АКАДЕМИЯ НАУК УССР
ИНСТИТУТ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ

Н. Г. БОНДАРЬ

ДИНАМИКА СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ (АРОЧНЫХ МОСТОВ)

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
доктора технических наук

Киев — 1953 г.

АКАДЕМИЯ НАУК УССР
ИНСТИТУТ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ

Н. Г. БОНДАРЬ

ДИНАМИКА СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ (АРОЧНЫХ МОСТОВ)

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
доктора технических наук

Киев — 1953 г.

Динамика сооружений в Советском Союзе непрерывно развивается и с каждым годом достигает все новых и новых успехов. Мощным стимулом такого развития динамики сооружений является грандиозное строительство, развернутое в нашей стране.

Современное состояние динамики сооружений определено целым рядом важных работ советских ученых, которым принадлежит основная заслуга в разработке и развитии принципиально новых и практически важных методов решения задач динамики сооружений.

Общеизвестны имена А. Н. Крылова, Н. М. Крылова, Н. Н. Боголюбова, Н. М. Беляева, И. М. Рабиновича, Г Н. Савина, А. Ю. Ишлинского, В. З. Власова, Н. И. Безухова, К. С. Завриева, С. А. Бернштейна, А. Ф. Смирнова, Н. К. Снитко, И. И. Гольденблата, А. П. Филиппова, Я. Л. Нудельмана, В. Г. Чудновского и других ученых, внесших крупный вклад в развитие динамики сооружений[1].

Методы динамического расчета сооружений и теперь продолжают оставаться в центре внимания советских ученых. Научные исследования в этой области идут по пути уточнения существующих методов и изыскания новых, а также по пути приближения их к целям инженерной практики.

Первая часть реферируемой работы посвящена построению общей теории колебаний стержневых систем и разработке аналитических и экспериментальных методов решения задач динамики стержневых систем.

Первая часть состоит из двух разделов.

В первом разделе рассматривается применение интегральных и интегро-дифференциальных уравнений в теории кобаний стержневых систем.

---

[1]) Подробная библиография дана в работе И. М. Рабиновича „Достижения строительной механики стержневых систем в СССР". Краткий обзор. Академия Архитектуры СССР 1949.

Аппарат интегральных и интегро-дифферециальных уравнений, как средство для исследования задач динамики стержневых систем, был избран по двум соображениям: во-первых, он дает возможность выполнять исследования, сохраняя достаточную общность (в том смысле, что результаты исследований применимы для любой стержневой системы с любым характером распределения массы и силового воздействия), во-вторых он обладает, по сравнению с аппаратом дифференциальных уравнений, большей корректностью (в том смысле, что дает естественное обоснование метода Фурье, который в его обычной форме содержит элементы произвольности, оставляет вопрос о существовании фундаментальных функций открытым и требует в каждом конкретном случае своего обоснования a posteriori).

Впервые аппарат интегральных и интегро-дифференциальных уравнений был применен к задачам динамики стержневых систем, повидимому, М. Г. Крейном, Я. Л. Нудельманом и И. В. Ананьевым. В дальнейшем он плодотворно использовался и другими исследователями (И. И. Гольденблатом, С. А. Бернштейном, В. В. Болотиным, К. Е. Китаевым и др.).

Первый раздел реферируемой работы содержит три главы.

ПЕРВАЯ ГЛАВА посвящена вопросам свободных колебаний стержневых систем

Показано, что свободные, затухающие колебания любой стержневой системы (как плоской, так и пространственной), несущей распределенные и сосредоточенные массы, описывается уравнением

$$y(x,t) + \int\limits_{L} G(x,s)\,[\ddot{y}(s,t) + \kappa\dot{y}(s,t)]\,dm(s) = 0 \quad (1)$$

где: $y(x,t)$—динамические перемещения сечений системы; $G(x,s)$—ядро (функция влияния системы), которое будет положительно определенным, симметричным и непрерывным или, по крайней мере, регулярным; $dm(s)$—масса, приходящаяся на участок ds системы; κ—коэфициент сопротивления в предположении пропорциональности сил сопротивления, действующих на участок ds, количеству движения массы $dm(s)$.

Интеграл в уравнении (1) и дальше распространяется по всей протяженности системы и понимается в смысле Чебышева - Стилтьеса.

Решение уравнения (1) найдено в форме

$$y(x,t)=e^{-\frac{\kappa}{2}t}\sum_{i=1}^{\infty}(A_i \operatorname{Cos} P_i t+B_i \operatorname{Sin} P_i t)\varphi_i(x) \tag{2}$$

Произвольные постоянные A_i и B_i находятся из начальных условий

$$y(x,0)=\eta_1(x); \qquad \dot{y}(x,0)=\eta_2(x) \tag{3}$$

по формулам

$$A_i=\int_L \eta_1(s)\varphi_i(s)\,dm(s); \quad B_i=\frac{1}{P_i}\int_L\left[\frac{\kappa}{2}\eta_1(s)+\eta_2(s)\right]\varphi_i(s)dm(s) \tag{4}$$

Частота затухающих колебаний равна $(i=1,2,3,....)$

$$P_i=\sqrt{\lambda_i-\left(\frac{\kappa}{2}\right)^2}; \qquad \lambda_i>\left(\frac{\kappa}{2}\right)^2 \quad (i=1,2,3,...) \tag{5}$$

Входящие в формулы (2), (4) и (5) характеристические числа ($\lambda_i=\theta_i^2$; θ_i — частоты свободных незатухающих колебаний) и фундаментальные функции $[\varphi_i(x)]$ связаны нагруженным интегральным уравнением

$$\varphi(x)-\lambda\int_L G(x,s)\varphi(s)\,dm(s)=0 \tag{6}$$

Причем, фундаментальные функции обладают свойством ортонормированности

$$\int_L \varphi_i(s)\varphi_n(s)\,dm(s)=\begin{cases}1 & (i=n)\\ 0 & (i\neq n)\end{cases} \tag{7}$$

Исследования показали, что достаточными условиями разрешимости уравнения (1) в форме (2) являются: непрерывность начальных условий (3) и, по крайней мере, кусочная непрерывность их первых и вторых производных.

Основное внимание в первой главе уделено вопросам аппроксимации фундаментальных функций и характеристических чисел.

Что касается приближенного определения характеристических чисел, то тривиально обобщая известные оценки первого характеристического числа обыкновенных интегральных уравнений для нагруженных уравнений (6), будем иметь

$$\left| \sqrt[2n]{\frac{1}{A_{2n}}} \right| < \lambda_1 < \left| \sqrt{\frac{A_{2n}}{A_{2n+2}}} \right| \tag{8}$$

Здесь A_n есть n—й след ядра $G(x,s)$, определяемый выражением

$$A_n = \int_L G_n(s,s)\, dm(s) \tag{9}$$

а итерированные ядра связаны рекуррентными соотношениями

$$G_1(x,s) = G(x,s); \quad G_n(x,s) = \int_L G_{n-1}(x,u)\, G(u,s)\, dm(u) \tag{10}$$

Интерпретируя и обобщая результаты С. А. Бернштейна[2]) об оценках частоты основного тона свободных колебаний упругих систем, получим другие оценки.

$$\left| \sqrt[2n]{\frac{1}{A_{2n}}} \right| < \lambda_1 < \left| \frac{\sqrt[n]{2}}{\sqrt[n]{A_n \left(1 + \sqrt{2A_{2n} / A_n^2 - 1}\right)}} \right| \tag{11}$$

Достаточным условием справедливости этих оценок будет выполнение неравенства $2A_2 \geqslant A_1^2$.

