

УДК 534.131

# ВОЛНООБРАЗОВАНИЕ ОТ ПОВТОРЯЮЩИХСЯ ВО ВРЕМЕНИ ЛОКАЛЬНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ДНА

И. Т. СЕЛЕЗОВ<sup>1</sup>, В. Н. КУЗНЕЦОВ<sup>2</sup>, Д. О. ЧЕРНИКОВ<sup>2</sup><sup>1</sup>Институт гидромеханики НАН Украины,<sup>2</sup>Днепропетровский национальный университет железнодорожного транспорта им. Лазаряна,  
49010, г. Днепропетровск, ул. Академика Лазаряна, 2  
e-mail: selezov@yandex.ua

Получено 12.02.2015

Исследуется влияние на зарождение поверхностных гравитационных волн от повторного включения двух разнесенных донных источников. Это обобщает ранее полученные результаты для одновременно включаемых донных источников возбуждения. Показано, что повторное во времени включение локальных источников возбуждения существенно влияет на генерацию и начальное формирование поверхностных волн. Это непосредственно связано с генерацией волн подводными землетрясениями.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** волны на воде, разнесенные источники, повторная генерация волн

Досліджується вплив на зародження поверхневих гравітаційних хвиль від повторного включення двох рознесених донних джерел. Це узагальнює раніше одержані результати для одночасно включених донних джерел збудження. Показано, що повторне з часом включення локальних джерел збудження суттєво впливає на генерацію і початкове формування поверхневих хвиль. Це безпосередньо пов'язано з генерацією хвиль підводними землетрусами.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** хвилі на воді, рознесені джерела, повторна генерація хвиль

The effect of repeated initiation of two spaced bottom sources on the origin is investigated. This extends earlier obtained results for sumultanously initiation of the bottom sources of excitation. It is shown that a repeated in time initiation of local sources of excitation acts essentially on the generation and initial formation of surface waves. This is directly connected with the wave generation by underwater earthquakes.

**KEY WORDS:** water waves, spaced sources, waves reiterate generation

## ВВЕДЕНИЕ

Подробная библиография по вопросам генерации океанических волн приведена в [1], а анализ явлений распространения волн в мировом океане изложен в [4, 10], а также в [7, 8, 11, 13].

В работе [2] рассматривается задача об определении формы свободной поверхности слоя жидкости в рамках классической постановки теории малых волн Коши-Пуассона для идеальной жидкости. Предложенный в этой работе метод сводит рассмотрение задачи к решению интегрального или интегро-дифференциального уравнения для некоторой функции на свободной поверхности. В более общем случае решение может быть получено с помощью теории интегральных преобразований [5, 12].

В данном сообщении рассматривается задача генерации волн на поверхности жидкости конечной глубины двумя одновременными донными возмущениями, которые включаются в начальный момент времени  $t = 0$ , а затем через произвольные

промежутки времени  $t = t_0 > 0$ .

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Постановка задачи приведена в [5] и здесь кратко воспроизводится и дополняется условиями не одновременного включения.

Математическая постановка начально-краевой задачи сводится к определению потенциала скоростей  $\varphi(r, \theta, z, t)$ , удовлетворяющего уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = 0, \quad -H_0 \leq z \leq 0, \quad r > 0, \quad t > 0, \quad (1)$$

а также следующим граничным и начальным условиям на свободной поверхности:

$$\left( \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \Big|_{z=0} = 0, \quad \eta = -\frac{1}{g} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{z=0}, \quad (2)$$

на донной поверхности:

$$\left. \frac{\partial \varphi(r, \theta, z, t)}{\partial z} \right|_{z=-H_0} = \frac{\partial \eta^d}{\partial t}, \quad (3)$$

и начальным условиям:

$$\begin{aligned} \varphi(r, \theta, z, t)|_{t=0} &= \left. \frac{\partial \varphi(r, \theta, z, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \\ &= \eta^d|_{t=0} = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\eta^d$  – отклонение дна;  $\eta$  – отклонение свободной поверхности;  $g$  – ускорение свободного падения.

