МПС СССР — ГУУЗ

ДНЕПРОПЕТРОВСКИЙ ИНСТИТУТ ИНЖЕНЕРОВ
ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА

Инженер ПОЧТМАН Ю. М.

# ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ИЗГИБА, УСТОЙЧИВОСТИ И КОЛЕБАНИЙ ПЛАСТИН И ОБОЛОЧЕК.

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата технических наук



Днепропетровск
1966

Публичная защита диссертации состоится на заседании Ученого Совета 196 г.

Просим Вас и сотрудников Вашего учреждения, интересующихся темой диссертации, принять участие в заседании Ученого Совета или прислать свои отзывы о работе по адресу: г. Днепропетровск, 10, Университетская, 2, институт инженеров железнодорожного транспорта.

Дата отправки автореферата 196 г.

МПС СССР — ГУУЗ

ДНЕПРОПЕТРОВСКИЙ ИНСТИТУТ ИНЖЕНЕРОВ
ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА

Инженер ПОЧТМАН Ю. М.

# ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ИЗГИБА, УСТОЙЧИВОСТИ И КОЛЕБАНИЙ ПЛАСТИН И ОБОЛОЧЕК.

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Научный руководитель —
доцент, кандидат технических наук
ШАЙКЕВИЧ В. Д.

Днепропетровск
1966

Работа выполнена на кафедре строительной механики Днепропетровского инженерно-строительного института.

В связи с дальнейшим широким развитием строительства в нашей стране, предусмотренным решениями XXIII съезда КПСС, вопросы обеспечения прочности, надежности и экономичности сооружений приобретают важное государственное значение. Строительная механика должна создавать для проектировщиков эффективные методы расчета и предоставить приемлемый для практического применения аппарат решения задач, встречающихся в различных отраслях техники и строительства.

В последние годы все большее применение в строительстве, авиа- и судостроении находят тонкостенные пространственные конструкции в виде оболочек и пластин, анализ напряженно-деформированного состояния которых связан с решением сложных краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных и требует громоздких вычислений.

Применение быстродействующих вычислительных машин позволяет в настоящее время широко использовать для решения указанных задач различные численные методы (например, метод сеток), в связи с чем вопросы развития существующих численных методов и приближения их к целям инженерной практики, а также изыскания новых методов продолжают оставаться в центре внимания исследователей. Большая заслуга в разработке и развитии новых методов решения задач строительной механики, ориентированных на применение электронных цифровых вычислительных машин (ЭЦВМ), принадлежит А. Ф. Смирнову, А. П. Филину, А. П. Синицыну, Д. В. Вайнбергу, П. М. Варваку, М. И. Длугачу, Ш. М. Гофману, Я. Д. Лившицу, П. М. Сосису, Н. П. Абовскому, Р. А. Резникову, J. Argyris, R. Livesley и др.

Наряду с использованием для этих целей ЭЦВМ, все шире применяются моделирующие математические машины (в частности, электрические модели), позволяющие решать задачи с достаточной для инженерной практики точностью.

Современное состояние вопроса об электрическом моделировании задач строительной механики и прикладной теории упругости во многом определяется целым рядом важных исследований С. А. Гершгорина, Л. И. Гутенмахера, Г. Е. Пухова, И. М. Тетельбаума, К. К. Керопяна, О. В. Лужина, В. А. Лазаряна, Н. Г. Бондаря, П. М. Чеголина, В. М. Кондратьева, А. Г. Угодчикова, А. И. Медовикова, М. Д. Головко, А. Е. Степанова, В. М. Самуся, О. Н. Токаревой, В. В. Васильева, V Buch, W. Karplus и др., благодаря которым разработка теории и практики электромоделирования различных объектов получила значительное развитие. В 1951—61 гг. в Институте Кибернетики АН УССР под руководством чл.-корр. АН УССР Г. Е. Пухова были разработаны специализированные математические машины для расчета стержневых систем ЭМСС-7 и ЭМСС-7м, которые серийно выпускаются промышленностью. Широкое распространение получил квазианалоговый метод моделирования, основные положения которого сформулированы в работах Г. Е. Пухова. На базе указанного метода А. Е. Степановым и В. М. Самусем создан ряд моделей для решения некоторых задач прикладной теории упругости.

На IV Всесоюзной конференции по применению электронных математических машин в строительной механике, машиностроении и строительном производстве (г. Киев, 1965 г.) была показана эффективность использования электронных цифровых и моделирующих машин как для получения новых научных результатов, так и для решения трудных и сложных задач статики, устойчивости и динамики и задач оптимального проектирования. В решении конференции, в частности, отмечено, что «... необходимо уделять больше внимания развитию методов и средств решения сложных задач строительной механики при помощи соответствующих моделирующих машин...»