Обобщая и интерпретируя аналогичные результаты П. Ф. Папковича[3], А. Ф. Смирнова[4] и Ван-ден-Дунгена[5], будем иметь

$$\left| \sqrt[2n]{\frac{1}{A_{2n}}} \right| < \lambda_1 < \left| \sqrt[n]{\frac{A_n}{A_{2n}}} \right| \tag{12}$$

---

[2]) Бернштейн С. А.—Новый метод определения частот колебаний упругих систем. ВИА. РККА 1939.

В работе показано, что предельная относительная погрешность вычисления частоты основного тона свободных колебаний стержневых систем, как полусуммы квадратных корней из оценок (12), не превосходит 9,5% (для $n=1$), 2% (для $n=2$) и 0,5% (для $n=3$). Кроме того установлено, что оценки (11) являются наиболее узкими.

Исследования показывают, что оценки (8), (11) и (12) можно использовать и для приближенного определения некратных частот высших порядков, если вместо следов A_n итераций ядра $G(x,s)$ подставить следы B_n итераций ядра

$$K(x,s) = G(x,s) - \sum_{i=1}^{K-1} \frac{1}{\lambda_i} \varphi_i(x) \varphi_i(s) \qquad (13)$$

и равных

$$B_n = A_n - \sum_{i=1}^{K-1} \frac{1}{\lambda_i^n}$$

Таким образом, например, согласно (12) будем иметь

$$\left| \left(A_n - \sum_{i=1}^{K-1} \frac{1}{\lambda_i^n} \right)^{-\frac{1}{2n}} \right| < \lambda_K < \left| \left(A_n - \sum_{i=1}^{K-1} \frac{1}{\lambda_i^n} \right)^{\frac{1}{n}} \left(A_{2n} - \sum_{i=1}^{K-1} \frac{1}{\lambda_i^{2n}} \right)^{-1/n} \right|$$

В результате исследования вопроса аппроксимации фундаментальных функций, доказаны теоремы, следствия из которых дают возможность приближенного определения фундаментальных функций.

ТЕОРЕМА 1. Если q_K — кратность K — го характеристического числа λ_K и $\varphi_K(x)$—соответствующая фундаментальная функция уравнения (6), ядро которого $G(x,s)$

---

[3]) Папкович П. Ф.—Об одном методе розыскания корней характеристического определителя, ПММ., Т. 1, вып. 2, 1933.

[4]) Смирнов А. Ф.—Статическая и динамическая устойчивость сооружений. Трансжелдориздат. 1947.

[5]) Van—den—Dunqen—ZAMM, № 8, p. 225, 1928.

вещественно, симметрично, положительно определенно и регулярно, то последовательность функций

$$\lambda_к K(x,x);\quad \lambda^2_к K_2(x,x);\quad \lambda^3_к K_3(x,x),\ldots\quad \lambda^n_к K_n(x,x);\ldots$$

сходится абсолютно и равномерно сверху к пределу

$$\lim_{n\to\infty} \lambda^n_к K_n(x,x) = \sum_{i=к}^{к+q_к} \varphi^2_i(x) \qquad (к=1,2,3,\ldots) \tag{14}$$

на всем промежутке изменения x при условии $dm(x) \neq 0$ Здесь $K_n(x,s)$ есть итерация ядра (13), определяемая рекуррентными соотношениями (10).

Если кратность к —го характеристического числа равна единице, то выражение (14) упрощается к виду

$$\lim_{n\to\infty} \lambda^n_к K_n(x,x) = \varphi^2_к(x); \qquad (к=1,2,3,\ldots)$$

откуда, как следствия, вытекают оценки сверху

$$|\varphi_к(x)| \leqslant \left|\sqrt{\lambda^n_к K_n(x,x)}\right| \leqslant \left|\sqrt{\lambda^{n-1}_к K_{n-1}(x,x)}\right| \leqslant \ldots$$

$$\ldots \leqslant \left|\sqrt{\lambda_к K(x,x)}\right| \tag{15}$$

Полагая в (15) к=1, получаем оценки первой фундаментальной функции сверху

$$|\varphi_1(x)| \leqslant \left|\sqrt{\lambda_1{}^n G_n(x,x)}\right| \leqslant \left|\sqrt{\lambda_1{}^{n-1} G_{n-1}(x,x)}\right| \leqslant \ldots$$

$$\ldots \leqslant \left|\sqrt{\lambda_1 G(x,x)}\right| \tag{16}$$

Эти оценки будут справедливы, если известно достаточно точное значение первого характеристического числа λ_1 Очевидно, неравенства (16) можно сохранить, если вместо точного значения λ_1 подставить оценки сверху по (8), (11) и (12). Учитывая точность этих оценок, получаем неравенства

$$\left|\varphi_1(x)\right| \leqslant \left|\frac{\sqrt{2\,G_n(x,x)}}{\sqrt{A_n\left(1+\sqrt{2A_{2n}/A^2_n-1}\right)}}\right| \leqslant \left|\sqrt[4]{\frac{A^n_{2n}G^2_n(x,x)}{A^n_{2n+2}}}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\sqrt{\frac{A_n G_n(x,x)}{A_{2n}}}\right|$$

<u>ТЕОРЕМА 2.</u> Если $q_1=q_2=1$, то последовательность функций

$$\frac{\lambda^2_2}{\lambda_2-\lambda_1}\left[G(x,x)-\lambda_1 G_2(x,x)\right];$$

$$\frac{\lambda^4_2}{\lambda^2_2-\lambda^2_1}\left[G_2(x,x)-\lambda_1^2 G_4(x,x)\right];\ldots$$

$$\frac{\lambda_2^{2n}}{\lambda_2^n-\lambda_1^n}\left[G_n(x,x)-\lambda_1^n G_{2n}(x,x)\right];\ldots.$$

сходится абсолютно и равномерно сверху к пределу

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda_2^{2n}}{\lambda_2^n-\lambda_1^n}\left[G_n(x,x)-\lambda_1^n G_{2n}(x,x)\right]=\varphi_2^2(x)$$

на всем промежутке изменения x при условии $dm(x)\neq 0$

Как следствие теоремы 2 получаем оценку для второй фундаментальной функции

$$\left|\varphi_2(x)\right| \leqslant \left|\sqrt{\frac{\lambda_2^{2n}}{\lambda_2^n-\lambda_1^n}\left[G_n(x,x)-\lambda_1^n G_{2n}(x,x)\right]}\right| \qquad (17)$$

Для случая, когда точные значения λ_1 и λ_2 неизвестны, оценку (17)можно сохранить, пользуясь оценками (8), (11) и (12). Так, например, пользуясь оценками (12), легко получить усиленное по сравнению с (17) неравенство

$$\left|\varphi_2(x)\right| \leqslant \frac{A^2_n}{A_{2n}}\left|\sqrt{\frac{A_n(A^2_n-A_{2n})}{A_{2n}(2A_{2n}-A^2_n)}\left[G_n(x,x)-\frac{1}{A_n}G_{2n}(x,x)\right]}\right|$$

которое уже не содержит характеристических чисел.

Аналогичным образом можно получить предельные формулы и оценки для фундаментальной функции любого порядка. Однако, чем выше порядок функции, тем более громоздки будут эти формулы. Можно указать более простые оценки

$$|\varphi_\kappa(x)| \leqslant \left|\sqrt{\lambda_\kappa^n G_n(x,x)}\right| \leqslant \left|\sqrt{\lambda_\kappa^{n-1} G_{n-1}(x,x)}\right| \leqslant \dots$$

$$\dots \leqslant \left|\sqrt{\lambda_\kappa G(x,x)}\right| \qquad (18)$$

В заключение первой главы рассмотрен вопрос о точности аппроксимации фундаментальных функций. Найдены оценки абсолютных погрешностей приближенного определения фундаментальных функций по приведенным оценкам. Устанавливается, что оценки (15) точнее оценок (18); однако, практически удобнее пользоваться оценками (18), так как в оценках (15) приходится иметь дело с разностями близких величин.

