

А.І. Маневічі, д-р техн. наук,  
С.В. Ракша, канд. техн. наук

## **РОЗРАХУНОК ОПТИМАЛЬНИХ ПАРАМЕТРІВ ЦЕНТРАЛЬНО СТИСНУТИХ СТЕРЖНІВ ВІДКРИТОГО ПОПЕРЕЧНОГО ПЕРЕРІЗУ**

Задача визначення оптимальних параметрів центрально стиснутого тонкостінного стержня, зокрема, П-образного (швелерного) профілю досліджувалася в ряді робіт, переважно в 60-70і роки (див. бібліографічний покажчик [1]). Основна складність розв'язку задачі пов'язана з урахуванням вимог локальної стійкості. Для точного розрахунку локальних критичних напружень необхідно розглядати стержень як з'єднання взаємодіючих пластин, що є окремою досить складною задачею, що вимагає використання обчислювальної техніки. У зв'язку з цим аналітичним розв'язком задачі оптимального проектування тонкостінного стержня було можливим лише при використанні наближених залежностей і різних припущень. Такі розв'язки були отримані в ранніх роботах [2-5].

Що стосується ефективних чисельних методів оптимізації - методів нелінійного програмування - то їхня розробка в ті роки тільки починалася, і вони тільки починали входити в розрахункову практику.

Друге важливе питання пов'язане з використанням критерієм загальної стійкості. Відомо, що в залежності від межі текучості і гнучкості стержня (оптимальне значення якої визначається, як очевидно з отриманого нижче розв'язок задачі оптимізації, безрозмірним параметром  $P/L^2E$ ,  $P$  - стискальна сила,  $L$  - довжина,  $E$  - модуль пружності) механізм руйнування стиснутого тонкостінного стержня може бути різним. Для малих і середніх значень гнучкості вичерпання несучої здатності передуює локальне випучування елементів (із зменшенням «ефективного перерізу» стержня) і розвиток пластичних деформацій (із наступною загальною пружно-пластичною втратою стійкості). Для великих гнучкостей характерна чисто пружна втрата стійкості.

Тому природно, що в роботах по оптимізації стиснутих тонкостінних стержнів застосовувалися різноманітні критерії й обмеження. У роботі [6] оптимальні параметри П-образного стержня (з відгинами полиць і без них) визначалися з умови, що граничне напруження - межа текучості (з урахуванням «ефективної ширини» стержня) і загальна втрата стійкості (згинальна або згинально-крутильна) стержня із редукованим перерізом

досягаються одночасно. Такий підхід пов'язаний із використанням наближених формул для розрахунку локального випучування, емпіричних і напівемпіричних залежностей для визначення «ефективної ширини», і отримана оптимальна конфігурація стержня залежить від механічних властивостей матеріалу.

Уявляється, що поряд із таким підходом бажано мати суворий розв'язок задачі оптимізації для випадку чисто пружної втрати стійкості, засноване на лінійній теорії стійкості. Такий розв'язок, що безпосередньо може бути використаним для стержнів великої гнучкості, у загальному випадку можна розглядати як «граничне», що визначає ідеалізовану оптимальну конструкцію для пружного матеріалу. Порівняння з цим розв'язком інших розв'язків, заснованих на більш складних моделях, дозволить оцінити, до якої додаткової витрати матеріалу і змін у конфігурації перерізу призводять фізична і геометрична нелінійність.

У даній роботі наведено результати розв'язку задачі вагової оптимізації центрально стиснутого тонкостінного стержня П-образного (швелерного) профілю, отримані на основі точних рішень лінійної задачі стійкості з використанням ефективного чисельного методу нелінійного програмування. Виконано порівняння результатів із деякими відомими розв'язками і з розрахунками за нормами.