Критический анализ современного развития методов и средств электрического моделирования двумерных задач строительной механики на основе обзора литературы, приведенного в первой главе диссертации, показывает, что наблюдается диспропорция между интенсивным развитием теории электрического моделирования, а также средств аналоговой и квазианалоговой вычислительной техники с одной стороны, и их приложением к задачам строительной механики пластин и оболочек, выдвигаемым современными запросами инженерной практики, с другой стороны.

Настоящая работа ставит своей задачей в какой-то степени ликвидировать указанный разрыв, и в связи с этим ее основные цели могут быть сформулированы следующим образом:

1) Развить методы электрического моделирования задач изгиба пластин постоянной жесткости и создать эффективный способ их решения на базе использования серийно выпускаемых нашей промышленностью и получивших широкое распространение в проектных институтах страны электрических моделей типа ЭМСС.

2) Разработать способ электрического моделирования изгибаемых произвольной поперечной нагрузкой пластин непрямоугольной формы в плане (многоугольных, треугольных, круглых, кольцевых и т. д.), в том числе со сложными условиями опирания внутри контура.

3) Применить метод электрического моделирования к расчету пластин переменной жесткости различной формы в плане.

4) Разработать способ электромоделирования некоторых задач устойчивости и колебаний континуальных систем (анизотропных и изотропных пластин и оболочек). Исследовать возможность реализации указанных задач на квазианалоговых моделях.

5). Применить метод электрического моделирования к решению вопроса об оптимальных, с точки зрения напряженного состояния, очертаниях поверхностей безмоментных оболочек.

Диссертационная работа общим объемом в 222 страницы (186 страниц текста и 36 страниц рисунков) состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературных источников. Все выводы проиллюстрированы необходимым количеством числовых примеров. С целью анализа полученных результатов и оценки точности предлагаемых способов, часть задач решалась дополнительно на ЭЦВМ.

Краткое содержание **первой главы** (§ 1—2), посвященной анализу современного состояния вопроса о расчете пластин и оболочек методом электрического моделирования и общей характеристике цели исследования, изложено выше.

**Вторая глава** диссертации (§ 3—10) посвящена расчету на изгиб свободно опертых пластин постоянной и переменной жесткости с различной формой в плане методом электрического моделирования. В третьем и четвертом параграфах изложен способ использования электрических моделей стержневых

систем типа ЭМСС для расчета прямоугольных пластин, изгибаемых произвольной поперечной нагрузкой. Способ основан на применении двойной математической аналогии: между уравнениями в конечных разностях метода сеток и уравнениями метода перемещений для моделирующей стержневой системы*) и между уравнениями метода перемещений и уравнениями электрической цепи.

Дифференциальные уравнения изогнутой срединной поверхности изотропной пластины, представленные в конечно-разностной форме, при использовании прямоугольной сетки с шагом $\varepsilon$ и $\lambda$ (соответственно по осям $x$ и $y$), имеют вид:

$$2(1+\alpha)M_к - \alpha M_i - \alpha M_l - M_m - M_n = q_к \lambda^2 \qquad (1)$$

$$2(1+\alpha)w_к - \alpha w_i - \alpha w_l - w_m - w_n = \frac{M_к \lambda^2}{D}, \qquad (2)$$

где $\alpha = \dfrac{\lambda^2}{\varepsilon^2}$.

В качестве стержневой модели для рассматриваемой задачи принимается фиктивная стержневая система рамного типа, удовлетворяющая условиям матричной регулярности, с коэффициентами жесткости стержней $i_x = \alpha$ и $i_y = 1$ и моментной узловой нагрузкой $M_к^* = q_к \lambda^2$. Выполняя расчет стержневой модели (СМ) методом перемещений, при специальном выборе единичных состояний, и принимая углы поворота жестких узлов $X$ равными значениям приведенных моментов $M$ в узлах сеточной области, аппроксимирующей исследуемую пластину, получим каноническое уравнение для узла «к» СМ, вполне аналогичное уравнению (1):

$$2(1+\alpha)X_к - \alpha X_i - \alpha X_l - X_m - X_n = q\ \lambda^2 \qquad (3)$$

Если вместо $X$ подставить величины прогибов $w$ и принять $M_к^* = \dfrac{M_к \lambda^2}{D}$, то уравнение (3) будет аналогом уравнения (2). Указанная выше математическая аналогия позволя-

---

*) Шайкевич В. Д., К вопросу о расчете на устойчивость регулярных стержневых систем и пластин, Труды XXIII научной конференции Днепропетровского инженерно-строительного института, изд. ХГУ, 1963.