Результаты первой главы иллюстрируются примерами приближенного определения частот колебаний и фундаментальных функций.

Материалы первой главы, в основном, опубликованы[6].

ВТОРАЯ ГЛАВА посвящена вопросам вынужденных колебаний стержневых систем.

Показано, что вынужденные, затухающие колебания любой стержневой системы, несущей распределенные и сосредоточенные массы и загруженной распределенными и сосредоточенными силами, описываются уравнением.

$$y(x,t) + \int_L G(x,s)\,[\ddot{y}(s,t) + \kappa\dot{y}(s,t)]\,dm(s) =$$

$$= \int_L G(x,s)\,dR(s,t) \qquad (19)$$

которое отличается от уравнения (1) наличием правой части; причем, dR(s,t)—сила, приходящаяся на участок ds системы.

[6]) Бондарь Н. Г. — Об аппроксимации фундаментальных функций и функций малых динамических перемещений стержневых систем. Прикладная математика и механика, Том XV, вып. 2, АН СССР, 1951.

Решение уравнения (19) найдено в форме

$$y(x,t)=e^{-\frac{\kappa}{2}t}\sum_{i=1}^{\infty}\left[A_i\ \mathrm{Cos}P_i\ t+B_i\ \mathrm{Sin}P_i\ t+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{P_i}\int_0^t\int_L e^{\frac{\kappa}{2}\tau}\varphi_i\ (s)\ \mathrm{Sin}P_i\ (t-\tau)\,d\tau dR(s,\tau)\right]\varphi_i\ (x) \qquad (20)$$

Входящие в это выражение величины определяются формулами (3) $\div$ (7). Решение (20) уравнения (19), равно как и решение (2) уравнения (1), являются обобщением ранее полученных результатов[7]) на случай затухающих колебаний.

В работе получено решение уравнения (19) для некоторых частных случаев нагрузки и установлены условия возникновения резонанса и квазирезонанса.

Для определения решения уравнения (19) при установившемся режиме колебаний, применен, впервые, метод последовательных приближений.

Показано, что динамические перемещения при установившемся режиме колебаний определяются частным решением уравнения (19), которое представим в виде

$$y(x,t)=f(x,t)-\int_L G\ (x,s)\ F\,[y\,(s,t)]\ dm\,(s) \qquad (21)$$

где введены операторы

$$f(x,t)=\int_L G(x,s)\ dR\,(s,t);\quad F[y\,(s,t)]=\ddot{y}\,(s,t)+\kappa\dot{y}\,(s,t)$$

Определяя последовательные приближения рекуррентным соотношением

$$y_{n+1}(x,t)=f\,(x,t)-\int_L G\,(x,s)\ F\,[y_n\ (s,t)]\ dm\,(s)$$

для частного решения уравнения (21) получаем выражение

---

[7]) Гантмахер Ф. Р. и Крейн М. Г.—Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем. ГИТТЛ 1950.

$$y(x,t) = f(x,t) + \sum_{\kappa=1}^{\infty} (-1)^{\kappa} \int_L G_{\kappa}(x,s) F_{\kappa}[f(s,t)]\, dm(s) \qquad (22)$$

Входящие в (22) функции определяются рекуррентными соотношениями (10) и

$$F_1[f(x,t)] = F[f(x,t)]$$

$$F_{\kappa}\Big[f(x,t)\Big] = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\Big\{F_{\kappa-1}\Big[f(x,t)\Big]\Big\} + \kappa \frac{\partial}{\partial t}\Big\{F_{\kappa-1}\Big[f(x,t)\Big]\Big\}$$

В работе выясняются условия разрешимости уравнения (19) в форме (22). Показано, что эти условия формулируются теоремами:

ТЕОРЕМА 3. Если вещественная функция $f(x,t)$ имеет производную по времени любого порядка и, кроме того, имеют место неравенства

$$F_{\kappa}[f(x,t)] \leqslant F^{\kappa}[f(x,t)]; \quad 1 \leqslant F[f(x,t) \leqslant C = \text{const}.$$

для всех x и $T_1 \leqslant t \leqslant T_2$, то последовательные приближения сходятся абсолютно и равномерно для тех регулярных вещественных ядер $G(x,s)$, для которых

$$C < \frac{1}{\left|\sqrt{A_2}\right|}; \quad A_2 = \int_L\int_L G^2(x,s)\,dm(s)\,dm(x)$$

Предел (22) последовательных приближений и есть частное решение нагруженного интегро-дифференциального уравнения (19) в том же промежутке $T_1 \leqslant t \leqslant T_2$ при условии, что $dm(x) \neq O$ на всем промежутке изменения x.

ТЕОРЕМА 4. Если правая часть нагруженного интегро-дифференциального уравнения с регулярным ядром имеет 2n производных по t и удовлетворяет однородному дифференциальному уравнению $F_n[f(x,t)] = O$, то частное решение уравнения (19) можно представить в замкнутой форме

$$y(x,t) = f(x,t) + \sum_{\kappa=1}^{n-1} (-1)^{\kappa} \int_L G_{\kappa}(x,s) F_{\kappa}[f(s,t)]\, dm(s)$$

при условии, что $dm[x]\neq O$ на всем промежутке изменения x.

В работе рассматриваются вопросы оценки точности решения при пользовании конечным числом членов ряда [22].

С этой целью доказаны две теоремы об интегро-дифференциальных неравенствах, аналогичных известным дифференциальным неравенствам С. А. Чаплыгина.

Рассматриваются некоторые частные случаи нагрузки [пульсирующая и подвижная нагрузка]; теоретические соображения иллюстрируются примерами.

Результаты второй главы, в основном, опубликованы[6,8,9].

ТРЕТЬЯ ГЛАВА посвящена вопросам динамики, главным образом, пологих бесшарнирных параболических арок с изменением момента инерции нормальных сечений по закону $J_s = J_x \cos\varphi_x$ где и J_s и J_x — моменты инерции, соответственно, сечения в замке и на растоянии x от замка, φ_x — угол наклона к горизонту касательной к оси арки в сечении с абсциссой x.

Глава начинается с исследования свободных колебаний пологих арок, описываемых уравнением

$$y^{IV}(x,t)+\frac{m}{EJ_s}\ddot{y}(x,t)+\frac{15m}{2EJ_s nL^3}\int_{-L/2}^{L/2}\left(2s^2-\frac{4}{L^2}s^4-\right.$$

$$\left.-\frac{L^2}{4}\right)\ddot{y}(s,t)ds=O \qquad (23)$$

где $n = 1+\frac{45}{4}\frac{l_s^2}{f^2}$; l_s^2 — квадрат радиуса инерции замкового сечения, f — стрела подъема оси арки, m — интенсивность равномерно распределенной по пролету L массы.

Применяя к уравнению (23) метод Фурье, найдены частоты свободных колебаний и фундаментальные функции. Доказана ортогональность системы фундаментальных функций.

Рассмотрено несколько задач о вынужденных колебаниях арок, вызываемых различными видами подвижной и

---

8) Бондарь Н. Г.—О точности некоторых приближенных методов вычисления собственных чисел квадратных матриц. Труды ДИИТ'а вып. XXIII, Трансжелдориздат, 1953.

9) Бондарь Н. Г. – О некоторых случаях представления чисто вынужденных колебаний стержневых систем в замкнутой форме. Труды ДИИТ'а вып. XXI. Трансжелдориздат, 1951 г.