**1. Постановка і метод розв'язку задачі.** Розглядається шарнірно спертий тонкостінний стержень відкритого профілю (типу швелера з однаковими полицями), навантажений стискальною силою  $P$ , прикладеною по центру тяжіння перерізу. Довжина стержня  $L$ , зусилля  $P$ , і характеристики матеріалу стержня (модуль пружності  $E$ , модуль зсуву  $G$ , коефіцієнт Пуассона  $\nu$ ) вважаються заданими. До параметрів проектування, що варіюються і визначаються з умови мінімуму ваги стержня, відносяться розміри полиць  $b_1, t_1$  і стінки  $b_2, t_2$  (рис. 1, а). Окремо виконувалася оптимізація для стержнів з різною товщиною стінки і полиць (варіант оптимізації А) і для стержнів з однаковою товщиною елементів, що складають переріз, - типу гнутого профілю - (варіант оптимізації Б).

Задача оптимізації ставиться як задача нелінійного програмування. Обмеження задачі включають умови стійкості за згинальною, згинально-крутильною і локальною формами випучування у вигляді  $\sigma \leq \sigma_{kp}^{(i)}$ , де  $\sigma_{kp}^{(i)}$  - критичні напруження  $i$ -ої форми. Обмеження за міцністю не ставилися, тобто припускалося, що межа текучості матеріалу достатньо висока.

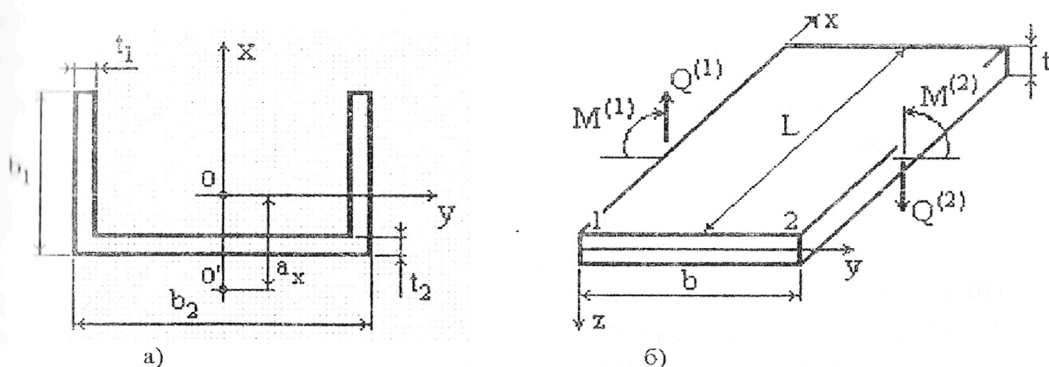


Рис.1. Поперечний переріз стержня - а) і локальні осі координат пластин, що складають профіль - б)

Як відомо, у задачах оптимізації зручно оперувати безрозмірними параметрами, що дозволяє узагальнити отримані результати на широкий ряд конструкцій одного класу (див., наприклад, Шенлі [7]). Безрозмірні параметри навантаження  $P^*$ , ваги стержня  $G^*$ , і напруження  $\sigma^*$  приймалися у вигляді

$$P^* = \frac{P}{L^2 \cdot E} 10^6, \quad G^* = \frac{A}{L^2} 10^3, \quad \sigma^* = \frac{\sigma}{E} 10^3, \quad (1)$$

де  $A$  - площа поперечного перерізу стержня, що характеризується, у свою чергу, безрозмірними геометричними параметрами  $b_2/L, b_1/b_2, t_1/b_1, t_2/b_2$  (масштабні множники введені для зручності).

**Обмеження за загальною формою втрати стійкості.** Критичні напруження загальної форми визначалися за теорією Власова В.З. [8]. Загальне рівняння у випадку центрального стиску для перерізу з одною віссю симетрії розпадається на два рівняння

$$\sigma_y - \sigma = 0;$$

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & a_x \sigma \\ a_x \sigma & r^2 (\sigma_\omega - \sigma) \end{vmatrix} = 0,$$

де  $a_x$  - координата центру згинання профілю;  $r^2 = (I_x + I_y)/A + a_x^2$ ,

$\sigma_x = \pi^2 EI_x / (A \cdot L^2)$ ,  $\sigma_y = \pi^2 EI_y / (A \cdot L^2)$  - згинальні ейлерові напруження;  $\sigma_\omega = (\pi^2 EI_\omega / L^2 + GI_d) / (A \cdot r^2)$  - критичні напруження для чистої крутильної форми ( $I_x, I_y, I_\omega, I_d$  - моменти інерції перерізу при

