

Способ учета сопротивления качению в задачах на равновесие системы сочлененных тел

Бондаренко Л.Н., Бондаренко В.Д., Демин Г.К., Колбун В.В.,
Жаковский А.Д.

Постановка проблемы. В задачах на равновесие системы сочлененных тел обычно требуется найти силу, с которой одно из сочлененных тел действует на другое. Такие задачи решаются путем рассмотрения равновесия каждого тела в отдельности, а остальные тела системы являются связями, наложенными на это тело, и при его освобождении от связей их действие заменяются силами – реакциями связей. Естественно, силы взаимодействия двух тел должны равняться между собой по абсолютной величине, лежат в одной плоскости на одной прямой и направлены в разные стороны [1].

При решении подобных задач обычно пренебрегают трением, особенно при телах качения. Это связано с тем, что отсутствуют аналитические зависимости для определения сопротивления качению.

Отбрасывая ошибочную теорию Рейнольдса, считающего, что сопротивление качению возникает вследствие скольжения в месте контакта, аналитическую зависимость для определения коэффициента трения качения получил Табор [2]. Однако, наличие в формулах для точечного и линейного контактов коэффициента гистерезисных потерь свело на нет их практическое применение.

Напомним, что формулы Табора для определения коэффициента трения качения выглядят следующим образом:

При первоначальном линейном контакте

$$k = \frac{2}{3 \cdot \pi} \cdot b \cdot \alpha = 0,212 \cdot b \cdot \alpha, \quad (1)$$

При первоначальном точечном контакте

$$k = \frac{3}{16} \cdot b \cdot \alpha = 0,1875 \cdot b \cdot \alpha, \quad (2)$$

где α – коэффициент гистерезисных потерь; b – полуширина пятна контакта, определяемая из теории контактных деформаций Герца [3].

В [4] с использованием экспериментальных величин коэффициента трения качения для крановых колес формулы аналогичные (1) и (2) имеют вид

$$k = 0,225 \cdot b \cdot \exp(-1,2 \cdot r); \quad (3)$$

$$k = 0,16 \cdot b \cdot \exp(0,2 \cdot r), \quad (4)$$

где r – радиус в метрах; $b = 1,109 \cdot \sqrt[3]{\frac{N}{E}} \cdot r$.

Сравнивая выражения (1) и (3), (2) и (4) можно заключить, что коэффициент гистерезисных потерь определяется экспонентой с показателем радиуса тела качения.

Утверждение в [2], что α близко к единице (очевидно, имеется в виду любая величина r) является не точным, как и приведенная в [5] формула $k=0,11 \cdot b$ для линейного контакта и $k=0,1 \cdot b$ для точечного.

Цель статьи. Установить влияние сопротивления качению на величину давления шара, действующего на сочлененные тела.

Материал исследований. Условие задачи позаимствуем из [1] не принимая приведенных числовых значений радиуса шара, принятого здесь произвольно.

Для определения реакций N_B и N_D (рис. 1) решим задачу в общем виде, а имея выражения для N_B и N_D , найдем радиус шара, воспользовавшись теоремой контактных деформаций Герца. Очевидно, что в зависимости от величины угла α будет зависеть соотношения между N_B и N_D , поэтому необходимо радиус шара находить из их большей величины.