неподвижной нагрузки. В частности, в случае равномерно распределенной по пролету нагрузки интенсивностью $q\sin\omega t$, для установившихся колебаний получено решение в замкнутой форме

$$y(x,t)=\left[D_1(\mathrm{ch}\,ax-\alpha r)+D_3(\cos ax-\beta r)-\frac{q}{m\omega^2}\right]\sin\omega t$$

где обозначено

$$D_1=-\frac{q\sin\frac{aL}{2}}{m\omega^2\Delta};\quad D_3=-\frac{q\,\mathrm{sh}\frac{aL}{2}}{m\omega^2\Delta};\quad a=\sqrt[4]{\frac{m\omega^2}{EJs}}\quad r=\frac{f^2}{i^2_s}$$

$$\alpha=\frac{10,65}{a^3L^3}\left[-\left(1+\frac{12}{a^2L^2}\right)\mathrm{sh}\frac{aL}{2}+\frac{6}{aL}\mathrm{ch}\frac{aL}{2}\right];$$

$$\beta=\frac{10,65}{a^3L^3}\left[\left(1-\frac{12}{a^2L^2}\right)\sin\frac{aL}{2}+\frac{6}{aL}\cos\frac{aL}{2}\right]$$

$$\Delta=-\left(\mathrm{ch}\frac{aL}{2}-\alpha r\right)\sin\frac{aL}{2}-\left(\cos\frac{aL}{2}-\beta r\right)\mathrm{sh}\frac{aL}{2}$$

Для той же пульсирующей нагрузки рассмотрена задача определения динамических внутренних усилий в арке. В частности, для динамических изгибающих моментов в замке и пяте получены выражения

$$M(O,t)=-\frac{q}{\Delta}\left[\frac{L}{2a}\mathrm{sh}\frac{aL}{2}\sin\frac{aL}{2}+\frac{1}{a^2}\left(\sin\frac{aL}{2}-\mathrm{sh}\frac{aL}{2}\right)\right]\sin\omega t$$

$$M\left(\frac{L}{2},t\right)=-\frac{q}{\Delta}\left[\frac{L}{2a}\mathrm{sh}\frac{aL}{2}\sin\frac{La}{2}-\frac{1}{a^2}\left(\mathrm{sh}\frac{aL}{2}\cos\frac{aL}{2}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\sin\frac{aL}{2}\mathrm{ch}\frac{aL}{2}\right)\right]\sin\omega t$$

Результаты этой главы, в основном, опубликованы[10]).

---

10) Бондарь Н. Г.—Динамическая устойчивость и колебания бесшарнирных параболических арок, Инженерный сборник АН СССР, т. XIII, 1952.

В первом разделе реферируемой работы дано принципиальное решение, вообще говоря, любой задачи динамики стержневых систем. Однако, если система достаточно сложная, то найденные приемы решения задач стержневых систем требуют громоздких вычислений. В связи с этим возникает необходимость разработки практически приемлемых приемов решения задач динамики сложных стержневых систем. Одним из таких приемов может служить метод электрического моделирования.

Следует отметить, что за последнее время разработка теории и практики электрического моделирования различных процессов значительно продвинулась вперед благодаря исследованиям ряда советских ученых (А. Н. Крылов, Г. М. Крижижановский, Н. Г. Бруевич. С. А. Гершгорин, Л. И. Гутенмахер, Л. А. Люстерник, Н. В. Корольков, Ю. Г. Толстов и др.)

Вопросы электрического моделирования колебаний стержневых систем разработаны для продольных (В. А. Лазарян, Б. Д. Лапкин) и крутильных (И. М. Тегельбаум) колебаний стержней.

Что касается моделирования изгибных колебаний стержневых систем, то недавно (после сдачи работы на защиту) нам стало известно, что этим вопросом занимался И. М. Тетельбаум[11]).

Этот же вопрос рассматривается во втором разделе реферируемой работы. Однако, данная нами методика построения моделей принципиально отличается от методики И. М. Тетельбаума и является, по нашему мнению, более простой. Кроме того, нами рассмотрен ряд вопросов теории и практики электрического моделирования колебаний стержневых систем, которые не рассматривались И. М. Тетельбаумом.

Второй раздел состоит из двух глав.

ЧЕТВЕРТАЯ ГЛАВА посвящена разработке теории электрического моделирования интегральных уравнений Фредгольма I и II рода, интегро - дифференциальных уравнений (19) и систем интегро-дифференциальных уравнений с симметрическими ядрами.

---

[11]) Тетельбаум И. М.—Электрическое моделирование изгибных колебаний и метод динамических жесткостей. Оборонгиз, 1949 г.

Используя идею удваивания узлов[12] и применяя новый прием подбора токов, в четвертой главе доказывается принципиальная возможность электрического моделирования упомянутых уравнений на электрических сетках, составленных из активных и реактивных сопротивлений, без каких-либо ограничений для ядра.

ПЯТАЯ ГЛАВА посвящена разработке методики практического использования результатов четвертой главы для решения задач динамики стержневых систем на электрических моделях.

Если сосредоточить массу стержневой системы в конечном числе (n) точек, то уравнение (19) вынужденных колебаний приближенно можно представить так

$$y_i(t) + \sum_{i=1}^{n} \delta_{ik}\left[M_k \ddot{y}_k(t) + \Phi_{ik}\dot{y}_k(t)\right] = f_i(t) \qquad (24)$$

$$(i=1,2,3,\ldots n)$$

где $y_i(t)$ — динамические перемещения массы M_i; ($i = 1,2,3,\ldots n$); δ_{ki} — коэфициенты влияния, $f_i(t)$ — статическое перемещение массы M_i, вызванное внешней нагрузкой, переменной во времени, Φ_{ik} — коэфициенты сопротивления, т.е. элементы матрицы функции рассеивания, обладающие свойством положительности ($\Phi_{ii} > O$) и симметричности ($\Phi_{ki} = \Phi_{ik}$). Этим же свойством, как известно, обладают и коэфициенты влияния т.е. $\delta_{ii} > O$; $\delta_{ik} = \delta_{ki}$.

Побочные коэфициенты влияния могут быть положительными и отрицательными.

Для определенности положим

$$\begin{array}{lll} \delta_{iq} > O; & (q \neq i), & (q = \ldots . m) \\ \delta_{i\varsigma} < O, & (\varsigma \neq i), & (\varsigma = \ldots . r) \end{array} \quad (m + r = n - 1) \qquad (25)$$

Тогда систему (24) можно переписать так

$$y_i(t) + \delta_{ii}\left[M_i \ddot{y}_i(t) + \Phi_{ii}\dot{y}_i(t)\right] + \sum_{q}^{m} \delta_{iq}\left[M_q \ddot{y}_q(t) + \right.$$

[12]) Люстерник Л. А. — Об электрическом моделировании симметрических матриц, УМН, т. IV, вып. 2, 1949.

$$+\Phi_{iq}\dot{y}_q(t)\Big]-\sum_{\varsigma}^{r}\left|\delta_{i\varsigma}\right|\Big[M_{\varsigma}\ddot{y}_{\varsigma}(t)+\Phi_{i\varsigma}\dot{y}_{\varsigma}(t)\Big]=f_i(t) \qquad (26)$$

Построим электрическую сетку, состоящую из 2n попарно одинаковых двухполюсников A_i и B_i представляющих собой элементарные колебательные контуры, состоящие из параллельно подключенных самоиндукции L_i, емкости C_{ii} и сопротивления R_{ii}.