ет заменить расчет на изгиб пластины расчетом СМ*) при соответствующих граничных условиях: для свободно опертой на контуре пластины $M$ и $w$ на контуре равны нулю, и, следовательно, $X$ в точках на контуре также должны быть равны нулю, т.е. стержни СМ защемлены по контуру.

При моделировании в работе применяется метод участков: СМ расчленяются на отдельные стержни, для которых записываются уравнения, связывающие между собой усилия и деформации в местах соединений, а при определении искомых неизвестных автоматически удовлетворяются уравнения совместности деформаций отдельных стержней путем соединения их в общую СМ. В качестве моделирующих схем используются электрические цепи постоянного тока с элементами типа омических сопротивлений.

Получены формулы для определения параметров электрических схем-аналогов (применительно к моделям типа ЭМСС). Расчет пластин на изгиб состоит из двух этапов. На первом этапе в узлы общей электрической схемы, соответствующие нагруженным узлам СМ, вводятся нагрузочные токи, определяемые для прямоугольных пластин по формуле: $J^*_{\mathrm{I}} = \gamma_{\mathrm{м}} q_{\mathrm{к}} \lambda^2$. Измеряя напряжения в узлах, находим углы поворота узлов СМ: $X_{\mathrm{I}} = \varphi_{\mathrm{I}} = \dfrac{1}{\gamma_\varphi} U_{\mathrm{I}}$, численно равные значениям приведенных моментов в точках пластины. На втором этапе в узлы той же электрической цепи вводятся нагрузочные токи $J_{\mathrm{II}}{}^* = \gamma_{\mathrm{м}} M_{\mathrm{к}} \dfrac{\lambda^2}{D}$ и определяются $X_{\mathrm{II}} = \varphi_{\mathrm{II}} = \dfrac{1}{\gamma_\varphi} U_{\mathrm{II}}$, соответствующие значениям прогибов в тех же точках пластины. В пятом параграфе рассматриваются вопросы электрического моделирования пластин, очертания которых определяют области, аппроксимируемые треугольниками (треугольные, косоугольные, трапециевидные и др. пластины). Приведены необходимые зависимости для определения величин нагрузочных токов, моделирующих поперечную нагрузку.

---

*) Идея использования стержневых моделей на базе метода сеток для расчета континуальных систем рассматривалась рядом авторов: Г. Б. Гильманом, М. И. Длугачем, Ю. Н. Музыченко и др. В реферируемой работе СМ создается в рамках математического моделирования, что исключает, в частности, необходимость в учете кручения для задач изгиба пластин.

Шестой параграф посвящен анализу некоторых особенностей использования симметрии СМ при моделировании симметричных пластин. Выяснены возможные упрощения, вытекающие из условий симметрии, которые позволяют увеличить плотность СМ. Расчет круглых, кольцевых и секторных пластин на изгиб при произвольной (в том числе и несимметричной) поперечной нагрузке методом электромоделирования рассмотрен в седьмом параграфе. На основе замены дифференциального оператора Лапласа в полярной системе координат конечно-разностным, при регулярной в геометрическом смысле сетке, получены соответствующие СМ, а также формулы для определения параметров электрических схем.

В восьмом параграфе способ электрического моделирования пластин постоянной жесткости развивается на область расчета прямоугольных и косоугольных пластин переменной жесткости, изгибаемых произвольной поперечной нагрузкой. Рассматриваются два закона изменения жесткости пластин: линейный, при изменении жесткости в двух направлениях, и нелинейный, соответствующий поперечным сечениям пластин в виде тел вращения. При линейном законе изменения жесткости $D = D_0\left(1 + c_1 \frac{x}{a} + c_2 \frac{y}{b}\right)$ первый этап расчета на моделях (определение приведенных моментов в точках пластины) полностью соответствует аналогичному этапу расчета пластин постоянной жесткости. На втором этапе определяются прогибы в тех же точках, причем — в отличие от расчета пластин постоянной жесткости — значения $D$ в каждой из точек заменяется отношением жесткостей $\frac{D_к}{D_0}$. Получены зависимости для определения нагрузочных токов II-го этапа при использовании прямоугольной и треугольной сеток.

