

УДК 625.143.033.34

Курган Д.Н., Днепропетровский национальный университет железнодорожного транспорта имени академика В. Лазаряна, г. Днепропетровск, Украина

К ВОПРОСУ ОПРЕДЕЛЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ПРОГИБА РЕЛЬСА ДЛЯ СОВРЕМЕННЫХ РАСЧЕТОВ

Изложены теоретические исследования уравнения прогиба рельса, как базового инструмента для многих современных расчетов напряженно-деформируемого состояний железнодорожного пути. Предложены методы учета динамики процесса, в том числе времени прогиба рельса и подрельсового основания на основе волновой теории распространения упругих деформаций.

Ключевые слова: прогиб рельса, расчет пути на прочность, волновая модель, подрельсовое основание.

Kurgan D.N., Dnipropetrovsk National University of Railway Transport named after Academician V. Lazaryan, Dnipropetrovsk, Ukraine

ON THE DETERMINATION EQUATION OF THE RAIL DEPRESSION FOR MODERN CALCULATIONS

The theoretical study of the equation of the rail depression, as a basic tool for many of modern settlement of the stress-strain state of the railway track. The methods of accounting dynamics of the process, including the time of the rail depression and base under rail on the basis of the wave theory of elastic deformation.

Key words: depression of rail, rail strength calculation; wave model; base under rail.

Вступление

Аналитические методы расчетов напряженно-деформированного состояния железнодорожного пути используются при решении многих задач проектирования новых и содержания существующих железных дорог и, как следствие, являются основой для обоснования характеристик эксплуатации в ряде нормативных документов.

В таких задачах, как правило, присутствует ряд допущений, гипотез. При существенных изменениях в конструкции пути или в условиях эксплуатации необходимо анализировать их соответствие границам применимости существующих моделей. Так, например, классическое уравнение прогиба рельса [1, 2], используемое в расчетах пути на прочность [3] и в других задачах, основано на гипотезе Н.П. Петрова о тождественности линии прогиба рельса от воздействия динамической и статической нагрузки, численно равной динамической силе в данный момент времени.

Таким образом, принимается, что упругие деформации под действием приложенных динамических сил наступают мгновенно. При высоких скоростях движения такое допущение может привести к погрешностям, особенно если время между моментом прикладывания силы и установлением действительного равновесия сравнимо со временем действия или изменения этой силы. В таких случаях для описания прогиба рельса можно переходить к волновой теории распространения колебаний.

Методика

Точность решения задачи в колебаниях рельса под действием поездной нагрузки зависит, прежде всего, от выбора расчетной схемы и точности исходных данных [4].

В современных аналитических расчетных схемах рельс рассматривается как балка, которая опирается на равноупругое основание. В зависимости от задачи, которая решается, и возможности упрощения расчетов путем не учета тех или других параметров, возможны различные варианты в представлении такого уравнения. Описания тождественных вариаций соответствующих расчетных схем рассмотрены в большом количестве источников. Один из наиболее полных вариантов уравнения прогиба рельса приводится, например, в [4]

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + EI \frac{d^4 y}{dz^4} + \frac{d}{dz} \left(H \frac{dy}{dz} \right) + Uy + I_0 \frac{d^4 y}{dz^2 dt^2} = P(z, t), \quad (1)$$

где m – приведенная масса рельса; EI – жесткость рельса как балки, работающей на прогиб; H – продольная сила; U – модуль упругости подрельсового основания; I_0 – момент инерции единицы длины рельса относительно центральной оси перпендикулярной к плоскости колебаний; $P(z, t)$ – распределенная вертикальная подвижная нагрузка.

Уравнения (1) довольно полно описывает напряженно-деформированное состояние рельса, даже с учетом фактора времени, колебаний рельса в вертикальной плоскости (y) и их изменений по длине рельса (z). Рассмотрим детальные параметры, которые в нем используются.

Приведенная масса рельса (m). Вообще имеется в виду масса рельса, который принимает участие в процессе взаимодействия в данный момент времени при данном прогибе рельса. Конечно, она постоянно изменяется, но представление ее в виде $m = f(t)$ или $m = f(y)$ делает невозможным практическое решение уравнения (1). В некоторых задачах массой рельса (а чаще всего и массой других элементов пути) просто пренебрегают [3, 5].

Продольная сила (H). Продольная сила может быть представлена в виде [6]

$$H = N + \int_{-\infty}^z W dz, \quad (2)$$

где N – продольная температурная сила; W – распределенное упругое сопротивление продольному перемещению рельса.