Будем предполагать, что возмущение дна осесимметрично, причем при  $t = 0$  включается возмущение, заданное в виде  $\eta^d(r, t) = \eta_0 \psi(r) f(t)$ . При этом если при  $t = 0$  включаются одновременно два возмущения, то функции  $\eta_1 d$  и  $\eta_2 d$  задаются в виде

$$\eta_1^d = \eta_{01} \psi_1(r) f_1(t), \quad \eta_2^d = \eta_{02} \psi_2(r) f_2(t). \quad (5)$$

В дальнейшем вводятся безразмерные переменные по формулам (далее черточки опущены)

$$\begin{aligned} r^* &= \frac{r}{r_0}, \quad r_0^* = 1, \quad z^* = \frac{z}{H_0}, \quad t^* = t \frac{c_{sh}}{r_0}, \\ \eta^* &= \frac{\eta}{\eta_0}, \quad \varphi^* = \frac{\varphi}{r_0 c_{sh}}, \quad \beta = \frac{r_0}{H_0}, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $H_0$  – глубина жидкости;  $r_0$  – радиус возмущения отклонения дна (характерная величина);  $c_{sh}$  – скорость волн на мелкой воде (предельное значение длинноволнового приближения),  $c_{sh} = \sqrt{gH_0}$

Постановка задачи (1)–(4) в безразмерной форме в соответствии с (6) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \beta^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} &= 0, \\ -1 \leq z \leq 0, \quad r > 0, \quad t > 0; \end{aligned} \quad (7)$$

$$\left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \beta^2 \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \Big|_{z=0} = 0,$$

$$\eta = -\frac{1}{g} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{z=0}, \quad \beta^2 \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=-1} = \frac{\partial \eta^d}{\partial t}. \quad (8)$$

Начальные условия (4) в безразмерной форме в соответствии с (6) остаются без изменения.

## 2. МЕТОД РЕШЕНИЯ

Для решения задачи применяем интегральное преобразование Лапласа по времени  $t$  [9]:

$$\varphi^L(r, z, s) = \int_0^\infty \varphi(r, z, t) e^{-st} dt, \quad (9)$$

где  $s$  – параметр преобразования Лапласа.

После применения преобразования (9) к уравнениям (7)–(8) с учетом начальных условий (4) получаем постановку задачи в пространстве изображений Лапласа:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi^L}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi^L}{\partial r} + \beta^2 \frac{\partial^2 \varphi^L}{\partial z^2} &= 0, \\ -1 \leq z \leq 0, \quad r > 0, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\left( s^2 \varphi^L + \beta^2 \frac{\partial \varphi^L}{\partial z} \right) \Big|_{z=0} = 0,$$

$$\beta^2 \frac{\partial \varphi^L}{\partial z} \Big|_{z=0} = s \eta_0 \psi^d(r) f^{dL}(s). \quad (11)$$

Применим интегральное преобразование Ханкеля по радиальной координате  $r$ :

$$\varphi^{LH}(k, z, s) = \int_0^\infty \varphi^L(k, z, s) r J_0(kr) dt, \quad (12)$$

где  $k$  – параметр преобразования Ханкеля.

После применения преобразования (12) к задаче (10), (11) получаем в пространстве изображений Лапласа и Ханкеля следующую задачу:

$$\frac{d^2 \varphi^{LH}}{dz^2} - \left( \frac{k}{\beta} \right)^2 \varphi^{LH} = 0, \quad -1 \leq z \leq 0, \quad (13)$$

$$\left( s^2 \varphi^{LH} + \beta^2 \frac{d \varphi^{LH}}{dz} \right) \Big|_{z=0} = 0, \quad (14)$$

$$\beta^2 \frac{d \varphi^{LH}}{dz} \Big|_{z=-1} = s \eta_0 \psi^{dH}(k) f^{dL}(s). \quad (15)$$

Из решения задачи (13)–(15) получаем выражение для потенциала скоростей

$$\begin{aligned} \varphi^{LH}(k, z, s) &= \\ &= -\frac{1}{2} \frac{s}{\beta k} \eta_0 \psi^{dH}(k) f^{dL}(s) \times \end{aligned}$$

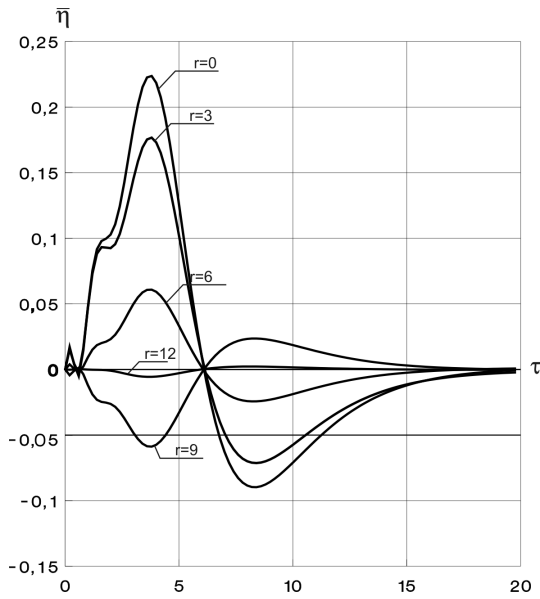


Рис. 1. Зависимость отклонения свободной поверхности  $\eta$  от времени  $t$  на разных расстояниях от эпицентра при действии двух возмущений ( $r = 0, l = 4, t \geq 0$ )