К рассмотренной задаче приводится, на основе способа наименьших квадратов, наиболее часто встречающийся в инженерной практике случай пластины, толщина которой меняется по линейному закону в одном направлении (трапецеидальное поперечное сечение). Применение предлагаемого способа иллюстрируется расчетом на изгиб прямоугольных и треугольных пластин переменной толщины. Для прямоугольных пластин, закон изменения жесткости которых определяется зависимостью $D = D_0 \left[1 \pm \frac{c(x^2+y^2)}{2}\right]$, где $c$— посто-

янный множитель, общее дифференциальное уравнение изогнутой срединной поверхности пластины

$$D\nabla^2\nabla^2 w+2\left[\frac{\partial D}{\partial x}\,\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 w+\frac{\partial D}{\partial y}\,\frac{\partial}{\partial y}\nabla^2 w\right]+\nabla^2 D\nabla^2 w+$$
$$+(1-\mu)\left(2\frac{\partial^2 D}{\partial x\,\partial y}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}-\frac{\partial^2 D}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 D}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)=q \qquad (4)$$

будет иметь вид:

$$\nabla^2(D\nabla^2 w)+R=q \qquad (5)$$

при $R=\mp(1-\mu)\,c\,D_0\nabla^2 w$ ,

или

$$\left.\begin{aligned}&\nabla^2 z_1=-q\\ &\nabla^2 w\mp(1-\mu)\,c\,\frac{D_0}{D}\,w=-\frac{z_1}{D}\end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Определение дискретных значений функции $z_1$ в узлах сетки выполняется точно так же, как и определение приведенных моментов $M$. Для получения значений прогибов создается новая СМ в виде плоской сетчатой рамы с дополнительными стержнями в каждом узле и с соответствующим выбором единичных состояний при расчете ее методом перемещений. При этом, если жесткость дополнительных стержней $i_{доп}=A_к=$ $=\pm(1-\mu)\,c\,\frac{D_0}{D_к}\lambda^2$ оказывается отрицательной, то при электромоделировании возникает необходимость в реализации отрицательных сопротивлений путем замены их эквивалентными электрическими цепями (квазиотрицательные сопротивления).*)

В девятом параграфе рассматривается моделирование пластин постоянной и переменной толщины, опирающихся на дополнительные точечные опоры внутри контура. Основные неизвестные метода сил находятся из матричного уравнения:

$$\|\mathbf{X}\|=-\|\mathbf{A}\|^{-1}\cdot\|\Delta\| , \qquad (7)$$

где $\|\mathbf{X}\|$ — матрица — столбец основных неизвестных;

*) Пухов Г. Е., Избранные вопросы теории математических машин, изд. АН УССР, Киев, 1964.

$\|\mathbf{A}\|$ — квадратная матрица единичных перемещений;

$\|\Delta\|$ — матрица — столбец перемещений от внешней нагрузки в основной системе. Матрица-столбец искомых прогибов пластины определяется зависимостью:

$$\| W\| = \| W_q \| + \|\Omega\| \; \|\mathbf{X}\| \;, \qquad (8)$$

где $\| W_q\|$ — матрица-столбец прогибов в тех же точках от внешней нагрузки в основной системе;

$\|\Omega\|$ — прямоугольная матрица единичных прогибов. Определение элементов матриц $\|\mathbf{A}\|$ , $\|\Delta\|$ , $\|W_q\|$ и $\|\Omega\|$ выполняется на электрических моделях при использовании одной и той же общей схемы-аналога, соответствующей свободно опертой по контуру пластине без точечных опор.

Десятый параграф посвящен вопросам электрического моделирования задач изгиба прямоугольных и косоугольных пластин с отверстиями, размеры которых соизмеримы с размерами пластины (двухсвязные и многосвязные области), свободно опертых по внешнему и внутреннему контурам. Методика распространяется на пластины постоянной и переменной толщины.

**В третьей главе** (§ 11—18) рассматриваются вопросы электрического моделирования задач устойчивости свободно опертых изотропных и анизотропных пластин различной формы как в пределах, так и за пределами упругости. В § 11 содержится вывод основных зависимостей для электрического моделирования задач устойчивости равномерно-сжатых прямоугольных пластин, т.е. краевых задач для дифференциального уравнения:

$$D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\,\partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right) = -\mathrm{T}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right). \qquad (9)$$

Уравнение (9) представляется в конечно-разностной форме, после введения функции $M = \nabla^2 w$ следующим образом:

$$[2(1+\alpha) - K]\, M_к - \alpha M_i - \alpha M_l - M_m - M_п = 0, \qquad (10)$$

где

$$K = \frac{T\lambda^2}{D} \;.$$

На основе аналогии между уравнением (10) и уравнениями метода перемещений при расчете на устойчивость плоской стержневой системы создается стержневая модель (СМ) со