Один полюс всех двухполюсников A_i и B_i накоротко замкнем, а другие полюсы соединим двухполюсниками E_{ik}, составленными из параллельно подключенных емкости C_{ik} и сопротивления R_{ik}. Причем, согласно условий (25), двухполюсники A_i и B_q, а также A_q и B_i свяжем двухполюсником E_{iq}, а двухполюсники A_i и A_ς, а также B_i и B_ς свяжем двухполюсниками $E_{i\varsigma}$.

В незакороченные полюсы двухполюсников A_i и B_i подадим токи, соответственно равные $J_i(t)$ и $-J_i(t)$. Тогда, в силу первого закона Киргофа, алгебраическая сумма токов, сходящихся в незакороченном узле двухполюсника A_i будет равна нулю, т.е.

$$\frac{\psi_i(t)}{L_i}+\ddot{\psi}_i(t)\sum_{k=1}^{n}C_{ik}+\dot{\psi}_i(t)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{R_{ik}}+\sum_{q}^{m}\left[C_{iq}\ddot{\psi}_q(t)+\frac{\dot{\psi}_q(t)}{R_{iq}}\right]-$$

$$-\sum_{\varsigma}^{r}\left[C_{i\varsigma}\ddot{\psi}_\varsigma(t)+\frac{\dot{\psi}_\varsigma(t)}{R_{i\varsigma}}\right)=J_i(t) \qquad (27)$$

$$(i=1,2,3,\ldots,n)$$

где через $\psi_i(t)$ обозначен магнитный поток (потокосцепление) в самоиндукции L_i двухполюсника A_i, равный

$$\psi_i(t)=\int_0^t u_i(\tau)d\tau; \qquad [\,u(t)\text{ — напряжение}]$$

Как видим, уравнения (26) и (27) по своему характеру вполне аналогичны, что указывает на возможность решения уравнений (26) на вышеупомянутой сетке.

Приводя, обычным образом[13], уравнения (26) и (27) к безразмерному виду и приравнивая коэфициенты при аналогичных членах, получаем критерии подобия

[13]) Гутенмахер Л. И.—Электрические модели. АН СССР, 1949.

$$M_i \delta_{ii} = L_i N^2 \sum_{k=1}^{n} C_{ik}; \qquad M_i M_k \delta^2_{ik} = L_i L_k C^2_{ik} N^4$$

$$\Phi_{ii} \delta_{ii} = L_i N \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{R_{ik}}; \qquad \Phi^2_{ik} \delta^2_{ik} = L_i L_k \frac{N^2}{R^2_{ik}}$$

$$(i, k = 1, 2, 3, \ldots n)$$

где N—фактор ускорения (процесс в электрической модели протекает в N раз быстрее, чем в стержневой системе).

Решение системы (26) получаем, относя осциллограммы токов, проходимых через самоиндукции L_i двухполюсников A_i, к масштабам правых частей уравнений (26).

В рефирируемой работе разработана методика построения моделей и подбора параметров как для балочных, так и для арочных и рамных стержневых систем.

Найдено, что электрические модели с двухполюсниками можно осуществить для стержневых систем, коэфициенты влияния которых удовлетворяют условию

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\delta_{ik}}{\delta_{ii}} \leqslant 1 \qquad (i \neq k, \ i = 1, 2, 3, \ldots n)$$

Для стержневых систем, не удовлетворяющих этому условию, разработана методика построения моделей с четырехполюсниками (усилителями и трансформаторами)

Рассмотрены вопросы электромоделирования как установившихся, так и переходных режимов колебаний стержневых систем при произвольных начальных условиях.

В работе подвергнуты исследованию некоторые вопросы точности решения задач динамики стержневых систем на электрических моделях. В частности, дается прием учета собственных сопротивлений индуктивных катушек при моделировании затухающих колебаний.

Теоретические соображения иллюстрируются решением конкретных задач динамики стержневых систем по первой и второй системам электродинамических аналогий.

Вкратце отметим преимущества метода решения задач динамики стержневых систем на электрических моделях по сравнению с аналитическими методами. Они, в основном, сводятся к следующему:

а) устраняется необходимость в громоздких вычислениях;
б) решение дается в виде графика;
в) с одинаковой легкостью дается решение для динамического перемещения, скорости и ускорения точек колеблющейся системы;
г) имеется возможность получать решения задач, аналитическое решение для которых неизвестно или практически неприемлемо. Например, осуществляя модели с переменной емкостью или индуктивностью мы получаем возможность моделировать квазигармонические колебания стержневых систем.

Заметим, что эффективность метода электромоделирования проявляется тем больше, чем сложнее рассматриваемая стержневая система.

III

В современном советском мостостроении широкое распространение получили железобетонные арочные мосты.

Например, недавно закончено строительство ряда больших железобетонных мостов; причем, пролетное строение одного из мостов является крупнейшим в мире. Постройка этих уникальных сооружений Сталинской эпохи еще раз подтвердила, что советское мостостроение является самым передовым в мире. Столь крупные победы советского мостостроения явились результатом неуклонной заботы партии и правительства о развитии теории и практики советского мостостроения.

XIX съезд Коммунистической Партии Советского Союза поставил перед советскими железнодорожниками ответственные задачи: „Предусмотреть рост грузооборота железнодорожного транспорта на 1955 год по сравнению с 1950 годом на 35—40%...", „...Приступить к производству новых мощных паровозов, электровозов и тепловозов...", „...Сократить... время оборота вагонов не менее чем на 18%,... увеличить круглосуточный пробег паровозов не менее чем на 12%,... увеличить вес грузовых поездов..."[14].

Одним из путей решения этих задач является увеличение скоростей движения и веса поездов. А это, в свою очередь, делает все более актуальным динамический расчет мостов.

---

[14]) Сабуров М. З.— Доклад о директивах XIX съезда партии по пятому пятилетнему плану развития СССР на 1951—1955 годы. Большевик, № 19, 1952 г.

Советскими учеными: А. Н. Крыловым, И. М. Рабиновичем, Н. С. Стрелецким, С. А. Бернштейном, С. А. Ильясевичем, В. В. Болотиным, Н. Н. Максимовым, И. И. Казеем и другими учеными много сделано в области теоретических и экспериментальных исследований динамики балочных мостов.

Значительно меньше исследована динамика арочных мостов; причем, эти исследования являются, главным образом, экспериментальными, выполненными без предварительного теоретического освещения вопроса и поэтому имеющими случайный характер и, подчас, неправильную методологию. Неправильность методологии в некоторых экспериментах заключалась в том, что динамические коэфициенты определялись по прогибам в замке арок, т.е. в нуле первой и основной формы колебаний, в связи с чем получались заниженные значения динамических коэфициентов.

Все это определило несовершенство метода учета динамического фактора при расчете арочных мостов, путем использования динамического коэфициента, рекомендуемого § 73 ТУПМ—47. О несовершенстве рекомендуемого динамического коэфициента говорит хотя бы то обстоятельство, что точно такой же коэфициент рекомендуется для балочных и рамных железобетонных мостов.

Совершенно очевидно, что вопрос динамического воздействия поездной нагрузки на арочные железобетонные мосты требует уточнения. Этому и посвящена вторая часть реферируемой работы, выполненная по указаниям МПС на основании приказов 030/ЦЗ от 8/II-51 г. и 027/ЦЗ от 14/I-52 г.

Вторая часть реферируемой работы состоит из трех глав.

ШЕСТАЯ ГЛАВА посвящена определению частот свободных колебаний мостовых арок и арочных пролетных строений.

Рассматривались бесшарнирные параболические и цепные (очерченные по цепной линии) арки с изменением моментов инерции поперечных сечений по закону

$$\frac{J_s}{J_x \cos\varphi_x} = 1-(1-n)\varepsilon; \qquad \left(\varepsilon = \frac{2x}{L}\right)$$

где n — коэфициент развития сечений.

