СССР—МПС

ДНЕПРОПЕТРОВСКИЙ
ИНСТИТУТ ИНЖЕНЕРОВ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА
имени М. И. КАЛИНИНА

На правах рукописи

ПОПОВИЧ Николай Михайлович

СТАЦИОНАРНЫЕ КОЛЕБАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ, ВОЗБУЖДАЕМЫЕ ПЕРИОДИЧЕСКИМИ ИМПУЛЬСАМИ

(01.02.03 — сопротивление материалов
и строительная механика)

АВТОРЕФЕРАТ
Диссертации на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Днепропетровск
1975

СССР - МПС

ДНЕПРОПЕТРОВСКИЙ ИНСТИТУТ ИНЖЕНЕРОВ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА имени М.И.Калинина

На правах рукописи

ПОПОВИЧ Николай Михайлович

СТАЦИОНАРНЫЕ КОЛЕБАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ, ВОЗБУЖДАЕМЫЕ ПЕРИОДИЧЕСКИМИ ИМПУЛЬСАМИ

(01.02.03 - сопротивление материалов и строительная механика)

А в т о р е ф е р а т

диссертации на соискание учёной степени кандидата технических наук

Днепропетровск

1985

Работа выполнена в Днепропетровском институте инженеров железнодорожного транспорта им. М.И.Калинина .

Научный руководитель - доктор технических наук, профессор Бондарь Н.Г.

Официальные оппоненты доктор технических наук, профессор Маневич Л.И. ;
кандидат технических наук, доцент Радзиховский Ю.А.

Ведущее предприятие - Институт геотехнической механики Академии Наук Украинской ССР

Автореферат разослан " _октября 1975 года

Защита диссертации состоится 27 ноября 1975 года в 14 часов на заседании Ученого Совета Днепропетровского института инженеров железнодорожного транспорта имени .И.Калинина (320629 ГСП, Днепропетровск 10 ,ул.Университетская 2, ДИИТ) .

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке института .

Просим Вас и сотрудников Вашего учреждения,интересующихся темой диссертации, принять участие в заседании Ученого Совета или прислать свои отзывы о работе в двух экземплярах по адресу 320629 ГСП, Днепропетровск 10, ул.Университетская 2, ДИИТ

Ученый секретарь Совета института
доцент Плахотник В.Н.

Общая характеристика работы

Актуальность работы . В последние годы интенсивно развиваются различные области техники и строительства. Все более возрастает интерес к исследованиям колебательных процессов на динамические нагрузки импульсивного действия. Этому способствует быстрый рост парка машин и оборудования импульсивного действия,а также появление норм,предписывающих жесткие ограничения уровня колебаний,влияющих как на здоровье людей так и на качество точных производств .

Импульсивные нагрузки могут быть (в зависимости от технологического процесса) однократно действующие,повторяющиеся несколько раз, так и многократно действующие.

Если при однократно действующей импульсивной нагрузке после ее исчезновения происходят свободные колебания системы, то при многократном повторении ее система совершает стационарные колебания,при этом может возникать опасность ударных резонансов.

Если в системах с многими степенями свободы и линейными восстанавливающими силами решение задачи стационарных колебаний без учёта трения не вызывает затруднений,то в системах с трением, вследствии громоздкости,применяются приближенные решения. При этом учитывается тот факт,что импульсный резонанс по основной частоте собственных колебаний является наиболее опасным. Это позволяет систему с многими степенями свободы заменить системой с немногими и даже одной степенью свободы.

Учитывая тот факт,что задачи механики,строго говоря,почти все нелинейны,то значительный интерес для практики представ-

ляет решение их на динамические нагрузки периодического импульсивного действия.

Цель работы. Построение приближенных решений прикладных задач теории нелинейных колебаний при периодическом импульсном возмущении. Исследование влияния вязкого,сухого и турбулентного трений на резонансные режимы колебаний. Выявление форм движения системы при импульсном периодическом возмущении. Исследование орбитальной устойчивости существенно нелинейных колебаний систем с мягкой восстанавливающей силой .

Общая методика исследований. Решение задач стационарных колебаний при периодическом импульсном возмущении систем с мягкой и жесткой восстанавливающей силой выполнено методом переменного масштаба. Исследуются решения, полученные для стационарного режима движения на периоде (при одностороннем импульсном возмущении) и на полупериоде (при разностороннем следовании импульсов) ,полученные с использованием метода Дуффинга .

Орбитальная устойчивость существенно нелинейных колебаний для систем с мягкой упругой характеристикой исследуется при помощи метода переменного масштаба и асимптотического метода .

Научная новизна . Получено приближенное решение ряда новых задач прикладной теории нелинейных колебаний. К ним относятся задачи стационарных колебаний осцилляторов с кубической нелинейностью при вязком, сухом и турбулентном сопротивлении, возбуждаемых периодически повторяющимися мгновенными одиночными и групповыми,а также кратковременными импульсами, как односторонними, так и разносторонними .

Впервые дается приближенное решение задач орбитальной устойчивости существенно нелинейных стационарных колебаний мягких систем.

Обнаружен и объяснен неизвестный ранее эффект суб- и ультравозбуждения, вызывающий появление вторичных резонансов, и сильно влияющий на существенно нелинейные колебания мягких систем .

Практическая ценность. На основе выполненных исследований разработана методика и получены формулы для установившегося процесса систем с кубической восстанавливающей силой. Полученные в работе формулы могут быть использованы различными проектными и научно-исследовательскими организациями при проектировании и эксплуатации импульсной техники и исследовании нелинейных процессов в ряде областей науки и техники (радиотехники и электроники, автоматики и телемеханики, виброметрии и вибротранспорта, теории автоматического регулирования , теоретической физики, астрономии, нелинейной оптики и акустики, теории плазмы и строения кристаллов, гидродинамики, теории реактивных двигателей и ускорительных устройств динамики космических аппаратов и др.).

Апробация работы. Диссертационная работа и отдельные ее разделы докладывались на заседании семинара кафедр мостов Днепропетровского института инженеров железнодорожного транспорта с 1971 по 1975 г.; на юбилейной научно-технической конференции ДИИТа (секция механические колебания) ,ноябрь 1972 г.; в полном объеме диссертационная работа доложена на заседании кафедры мостов и НИЛ динамики мостов Днепропетровского института инженеров железнодорожного транспорта, июнь 1975 г.