згинанні і закручуванні). З першого рівняння одержуємо критичні напруження для згинальної форми -  $\sigma_y = \sigma$ . Критичні напруження згинально-крутильної моди дорівнюють значенню меншого з коренів другого рівняння, яке можна записати у вигляді

$$(1 - a_x^2/r^2)\sigma^2 - (\sigma_x + \sigma_\omega)\sigma + \sigma_x\sigma_\omega = 0. \quad (2)$$

**Обмеження за локальною формою випучування.** При розрахунку локальної форми стержень розглядається як ансамбль пластин із точними умовами сполучення по лініях контакту [9]. Для кожної із пластин (рис.1,б) розв'язок диференціального рівняння стійкості приймається у вигляді  $w = w(\eta) \sin m\pi\xi$  ( $w(\eta)$  - функція прогину по ширині пластинки,  $\eta = b/L$ ;  $\xi = x/L$  - поперечна координата;  $m$  - число поперечних напівхвиль випучування).

Силові фактори на краях "1", "2" (верхній індекс, у дужках) пластинок можна виразити через переміщення  $w$  і кути повороту  $w_\eta$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} M \\ Q \end{bmatrix}^{(1)} &= [B_1] \begin{bmatrix} w \\ w_\eta \end{bmatrix}^{(1)} + [B_2] \begin{bmatrix} w \\ w_\eta \end{bmatrix}^{(2)}; \\ \begin{bmatrix} M \\ Q \end{bmatrix}^{(2)} &= [B_3] \begin{bmatrix} w \\ w_\eta \end{bmatrix}^{(1)} + [B_4] \begin{bmatrix} w \\ w_\eta \end{bmatrix}^{(2)}, \end{aligned} \quad (3)$$

де  $[B_k] = \{b_{ij}^{(k)}\}$  - матриці, приведені в [9].

З використанням граничних умов на краях полиць:  $w_{,1}^{(1)} = 0$ ,  $M_{,1}^{(2)} = 0$ ;  $Q_{,1}^{(2)} = 0$  і стінки:  $w_{,2}^{(1)} = w_{,2}^{(2)} = 0$  (нижній індекс після коми - номер пластинки) можна одержати з (3) вираз для згинальних моментів на краях "1" полиць швелера

$$M_{,1}^{(1)} = h_{12,1} w_{\eta,1}^{(1)}. \quad (4)$$

(тут  $h_{ij}$  - елементи матриці  $[H] = [B_1] - [B_2][B_4]^{-1}[B_3]$ ) і на краях "1" і "2" стінки:

$$M_{,2}^{(1)} = b_{12}^{(1)} w_\eta^{(1)} + b_{12}^{(2)} w_\eta^{(2)}; \quad M_{,2}^{(2)} = b_{12}^{(3)} w_\eta^{(1)} + b_{12}^{(4)} w_\eta^{(2)}. \quad (5)$$



Умови сполучення по лініях контакту стінки з полицями (рівність кутів повороту  $w_{\eta,i} = w_{\eta,j}$  і рівність нулю алгебраїчної суми згинальних моментів  $M_{,i} = -M_{,j}$ ) призводять, з урахуванням (4) і (5), до системи рівнянь

$$\begin{cases} (b_{12,2}^{(1)} + h_{12,1})w_{\eta,2}^{(1)} + b_{12,3}^{(2)}w_{\eta,2}^{(2)} = 0; \\ b_{12,2}^{(3)}w_{\eta,2}^{(1)} + (b_{12,2}^{(4)} - h_{12,1})w_{\eta,2}^{(2)} = 0 \end{cases}$$

і до характеристичного рівняння

$$(b_{12,2}^{(1)} + h_{12,1})(b_{12,2}^{(4)} - h_{12,1}) - b_{12,2}^{(2)}b_{12,2}^{(3)} = 0, \quad (6)$$

яке при цілочисельній мінімізації за кількістю подовжніх напівхвиль  $m$  визначає критичні напруження локального випучування.