специально выбранными единичными состояниями. Определение минимального критического значения $K_{кр}^{min}$ для СМ выполняется на квазианалоговых моделях ЭМСС-7 м. Получены зависимости для определения величин сопротивлений $T$-образных схем-аналогов. В основу электрического моделирования задач устойчивости для предлагаемых СМ (§ 12) положен метод единственной наложенной связи, предложенный Ш. М. Гофманом и Т. Г. Гуламовым*) и использованный для исследования устойчивости обычных рамных систем методом электрического моделирования В. М. Кондратьевым.**) Если в качестве единственной наложенной связи принять связь, препятствующую повороту любого узла СМ, то критерием потери устойчивости будет равенство нулю суммы сил токов $\Sigma J_п = 0$ в ветвях электрических схем-аналогов, примыкающих к узлу «$n$». Необходимое при расчете СМ методом перемещений нагружение углом поворота $\varphi_п = 1$ моделируется приложением к узлу «$n$» электрической схемы разности потенциалов $U_п$, соответствующей в масштабе $\gamma_\varphi$ значению $\varphi_п = 1$. Собственно процесс решения задач состоит в уравновешивании квазиотрицательных сопротивлений и заключается в том, что последовательным изменением э.д.с. напряжения невязок обращаются в нуль. Измеряя величину токов в узле «$n$» и определяя $\Sigma J_п$, можно получить график зависимости $\Sigma J_п$ от принятых значений $K$. Значение $\Sigma J_п = 0$ соответствует искомому минимальному критическому параметру ($\min K_{кр}$). Для получения уточненных значений критических параметров сжимающих сил в работе применяется экстраполяционный прием (по способу Ричардсона) на основе решений, полученных при последовательном сгущении расчетной сетки и применении соответствующих стержневых и электрических моделей. В § 13 рассматривается электромоделирование устойчивости равномерно-сжатых косоугольных, трапециевидных и треугольных пластин. Получены формулы для определения параметров электрических схем-аналогов. Вопросам моделирования устойчивости симметричных плас-

---

*) Ш. М. Гофман, Т. Г. Гуламов, Применение способа последовательного уравновешивания к расчету рам на устойчивость, Строительная механика и расчет сооружений, 1959, № 2.

**) В. М. Кондратьев, Электрическое моделирование задач устойчивости плоских стержневых систем, Труды Ташкентского ин-та инженеров ж. д. транспорта, 1962, вып. 22.

тин и пластин, сжатых в одном направлении, посвящены §§ 14 и 15.

В этой же главе метод электрического моделирования распространяется на задачи устойчивости пластин за пределами упругости. Исходные уравнения задачи соответствуют теории малых упруго-пластических деформаций А. А. Ильюшина. Дифференциальное уравнение равновесия пластины, с учетом эффекта разгрузки для случая однородного напряженного состояния имеет вид:

$$\nabla^4 w + \gamma_1^2 \nabla^2 w = 0 , \tag{11}$$

где $\gamma_1 = \frac{2i}{b} \sqrt{\frac{\sigma_i}{E(1-\psi-3\chi)}}$ ; $i = \frac{3b}{h}$ —

— гибкость пластины; $\sigma_i$ — интенсивность напряжений.

Предложен способ определения критической гибкости свободно опертых по контуру пластин с различным очертанием в плане. Сравнение полученных результатов с данными С. М. Попова позволяет сделать вывод о достаточной точности предлагаемого способа. Рассмотрены также вопросы об электромоделировании некоторых задач устойчивости анизотропных пластин (§17) и трехслойных пластин с легким заполнителем (§ 18).

**В четвертой главе** (§ 19—25) разработан способ определения частоты основного тона собственных колебаний для широкого класса изотропных и анизотропных пластин (прямоугольные, косоугольные, круглые, кольцевые и т. д.), в том числе и для пластин с большими вырезами.

Частоты свободных поперечных колебаний пластины, после исключения зависимости от времени, определяются собственными значениями ($\beta^2$) уравнения:

$$\nabla^2\nabla^2 w - \beta^2 w = 0, \tag{12}$$

где $\beta^2 = w^2 \frac{m}{D}$ ; $\omega$ — круговая частота.