Публикации . Основные результаты диссертационной работы опубликованы в 5 статьях и монографии „Нелинейные стационарные колебания" (глава IУ. Из-во „Наукова думка",Киев,1974).

Объем работы . Диссертация включает введение, четыре главы, выводы, список использованной литературы и содержит 179 страниц машинописного текста, 91 рисунок

Основные тезисы работы

Совершенствование методов расчета импульсной техники и гибких конструкций,подверженных действию импульсивных нагрузок,а также исследование нелинейных процессов в ряде разделов науки и техники требует развития специальных разделов прикладной теории нелинейных колебаний,в которых изучается импульсное возмущение нелинейных систем .

Весьма обширным классом динамических нагрузок,вызывающие колебания систем, являются нагрузки импульсивного действия. При достаточно малом отношении времени действия кратковременной нагрузки к наименьшему учитываемому периоду собственных колебаний системы,кратковременную нагрузку можно принимать в виде мгновенного импульса.

Импульсивные нагрузки - силовые воздействия однократного или периодического действия,достигающие за малое время такой величины,что их импульсы способны вызывать в элементах конструкций значительные скорости,ускорения и динамические напряжения. Если однократная импульсная нагрузка характеризуется четырьмя параметрами : величиной импульса,продолжительностью, законом изменения и характером распределения, то периодическая импульсивная нагрузка характеризуется шестью параметрами:

четырьмя предыдущими,а также периодом и числом повторения импульсов.

Изучение демпфирования колебаний инженерных конструкций, возбуждаемых импульсными нагрузками,имеет большое практическое и теоретическое значение [x)].

Из внешних сопротивлений в колебательных системах наиболее часто встречаются трение в опорах систем ; аэро- или гидродинамические сопротивления среды ; сопротивления,создаваемые специально вводимыми в систему демпферами и,наконец,внутреннее трение в материале

Как показывают исследования многих авторов (В.М.Андриевский,Ю.И.Костерин,В.Г.Крагельский,В.Г.Подольский и др.), внешнее сухое трение при исследовании колебаний механических систем можно принимать постоянным, т.е. кулоновым .

Аэро- или гидродинамические сопротивления, которые также часто встречаются в технике, допустимо принимать пропорциональным квадрату скорости.

Из внутренних сопротивлений в любой механической системе имеет место рассеивание энергии в материале колебательной системы.Во многих случаях внутреннее рассеивание энергии можно описать в виде вязкого трения, если надлежащим образом подобрано значение его коэффициента. Это наглядно видно из исследований,проведенных Н.Г.Бондарем,В.В.Болотиным,М.З.Коловским, В.Колоушеком,В.А.Лазаряном,Г.С.Писаренко,В.Г.Подольским, Я.Г.Пановко и др. авторами,которые показали,что при исследованиях колебаний механических систем представление внутреннего

---

x) Г.С.Писаренко. Колебания механических систем с учётом несовершенной упругости материалов. Киев.,,Наукова думка",1970 .

рассеивания энергии в виде вязкого трения часто удовлетворяет требованиям практики.

В связи с этим исследование колебаний систем,возмущаемых импульсными нагрузками,с учетом трения, представляет практический интерес.

Известные исследования колебаний при периодическом импульсном возмущении можно разделить на две группы. К первой группе отнесем задачи колебаний с линейной упругой характеристикой. К ним относятся работы Б.М.Абрамова, Ю.А.Ермолина Н.Г.Бондаря,В.М.Глозмана,А.Д.Глущенко, Г.И.Давыдова,И.П.Диковича,В. Богуша, И.М.Бабакова,В.Колоушека, М.А.Лаврентьева, А.И.Лурье,А.Л.Осиновского,М.П.Пахомова,Я.Г.Пановко,И.М.Рабиновича,Г.К.Рябова,Е.С.Сорокина,А.А.Тунда,Б.В.Шабата,Б.Б.Шилина и В.Б.Шилина,В.Шаблевского, Я.М.Раскина и др. Ко второй группе отнесем исследования колебаний систем с нелинейными упругими характеристиками.Здесь известны решения, выполненные Н.Г.Бондарем, Д.С.Борисовым и В.П.Гуоевым,Г.Каудерером,А.Е.Кобринским, Я.Г.Пановко,Г.И.Поповым,Н.Д.Понеску,Б.Н.Редькиным,А.Э.Сухиром,А.В.Шляхтиным, В.Б.Шилиным и др.

Обзор научных работ упомянутых исследователей показывает, что колебания нелинейных систем при периодическом импульсном воздействии мало исследованы,а некоторые задачи (например, влияние сухого трения и турбулентного сопротивления,возбуждение групповыми и кратковременными периодическими импульсами) вовсе не рассмотрены .

В работе исследуются стационарные колебания системы с одной степенью свободы при симметричной нелинейной характеристике $[R(x)=-R(-x)]$

Во введении дан краткий анализ методов исследования задач нелинейной механики, показано преимущество метода переменного масштаба перед другими методами в приложении к решению задач свободных колебаний. Оно заключается в простоте, а также в том,что можно получить в ряде случаев (для систем без трения) точное решение. Там же приводится применение метода для решения задач свободных колебаний нелинейных систем без учета трения, с учетом вязкого и сухого трения.

Глава I. УСТАНОВИВШИЕСЯ КОЛЕБАНИЯ,ВОЗБУЖДАЕМЫЕ ОДНОСТОРОННИМИ МГНОВЕННЫМИ ИМПУЛЬСАМИ

Импульсивная нагрузка в действительности имеет сложный закон изменения во времени. Однако чем меньше промежуток времени,в течение которого действует знакопостоянная сила,тем меньшее значение при определении перемещений имеет закон распределения этой силы во времени . Основное и решающее значение приобретает величина суммарного импульса S . Это обстоятельство позволяет от кратковременных сил перейти к мгновенным импульсам .

В первой главе рассматриваются установившиеся колебания системы с одной степенью свободы при одностороннем следовании мгновенных периодически повторяющихся импульсов S одинаковых по абсолютной величине .