Необхідно відзначити, що залежність напружень локальної форми від  $m$  для стиснутих тонкостінних стержнів може мати два локальних мінімуми (один із яких визначається переважно параметрами полиці, а інший - стінки), і при зміні параметрів перерізу в процесі оптимізації ці мінімуми змінюються. Тому при пошуку оптимальних параметрів стержня напруження локальної форми розраховувалися за рівнянням (6) для широкого діапазону чисел подовжніх напівхвиль (тобто замість одного обмеження за локальною стійкістю розглядалася множина обмежень, як правило, для значень  $m = 2 - 35$ ).

**Метод розв'язку задачі оптимізації.** При виконанні розрахунків використовувався розроблений раніше пакет програм, що дозволяє досліджувати стійкість тонкостінних стержнів за загальною і локальною формами, а також використовувалася програма, що реалізує метод оптимізації - лінеаризований метод приведенного градієнту (ЛМППГ) [10]. Багаторічний досвід застосування алгоритму ЛМППГ при рішенні задач оптимізації підкріплених пластин і оболонок (а також інших задач) показав високу ефективність і надійність методу. Для досягнення оптимуму було потрібно, як правило, 30-40 ітерацій при відносній похибці визначення оптимальних параметрів порядку  $10^{-3}$ .

**2. Результати розрахунку.** При рішенні задачі оптимізації всі оптимальні безрозмірні параметри стиснутого тонкостінного стержня визначаються завданням одного безрозмірного параметра навантаження

$P^*$ . (При додатковому завданні довжини стержня  $L$  визначаються дійсні геометричні розміри оптимальних стержнів).

На рис.2,а показані поперечні перерізи стержнів фіксованої довжини  $L=1\text{м}$ , розраховані за варіантом оптимізації А для різних значень параметра навантаження  $P^*$ . Необхідно відзначити стабільність співвідношень параметрів оптимальних профілів у цілому розглянутому діапазоні зміни параметра навантаження: співвідношення розмірів стінки і полиць –  $b_1/b_2=0,84\dots0,86$ ,  $t_1/t_2=0,43\dots0,44$ , відношення сумарної площі полиць до площі стінки –  $2b_1t_1/(b_2t_2)=0,74\dots0,75$ . Отримані профілі відрізняються від реальних швелерів (прокатних) значно більшою товщиною стінки, ніж полиць. Це пояснюється, очевидно, тим, що прокатні профілі призначені, в основному, для роботи на згинання, а не на центральний стиск.

Розрахунки за варіантом оптимізації Б (при однаковій товщині елементів перерізу) призводять до істотно інших обрисів стержнів (для довжини  $L=1\text{м}$  перерізи показані на рис.2,б), що характеризуються, насамперед, іншим співвідношенням ширини полиць і стінки –  $b_1/b_2=0,43\dots0,42$ . При цьому відношення сумарної площі полиць до площі стінки –  $2b_1t_1/(b_2t_2)=0,86\dots0,84$ . Параметри перерізів отриманих оптимальних стержнів добре співвідносяться з параметрами стандартних сталевих гнутих швелерів (але, як правило, мають меншу товщину елементів).

Відносна товщина елементів профілів, отриманих за варіантами оптимізації А і Б, зростає при збільшенні навантаження. Для деяких значень параметра  $P^*$  дані наведено в табл.1.

Таблиця 1

Параметр навантаження $P^*$	Варіант оптимізації А		Варіант оптимізації Б	
	$t_1/b_1$	$t_2/b_2$	$t_1/b_1$	$t_2/b_2$
0,5	0,043	0,084	0,049	0,021
1,0	0,049	0,094	0,056	0,024
1,5	0,053	0,1	0,061	0,026
2,0	0,056	0,106	0,065	0,027

Наведені вище значення безрозмірних параметрів оптимальних стержнів дозволяють однозначно визначити геометричні розміри оптимальних перерізів за заданими  $P$  і  $L$ .