Как показано H. D. Conway, уравнение (12) может быть представлено также в виде:

$$(\nabla^2 + \beta)(\nabla^2 - \beta) w = 0 \tag{13}$$

или $$\nabla^2 Z + Z = 0 , \tag{14}$$

где $Z=\nabla^2 w-\beta w$, с краевым условием $Z=0$ для свободно опертых пластин. Выражая дифференциальный оператор в конечно-разностной форме, при использовании прямоугольной сетки, из (14) получим:

$$[2(1+\alpha)-K_1]\,Z_к-\alpha Z_i-\alpha Z_l-Z_m-Z_n=0\ , \qquad (15)$$

где $K_1=\beta\lambda^2$.

Если в качестве СМ выбрать стержневую систему рамного типа, аналогичную уже примененной при исследовании устойчивости пластин, и принять углы поворота узлов СМ (X) равными значениям функции $Z$ в узлах сеточной области, то уравнение для расчета СМ на устойчивость будет математическим аналогом уравнения (15). Следовательно, определение частоты основного тона свободных колебаний пластин может быть выполнено также на основе двойной математической аналогии: между уравнениями в конечных разностях метода сеток для задач динамики пластин, уравнениями метода перемещений при расчете на устойчивость СМ (со специально выбранными единичными состояниями) и уравнениями соответствующей электрической цепи. Определение частоты основного тона свободных колебаний пластин выполняется с помощью метода единственной наложенной связи. В §§ 19—20 рассматривается определение частот собственных колебаний прямоугольных, косоугольных, треугольных, круглых, кольцевых и секторных пластин.

Получены зависимости для определения параметров электрических схем-аналогов в зависимости от типа сетки, примененной для аппроксимации исследуемых пластин. В § 22 показано применение предлагаемого способа к расчету пластин с отверстиями. Электрическое моделирование задач динамики трехслойных, симметричных по толщине пластин с легким заполнителем рассматривается в § 23. Если пренебречь уравнением краевого эффекта, то дифференциальное уравнение свободных колебаний трехслойных пластин, как показано А. П. Прусаковым, имеет вид:

$$D_0\nabla^2\nabla^2\Phi-\frac{2Dh}{G_3}\left(B+\frac{2}{3}B_3\right)\nabla^2\nabla^2\nabla^2\Phi=$$

$$=2(\rho_н\delta+\rho_з h)\,\omega^2\cdot\left[\Phi-\left(\frac{h}{G_3}B+\frac{B_3}{6}\right)\nabla^2\Phi\right]\ , \qquad (16)$$

где Ф — функция перемещений, связанная с прогибом зависимостью

$$w = \Phi - \frac{h}{G_з}\left(B + \frac{B_з}{6}\right)\nabla^2 \Phi \ . \tag{17}$$

Для пластин с легким заполнителем ($E_з = B_з = D = O$) уравнение (16) примет вид:

$$D_о' \nabla^2 \nabla^2 \Phi - m\,\omega^2 \left[\Phi - \frac{Bh}{G_з} \nabla^2 \Phi\right] = 0 \tag{18}$$

с краевыми условиями для свободно опертых пластин: $\Phi = \nabla^2 \Phi = O$. Если, следуя А. В. Саченкову*), решение (18) искать в виде

$$\nabla^2 \Phi = -\xi \Phi \ , \tag{19}$$

то, подставляя (19) в (18), получим квадратное уравнение относительно некоторого параметра $\xi$:

$$D_о' \xi^2 - m\,\omega^2 \frac{Bh}{G_з} \xi - m\omega^2 = 0 \ , \tag{20}$$

корни которого будут:

$$\xi_{1,2} = \frac{1}{2D_о'}\left(m\,\omega^2 \frac{Bh}{G_з} \pm \sqrt{\frac{m^2\,\omega^4 B^2 h^2}{G_з^2} + 4m\omega^2 D_о'}\right) \tag{21}$$

Нахождение минимальных собственных значений ($\xi_{min}$) для различных типов пластин выполняется методом электрического моделирования, после чего искомые частоты собственных колебаний определяются зависимостью (21). Приведены необходимые числовые примеры. Часть главы посвящена определению частот собственных колебаний многослойных анизотропных пластин при учете поперечного сдвига (§ 24), а также пластин на упругом основании в рамках технической теории В. З. Власова (§ 25).

---

*) Саченков А. В., Определение частот свободных колебаний пологих сферических оболочек и плоских пластин на основании мембранной аналогии, Прикладная механика, 1965, т. 1, вып. 1.