Для систем без трения дифференциальное уравнение движения имеет вид

$$\ddot{x}(t)+R(x)=\frac{S}{m}\left[\sigma_1(t)+\sigma_1(t-T)+\sigma_1(t-2T)+\ldots\right], \qquad (1)$$

где x - перемещение $R(x)$ - характеристика системы,

S - величина мгновенного импульса, m - масса системы.

$\sigma_1(t)$ - импульсивная функция первого рода, T - период действия импульсов .

Используя способ Дуффинга,получено решение при произвольных начальных условиях ($t=0$, $x=x_0$, $V=V_0$) для стационарного процесса на периоде (T) между импульсами, а также выражение для амплитудно-частотной характеристики

$$f(A)=\frac{S}{2m}\frac{1}{\sin\frac{\pi\theta}{\omega}} \tag{2}$$

Здесь θ - частота свободных колебаний, зависящая от амплитуды ; f - амплитудная функция, равная

$$f(x)=\left[2\int_0^x R(u)du\right]^{\frac{1}{2}},\quad f(A)=\left[2\int_0^A R(u)du\right]^{\frac{1}{2}} \tag{3}$$

$\omega=\frac{2\pi}{T}$ - частота следования импульсов

Из (2) имеем условия ударного резонанса

$$\omega=\frac{\theta}{K}\ ,\quad (K=1,2,3...). \tag{4}$$

Из анализа амплитудно-частотной характеристики (2) замечаем,что система (I) имеет бесчисленное множество резонансов по основным гармоникам. В этом сходство поведения нелинейной системы (I) с соответствующей линейной .

Наибольшее влияние нелинейность оказывает на главный резонанс $(\omega=\theta)$ и уменьшается для резонансов высших порядков $(K=2,3,4...)$.

Для системы с вязким трением, колебания которой описывают

ся уравнением

$$\ddot{x}(t)+2n\dot{x}(t)+R(x)=\frac{S}{m}\left[\sigma_1(t)+\sigma_1(t-T)+\sigma_1(t-2T)+\ldots\right], \quad (5)$$

методом переменного масштаба получено приближенное решение на периоде (T) возбуждения и амплитудно-частотная характеристика вида

$$f(A)=\frac{S}{m}\frac{\sqrt{1+e^{\frac{4\pi}{\omega}n}-2e^{\frac{2\pi}{\omega}n}\cos\theta\frac{2\pi}{\omega}}\; e^{\frac{2\pi}{\omega}n}\, e^{-\frac{n}{\theta}\left[\operatorname{arctg}\frac{\theta}{n}\,\gamma_1\right]}}{1+e^{\frac{4\pi n}{\omega}}-2e^{\frac{2\pi}{\omega}n}\cos\theta\frac{2\pi}{\omega}+\frac{n}{\theta}e^{\frac{2\pi}{\omega}n}\sin\frac{2\pi}{\omega}\theta}, \quad (6)$$

где

$$\gamma_1=\operatorname{arctg}\frac{\sin\frac{2\pi}{\omega}\theta}{e^{\frac{2\pi}{\omega}n}-\cos\frac{2\pi}{\omega}\theta}$$

Для резонансных амплитуд колебаний выражение (6) с учетом второй формулы (3) упрощается к виду

$$A_i=\sqrt{\frac{1}{\beta}\left[\frac{3}{4}\beta S_i^2-\alpha+\sqrt{\left(\frac{3}{4}\beta S_i^2-\alpha\right)^2+2\beta\alpha S_i^2}\right]}, \quad (7)$$

с

где

$$S_i=\frac{S}{2\pi m n i}, \quad (i=1,2,3\ldots).$$

Выражение (7) соответствует осциллятору с кубической характеристикой $R(x)=\alpha x+\beta x^3$

При выполнении условий

$$A\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\le 1 \text{ при } \beta>0 \text{ и } A\sqrt{\frac{|\beta|}{\alpha}}\le 0{,}6 \text{ при } \beta<0, \quad (8)$$

амплитудно-частотная характеристика (6) дает практически точное значение амплитуды колебаний. Вязкое трение оказывает большее влияние на резонансы высоких порядков и меньшее на главный резонанс. В зоне минимальных амплитуд амплитудно-частотной

характеристики с увеличением трения амплитуды могут как увеличиваться (по сравнению с системой без трения) так и уменьшаться. Однако, это явление не является результатом влияния нелинейности. Это явление присуще и линейным системам и является особенностью импульсно-возмущенных систем .

При наличии в системе только сухого трения, дифференциальное уравнение движения записывается так

$$\ddot{x}(t)+c\,\mathrm{sgn}\,\dot{x}+R(x)=\frac{S}{m}\left[\sigma_1(t)+\sigma_1(t-T)+\sigma_1(t-2T)+\ldots\right] \qquad (9)$$

где C – величина, характеризующая сухое трение

В работе получены уравнения амплитудно-частотных характеристик для колебаний без остановок и с попаданием системы в зону анкилозиса .

Уравнение амплитудно-частотной характеристики имеет вид

а) для колебаний без остановок

$$\left[f(A)+\frac{c}{\theta}\right]^2+\left(\frac{S}{m}\right)^2-\left\{\frac{c}{\theta}\left[1-(-1)^i\right]\right\}^2=$$

$$=\left[\frac{c}{\theta}(2i-1)-f(A)\right]\left\{f(A)-\frac{c}{\theta}(2i-1)-2\left[f(A)-\frac{c}{\theta}\right]\cos\theta\frac{2\pi}{\omega}\right\}, \qquad (10)$$

б) для колебаний с остановками

$$f(A)=\sqrt{\left(\frac{c}{\theta}\right)^2+\left(\frac{S}{m}\right)^2}-\frac{c}{\theta} \qquad (11)$$

Резонансные условия при сухом трении по-прежнему имеют вид (4) .

Амплитудно-частотная характеристика (10) дает приемлемую точность для главного резонанса, т.е. когда на периоде возмущения $i \leq 2$ (здесь i – число экстремумов перемещений на периоде возмущения). В случае $i > 2$, т.е. при низких

частотах возмущения в (10) следует принимать осредненное значение амплитуды колебаний на периоде возмущения.

