротивлением качению. Будем полагать, что модули упругости колес и плоскости одинаковые $E_1=E_2=E$, а коэффициенты Пуассона $\mu_1=\mu_2=\mu=0,3$.

Нагрузка P не должна превышать величины при которой контактные напряжения превышают допустимые и радиус колеса при этом составит [5]

$$R > \frac{0,175 \cdot P \cdot E}{B \cdot [\sigma]^2}, \quad (1)$$

где B – длина контакта.

При линейном контакте коэффициент трения качения [4]

$$k = 0,225 \cdot b \cdot \alpha, \quad (2)$$

где b – полуширина пятна контакта [5].

Зависимости радиуса катка от нагрузки при $E=2,1 \cdot 10^5$ МПа, $B=60$ мм показаны на рис. 1 с учетом и без учета гистерезисных потерь.

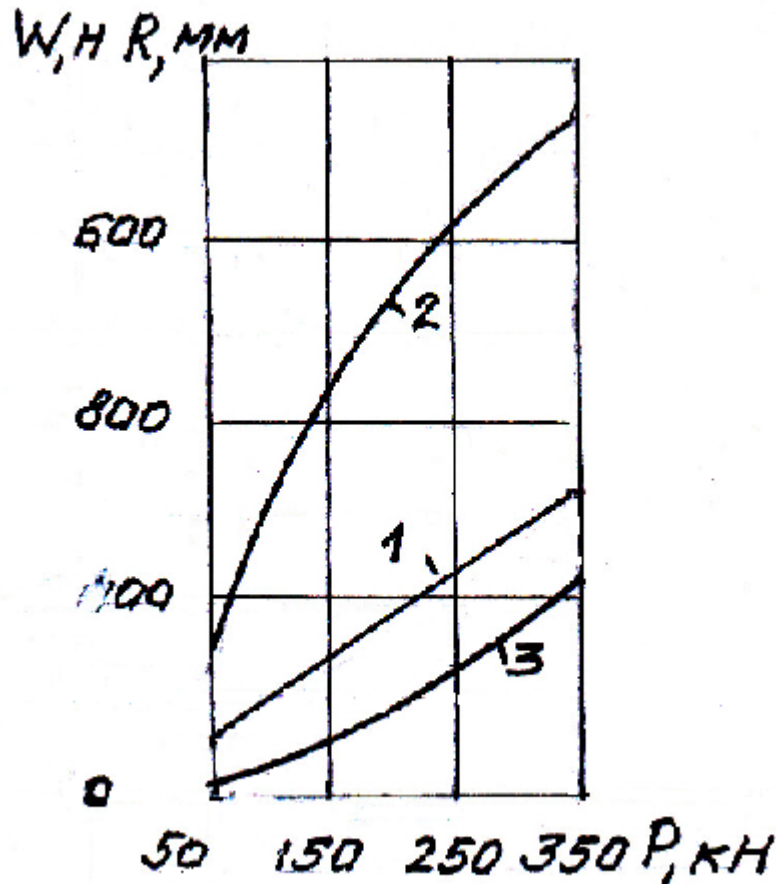


Рис. 1. Зависимость от силы, действующей на каток: 1 – радиуса катка; 2 – силы сопротивления перекачиванию; 3 – силы качения, приходящейся на гистерезисные потери.

В теоретической механике, теории механизмов и машин имеется значительное количество задач с качением и силой сопротивления. Обычно сопротивлением качению пренебрегают или коэффициент трения качения задается величиной далекой от истинной. Что, как правило, в лучшем случае, приводит к неточному решению, а в худшем – к искажению физики процесса. Если учесть, что студент это решение принимает как истину, то и в инженерной деятельности он эти решения принимает также.

1. Рассмотрим с учетом сопротивления качению задачу на изменение кинетической энергии системы, имеющуюся в [1]. Вращающий момент приводит в движение барабан 1 весом P_1 и радиуса r вокруг неподвижной оси C_1 , перпендикулярной к плоскости рисунка. На боковую поверхность барабана наматывается нить, которая приводит в движение каток 2 весом P_2 . каток катится без скольжения вверх по наклонной плоскости, наклоненной

под углом α к горизонту. Определить угловое ускорение барабана. Каток и барабан считать однородными круглыми цилиндрами. Трением качения пренебречь.