Учитывая то, что продольная сила $H(z)$ изменяется очень медленно в сравнении с функцией $y(z, t)$ ее можно принять постоянной [4]. Для решения большинства задач работы пути в вертикальной плоскости продольная сила не учитывается. Прежде всего ее определение необходимо для задач устойчивости пути против выброса, но их решение нуждается в других расчетных схемах, в которых рассматривается равновесие рельсошпальной решетки. Например, один из вариантов такой расчетной схемы по методике проф. С. П. Першина описан в [7].

Модуль упругости подрельсового основания (U). Под модулем упругости в уравнении (1) имеется в виду равномерно распределенная жесткость подрельсового основания. От значения этого показателя значительно зависят результаты расчетов – и прогибы, и напряжение. Нужно разделять модуль упругости в точке под рельсом (если считать, что рельс опирается на отдельные опоры – именно его значения будет получено, если статически нагружать рельс и измерять прогиб) и модуль упругости по длине рельса (если считать, что рельс опирается на непрерывное упругое основание). А также разделять статический и динамический модуль упругости. Для уравнения (1), учитывающего фактор времени, целесообразно использовать именно динамический модуль упругости. При этом необходимо учитывать, что он не является постоянной величиной, а изменяется как от прогиба рельса (причем нелинейно, поэтому нужно говорить о его изменении во времени в процессе колебаний рельса), так и по длине: $U = f(t, z)$. Но в таком виде не только усложняются расчеты, но и возникает вопрос правильного задания значений (или функций) модуля упругости в исходных данных.

На сегодня существует несколько разных методов натуральных измерений модуля упругости подрельсового основания, но они имеют те или другие недостатки. Наверное, одним из перспективных можно считать метод расчета модуля упругости по результатам экспериментальных измерений распределения напряжений по длине рельса от движения поезда, который используется в ряде работ, описанных, например, в [8], что дает возможность получать значение, распределенное по некоторому участку и определенное от динамической нагрузки.

Задача правильного расчета и измерения модуля упругости, прежде всего, связана со сложностью происходящего физического процесса. На модуль упругости подрельсового основания влияют свойства всех элементов пути: подкладки, шпалы, балласта, земляного полотна (для разных конструкций этот список может иметь отличия). Его значение складывается из жесткости каждого из названных элементов, но не в равной мере, а с учетом их вклада в общую деформацию в данный момент действия. Именно степень их вклада будет существенно зависеть от динамики процесса. Чем меньшую жесткость имеет слой, тем большая часть прогиба будет реализовываться именно за счет его деформации. Например, в [9] приводится следующее соотношение деформаций слоев подрельсовой основы: рельс – 0,2 %, прокладка – 34 %, железобетонная

шпала – 0,8 %, балласт – 22 %, земляное полотно – 43 %. Но деформации от нагрузки на рельс распространяются не мгновенно, и пока в процесс войдет наименее жесткий слой (земляное полотно) во взаимодействии (тоже постепенно во времени) будут уже задействованы и другие элементы. А если нагрузка действует короткое время (достаточно большая скорость движения), то значение модуля упругости может и не успеть войти в границы, которые бы соответствовали состоянию уравновешенных деформаций всех слоев.

Жесткость рельса на прогиб (EI). Параметр, необходимый для рассматривания рельса как балки без конкретных геометрических размеров (они сведены к моменту инерции). В результате непосредственно из уравнения прогиба балки определяются напряжения по оси действия силы через определение сгибающего момента (единого для сечения рельса).

Момент инерции единицы длины рельса относительно центральной оси перпендикулярной к плоскости колебаний (I_0). Как правило, инерцией вращения пренебрегают, так как длина балки (рельса) существенно превышает ее поперечные размеры.

Внешняя нагрузка ($P(z,t)$). Уравнение (1) дает возможность задавать внешнюю нагрузку в виде силы как приложенной в точке, так и равномерно распределенной по длине рельса. Можно учитывать, что сила изменяется во времени по гармоничному закону, хотя это значительно усложняет математический аппарат для выполнения расчетов. Большинство задач решается для постоянного значения силы, под которым имеется в виду максимально возможная нагрузка, которая складывается как статистическая сумма динамических добавок [3, 5]. Но в любом случае, это должна быть вертикальная сила, приложенная по оси балки (рельса). Учет совместного действия нескольких сил (например, одновременное действие на рельс нескольких колес) может быть получено только предварительным приведением их к одной.