В работе получены выражения для определения частоты возмущения, соответствующей границе колебаний системы без остановок и дано разъяснение о последовательности построения амплитудно-частотной зависимости по уравнениям (4),(10) и (11).

Из анализа амплитудно-частотных зависимостей, построенных по уравнениям (4),(10) и (11) вытекает, что малая величина сухого трения не влияет на амплитудно-частотную характеристику в зоне резонанса. В зоне же минимальных амплитуд, амплитуда стационарных колебаний с увеличением кулонового трения может увеличиваться .

Рассмотрена задача стационарных колебаний при возмущении односторонними импульсами для системы с кубической характеристикой при наличии турбулентного трения :

$$\ddot{x}(t)+n_1\dot{x}^2+q n\dot{x}+R(x)=\frac{S}{m}\left[\sigma_1(t)+\sigma_1(t-T)+\sigma_1(t-2T)+\dots\right] \quad (12)$$

где n_1 – малый коэффициент трения $(n_1 \ll 1)$

Решение уравнения (12) можно выполнять методом переменного масштаба, но при этом не освобождаемся от разрывной функции .

В практических случаях затухание обычно мало, поэтому представляется целесообразным для упрощения решения производить замену турбулентного трения эквивалентным вязким. Эквивалентное вязкое трение определяется из условия равенства рассеянной энергии на четверти периода свободных колебаний $\left(\frac{1}{4}T_c = \frac{\pi}{2\theta}\right)$ в обоих случаях . Коэффициент эквивалентного вязкого трения равен

$$n_э = \frac{4}{3}\,\frac{n_1 A\theta}{\pi} \qquad (I3)$$

Подставляя в уравнение (6) вместо n значение (I3), получаем амплитудно-частотную характеристику. Такое решение задачи даёт приемлемую точность для главного резонанса и значительно худшую для резонансов высших порядков .

Исследования,выполненные в работе показывают,что,в отличие от линейных колебаний,вызванных периодическим импульсным возмущением,в нелинейных системах могут существовать установившиеся колебания,период которых кратен периоду возмущения,т.е.

$$T_y = iT\,, \qquad \left(i = 2,3,4\ldots \tfrac{1}{2},\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{4}\right) \qquad (I4)$$

Исследования показывают,что этот неизвестный ранее эффект является результатом возникновения суб- и ультравозбуждения с периодами (I4) и значениями импульсов,равными SB ,где коэффициент B определяется по выражениям :

для жёстких систем $(\beta>0)$

$$B = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{\pi}{2K'K(k)}\right], \quad k = \sqrt{\frac{\beta A^2}{2(\beta A^2+\alpha)}}\,; \quad k' = \sqrt{1-k^2}\,, \qquad (I5)$$

для мягких систем $(\beta<0)$

$$B = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{\pi}{2K(k)}\right]; \qquad k = \sqrt{\frac{|\beta|A^2}{2\alpha - |\beta|A^2}} \qquad (I6)$$

Здесь $K(k)$ - полный эллиптических интеграл первого рода .

Влияние вторичного возбуждения может быть оценено по тем же формулам,что и для основного возбуждения, с заменой S и T на SB и $T_y = iT$

Анализ показывает,что возникновение суб- и ультравозбуждения возможно только в системах без остановки. Роль его для

мягких систем значительно больше, чем для жестких систем и возрастает с ростом амплитуды .

В частности, для определения максимальных амплитуд резонансов суб- и ультравозбуждения можно воспользоваться формулой

$$A\sqrt{\alpha+\frac{1}{2}\beta A^2}=\frac{\beta S\theta}{2\pi m n K}\ ;\ (K=1,2,3\ldots), \tag{17}$$

где частота свободных колебаний определяется по формуле

$$\theta=\sqrt{\alpha}\left(1+\frac{3}{8}\frac{\beta}{\alpha}A^2\right). \tag{18}$$

Глава II. УСТАНОВИВШИЕСЯ КОЛЕБАНИЯ ПРИ ВОЗБУЖДЕНИИ РАЗНОСТОРОННИМИ МГНОВЕННЫМИ ИМПУЛЬСАМИ

Существенной особенностью и отличием колебаний упругих систем возбуждаемых разносторонними импульсами, является то, что резонансные режимы могут возникать при условии, когда на периоде возбуждения укладывается нечетное число полупериодов свободных колебаний .

Исследование стационарных колебаний производится с использованием условий стационарности на полупериоде действия импульсов. Такой подход позволяет получить решение для стационарного режима движения на периоде действия импульсов без рассмотрения второго полупериода .

Для системы без трения дифференциальное уравнение движения имеет вид :

$$\ddot{x}(t)+R(x)=\frac{S}{m}\left[\sigma_1(t)-\sigma_1\left(t-\frac{T}{2}\right)+\sigma_1(t-T)-\ldots\right] \tag{19}$$

Уравнение амплитудно-частотной характеристики получено в виде :

$$f(A)=\frac{S}{2m}\,\frac{1}{\cos\frac{\theta\tau}{2\omega}}. \tag{20}$$

Отсюда определяются условия ударного резонанса :

$$\omega=\frac{\theta}{n}, \quad (n=1,3,5..). \tag{21}$$

В работе исследованы различные режимы движения и показана возможность существования режима движения, при котором на втором полупериоде осциллятор может находиться в состоянии покоя.

Для системы с вязким трением, движение которой описывается уравнением :

$$\ddot{x}+2n\dot{x}+R(x)=\frac{S}{m}\left[\sigma_1(t)-\sigma_1(t-\tfrac{T}{2})+\sigma_1(t-T)-\ldots\right], \tag{22}$$

выражение для амплитудно-частотной характеристики имеет вид

$$f(A)=\frac{S}{m}\,\frac{e^{\frac{\tau}{\omega}n}}{\sqrt{1+e^{\frac{2\tau}{\omega}n}+2e^{\frac{\tau}{\omega}n}\cos\frac{\theta\tau}{\omega}}}\cdot \tag{23}$$

$$\cdot\exp\left[-\frac{n}{\theta}\,\mathrm{arctg}\,\frac{\theta\left(e^{\frac{\tau}{\omega}n}+\cos\frac{\theta\tau}{\omega}\right)+n\sin\frac{\theta\tau}{\omega}}{n\left(e^{\frac{\tau}{\omega}n}+\cos\frac{\theta\tau}{\omega}\right)-\theta\sin\frac{\theta\tau}{\omega}}\right].$$

При наличии в системе только турбулентного трения исследование стационарных колебаний выполнено путем приближенной замены турбулентного трения эквивалентным вязким (аналогично I главе) .