**В пятой главе** (§ 26—30) рассматриваются некоторые вопросы электромоделирования задач статики и динамики оболочек. В § 26 метод электрического моделирования применен к исследованию оптимальных очертаний пологих безмоментных оболочек. Решается задача о нахождении такого очертания поверхности оболочки $\bar{z}=\bar{z}(x, y)$ при заданной нагрузке и постоянной толщине, при котором усилие $S$ в оболочке будет постоянным (такое очертание поверхности будет оптимальным с точки зрения напряженного состояния). Для оболочек различной формы в плане в работе построены поверхности оптимальных оболочек (в зависимости от характера внешней нагрузки) по значениям аппликат, найденным на электрической модели. Выполнено сравнение полученных результатов с данными П. М. Варвака. Электромоделированию задач изгиба оболочек положительной гауссовой кривизны посвящен § 27. Рассматриваются безмоментные оболочки, срединная поверхность которых является параболоидом вращения относительно вертикальной оси. Предлагаемым способом определяются значения функции напряжений $F$ (в дискретных точках сеточной области), удовлетворяющие дифференциальному уравнению равновесия оболочки и граничным условиям. В § 28, на основе двойной математической аналогии, установленной ранее, предлагается способ определения частоты основного тона свободных колебаний шарнирно опертых по контуру пологих сферических оболочек методом электрического моделирования. Способ распространяется на широкий класс оболочек, которые имеют в плане форму многоугольника, трапеции, круга, кольца и т. д. За исходные уравнения принята система основных дифференциальных уравнений свободных колебаний пологих оболочек положительной гауссовой кривизны относительно функций напряжений ($\varphi$) и перемещений ($w$), согласно технической моментной теории В. З. Власова. Как показано О. Д. Ониашвили, указанная система для сферических оболочек приводится к одному разрешающему уравнению:

$$\frac{1}{R^2}\nabla^4 F + \frac{\delta^2}{12(1-\mu^2)}\nabla^8 F + \frac{\gamma}{Eg}\nabla^4\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0 \qquad (22)$$

относительно функции $F$, связанной с $\varphi$ и $w$ зависимостями:

$$\varphi = \frac{1}{R^2}\nabla^2 F\ ;\ w = \frac{1}{E\delta}\nabla^4 E\ . \qquad (23)$$

В литературе известны результаты только для прямоугольных в плане оболочек. Предлагаемый способ позволяет определять частоту основного тона свободных колебаний для оболочек различного очертания, контур которых составлен из прямолинейных отрезков. Приводятся числовые примеры. Последние два параграфа этой главы посвящены электромоделированию колебаний предварительно напряженных сферических оболочек (§ 29) и пологих трехслойных сферических оболочек (§ 30) — на основе установленных А. В. Саченковым аналогий между указанными задачами и задачей о собственных колебаниях свободно опертой по контуру многоугольной пластины.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертация посвящена теоретическому развитию и экспериментальному исследованию методов математического и электрического моделирования актуальных задач строительной механики и прикладной теории упругости—изгиба, устойчивости и колебаний пластин и оболочек. Проведенные в работе исследования показали эффективность электрического моделирования сложных двумерных задач строительной механики, возможность решения этих задач на аналоговых вычислительных машинах (в частности, на моделях типа ЭМСС), а также целесообразность использования указанных моделирующих машин в инженерной практике.

Основные результаты работы могут быть сформулированы следующим образом:

1. Разработан способ расчета свободно опертых пластин постоянной жесткости, изгибаемых произвольной поперечной нагрузкой на моделях типа ЭМСС. Показана возможность применения метода к расчету на изгиб прямоугольных, косоугольных, трапециевидных, треугольных, круглых, кольцевых и секторных в плане пластин. Рассмотрены вопросы электромоделирования симметричных пластин. Разработана методика подготовки и набора перечисленных выше задач на моделях и получены основные зависимости для определения параметров электрических схем-аналогов.

2. Предложен способ электромоделирования задач изгиба прямоугольных и косоугольных в плане пластин переменной жесткости. Разработана методика расчета на ЭМСС пластин с линейным законом изменения жесткости, а также пластин, толщина которых меняется по линейному закону в одном на-

правлении. Для изгибаемых пластин, жесткость которых изменяется по нелинейному закону, созданы соответствующие стержневые и электрические модели.

3. Синтезом методов строительной механики и электрического моделирования решены вопросы расчета на изгиб пластин постоянной и переменной жесткости, дополнительно опирающихся на промежуточные точечные опоры. Рассмотрено моделирование пластин, представляющих собой в плане двух-, и многосвязные области.

4. Исследованы некоторые вопросы электрического моделирования задач устойчивости прямоугольных и косоугольных изотропных пластин. На основе теории квазианалоговых систем и метода единственной наложенной связи разработана методика моделирования указанных задач с помощью квазианалоговых моделей типа ЭМСС-7м. Получены формулы для определения параметров Т-образных схем-аналогов стержней СМ. Изучены возможные упрощения, вытекающие из условий симметрии моделируемых пластин.