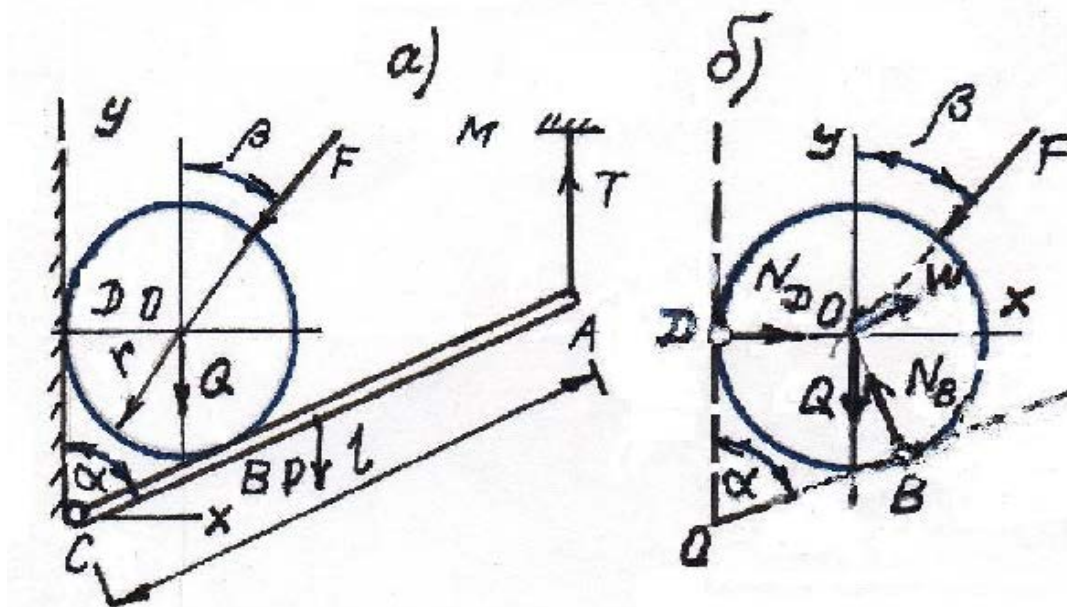


Рис. 1. Условие к решению равновесия системы сочлененных тел: а) – равновесие балки и шара; б) – равновесие шара.

Составляя уравнения равновесия сил, действующих на балку и шар и отдельно, действующих только на шар, получим систему уравнений, позволяющих найти необходимые величины N_B , N_D и T :

$$N_B = \frac{Q + F \cdot \cos \beta - W \cdot \cos \alpha}{\sin \alpha}; \quad (5)$$

$$N_D = N_B \cdot \cos \alpha + F \cdot \sin \beta - W \cdot \sin \alpha; \quad (6)$$

$$T = \frac{0,5 \cdot l \cdot P \cdot \sin \alpha + N_D \cdot r \cdot \operatorname{ctg} \beta + 0,5 \cdot Q \cdot r}{l \cdot \sin \alpha}. \quad (7)$$

Решение поставленной задачи проведем в следующей последовательности.

1. Ввиду взаимозависимости реакций N_B и N_D найдем сначала величину N_B в первом приближении, положив $Q=0$, т.е. $N_B=F \cdot \cos\beta/\sin\alpha$.

2. Воспользовавшись теорией контактных напряжений Герца, находим радиус шара [3]

$$r = 0,24 \cdot \frac{E}{\sigma} \cdot \sqrt{\frac{N_B}{\sigma}}, \quad (8)$$

где E – модуль упругости материалов шара и плоскости; σ – допускаемые контактные напряжения при точечном контакте.

При известной величине r находится вес шара Q .

3. По известным величинам r и Q первого приближения находится N_B во втором приближении.

4. По N_B второго приближения находится радиус шара и его вес во втором приближении.

5. По формуле (6) находится реакция N_D .

6. Сравниваются величины N_B и N_D , и, исходя из большей величины, находится окончательная величина радиуса и вес шара.

Для расчетов примем $\sigma=2000$ МПа (крановый рельс, Сталь 65Г, режим работы 4М [6]), угол α примем изменяющимся в пределах $20^\circ \leq \alpha \leq 80^\circ$, модуль упругости $E=2,1 \cdot 10^5$ МПа, угол $\beta=30^\circ$, $\gamma=7800$ кг/м³.

Расчеты показывают, что до угла $\alpha \approx 64^\circ$ реакция $N_B < N_D$ и максимальная величина $N_D=191,7$ кН во втором приближении. При этом $r=247$ мм и $Q=4,9$ кН.