Для системы с сухим трением дифференциальное уравнение движения имеет вид :

$$\ddot{x} + c\,sgn\,\dot{x} + R(x) = \frac{S}{m}\left[\sigma_1(t) - \sigma_1\left(t-\frac{T}{2}\right) + \sigma_1(t-T) - \dots\right] \quad (24)$$

В работе рассмотрены случаи движения с различным числом экстремумов перемещения на полупериоде $\left(\frac{T}{2}\right)$ возбуждения и получены выражения для амплитудно-частотной характеристики :

а) на полупериоде возбуждения отсутствует экстремум перемещения

$$f(A) = \frac{S}{2m}\, tg\, \frac{\theta \pi}{2\omega}\,, \quad (25)$$

б) в общем случае i экстремумов перемещений на полупериоде возбуждения

$$\left[f(A) + \frac{c}{\theta}\right]^2 - \left(\frac{S}{m}\right)^2 - \left\{\frac{c}{\theta}\left[1 + (-1)^i\right]\right\}^2 =$$

$$= \left[\frac{c}{\theta}(2i-1) - f(A)\right]\left\{f(A) - \frac{c}{\theta}(2i-1) + 2\left[f(A) + \frac{c}{\theta}\right]\cos\frac{\theta\pi}{\omega}\right\}, \quad (26)$$

в) для колебаний с остановками выражение амплитудно-частотной характеристики имеет вид (II) .

Из (25) следует ,что сухое трение не влияет на амплитудно-частотную характеристику,а из (26) вытекают условия ударного резонанса . Они имеют вид (2I).

Формула (26) дает приемлемую точность для первых двух резонансов $(\omega = \theta)$ и $(\omega = \frac{1}{3}\theta)$. В случае нахождения величин амплитуд на низких частотах необходимо принимать :

$$\theta = \theta_{cp.} = \sqrt{\alpha + \frac{3}{4}\beta A^2_{cp.}}\,, \quad (27)$$

где $A_{cp.}$ - среднее значение амплитуды колебаний,определяемое как среднеарифметическая величина между максимальным и мини-

мальным значением амплитуды на полупериоде возбуждения .

Если величина сухого трения велика, то остановка может произойти до достижения первого экстремума перемещения, т.е. движение на полупериоде не будет колебательным. Это произойдет при коэффициенте трения, равном

$$C_0=\sqrt{\frac{\alpha}{8}\left(\frac{S}{m}\right)^2+\frac{1}{2}\sqrt{\left[\frac{\alpha}{4}\left(\frac{S}{m}\right)^2\right]^2+\frac{\beta}{16}\left(\frac{S}{m}\right)^6}} \qquad (28)$$

ГЛАВА III. СТАЦИОНАРНЫЕ КОЛЕБАНИЯ, ВОЗБУЖДАЕМЫЕ ПЕРИОДИЧЕСКИМИ ГРУППОВЫМИ МГНОВЕННЫМИ ИМПУЛЬСАМИ. КОЛЕБАНИЯ ПРИ ВОЗБУЖДЕНИИ КРАТКОВРЕМЕННЫМИ ИМПУЛЬСАМИ.

В работе исследованы колебания осциллятора с кубической восстанавливающей силой, возбуждаемые групповыми мгновенными импульсами, причем, рассмотрен простейший случай, когда группа состоит из двух одинаковых по знаку мгновенных импульса.

Для системы без трения и одностороннем следовании импульсов, дифференциальное уравнение движения имеет вид :

$$\ddot{x}+R(x)=\frac{S}{m}\left[\sigma_1(t)+\sigma_1(t-\tau)+\sigma_1(t-T)+\sigma_1(t-(T+\tau))+\sigma_1(t-2T)+\dots\right] \qquad (29)$$

где τ – время между импульсами .

Получены выражения для амплитудно-частотной характеристики :

$$f(A_1)=\frac{1}{2m\sin\frac{\alpha_1}{2}}\sqrt{S_1^2+2S_1S_2\cos\theta_2\tau+S_2^2}\ ,$$

$$f(A_2)=\frac{1}{2m\sin\frac{\alpha_1}{2}}\sqrt{S_1^2-2S_1S_2\cos\theta_1(T-\tau)+S_2^2}\quad, \tag{30}$$

где A_1 - максимальное перемещение на участке времени τ

A_2 - максимальное перемещение на участке времени $T-\tau$

θ_1 - частота колебаний системы на участке времени τ

θ_2 - то же на участке $T-\tau$ $\quad \alpha_1=\theta_1(T-\tau)+\theta_2\tau$

Если в группе импульсы равные по величине $(S_1=S_2=S)$, то выражения для амплитудно-частотной характеристики приобретают вид

$$f(A_1)=\frac{S}{m}\frac{1}{\sin\frac{\alpha_1}{2}}\cos\frac{\theta_2\tau}{2};$$

$$f(A_2)=\frac{S}{m}\frac{1}{\sin\frac{\alpha_1}{2}}\sin\frac{\theta_1(T-\tau)}{2}. \tag{31}$$

Если время τ между импульсами группы мало $(\tau\ll\frac{T}{2})$, то

$$f(A)=\frac{S}{m}\frac{1}{\sin\frac{\theta\pi}{\omega}}\cos\frac{\theta\tau}{2} \tag{32}$$

Здесь частота свободных колебаний θ принимается постоянной на периоде возбуждения (T)