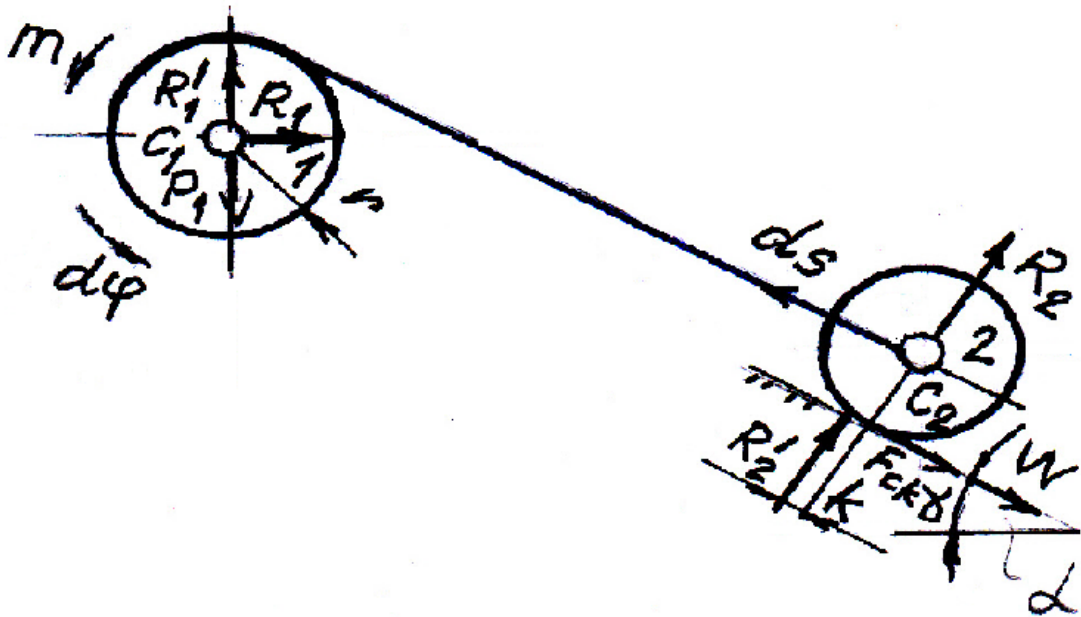


Рис. 2. Схема к условию задачи

Для применения теоремы об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме вычислим кинетическую энергию барабана 1 и катка 2

$$T = \frac{P_1 + 3 \cdot P_2}{4 \cdot g} \cdot r_1^2 \cdot \dot{\varphi}_1^2. \quad (3)$$

Придадим формуле (3) вид

$$T = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \dot{\varphi}_1^2, \quad (4)$$

где $a = \frac{P_1 + 3 \cdot P_2}{4 \cdot g} \cdot r_1^2$ - приведенный момент инерции системы.

Сообщим барабану элементарное угловое перемещение $d\varphi$. При этом центр тяжести катка C_2 переместится на расстояние $dS = r_1 d\varphi$.

Сумма элементарных работ внешних сил данной системы при вращающем моменте M , весе барабана P_1 , приведенном весе катка P_2 и R_1 , R_1' - соответственно реакциях неподвижной оси C_1 , R_2 - реакция наклонной плоскости, F - сила трения скольжения катка о наклонную плоскость; W - сопротивление качения катка

$$\begin{aligned} \sum \delta A_K &= M \cdot d\varphi_1 - P_2 \cdot \sin \alpha \cdot dS - \frac{P \cdot k \cdot \sin \alpha}{r_2} \cdot dS = \\ &= [M - P_2 \cdot (1 + \frac{k}{r_2}) \cdot r_1 \cdot \sin \alpha] \cdot d\varphi_1. \end{aligned} \quad (5)$$

В этой формуле отсутствует величина F , поскольку при качении без скольжения элементарная работа силы трения скольжения равна нулю.

Подставив значение T из формулы (3) и $\Sigma \delta A_1$ из (5) в уравнение об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме $dT = \sum_{i=1}^n \delta A_1$ имеем

$$\frac{P_1 + 3 \cdot P_2}{4 \cdot g} \cdot r_1^2 \cdot \dot{\phi}_1 \cdot d\dot{\phi}_1 = [M - P_2 \cdot (1 + \frac{k}{r_2}) \cdot r_1 \cdot \sin \alpha] \cdot d\phi_1. \quad (6)$$

Приняв во внимание, что $\dot{\phi}_1 \cdot d\dot{\phi}_1 = \ddot{\phi}_1 \cdot d\phi_1$, получим искомое угловое ускорение барабана с учетом сопротивления его качению

$$\ddot{\phi}_1 = 2 \cdot g \cdot \frac{M - P_2 \cdot (1 + \frac{k}{r_2})}{(P_1 + 3 \cdot P_2) \cdot r_1} \cdot \sin \alpha \quad (7)$$

Примем для расчетов $r_1 = 250$ мм, $P_1 = 2$ кН, $M = 45$ кНм, $\alpha = 30^\circ$. Значения ускорений в зависимости от приведенного веса P_2 с учетом и без учета сопротивления качению приведены в таблице 1.