За варіантом оптимізації А активними обмеженнями задачі виявляються обмеження стійкості за згинальною, згинально-крутильною і локальною формами випучування. За локальною формою, як вказувалося раніше, обмеження розраховувалися для широкого діапазону чисел подовжніх напівхвиль  $m$ , і значення  $m$  для активного обмеження

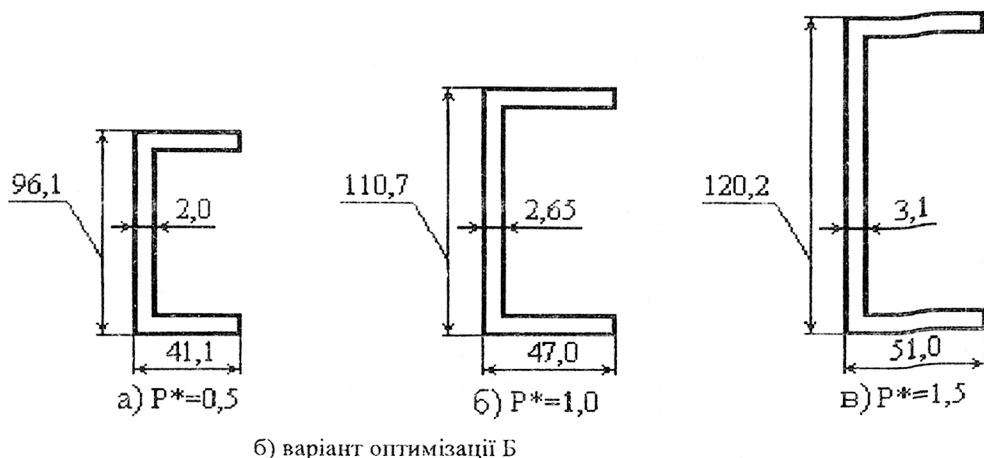
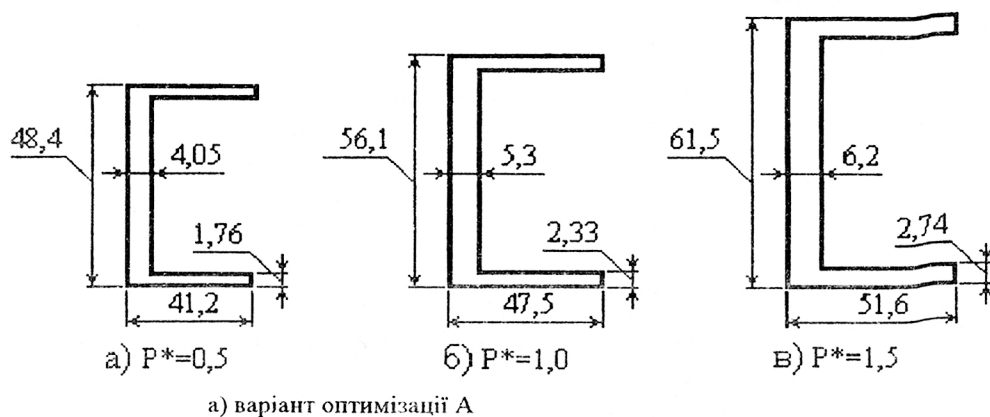


Рис.2. Оптимальні профілі поперечних перерізів при різних значеннях параметра навантаження  $P^*$  (розміри - у мм)

визначалося в процесі розв'язку (із збільшенням параметра  $P^*$  значення  $m$  зменшується, від  $m=15$  при  $P^*=0,1$  до  $m=8$  при  $P^*=4$ ). Спектри критичних напружень в залежності від числа подовжніх напівхвиль для локальних форм стержнів оптимального профілю при різних значеннях параметра  $P^*$  показані на рис.3. Відзначимо при цьому, що коефіцієнти стійкості для локальної форми оптимальних профілів характеризуються достатньо стабільними значеннями: для полиці  $k_1=0,89$  і для стінки  $k_2=0,22 \dots 0,25$ .