Аналогично для системы с вязким трением получены выражения амплитудно-частотной характеристики на участке τ и $T-\tau$

$$f(A_1)=\frac{e^{-nt_*}\sqrt{S_1^2e^{-\frac{4n\pi}{\omega i}}+2SS_2e^{-\frac{2\pi n}{\omega i}}\cos\frac{4\pi}{i}\frac{\theta_2}{\omega}+S_2^2}}{m\sqrt{1+e^{-\frac{4\pi}{\omega}n}-2e^{-\frac{2\pi}{\omega}n}\cos\left[\theta_1\frac{2\pi}{\omega}\left(\frac{i-1}{i}\right)+\theta_2\frac{2\pi}{i}\right]}}$$

$$f(A_2)=\frac{e^{-nt'_*}\sqrt{S_1^2+2S_1S_2e^{-\frac{2\pi}{\omega}n\left(\frac{i-1}{i}\right)}\cos\frac{2\pi\theta_1}{\omega}\left(\frac{i-1}{i}\right)+S_2^2e^{-\frac{4\pi n}{\omega}\left(\frac{i-1}{i}\right)}}}{m\sqrt{1+e^{-\frac{4\pi}{\omega}n}-2e^{-\frac{2\pi}{\omega}n}\cos\left[\theta_1\frac{2\pi}{\omega}\left(\frac{i-1}{i}\right)+\theta_2\frac{2\pi}{i}\right]}}, \quad (33)$$

где

$$i=\frac{\tau}{T},$$

$$t_*=\left\{\frac{1}{\theta_1}\operatorname{arctg}\frac{\theta_1}{n}-\operatorname{arctg}\frac{S_1e^{-n\tau}\left[\sin\theta_2\tau+e^{-nT}\sin\theta_1(T-\tau)\right]+S_2e^{-nT}\sin\left[\theta_1(T-\tau)+\theta_2\tau\right]}{S_1e^{-n\tau}\left[\cos\theta_2\tau-e^{-nT}\sin\theta_1(T-\tau)\right]+S_2\left[1-e^{-nT}\cos(\theta_1(T-\tau)+\theta_2\tau)\right]}\right\},$$

$$t'_*=\left\{\frac{1}{\theta_2}\operatorname{arctg}\frac{\theta_2}{n}-\operatorname{arctg}\frac{S_1e^{-nT}\sin\left[\theta_1(T-\tau)+\theta_2\tau\right]+S_2e^{-n(T-\tau)}\left[e^{-n\tau}\sin\theta_2\tau+\sin\theta_1(T-\tau)\right]}{S_1\left\{e^{-nT}\cos\left[\theta_1(T-\tau)-\theta_2\tau\right]+1\right\}+S_2e^{-n(T-\tau)}\left[\cos\theta_1(T-\tau)-e^{-n\tau}\cos\theta_2\tau\right]}\right\}.$$

При значениях $\tau \ll \frac{T}{2}$ и равных по величине импульсах $S_1=S_2=S$ выражения (33) упрощаются к виду :

$$f(A)=\frac{2S}{m}\,\frac{e^{-nt_*}}{\sqrt{1+e^{-\frac{4\pi}{\omega}n}-2e^{-\frac{2\pi}{\omega}n}\cos\frac{2\pi\theta}{\omega}}}\cos\frac{\theta\tau}{2}, \quad (34)$$

где приближенно принято $\theta_1=\theta_2$

Для разностороннего возбуждения групповыми импульсами получены решения на участке между импульсами в группе и после исчезновения последнего импульса группы, а также амплитудно-частотные характеристики при условии колебаний на каждом из участков с разными частотами. Если время между импульсами в группе мало $\left(\tau \ll \frac{T}{2}\right)$, а импульсы равны по величине, то выражения амплитудно-частотной характеристики имеют вид

а) для системы без трения

$$f(A)=\frac{S}{m}\frac{1}{\cos\frac{\theta\pi}{\omega}}\sin\frac{\theta\pi}{\omega i} \tag{35}$$

б) с учетом вязкого трения

$$f(A)=\frac{2S}{m}\frac{e^{\psi-\lambda}}{\sqrt{1+e^{2\psi}+2e^{\psi}\cos\frac{\theta\pi}{\omega}}}\cos\frac{\theta\tau}{2} \tag{36}$$

где

$$\psi=\frac{\pi}{\omega}n \qquad \lambda=nt''_{*},$$

$$t''_{*}=\frac{1}{\theta}\left[\operatorname{arctg}\frac{\theta}{n}-\operatorname{arctg}\frac{e^{-n\tau}\left[\sin\theta\tau\left(1+e^{-\psi}\cos\frac{\theta\pi}{\omega}\right)+e^{-\psi}\sin\frac{\theta\pi}{\omega}\cos\theta\tau\right]+e^{-\psi}\sin\frac{\theta\pi}{\omega}}{e^{-n\tau}\left[\cos\theta\tau\left(1+e^{-\psi}\cos\frac{\theta\pi}{\omega}\right)+e^{-\psi}\sin\frac{\theta\pi}{\omega}\cos\theta\tau\right]+\left(1+e^{-\psi}\cos\frac{\theta\pi}{\omega}\right)}\right] \tag{37}$$

В работе исследованы также колебания, возбуждаемые кратковременными импульсами одностороннего и разностороннего действия, причем, длительность (t_1) постоянной нагрузки P_0 с импульсом $P_0 t_1$ принимается малой $(t_1 << \frac{T}{2})$. Это допущение позволяет частоту колебаний на периоде возбуждения принять приближенно постоянной.

Дифференциальное уравнение движения на одном из периодов возбуждения при разностороннем следовании кратковременных прямоугольных импульсов без учета трения имеет вид :

$$\ddot{x}+R(x)=\begin{cases}\frac{P_0}{m} & \text{при} \quad 0\le t\le t_1\\ 0 & \text{при} \quad t_1\le t\le T-t_1\end{cases} \tag{38}$$

Выражение амплитудно-частотной характеристики имеет вид

$$f(A)=\frac{S}{m\theta t_1}\frac{\sin\frac{\theta t_1}{2}}{\sin\frac{\theta\pi}{\omega}} \tag{39}$$

С учетом вязкого трения уравнения амплитудно-частотной характеристики записываются так

$$f(A) = e^{-nt_*}\sqrt{f^2(x_1) + v_1^2} \qquad (40)$$

где

$$t_* = \frac{1}{\theta}\left[\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{f(x_1)}{v_1}\right]$$ и $f(x_1)$ и v_1

значения амплитудной функции и скорости в момент $t = t_1$

Для разносторонних периодических импульсов имеем

а) для системы без трения

$$f(A) = \frac{S}{m\theta t_1}\,\frac{1}{\cos\frac{\theta\pi}{2\omega}}\sin\theta t_1 \qquad (41)$$

б) с учетом вязкого трения

$$f(A) = e^{-nt'_*}\sqrt{f^2(x_1) + v_1^2} \qquad (42)$$

Глава IУ. УСТОЙЧИВОСТЬ КОЛЕБАНИЙ

Исследована орбитальная устойчивость существенно нелинейных колебаний систем с мягкой кубической характеристикой

$$R(x) = \alpha x - \beta x^3, \quad \beta > 0 \qquad (43)$$

при отсутствии трения, с учетом вязкого,сухого,турбулентного трения и возбуждении мгновенными периодическими импульсами (односторонними и разносторонними).