Таблица 1

Величины ускорений барабана с учетом и без учета сопротивления качению в зависимости от величины приведенного веса катка

Ускорение, С-2	Приведенный вес, кН						
	50	100	150	200	250	300	350
С учетом сопротивления качению	80,0	33,75	18,19	10,39	5,71	2,58	0,346
Без учета сопротивления качению	80,03	33,78	18,23	10,43	5,74	2,61	0,373
Расхождение, %	0,04	0,09	0,22	0,38	0,52	1,15	7,24

2. В другом учебнике по теоретической механике [6] утверждается, что коэффициент трения качения не зависит от величины реакции, но имеет различные значения для разных материалов. Для стальных бандажей автор рекомендует применять $k = 0,05$ см.

Естественно, что столь ориентировочное применение величины k влияет не только на точность расчетов при качении, но и установить пределы качения без скольжения.

Если к оси колеса, например, приложена сила F , пройденный путь составляет S при радиусе оси r и нагрузке на колесо P , то исходя из закона кинетической энергии? будем иметь

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot (1 + \frac{r^2}{R^2}) \cdot V^2 = \frac{k \cdot P}{R} \cdot S. \quad (8)$$

Отсюда видно, что колесо начнет двигаться когда

$$F > \frac{k}{R} \cdot P.$$

Теперь выясним, покатится ли колесо под действием силы F без скольжения.

Запишем дифференциальное уравнение движения колесного обода (рис.3).

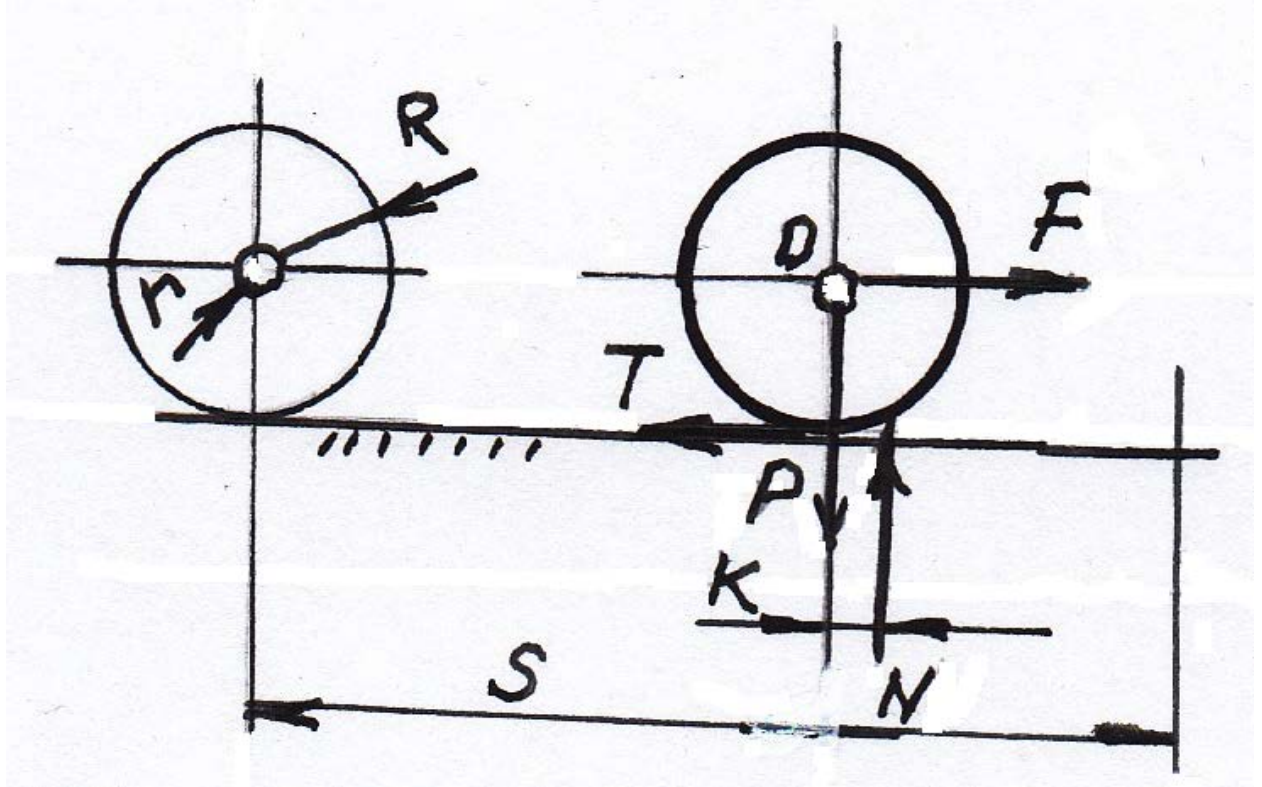


Рис. 3. К составлению дифференциального уравнения движения обода

$$\begin{aligned} m \cdot \ddot{x}_C &= F - \frac{k \cdot P}{R} - T; \\ m \cdot \ddot{y}_C &= N - P; \\ m \cdot r^2 \cdot \dot{\omega} &= -T \cdot a. \end{aligned} \quad (9)$$

Поскольку $y_C = R$, то $\ddot{y}_C = 0$ и из второго уравнения системы следует, что $N = P$. Если предположить, что качение происходит без скольжения, то $\dot{x}_C = -R \cdot \omega$.