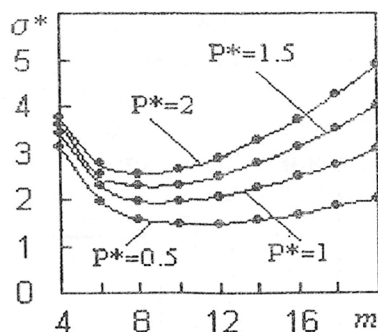
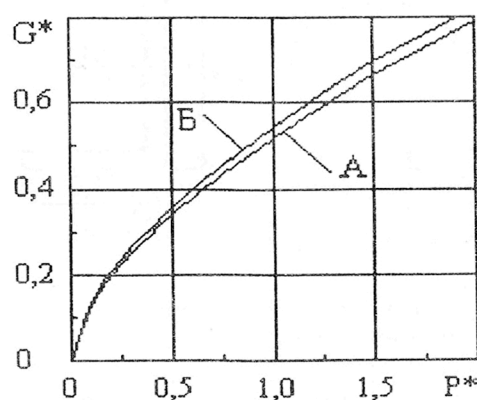


Рис. 3. Спектри напружень локальних форм для

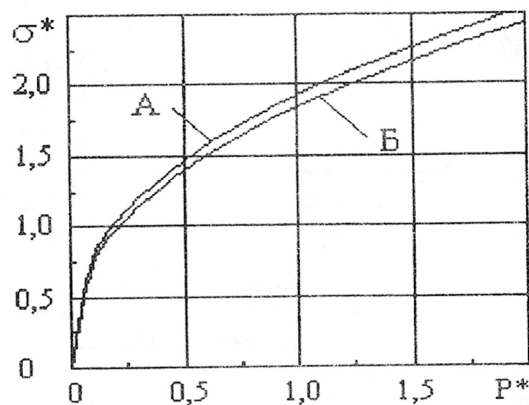
Залежності безрозмірного параметра ваги  $G^*$  і безрозмірних напружень  $\sigma^*$  від параметра навантаження при різних товщині полиць і стінки показані лініями А на рис. 4.

За варіантом оптимізації Б активними обмеженнями задачі виявляються умови стійкості за згинально-крутильною і локальною формами випучування, а також умова рівності товщин елементів профілю (за загальним випучуванням критичні напруження виявляються вище на 10-15%). Значення безрозмірного

параметра ваги  $G^*$  і безрозмірних напружень  $\sigma^*$  для цього варіанта, показані лініями Б на рис.4, відрізняються від відповідних характеристик для оптимального стержня з різною товщиною полиць і стінки приблизно на 4,5%. Значення коефіцієнтів стійкості елементів перерізу (полиці –  $k_1=0,65\dots 0,64$  і стінки –  $k_2=3,52\dots 3,58$ ) свідчать про майже незалежну поведінку стінки і полиць при місцевому випучуванні.



а) безрозмірний параметр ваги



б) безрозмірний параметр напружень

Рис. 4. Залежності безрозмірних параметрів оптимальних стержнів від параметра навантаження для варіантів оптимізації А ( $t_1 \neq t_2$ ) і Б ( $t_1 = t_2$ )

Залежності  $G^*(P^*)$  і  $\sigma^*(P^*)$ , подані на рис. 4, із великою точністю (похибка не перевищує 1%) апроксимуються степеновими функціями:

варіант оптимізації А -  $\sigma^* = 1,93P^{*0,396}$ ;  $G^* = 0,518P^{*0,604}$ ;

варіант оптимізації Б -  $\sigma^* = 1,842P^{*0,4}$ ;  $G^* = 0,543P^{*0,6}$ .

Ці вирази дозволяють не тільки легко визначати напруження і вагу оптимального стержня, але знаходити граничні значення  $P$ , до котрих дане рішення є дійсним. Ці граничні значення визначаються з умови

$$\sigma^* = \frac{\sigma_s}{E} 10^3, \text{ де } \sigma_s - \text{межа текучості матеріалу стержня.}$$

**3. Порівняння з іншими розв'язками.** Відомо декілька рішень задачі визначення оптимальних параметрів стиснутих тонкостінних стержнів із використанням простих наближених формул для місцевої втрати стійкості. У роботі Баловнева Г.Г. [11] наведено розрахункові залежності для визначення оптимальних розмірів тонкостінного гнучкого швелера з урахуванням загальної і локальної стійкості. Використовувалася умова рівності стійкості за згинальною, згинально-крутильною і локальною формами випучування. При цьому для локальної форми ставилася умова рівності напружень для стінки (розрахованих як для окремої шарнірно спертої пластини) і для полиць (як пластин, шарнірно спертих на трьох сторонах). Крім того, за допомогою коефіцієнта защемлення, запропонованого С.П.Тимошенко, враховувався взаємний вплив елементів профілю, що, на думку Баловнева Г.Г., усе ж мало позначився на параметрах стержня. У статті [11] приведені розміри центрально стиснутого швелера, отримані при вихідних даних - навантаження  $P=20$  кН, довжина стержня  $L=1$  м. Порівняння результатів розрахунків [11] із результатами, отриманими за нашою програмою, для цього варіанта наведено в табл. 2.