Если для уравнения (1) принять ряд упрощений: $m=0$, $H=0$, $I_0=0$ и, даже, $P=0$, получим дифференциальное уравнение прогиба балки (рельса), которое используется для современных расчетов пути на прочность

$$EI \frac{d^4 y}{dz^4} + Uy = 0 \quad (3)$$

или в более привычном виде

$$\frac{d^4 y}{dz^4} + 4k^4 y = 0, \quad (4)$$

где $k = \sqrt[4]{\frac{U}{4EI}}$ – коэффициент относительной жесткости.

Уравнение (4) может быть получено и основываясь на выкладках сопротивления материалов, исходя из математически возможной формы оси изогнутой балки, вообще без рассматривания динамики процесса. Таким образом, оно дает общее описание формы балки по длине, которая была изогнута (неважно ка-

ким образом, так как $P=0$), и которой не дает выпрямиться сопротивление основания (причем не только вниз, но и вверх – еще одно предположение). Связь между силой и прогибом восстанавливается при определении предельных условий для интегрирования уравнения (4) – исходя из сопротивления материалов, принимается, что поперечная сила в сечении балки равняется половине внешней сосредоточенной силы в точке ее приложения.

Уравнение (4) является базовым для расчетов пути на прочность [3]. Безусловно, оно адекватно решает поставленную задачу – определение максимально возможных осевых напряжений. Но от динамической природы процесса взаимодействия подвижного состава и рельса в нем почти ничего не осталось, и его использование для других задач в таком или даже измененном виде невозможно без тщательного анализа.

Получим тождественное уравнение прогиба рельса, используя волновую теорию распространения колебаний, что позволит учесть время реализации прогиба. За основу примем методику описания прохождения волны напряжений вдоль стержня, изложенную Г. Кольским [10].

Расчетная сема показана на рис. 1 для элемента балки длиной $\delta x \rightarrow 0$. Балка деформируется под действием изгибающего момента M , который изменяется по ее длине. Изгибающий момент должен уравниваться поперечной силой F , которая тоже непостоянна, изменяется по длине балки.

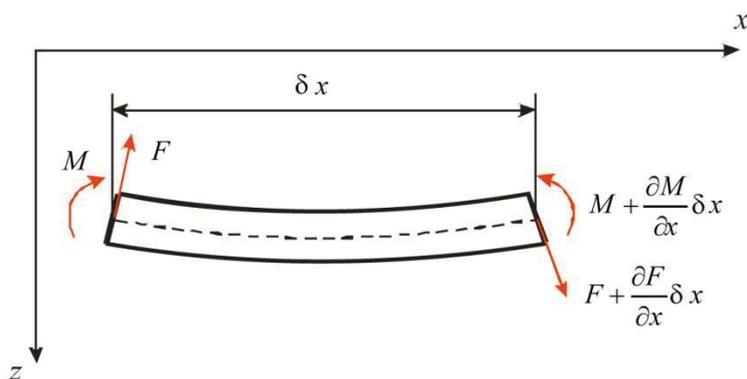


Рис. 1. Расчетная схема изгиба элемента балки

Уравнение движения балки по оси «z» будет иметь вид

$$\rho A \delta x \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial F}{\partial x} \delta x, \quad (5)$$

где ρ – плотность вещества; A – площадь поперечного сечения; z – перемещение.

Примем условие

$$F = - \frac{\partial M}{\partial x} \Big|_{\delta x \rightarrow 0}. \quad (6)$$

Тогда уравнение равновесия моментов относительно середины элемента балки δx будет иметь вид

$$M - \left(M + \frac{\partial M}{\partial x} \delta x \right) + F \frac{\delta x}{2} + \left(F + \frac{\partial F}{\partial x} \delta x \right) \frac{\delta x}{2} = 0, \quad (7)$$

после сокращений
$$\frac{\partial M}{\partial x} \delta x + \left(2F + \frac{\partial F}{\partial x} \delta x \right) \frac{\delta x}{2} = 0. \quad (8)$$

Примем условие
$$M = \frac{EJ}{R}, \quad (9)$$

где R – радиус кривизны нейтральной оси (классически балка представлена как совокупность параллельных волокон, выше за нейтральную ось они растягиваются, а ниже – сжимаются).