В основу решения задачи определения частот свободных колебаний было положено предположение о линейности

свободных колебаний арочных систем. Задача решалась путем использования оценок (11) и (12) для параболических арок с бесконечным числом степеней свободы и цепных арок с конечным числом степеней свободы (сосредоточение массы в замке и четвертях).

Для определения линейной частоты основного тона плоских свободных колебаний арок получены формулы вида

$$\nu = \frac{K}{2\pi L^2}\sqrt{\frac{EJ_s\, g}{q_s}} \qquad K = 100\sqrt{\frac{C_1 + C_2\alpha^2}{(\gamma + s)(C_3 + C_4\alpha^2 + C_5\alpha^4)}} \quad (28)$$

$$\gamma = \frac{q_p}{q_s} \qquad s = 0{,}275m + 0{,}725$$

где: $\alpha = \frac{f}{L}$ — характеристика пологости арки, EJ_s — жесткость арки в замке, g — ускорение силы тяжести, q_s — интенсивность постоянной нагрузки в замке, q_p — интенсивность равномерно распределенной по всему пролету временной нагрузки, m — параметр кривизны арки ($1 < m < 10$); C_i ($i = 1,2,3,4,5$)—коэфициенты, зависящие от m и n и получаемые по данным таблиц ординат линий влияния перемещений арок[15].

Исследования показали, что предельная относительная погрешность определения частоты основного тона по формулам (28) не превосходит 8%.

Получены простые формулы для вычисления частоты основного тона плоских свободных колебаний весьма пологих мостовых арок. Так, например, для параболических арок имеем

$$\nu = \frac{12{,}7 - 3{,}3\,n}{L^2}\sqrt{\frac{EJ_s g}{q_s}} \qquad (\text{при } n=1, \quad K \cong 3\pi)$$

Проведено исследование влияния обжатия оси арки на частоту основного тона свободных колебаний её. Показано, что этим обстоятельством можно пренебречь даже для очень пологих арок.

В реферируемой работе впервые исследуются частоты пространственных колебаний арок. Оказывается, что первая формула (28) остается справедливой и в этом случае. Что

---

[15]) Бондарь Н. Г. — Определение перемещений в арках и сводах массивных мостов, Труды ДИИТа, вып. XXI, Трансжелдориздат, 1951.

касается формулы для коэфициента частоты, то она приобретает вид

$$K=100\sqrt{\frac{C_1+C_2\alpha^2+\rho B_1}{(\gamma+s)(C_3+C_4\alpha^2+C_5\alpha^4+\rho^2 B_2)}}$$

где ρ—отношение моментов инерции сечения в замке относительно центральных главных осей; B_1 и B_2—соответственно, линейная и квадратичная формы пространственных перемещений арки.

Вычисления показывают, что частота пространственных колебаний бесшарнирных арок железобетонных мостов примерно в четыре раза меньше частоты плоских колебаний. Это указывает на возможность появления параметрических пространственных колебаний мостовых арок.

Применяя к дифференциальной системе свободных колебаний арок, несущих равные массы М в четвертях (точки 1 и 3) и замке (точка 2), новый прием приведения к главным координатам, получены приближенные формулы для определения высших частот. Так например, для пологих арок

$$\nu_1=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{M(\delta_{11}-\delta_{13})}};\quad \nu_2=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\alpha_2}{M(\delta_{22}\alpha_2-2\delta_{12})}};$$

$$\nu_3=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\alpha_1}{M(\delta_{22}\alpha_1+2\delta_{12})}} \tag{29}$$

$$\alpha_{1,2}=\left|-\Delta\pm\sqrt{\Delta^2+2}\right|;\ \Delta=\frac{1}{2\delta_{12}}(\delta_{22}-\delta_{11}-\delta_{13})$$

где δ_{ik} (i,к=1,2,3)—коэфициенты влияния.

В реферируемой работе впервые делается попытка приближенной оценки частоты основного тона плоских свободных колебаний пролетных строений с ездой по верху. Причем, под частотой колебаний пролетного строения понимается частота основного несущего элемента конструкции—арки или свода с учетом влияния надарочного строения на перемещения арки и влияния характера расположения нагрузок.

Исследования показали, что частоты кососимметричных форм колебаний арок и пролетных строений мало отличаются.

Некоторые результаты, приведенные в шестой главе, получены ранее в кандидатской диссертации[16]).

---

[16]) Бондарь Н. Г. — О жесткости и частоте свободных колебаний арочных конструкций массивных мостов. МИИТ. 1948 г.

Материалы этой главы, в основном, опубликованы[17, 18, 19].

СЕДЬМАЯ ГЛАВА посвящена разработке методики приближенного динамического расчета арок железнодорожных массивных мостов.

Строго говоря, вынужденные колебания пролетных строений мостов являются квазигармоническими, т. к. подвижная нагрузка обладает массой Исследование вынужденных квазигармонических колебаний мостов представляет значительные математические трудности. Впервые их преодолел, повидимому, В. В. Болотин[20], который установил, приближенно, скорости движения нагрузки и частоты возмущающих сил, при которых имеет место наибольший динамический эффект в балочных мостах.

Идя по пути максимального упрощения расчетов, с целью возможности их практического использования, мы рассматривали гармонические колебания мостовых арок. Показано, что такая идеализация не вносит больших погрешностей.

Используя результаты экспериментальных исследований[21] различных факторов динамического воздействия поезда на пролетные строения, мы принимали во внимание при расчетах действие неуравновешенных частей паровозов и колебания надрессорного строения.

Сначала были подвергнуты исследованию пологие мостовые арки. В качестве расчетной схемы принята дискретная система, несущая равные массы М, сосредоточенные в четвертях (точки 1 и 3) и замке (точка 2). Рассcматривались вынужденные колебания расчетной схемы под влиянием движущейся с постоянной скоростью v пульсирующей силы $Q\cos\omega t$. Систему уравнений вынужденных колебаний расчетной схемы удалось привести к главным координатам

---

[17]) Бондарь Н. Г.— О частоте свободных колебаний арочных конструкций массивных мостов. Труды ДИИТ'а, вып. XX Трансжелдориздат, 1950.

[18]) Бондарь Н. Г— О частоте свободных пространственных колебаний бесшарнирных арок и сводов массивных мостов. Инженерный сборник АН СССР, т. VIII, 1950.

[19]) Бондарь Н. Г.— О частоте плоских, свободных, незатухающих колебаний бесшарнирных параболических и цепных арок переменного сечения. Инженерный сборник АН СССР, т. XI, 1952.

[20]) Болотин В. В.— О воздействии подвижной нагрузки на мосты. Труды МИИТ'а, вып. 74. Трансжелдориздат, 1950.

[21]) Максимов Н. Н., Казей И. И., Муров А. И.— Динамические коэффициенты металлических балочных пролетных строений железнодорожных мостов, Трансжелдориздат, 1939.

$$\left.\begin{aligned}
&\ddot{z}_1(t)+2\delta\nu_1\dot{z}_1(t)+4\pi^2\nu_1^2 z_1(t)=-8\pi^2\nu_1^2 QB_1\sin\frac{2\pi}{L}\left(\upsilon t-\frac{L}{2}\right)\cos\omega t\\
&\ddot{F}_2(t)+2\delta\nu_2\dot{F}_2(t)+4\pi^2\nu_2^2 F_2(t)=-4\pi^2\nu_2^2\alpha_2 QB_2\cos\frac{K}{L}\left(\upsilon t-\frac{L}{2}\right)\cos\omega t\\
&\ddot{F}_3(t)+2\delta\nu_3\dot{F}_3(t)+4\pi^2\nu_3^2 F_3(t)=4\pi^2\nu_3^2\alpha_1 QB_2\cos\frac{K}{L}\left(\upsilon t-\frac{L}{2}\right)\cos\omega t
\end{aligned}\right\}(30)$$

где: δ — логарифмический декремент затухания; B_1, B_2 и K—коэфициенты, зависящие от геометрии арки.