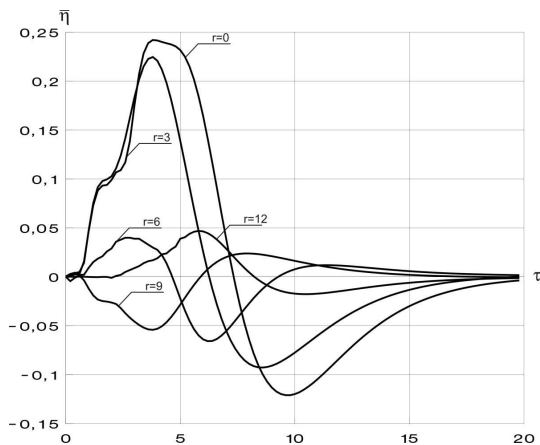


Рис. 2. Зависимость отклонения свободной поверхности  $\eta$  от времени  $t$  на разных расстояниях от эпицентра при действии трех возмущений ( $r = 0, l = 4, t_1^d = 2$ )

$$\times \frac{(s^2 + \beta k)e^{-\frac{k}{\beta}z} - (s^2 - \beta k)e^{\frac{k}{\beta}z}}{s^2 \operatorname{ch} \frac{k}{\beta} - \beta k \operatorname{sh} \frac{k}{\beta}}. \quad (16)$$

Предполагается, что возмущение генерируется подъемом горизонтального дна:

$$\begin{aligned} f_1^d(t) &= te^{-\alpha t}, \quad \text{при } t \geq 0, \\ f_2^d(t) &= te^{-\alpha t} H(t - t^d), \quad t > t^d \end{aligned} \quad (17)$$

и одновременным включением нескольких возмущений. В частности, если рассматриваются два возмущения, расположенных на расстоянии  $l$ , то

$$\psi_1^d(r) = \xi (\xi^2 + r^2)^{-3/2},$$

$$\psi_2^d(r) = \xi (\xi^2 + r^2)^{-3/2} H(r - l), \quad \varepsilon > 0, \quad (18)$$

где  $H(x)$  – функция Хэвисайда.

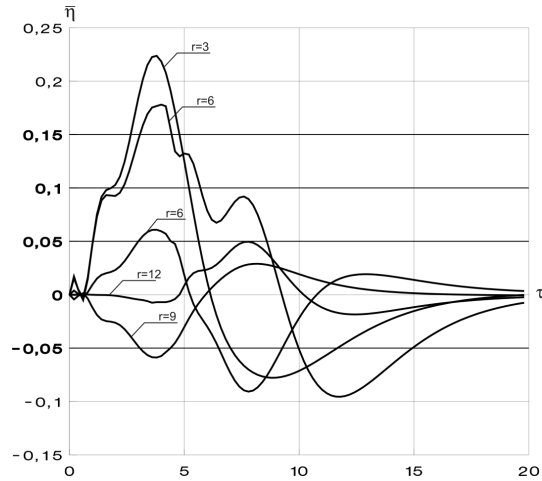


Рис. 3. Зависимость отклонения свободной поверхности  $\eta$  от времени  $t$  на разных расстояниях от эпицентра при действии трех возмущений ( $r = 0, l = 4, t_2^d = 4$ )

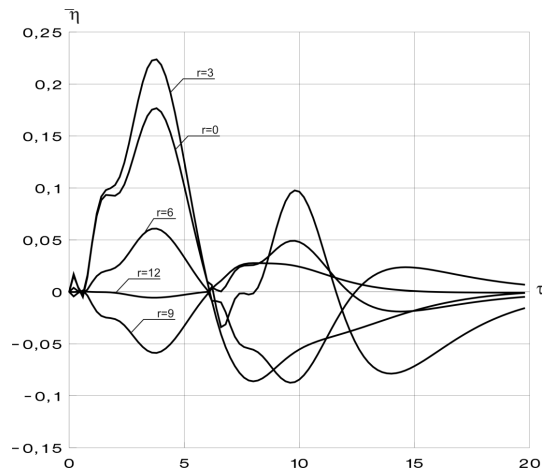


Рис. 4. Зависимость отклонения свободной поверхности  $\eta$  от времени  $t$  на разных расстояниях от эпицентра при действии трех возмущений ( $r = 0, l = 6, t_3^d = 6$ )