Исследования проводятся по методике, предложенной проф -

сором Н.Г.Бондарем [x] . Если амплитуда колебаний превысит значения ненулевых корней характеристики системы

$$\alpha x_* - \beta x_*^3 = 0, \quad x_* = 0, \quad x_* = \pm\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}, \tag{44}$$

то восстанавливающая сила изменит знак,т.е. превратится в толкающую. В этом случае будет иметь место апериодическое движение. Достижение амплитудой колебаний значения ненулевого корня характеристики системы

$$|A| = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \tag{45}$$

является критическим состоянием системы,соответствующим границе между колебательным и апериодическим режимами .

При исследовании орбитальной устойчивости стационарных колебаний получены уравнения кривых первых критических состояний,определяемых критерием (45) .

Для системы без трения и возбуждаемой односторонними импульсами кривая первых критических состояний описывается выражением

$$S_* = \frac{S\sqrt{2\beta}}{2m\alpha} = \sin\frac{\pi}{\omega}\sqrt{\frac{\alpha}{2}} \tag{46}$$

В стационарных колебаниях имеют место также вторые критические состояния,соответствующие скачкообразному изменению амплитуды колебаний. При определенном импульсе возмущения в системе возможен перескок колебаний с нерезонансной ветви на неустойчивую резонансную (когда $A > \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$).

Для уравнения (I) кривая вторых критических состояний описывается выражениями

---

[x] Бондарь Н.Г. Нелинейные стационарные колебания. Киев. „Наукова думка", 1974

$$\omega=\frac{3\beta A\pi}{4\sqrt{\alpha-\frac{3}{4}\beta A^2}}\left(\alpha-\frac{1}{2}\beta A^2\right)tg\frac{\pi\sqrt{\alpha-\frac{3}{4}\beta A^2}}{\omega}-\alpha+\beta A^2;$$

$$S_*=A\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}\left(2-\frac{1}{\alpha}A^2\right)}\sin\frac{\pi\theta}{\omega} \tag{47}$$

Из первого уравнения (47) определяются A и ω соответствующие перескоку колебаний, а из второго – определяются значения приведенного импульса S_*

Кривая первых критических состояний пересекается с осью ω в точках

$$\omega_i=\frac{1}{i}\sqrt{\frac{\alpha}{2}} \qquad i=1,2,3\ldots \tag{48}$$

кроме того, для $\omega\to\infty$ $S_*\to 1$

Для стационарных колебаний системы, описываемых уравнением (5) с вязким трением, кривая первых критических состояний описывается выражением

$$S_*=\frac{1}{2}\sqrt{1+e^{\frac{4\pi n}{\omega}}-2e^{\frac{2\pi n}{\omega}}\cos\frac{2\pi}{\omega}\sqrt{\frac{\alpha}{2}}}\;e^{-\frac{2\pi}{\omega}n}$$

$$\exp\left[-\frac{n\sqrt{2}}{\sqrt{\alpha}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{\frac{\alpha}{2}}\left(e^{\frac{2\pi}{\omega}n}-\cos\frac{2\pi}{\omega}\sqrt{\frac{\alpha}{2}}\right)-n\sin\frac{2\pi}{\omega}\sqrt{\frac{\alpha}{2}}}{n\left(e^{\frac{2\pi}{\omega}n}-\cos\frac{2\pi}{\omega}\sqrt{\frac{\alpha}{2}}\right)+\sqrt{\frac{\alpha}{2}}\sin\frac{2\pi}{\omega}\sqrt{\frac{\alpha}{2}}}\right], \tag{49}$$

а вторых – системой уравнений : первое из (47) и (6) при замене импульса S на величину приведенного импульса S_*

Ввиду того, что перескок колебаний с нерезонансной ветви на резонансную происходит при малых амплитудах и влияние трения

мало, то геометрическое место точек срывов, определяемое для кривой вторых критических состояний, находится по первому из уравнений (47).

Для системы с турбулентным трением (I2) и одностороннего следования импульсов кривая первых критических состояний имеет вид

$$S_* = \frac{1}{2}\sqrt{1+e^{\frac{16}{3}\frac{n_1}{\omega}\frac{\alpha}{\sqrt{2\beta}}}-2e^{\frac{8}{3}\frac{n_1}{\omega}\frac{\alpha}{\sqrt{2\beta}}}\cos\frac{2\pi}{\omega}\sqrt{\frac{\alpha}{2}}}\quad e^{-\frac{8}{3}\frac{n_1\alpha}{\omega\sqrt{2\beta}}}$$

$$\exp\left\{\frac{4}{3}\frac{n_1\sqrt{\alpha}}{\pi\sqrt{\beta}}\left[\operatorname{arctg}\frac{3\pi\sqrt{\beta}}{n_1\sqrt{\alpha}}-\operatorname{arctg}\frac{\sin\frac{2\pi}{\omega}\sqrt{\frac{\alpha}{2}}}{e^{\frac{8}{3}\frac{n_1\alpha}{\omega\sqrt{2\beta}}}-\cos\frac{2\pi}{\omega}\sqrt{\frac{\alpha}{2}}}\right]\right\} \qquad (50)$$