Продифференцируем это выражение по времени и подставив в первое уравнение системы получим

$$-m \cdot R \cdot \dot{\omega} = F - \frac{k \cdot N}{R} - T. \quad (10)$$

Умножим это уравнение на r^2 , прибавим к нему третье уравнение из (9) и найдем T

$$T = \frac{1}{1 + R^2 / r_u^2} \cdot \left(F - \frac{k \cdot N}{R} \right). \quad (11)$$

В этом случае колесо катится без скольжения. Поскольку сила трения T должна удовлетворять неравенству $T \leq fP$ или $T \leq fN$, где f – коэффициент трения между колесом и рельсом, то

$$\frac{F - k \cdot N / R}{1 + R^2 / r_u^2} \leq f \cdot P \quad (12)$$

или

$$F \leq f \cdot P \cdot \left(1 + \frac{R^2}{r_u^2}\right) + \frac{k \cdot N}{R}. \quad (13)$$

Естественно, что как формула (12), так и (13) отличаются от полученного в [6], наличием коэффициента трения качения. Таким образом, если сила F не превосходит предельной величины (13), колесо будет катиться без скольжения, в противном случае, оно будет катиться, скользя по рельсам.

При $P=9810$ Н; $r^2=0,55R^2$; $f=0,24$ предельная величина силы $F=6635$ Н. для определения k примем дополнительно $R_p=0,5$ м – радиус закругления головки рельса, $\sigma=750$ МПа, радиус инерции $r_{и}^2=0,55R^2$.

Не приводя выражения для определения полуширины пятна контакта для схемы цилиндрическое колесо – рельс с закругленной головкой, коэффициент трения качения для этой схемы контакта [4]

$$k = 0,16 \cdot b \cdot e \quad (14)$$

С учетом сопротивления качению величина $F=616$ Н при величине на качение 19 Н (разница 3,1%).

Поскольку сила P составляет большую величину, то реальная поправка может составлять несколько заметную величину.

Если к колесу вместо силы F приложить вращающий момент M_B , то внешними силами будет пара сил и дифференциальное уравнение движения принимает вид

$$\begin{aligned} m \cdot \ddot{x}_C &= T; \\ m \cdot r^2 \cdot \dot{\omega} &= T \cdot R - M_B + k \cdot N. \end{aligned} \quad (15)$$

Поскольку $\ddot{x}_C = -R \cdot \dot{\omega}$, то подставив эту величину в первую формулу, получим

$$T = \frac{R \cdot (M_B - k \cdot N)}{r_u^2 + R^2} \quad (16)$$

или

$$M \leq f \cdot P \cdot \frac{R^2 + r_u^2}{R} + k \cdot N. \quad (17)$$

При данных предыдущего примера величина M составляет без учета сопротивления качению 511 Н, а с учетом 513,6 Н, т.е. превышает на 0,5%.

Анализ полученных результатов позволяет сделать следующие выводы:

-при назначении радиусов тел качения из теории контактных напряжений Герца сопротивление качению уменьшается с уменьшением радиуса тела качения;

-учет сопротивления качению приводит к незначительному увеличению силы, при которой колесо будет катиться без скольжения и может не учитываться.

Литература

- 1.Николош Б.Л. Теоретическая механика: В 2 ч. Ч.2 – М.: Гостехиздат, 1956. – 484 с.
- 2.*Tabor D. The mechanism of rolling friction: the elastic range. – Proc. Roy Soc., 1955, A 229.*
3. Справочник по кранам: В 2 т. Т. 2 /Александров М.П., Гохберг М.М., Ковин А.А. и др. – Л.: Машиностроение, 1988. – 559 с.
- 4.Бондаренко Л.М., Довбня М.П., Ловейкін В.С. Деформаційні опори в машинах. – Дніпропетровськ: Дніпро – VAL, 2002. – 200 с.
- 5.Справочник по сопротивлению материалов/ Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В. – Киев: Наук. думка, 1988. – 736 с.
- 6.Теоретическая механика в примерах и задачах: В 2 т. Т. 2/Бать М.И., Джанилидзе Г.Ю., Кельзон А.С. – М.: Наука, 1972. – 624 с.