Переход в пространство оригиналов для отклонения свободной поверхности  $\eta_n$  после обращения преобразования Ханкеля в пространстве изображений Лапласа имеет вид

$$\eta_n^L = s^2 \eta_0 f_n^{dL} \int_0^\infty \frac{e^{-\varepsilon \lambda} \lambda J_0(\lambda k r)}{s^2 \operatorname{ch}(k \lambda) + \lambda k \operatorname{sh}(\lambda k)} d\lambda,$$

$$\text{где } f_1^{dl}(s) = \frac{1}{(s + \alpha)^2},$$

$$f_2^{dl}(s) = \frac{1}{(s + \alpha)^2} \Gamma(2, t_d(s + \alpha)); \quad (19)$$

$\Gamma(x)$  – неполная гамма-функция.

Численное обращение преобразования Лапласа проводится на основе [3, 6, 9].

Исследовалось отклонение свободной поверхности  $\eta/\eta_0$  для различных удалений от эпицентра  $r = 0$  для параметров  $\lambda = 2.5$ ,  $\xi = 1.0$ . На рис. 1 показаны кривые, соответствующие двум одновременным возмущениям на расстоянии  $l = 4$ . На рис. 2–4 показаны отклонения свободной поверхности жидкости при трех возмущениях, причем два возмущения происходят одновременно на расстоянии ( $r = 0$ )  $l = 4$  друг от друга, а третье – наступает после прохождения времени  $t^d > t$  ( $t_1^d = 2$ ,  $t_2^d = 4$ ,  $t_3^d = 6$ ).

### 3. ВЫВОДЫ

Из сравнения отклонения свободной поверхности жидкости при изменении параметра времени для донного возмущения ( $t_{\downarrow 1}^d = 2$ ,  $t_{\downarrow 2}^d = 4$ ,  $t_{\downarrow 3}^d = 6$ ) видно, что при увеличении этого параметра сначала увеличивается амплитуда отклонения, а затем “зона спокойствия” начинает восстанавливаться ( $r = 12$ ). Следовательно, время повторного донного возмущения существенно влияет на формирование волн. Это влияет на генерацию волн цунами повторными подводными землетрясениями.

1. Селезов И. Т., Кривонос Ю. Г. Математические методы в задачах распространения и дифракции волн. – Киев: Наук. думка, 2012. – 232 с.
2. Гоман О. Г., Тихая Е. А. Об одном подходе к решению задачи Коши-Пуассона для слоя жидкости конечной глубины // Вісник Дніпропетр. Ун-ту. Серія : Механіка. – 2011. – 15, т. 1. – С. 91–97.
3. Крылов В. Н., Скобля Н. С. Методы приближенного преобразования Лапласа. – М., 1974. – 224 с.
4. Пелиновский Е. Н. Гидродинамика волн цунами. – Нижний Новгород: Ин-т прикл. физики РАН, 1996. – 276 с.
5. Селезов И. Т., Кузнецов В. Н., Черников Д. О. Возбуждение и распространение волн на поверхности жидкости при действии разнесенных донных источников // Прикладна гідромеханіка. – 2014. – Т. 16(88), N 1. – С. 53–58.
6. Doetsch G. Anleitung zum Praktischen Gebrauch der Laplace-transformation und der Z-transformation. – Munchen-Wien: R. Oldenburg, 1967.
7. Geist E. L., Titov V. V., Synolakis C. E. Tsunami: Wave of change. // Scientific Amer. December. 2005.
8. Kajura K. The leading wave of tsunami // Bull. Earthquake Res. Inst. – 1963. – 42. – P. 535–571.
9. Lancroz C. Applied analysis. – Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1956. То же: Ланцоу К. Практические методы прикладного анализа. – М.: Физматгиз, 1981. – 524 с.
10. Murty T. S. Seismic sea waves tsunami. – Fisheries Research Board of Canada. Bulletin 198. – Catalogue Number: FS94-198, 1977. То же: Мурти Т. С. Сейсмические морские волны цунами. – Л.: Гидрометиздат, – 1981. – 448с.
11. Selezov I. T. Modeling of tsunami wave generation and propagation // Int. J. Fluid Mech. Research. – 2006. – 33, N 1. – P. 44–54.
12. Selezov I. T., Kuznetsov V. N., Chernikov D. O. Generation of surface gravity waves by bottom time-repetitive pulses // J. Math. Sci. – 2006. – 171, N 5. – P. 596–602.
13. Weyl P. K. Oceanography. An introduction to the marine environment. – NY: John Wiley and Sons, Inc. 1970.