Значения частот колебаний ν_i $(i=1,2,3)$ и коэфициентов приведения α_1 и α_2 даны формулой (29).

Найдя решения уравнений (30), вертикальные динамические перемещения y_i (t) расчетной схемы получим так

$$y_1(t)=\frac{1}{2}\Big[z_1(t)+z_2(t)\Big];\qquad y_2(t)=\frac{F_3(t)-F_2(t)}{\alpha_1+\alpha_2}$$

$$y_3(t)=\frac{1}{2}\Big[z_2(t)-z_1(t)\Big],\qquad z_2(t)=F_2(t)+\alpha_2 y_2(t)$$

Исследование влияния высших форм колебаний на динамические перемещения и ускорения точек расчетной схемы показало, что достаточно принимать во внимание только первую форму колебаний,т .е. можно полагать $F_2(t)=F_3(t)=0$, что соответствует расчетной схеме с массами только в четвертях пролета.

В результате исследований разработана простая методика приближенного динамического расчета пологих мостовых арок, сущность которой сводится, в основном, к учету дополнительных вертикальных сил инерции (J_1 и J_2), действующих в четвертях арки и равных

$$J_1(t)=-\frac{1}{2}\ddot{z}_1(t)(M_п+Q_{1п});\qquad J_2(t)=\frac{1}{2}\ddot{z}_1(t)(M_п+Q_{3п})$$

где: $Q_{1п}$ и $Q_{3п}$ — массы неподрессоренных частей поезда, находящихся на полупролетах, $M_п$ — приведенная масса пролетного строения

$$M_п=\frac{1}{\theta_1^2(\delta_{11}-\delta_{13})}$$

θ_1—круговая частота основного тона колебаний пологой арки с бесконечным числом степеней свободы, $\ddot{z}_1(t)$ — главное ускорение от поездной нагрузки, равное

$$\ddot{z}_1(t) = -4\sqrt{2\frac{\pi B_1}{\delta g}}\,\theta_1^2\left(\theta_1^2 + \frac{4\pi^2}{L^2}\upsilon^2_{кр}\right)\sum_{i=1}^{n}\Big[\sin\theta_1 t_i +$$

$$+\frac{2\pi\kappa_0}{\delta}B_1 W_i\,\theta_1^2 \sin(\theta_1 t_i + \gamma)\Big]\ R_i\,r_i\,\sin\frac{2\pi}{L}\upsilon_{кр}t_i$$

$$t_i = t - \frac{(i-1)a}{\upsilon_{кр}};\quad \kappa_0 = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta)^2 + \Delta_0^2\beta^2}};\quad \gamma = \mathrm{arctg}\frac{1-\beta^2}{\Delta_0\beta};$$

$$\beta = \frac{\theta_1}{\theta_0};\quad \upsilon_{кр} = \frac{d}{2}\theta_1$$

где: R_i — неуравновешенность i—ой оси паровоза; r_i — расстояние от центра колеса до центра тяжести противовеса, $\upsilon_{кр}$ — критическая скорость, d — диаметр неуравновешенного колеса, a — расстояние между неуравновешенными колесами, n — число неуравновешенных осей, находящихся на пролетном строении, W_i — масса подрессоренной части паровоза, приходящаяся на одну ось, θ_0 — частота колебаний надрессорного строения, Δ_0 — фактор затухания колебаний рессор.

Аналогичным образом построена схема приближенного динамического расчета подъемистых мостовых арок. Различие заключается в необходимости учета горизонтальных сил инерции, сосредоточенных в четвертях пролета.

Значительное место в седьмой главе занимает исследование динамических коэфициентов. Показано, что динамические коэфициенты для различных внутренних усилий могут значительно отличаться и, кроме того, их значения определяются, главным образом, пролетом L и характеристикой пологости $(\alpha = \frac{f}{L})$

В результате исследований получены следующие формулы динамических коэфициентов:

для момента в пяте

$$(1+\mu)_{M_к} = 1 + \frac{300}{(L-26)(100\alpha+28)}$$

для момента в четверти

$$(1+\mu)_{M_\nu} = 1 + \frac{150\alpha + 165}{(L-26)(100\alpha+28)}$$

для момента в замке

$$(1+\mu)_{M_S}=1+\frac{39}{(L-26)(59-100\alpha)}$$

для распора

$$(1+\mu)_H=1+\frac{320\alpha+23,5}{(L-26)(100\alpha+28)}$$

Установлены пределы применимости этих формул

$$40м\leqslant L\leqslant 110м; \quad 0,1\leqslant\alpha\leqslant 0,5$$

В заключение седьмой главы дана оценка влияния балластной езды на динамику арочных пролетных строений. Показано, что этим влиянием можно пренебречь.

ВОСЬМАЯ ГЛАВА посвящена экспериментальным исследованиям динамики арочных пролетных строений железнодорожных мостов.

В основу этих исследований было положено арочное пролетное строение расчетным пролетом 52 м. Причем, это пролетное строение исследовалось как в натуре, так и на моделях, одна из которых—металлическая, пролетом в 1/30 натуральной величины, а другая модель—железобетонная, пролетом в 1/4 натуральной величины.

Кроме того, в натуре исследовались также пролетные строения расчетным пролетом 29 м и 106 м (с ездою по середине).

Объектом исследований были: частота свободных колебаний (как плоских, так и пространственных), статические и динамические перемещения сечений арок, динамические напряжения в арматуре арок, (пята, четверть, замок) от различных видов динамической нагрузки.

В экспериментах на железобетонной модели и в натуре принимал участие Е. В. Дорошенко.

Результаты экспериментов достаточно хорошо подтвердили теоретические соображения шестой и седьмой глав. Материалы экспериментов, в основном, опубликованы[22,23].

---

[22]) Бондарь Н. Г. и Дорошенко Е. В.—Опыт изучения динамических характеристик арок железобетонных мостов, Железнодорожное строительство, № 9, 1952.

[23]) Бондарь Н. Г. и Дорошенко Е. В.— Экспериментальные исследования некоторых вопросов работы арочных пролетных строений мостов. Труды ДИИТ'а, вып. XXIII, Трансжелдориздат, 1953.

В заключение отметим, что проведенное исследование динамики арочных мостов следует рассматривать как первый шаг по пути выяснения характера динамической работы арок и сводов железнодорожных мостов.

IV

Одной из новых проблем строительной механики является проблема динамической устойчивости стержневых систем.

На актуальность разработки вопросов динамической устойчивости указывает резолюция Всесоюзного совещания по устойчивости инженерных конструкций, проведенного в институте строительной механики АН УССР в 1950 г.

Приоритет в постановке проблемы динамической устойчивости, а также в решении многих задач этой проблемы, целиком принадлежит советским ученым Н. М. Беляеву, Л. И. Мандельштаму, Н. Д. Папалекси, А. А. Андронову, М. А. Леонтовичу, Н. М. Крылову, Н. Н. Боголюбову, М. А. Лаврентьеву, А. Ю. Ишлинскому, Н. Е. Кочину, Г. Ю. Джанелидзе, И. И. Гольденблату, А. Ф. Смирнову, В. М. Челомею, М. Я. Леонову, К. Р. Коваленко, В. В. Болотину, В. Е. Салиону и др.[24])

В приложении к реферируемой работе рассматриваются некоторые вопросы динамической и статической устойчивости стержневых систем, главным образом сжато-изогнутых.