Сопротивление качению шара

$$W = \frac{k \cdot N}{r}. \quad (9)$$

Влияние сопротивления качению на реакции N_B и N_D будем рассчитывать исходя из этих величин Q и r .

Величины N_B и N_D сопротивления качению шара W в зависимости от угла наклона плоскости α приведены в табл. 1.

Зависимость величин реакций N_B , N_D с учетом и без учета сопротивления качению шара, сопротивлений качению, процентное расхождение в значениях N от угла наклона плоскости

Таблица 1

Угол α°	N_B , кН				N_D , кН			
	Без W	С W	W , Н	%	Без W	С W	W , Н	%
20	173,86	173,09	774	0,44	194,91	194,02	892	0,46
40	92,47	92,14	333	0,36	102,33	101,95	381	0,37
60	68,66	68,42	236	0,35	65,83	65,62	211	0,32
80	60,37	60,18	188	0,31	41,98	41,86	116	0,28

Решим обратную задачу, положив угол наклона плоскости постоянным и равным $\alpha=30^\circ$, а угол приложения силы F будем менять в пределах изменения угла α в предыдущей задаче, т.е. $20^\circ \leq \beta \leq 80^\circ$.

Данные расчета сведены в табл. 2.

Таблица 2.

Угол α°	N_B , кН				N_D , кН			
	Без W	С W	W , Н	%	Без W	С W	W , Н	%
20	126,70	127,23	525	0,41	131,27	131,73	552,35	0,36
40	104,78	105,18	408	0,40	131,25	131,60	551,80	0,26
60	71,26	71,51	245	0,34	116,27	116,27	468,83	0,16
80	30,18	30,26	78	0,26	88,19	88,26	324,25	0,08

Натяжение троса T в зависимости от угла α при $P=1800\text{Н}$, $l=2\text{м}$:

$\alpha=20^\circ$ $W=246,4\text{кН}$ (247,5кН без W); $\alpha=40^\circ$ $W=706,0\text{кН}$ (708,5кН); $\alpha=60^\circ$ $W=349,3\text{кН}$ (350,3кН); $\alpha=80^\circ$ $W=206,0\text{кН}$ (206,6кН). Разница в величинах T составляет от 0,45% при $\alpha=20^\circ$ до 0,25% при $\alpha=80^\circ$.

Аналогично решается задача и при линейном контакте. Однако, формулы по определению радиуса тела качения и полуширины пятна контакта будут отличаться от выше приведенных

$$r = 0,418^2 \cdot \frac{N \cdot E}{B \cdot \sigma^2}; \quad (10)$$

$$b = 1,526 \cdot \sqrt{\frac{N \cdot r}{B \cdot E}}, \quad (11)$$

где B – длина цилиндра.

Анализ приведенных зависимостей и полученных численных значений позволяет сделать вывод о том, что сопротивление качению при напряжениях не превышающих допустимых оказывают незначительное влияние на усилия в шарнирах, стержнях нитях и его можно не учитывать при решении задач на равновесие системы сочлененных тел.

Литература

1. Мисюров М.А. Методика решения задач по теоретической механике. – М.: Высш. Школа, 1962. – 307с.
2. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. – М.: Мир, 1989. – 510с.
3. Справочник по сопротивлению материалов / Писаренко Г.С., Матвеев В.В., Яковлев А.П. – К.: Наук. Думка, 1988. – 736с.
4. Бондаренко Л.М., Довбня М.П., Ловейкин В.С. Деформаційні опори в машинах. – Дніпропетровськ: Дніпро – VAL, 2002. – 200с.
5. Ковальський Б.С. Вопросы передвижения мостовых кранов. – Луганск: Изд – во ВНУ, 2000. – 63с.
6. Справочник по кранам. В 2 т. Т.2/Александров М.Л., Гохберг М.М., Ковин А.А. и др. – Л.: Машиностроение, 1988. – 559с.