а для вторых критических состояний по-прежнему используем первое из уравнений (47) и уравнение

$$S_* = \frac{1}{2}\sqrt{1+e^{\frac{16}{3}\frac{n_1}{\omega}A\theta}-2e^{\frac{8}{3}\frac{n_1}{\omega}A\theta}\cos\frac{2\pi}{\omega}\theta}\cdot e^{-\frac{8}{3}\frac{n_1}{\omega}A\theta}$$

$$\exp\left\{\frac{4}{3}\frac{n_1}{\pi}A\theta\left[\operatorname{arctg}\frac{3\pi A}{n_1}-\operatorname{arctg}\frac{\sin\frac{2\pi}{\omega}\theta}{e^{\frac{8}{3}\frac{n_1A\theta}{\omega}}-\cos\frac{2\pi}{\omega}\theta}\right]\right\} \qquad (5I)$$

Для системы с сухим трением уравнение первых критических состояний имеет вид :

а) в случае колебаний без остановок

$$S_*^2 = \frac{\beta}{2\alpha^2}\left\{\left(\frac{\alpha}{\sqrt{2\beta}}+C\sqrt{\frac{2}{\alpha}}\right)^2-\left[C\frac{\sqrt{2}}{\alpha}\left(1-(-1)^i\right)\right]^2\right\}-$$

$$-\left[\frac{\alpha}{\sqrt{2\beta}}-C\sqrt{\frac{2}{\alpha}}\,(2i-1)\right]\left[\frac{\alpha}{\sqrt{2\beta}}-C\sqrt{\frac{2}{\alpha}}\,(2i-1)-2\left(\frac{\alpha}{\sqrt{2\beta}}+C\sqrt{\frac{2}{\alpha}}\right)\cos\frac{2\pi}{\omega}\sqrt{\frac{\alpha}{2}}\right], \qquad (52)$$

б) в случае колебаний с остановками

$$S_* = \left[\frac{\alpha^2}{2\beta} + 2C\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{53}$$

Уравнениями второго критического состояния являются первое из (47) и (I0) при замене $\frac{S}{m}$ на приведенный импульс.

В работе показано,что при малых значениях коэффициента сухого трения зона анкилозиса не оказывает существенного влияния на значение критического импульса,определяемого по выражению (53) .

Аналитические выражения (49-5I) позволяют находить практически точные значения критического импульса S_* для резонансной зоны частот возмущения $(\omega < \sqrt{\alpha})$. При нерезонансных частотах возмущения $(\omega > \sqrt{\alpha})$ в системе могут иметь место установившиеся колебания,несимметричные относительно устойчивого положения равновесия $(x = 0)$,которые ухудшают точность аналитических результатов. Они являются результатом воздействия суб- и ультравозбужденя. Учет вторичного возбуждения улучшает точность решения задач орбитальной устойчивости .

В работе приведены аналогичные исследования орбитальной устойчивости для системы с мягкой кубической характеристикой и разностороннем импульсном возмущении. Полученные выражения критических состояний дают более точные,по сравнению с односторонним импульсным возмущением, значения критического импульса для частот $1 \geq \omega \leq \sqrt{\alpha}$

В заключение отметим,что для оценки точности приближенных аналитических результатов во всех главах широко использовались ЭЦВМ .

В ы в о д ы

I.Получены приближенные выражения для построения амплитудно-частотных характеристик при возбуждении односторонними и разносторонними мгновенными импульсами .

2.Обнаружено и объяснено качественное отличие систем с нелинейной упругой характеристикой от линейных - существование суб- и ультравозбуждения, влияющего особенно на существенно нелинейные колебания.

3.Приближенная замена турбулентного трения эквивалентным вязким даёт приемлемую точность для главного резонанса .

4.Показано,что в зоне минимальных амплитуд трение может как увеличивать амплитуду стационарных колебаний, так и уменьшать её . В этом состоит особенность импульсно-возмущённых систем.

5.В отличие от линейных систем с малым сухим трением и импульсным возмущением, в нелинейных системах амплитуда колебаний при резонансе остается ограниченной.

6.Показано,что трение при умеренных значениях импульса оказывает значительно большее влияние на резонансы высших порядков и меньшее на основной резонанс .

7.Существенную роль на существование суб- и ультравозмущений оказывает трение. Они существуют только при малых значениях величины трения .

8.Вязкое трение оказывает большее влияние на уменьшение значений амплитуд основного резонансе, чем сухое .

9. Для малых значений времени (τ) между импульсами в группе при стационарных колебаниях, возбуждаемых групповыми мгновенными импульсами, амплитуду стационарных колебаний можно найти, заменив группу импульсов одним, по величине равным сумме импульсов в группе.

10. Для стационарных колебаний, возбуждаемых кратковременными периодическими импульсами при времени действия импульса $t_1 < \frac{T_0}{2}$ расчет системы можно производить как от действия мгновенного импульса.

11. Впервые получены решения ряда задач орбитальной устойчивости существенно нелинейных колебаний. Обнаружено значительное влияние суб- и ультравозбуждения.

12. Результаты аналитических исследований сопоставляются с результатами численного интегрирования дифференциальных уравнений на ЭЦВМ .

Основные положения диссертации опубликованы в следующих работах

1. Б о н д а р ь Н.Г., П о п о в и ч Н.М. Стационарные нелинейные симметричные колебания, возбуждаемые мгновенными импульсами. Труды ДИИТ"а, вып.150. Днепропетровск, 1973 .
2. Б о н д а р ь Н.Г., П о п о в и ч Н.М. Стационарные колебания нелинейного осциллятора с сухим трением, возбуждаемые импульсами. Труды ДИИТ"а, вып.157, Днепропетровск, 1975 .
3. П о п о в и ч Н.М. Установившиеся колебания нелинейного осциллятора, возбуждаемые периодическими импульсами. Труды ДИИТ"а, вып.157, Днепропетровск, 1975

Стационарные колебания
нелинейных систем, возбуждаемые периодическими
импульсами

9.10.1975 г. БТ 33001. Сдано в производство 10.10.1975 г.
Формат 60х84 1/16. Усл.печ.л. 1,8. Тираж 180 экз. Заказ № 11983.
Бесплатно.
Городская типография № 3 Днепропетровского областного управления
по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 320002,
г. Днепропетровск, ул.Фрунзе, 6.