Впервые для решения задач динамической устойчивости используется аппарат интегро-дифференциальных уравнений. Показано, что динамическая неустойчивость любой стержневой системы соответствует неустойчивым решениям уравнения

$$y(x,t)+\int_L G(x,s)[\ddot{y}(s,t)+\kappa\dot{y}(s,t)]\,dm(s)=$$

$$=\mu\int_L \frac{\partial}{\partial s}G(x,s)\,y^1(s,t)\,dP(s,t) \qquad (31)$$

где $dP(x,t)=N(x,t)\,dx$, $\mu N(x,t)$ — уравнение эпюры нормальных сил от внешней нагрузки. Остальные обозначения даны на стр. 4.

Дано новое доказательство теоремы [24]) о разделении переменных, сущность которой заключается в том, что при

[24]) Бейлин Е. А. и Джанелидзе Г. Ю.—Обзор работ по динамической устойчивости упругих систем, ПММ, том XVI, вып. 5, 1952

параметрической нагрузке $dP(s,t)=P(t)dP(s)$, в случае совпадения форм потери статической устойчивости и форм свободных колебаний, уравнение (31) сводится к системе независимых уравнений

$$\ddot{T}_i(t)+\kappa\dot{T}_i(t)+\lambda_i\left[1-\frac{\mu}{\mu_i}P(t)\right]T_i(t)=0 \qquad (32)$$

$$(i=1,2,3,\ldots)$$

где μ_i — статическая критическая нагрузка;

λ_i — квадрат частоты свободных колебаний.

При этом решение уравнения (31) можно представить в виде ряда по фундаментальным функциям задачи, т.е.

$$y(x,t)=\sum_{i=1}^{\infty}T_i(t)\varphi_i(x)$$

Аналогичная теорема впервые доказана для сжато-изогнутых систем, для которых уравнение (31) становится неоднородным за счет появления в правой части члена $R(t)\int_L G(x,s)dR(s)$ (см. стр. 10), что вызывает появление в правой части уравнений (32) членов $f_i\,R(t)$, где

$$f_i=\int_L \varphi_i(s)dR(s) \qquad (i=1,2,3,\ldots,)$$

Показано, что при периодической нагрузке динамическая неустойчивость как сжатых, так и сжато-изогнутых стержневых систем определяется неустойчивыми решениями уравнений (32), которые хорошо изучены[24].

В случае, если условия теоремы о разделении переменных не выполняются, то принимая $y(x,t)=\upsilon(x)$, где $\upsilon(x)$ какая-либо функция, удовлетворяющая граничным условиям задачи, и используя метод Б. Г Галеркина, уравнение (31) можно привести к виду (32), где значения $\lambda_i=\lambda_*$ и $\mu_i=\mu_*$ будут приближенными

$$\lambda_*=\frac{J_0}{J_1} \quad \mu_*=\frac{J_0}{J_2} \quad J_0=\int_L \upsilon(x)dm(x)$$

$$J_1=\int_L\int_L G(x,s)\,\upsilon(x)\,\upsilon(s)dm(s)dm(x);$$

$$J_2=\int_L\int_L \frac{\partial}{\partial s}G(x,s)\upsilon^1(s)\upsilon(x)dP(s)dm(x)$$

Если $\upsilon(x)$ является точной формой свободных колебаний или формой потери устойчивости, то в уравнение (32) входит точное значение соответствующей величины.

Указанное приближенное разделение переменных возможно, если уравнение (31) принадлежит к типу вариационных, т.е. является уравнением Эйлера-Лагранжа определенной вариационной задачи.

В качестве иллюстрации рассмотрена устойчивость пологих бесшарнирных параболических арок, колебания которых рассмотрены в главе III (стр. 13).

Уравнение статической устойчивости получено в виде

$$y^{IV}(x)+\frac{H}{EJ_s}y^{II}(x)-\frac{30H}{L^3nEJ_s}\int_{-L/2}^{L/2}s\left(1-\frac{4}{L^2}s^2\right)y^1(s)ds=0 \qquad (33)$$

где, распор $H=\frac{qL^2}{8fn}$. Остальные обозначения приведены на стр. 13.

Применяя к уравнению (33) метод Фурье, найдены формы потери устойчивости и критические нагрузки, полученные нами[25]) ранее приближенно.

Уравнение динамической устойчивости пологой арки найдено четырехкратным дифференцированием по x уравнения (31). Так как рассматриваемая задача не удовлетворяла условиям теоремы о разделении переменных, то это разделение выполнено приближенно с использованием метода Б. Г. Галеркина. Для границ основной зоны динамической неустойчивости для нагрузки $q(t)=q\cos\omega t$ найдено, приближенно, обычное[24]) выражение

$$\omega_{кр}=2\theta^2_1\sqrt{1\pm\frac{q}{q_{кр}}}$$

Во второй части приложения к реферируемой работе впервые дана разработка применения электрического моделирования для решения задач устойчивости стержневых систем.

---

[25]) Бондарь Н. Г.—К вопросу об устойчивости арок и арочных пролетных строений, Вестник инженеров и техников, № 3, 1950.

Для электрического моделирования статической устойчивости использована известная[26]) аналогия между свободными колебаниями и устойчивостью стержневых систем. В силу этой аналогии, задача определения критических нагрузок на стержневую систему сводится к задаче определения частот свободных колебаний.

Порядок решения задач статистической устойчивости стержневых систем на электрических моделях таков:

1. Площадь эпюры нормальных сил сосредотачивается в конечном и достаточном для точности решения задачи числе точек.

2. По указанным в главе V правилам (стр. 16) строится электрическая модель системы.

3. По критериям подобия находятся параметры электрической модели. Причем, под коэфициентами влияния δ_{ik} понимаются частные значения функции влияния углов поворота системы, а под массами M_i — площади эпюры нормальных сил, сосредоточенных в точках $i=1,2...n$

4. При помощи генератора звуковой частоты снимаются частотные характеристики ω модели.

5. Так как параметр ускорения процесса N зависит от нагрузки, то из равенства $N=2\pi\omega_i$ можно определить $i=1,2...n$ критических нагрузок.

Методика и точность решения задач статической устойчивости на электрических моделях проиллюстрирована рядом примеров.

Известно[27]), что трактовка задачи динамической устойчивости на основе уравнения Матье—Хилла в ряде случаев может привести к качественно неверным результатам, в связи с чем общая теория динамической устойчивости стержневых систем может быть построена только на основе систем дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами, исследование которых весьма затруднительно.

Эти затруднения в значительной мере отпадают при решении задач динамической устойчивости стержневых систем на электрических моделях с периодически меняющимися

---

[26]) Нудельман Я. Л.—Методы определения собственных частот и критических сил для стержневых систем, Гостехиздат. 1949.

[27]) Болотин В. В.—Динамическая устойчивость сооружений. Диссертация, (автореферат опубликован), 1952 г.

параметрами. Такие модели для одной степени свободы (элементарный контур) хорошо изучены[28]).

В приложении к реферируемой работе дана разработка теории электрического моделирования динамической устойчивости стержневых систем на базе дифферинциальных систем с периодическими коэффициентами. Найдены критерии подобия и дана методика подбора параметров модели. Теория иллюстрируется примерами построения моделей.

[28]) Мандельштам Л. И. — Полное собрание трудов, т. II, изд. АН СССР, 1947.

тип. диит. зак. № 134, 2 печ. л., 48000 зн. в печ. л., подписано к печати 23-V 1953 г.
Тираж 100 экз. БТ 07525