Примем условие
$$\frac{1}{R} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \Big|_{\partial z} \rightarrow 0. \quad (10)$$

Преобразуем (6), используя (9) и (10)

$$F = -\frac{\partial M}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{EI}{R} \right) = -\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} EI. \quad (11)$$

Исходя из (5) и (11), получим

$$\rho A \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = -EI \frac{\partial^4 z}{\partial x^4}. \quad (12)$$

Если учесть, что балка находится в пространстве, которое имеет модуль упругости U (рельс опирается на упругое основание), уравнение (12) примет вид

$$\rho A \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = -EI \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} - Uz. \quad (13)$$

Решение этого дифференциального уравнения будем искать в виде

$$z = f_1(x) f_2(t). \quad (14)$$

Тогда функции $f_1(x)$ и $f_2(t)$ должны удовлетворять условиям

$$\frac{\partial^4 f_1}{\partial x^4} = C_1 f_1(x); \quad (15)$$

$$\frac{\partial^2 f_2}{\partial t^2} = -\frac{EIC_1 + U}{A} f_2(t); \quad (16)$$

Функция $f_1(x)$ отображает статический прогиб балки по длине, так как из нее выведен параметр времени (t), тогда ее решение для рельса известно – [1–5]

$$f_1(x) = Be^{-kx} (\cos kx + \sin kx), \quad (17)$$

где – коэффициент относительной жесткости;

$$B = \frac{Pk}{2U}. \quad (18)$$

Тогда, исходя из (15),
$$C_1 = -4Bk^4. \quad (19)$$

Исходя из (16), решение для функции $f_2(t)$ можно искать в виде

$$\left. \begin{aligned} f_2(t) &= C_2 \sin pt + C_3 \cos pt; \\ p &= \frac{-4k^4 BEI + U}{\rho A} \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Коэффициенты C_2 и C_3 могут быть определены исходя из граничных условий, которые, в том числе, должны учитывать дисперсию колебаний по длине балки [10]. Для практических расчетов решение уравнения (14) будем искать из равенства прогиба рельса (z_p), опирающегося на опоры, и прогиба подрельсового основания ($z_{оп}$) от сил, передающихся на опоры от рельса ($Q_{оп}$)

$$\left. \begin{aligned} z_p(x, t) &= z_{оп}(x, t); \\ z_{оп} &= f(Q_{оп}, t); \\ Q_{оп} &\propto \frac{d^3 z_p}{dx^3}. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Для моделирования такого взаимодействия с учетом времени прогиба подрельсового основания использована волновая модель пути, описанная в работе [11]. Некоторые результаты расчетов приведены на рис. 2 и 3.

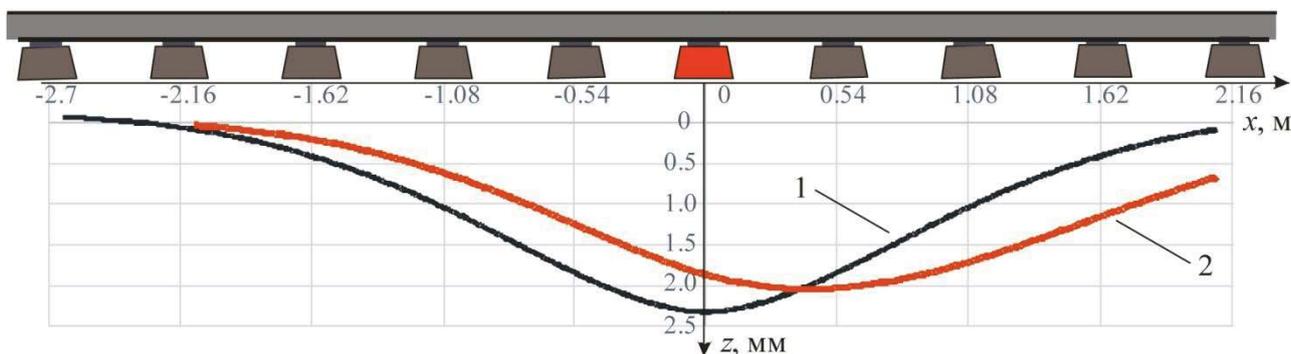


Рис. 2. Прогиб рельса в сечении $x = 0$ в зависимости от координаты положения нагрузки (x):
1 – статический; 2 – динамический