5. Показана возможность исследования некоторых задач устойчивости пластин за пределами упругости (в постановке А. А. Ильюшина), а также устойчивости анизотропных и трехслойных пластин методом электрического моделирования.

6. Разработан в общем виде способ определения частоты основного тона свободных колебаний для широкого класса пластин (прямоугольные, косоугольные, трапециевидные, круглые, кольцевые и т. д.), в том числе пластин с большими вырезами, методом электрического моделирования. Приведены необходимые зависимости, позволяющие реализовать решение указанных задач на квазианалоговых моделях.

7. Исследованы вопросы определения методом электрического моделирования частоты свободных колебаний трехслойных пластин с легким заполнителем, многослойных пластин, а также пластин на упругом основании (в рамках технической теории расчета В. З. Власова).

8. Метод электрического моделирования применен к нахождению оптимальных очертаний пологих безмоментных оболочек различной конфигурации в плане. Построены поверхности оптимальных (с точки зрения напряженного состояния) оболочек при различных видах нагрузок.

9. Показана возможность электромоделирования задач изгиба безмоментных оболочек положительной гауссовой кривизны.

10. На основе использования результатов, перечисленных в п.п. 6, 7, предложен способ электромоделирования некоторых задач динамики пологих сферических оболочек (определение наименьшей частоты свободных колебаний однослойных и трехслойных оболочек, а также оболочек, предварительно напряженных по периметру), реализуемый на квазианалоговых моделях.

11. На основе результатов, полученных в настоящей работе, имеется возможность создания специализированных математических машин (в частности, электрических моделей), предназначенных для расчета континуальных систем типа пластин и оболочек на прочность, устойчивость и колебания.

**Основные положения и результаты диссертации были доложены на**

IV Всесоюзной конференции по применению ЭВМ в строительной механике, машиностроении и строительном производстве (Киев, 1965 г.); на научном семинаре «Электронное моделирование задач механики» при Научном Совете по Кибернетике АН УССР (Киев, 1965 г.); на XXV и XXVI научно-технических конференциях Днепропетровского инженерно-строительного института (1964, 1965 г.г.); на семинарах Днепропетровской секции строительной механики НТО стройиндустрии (1965 и 1966 г.г.) и на семинаре по механике Днепропетровского института инженеров железнодорожного транспорта (1966 г.).

**Основное содержание диссертации опубликовано в следующих работах:**

1. Ю. М. Почтман, В. Д. Шайкевич, Расчет шарнирно опертых пластин методом электрического моделирования, Строительная механика и расчет сооружений, 1965, № 2.

2. Ю. М. Почтман, Электрическое моделирование некоторых задач устойчивости пластин за пределами упругости, Труды XXVII научной конференции ДИСИ (тезисы докладов), 1966, 106—109.

3. В. Д. Шайкевич, Ю. М. Почтман, Определение частот собственных колебаний свободно опертых пластин методом электрического моделирования, сб. «Методы математического моделирования и теория электрических цепей», изд. «Наукова думка», 1966, № 2.

4. Ю. М. Почтман, Дослідження оптимальних обрисів пологих безмоментних оболонок методом електричного моделювання, сб. «Опір матеріалів і теорія споруд», изд. «Будівельник», 1966, вип. V.

5. В. Д. Шайкевич, Ю. М. Почтман, Электрическое моделирование некоторых задач изгиба пластин, Известия ВУЗов, серия «Строительство и архитектура», 1967, № 1.

6. Ю. М. Почтман, Электрическое моделирование задач изгиба и колебаний круглых, кольцевых и секторных пластин, Прикладная механика, 1967, т. III, вып. 3. (в печати).

7. Ю. М. Почтман, В. Д. Шайкевич, Расчет пластин переменной жесткости методом электрического моделирования, Строительная механика и расчет сооружений, 1967, № 3 (в печати).

8. В. Д. Шайкевич, Ю. М. Почтман, Электрическое моделирование некоторых задач устойчивости пластин, сб. «Применение электронных математических машин в строительной механике» (Труды IV Всесоюзной конференции по применению электронных математических машин в строительной механике, машиностроении и строительном производстве), изд. «Наукова думка», 1967 (в печати).

БТ 18660. Областная книжная типография,
Днепропетровского областного управления по печати,
г. Днепропетровск, ул. Серова, 7.
Заказ № 3917-м. Тираж 200. Объем 1,25 п.л. Подписано к печати 16.XII-66 г.