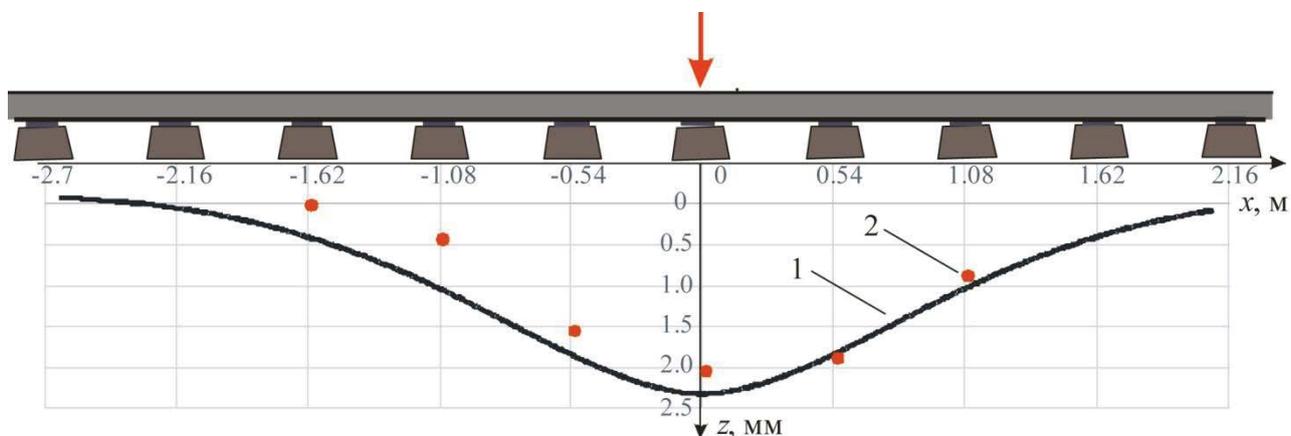


Рис. 3. Изменение прогиба рельса по его длине при нахождении нагрузки в координате $x = 0$:
1 – статический; 2 – динамический

Результаты

Пример изменения статического и динамического прогиба для одного сечения рельса при движении нагрузки (колеса) показан на рис. 1. Как видно, динамический прогиб имеет уменьшение амплитуды и смещение максимума (запаздывание). На рис. 2 показаны статические (по длине) и динамические (по осям опор) прогибы рельса для одного момента времени. Следует отметить, что, если для статических расчетов (с сохранением гипотезы Н. П. Петрова) изменение прогиба рельса по длине от зафиксированного положения нагрузки (линия 1 на рис. 3) и изменение прогиба рельса в одном сечении от перемещаемой нагрузки (линия 1 на рис. 2) являются одинаковыми величинами, то для динамических прогибов это правило не сохраняется. Подобные динамические эффекты имеют место при высоких скоростях движения в сочетании с использованием в подрельсовом основании материалов с относительно небольшой скоростью распространения упругих волн [11].

Список литературы

1. Шахуняц, Г.М. Расчеты верхнего строения пути / Г.М. Шахуняц. – М. : Желдориздат, 1951. – 254 с.
2. Вериго, М.Ф. Вертикальные силы, действующие на путь при прохождении подвижного состава / М.Ф. Вериго // Тр. ВНИИЖТ. – М. : Трансжелдориздат, 1955. – Вып. 97. – С. 25–288.
3. Методика оценки воздействия подвижного состава на путь по условиям обеспечения его надежности : № ЦПТ-52/14 : утв. Зам. министра путей сообщения РФ 16.06.2000 г. – М. : Типография ПТКБ ЦП МПС, 2000. – 40 с.
4. Виброзащитные конструкции пути для транспортных тоннелей и метрополитенов / Н.И. Карпущенко, [и др.]. – Новосибирск : Наука, 2011. – 200 с.
5. Чернышов, М.А. Практические методы расчета пути / М.А. Чернышов – М. : Транспорт, 1967. – 236 с.
6. Коган, А.Я. Динамика пути и его взаимодействие с подвижным составом / А.Я. Коган. – М. : Транспорт, 1997. – 326 с.
7. Бесстыковой путь и длинные рельсы / В. Г. Альбрехт [и др.]. – М. : Транспорт, 1963. – 214 с.
8. Определение методики расчета модуля упругости подрельсовой основы по результатам экспериментальных измерений показателей взаимодействия пути и подвижного состава [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://eadnurt.diit.edu.ua/jspui/handle/123456789/1865>
9. Лихтбергер, Б. Справочник «Железнодорожный путь» / Б. Лихтбергер. – Гамбург : DVV Media Group GmbH, 2010. – 434 с.
10. Кольский, Г. Волны напряжения в твердых телах / Г. Кольский. – М. : Иностран. лит., 1955. – 192 с.
11. Курган, Д.М. Моделирование взаимодействия пути и подвижного состава с учетом времени прогиба подрельсового основания / Д.М. Курган // Проектирование развития региональной сети железных дорог : сб. науч. тр. / под ред. В.С. Шварцфельда – Хабаровск : Изд-во ДВГУПС, 2015. – Вып. 3. – С. 167–175.