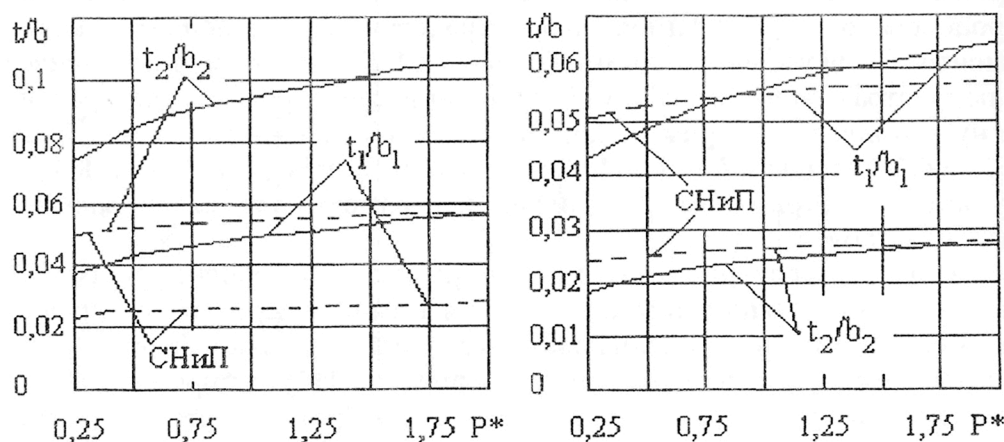
Оптимальні стержні, отримані за формулами Баловнева, а також у даній постановці, мають близькі значення площі поперечних перерізів і критичних напружень для згинально-крутильної і локальної форм. Можна зробити висновок, що спрощення, прийняті в [11], є прийнятними і призводять до не занадто великої похибки. Проте різняться розміри елементів профілю, а також критичні згинальні напруження. Значно більший запас за загальною (ейлеровою) формою для перерізу, отриманого в нашому розрахунку, має істотне значення з погляду можливого впливу нелінійних ефектів і чутливості до недосконалостей, не врахованих у даних розрахунках.

	Розміри поперечного перерізу, мм			Площа перерізу, мм <sup>2</sup>	Критичні напруження, МПа		
	$b_1$	$b_2$	$t$		Згинальні	Локальні	Згинально-крутильні
Розрахунок за формулами [11]	27	75	1,06	137	141,5*	145,3*	148,2*
Розрахунок за програмою	29,8	69,3	1,06	136	175,0	150,5	150,5

\* -значення напружень розраховані авторами даної статті.

Було виконане порівняння отриманих оптимальних параметрів із рекомендаціями норм із розрахунку стійкості стінок і полиць стиснутих елементів [12]. На рис. 5 подані значення оптимальних відношень  $t_1/b_1$  і  $t_2/b_2$  у залежності від безрозмірного параметра навантаження  $P^*$  для стержня зі сталі С245 і мінімальні значення цих співвідношень відповідно до вимог [12] (пунктирна лінія).

При  $t_1 \neq t_2$  вимоги норм виконуються для стінки і полиць (рис.5,а), а при  $t_1 = t_2$  - вимоги не виконуються для полиць при малих значеннях навантаження і в більш широкому діапазоні навантажень для стінки (рис.5,б), проте порушення цих рекомендацій відносно невелике.



а) варіант оптимізації А ( $t_1 \neq t_2$ )

б) варіант оптимізації Б ( $t_1 = t_2$ )

Рис. 5. Розрахункові співвідношення товщини і ширини елементів оптимальних стержнів і співвідношення згідно з [12] при різних значеннях параметра навантаження  $P^*$

1. Оптимальное проектирование конструкций. Библиографический указатель. Часть 1. АН СССР, СО, Институт гидродинамики. Новосибирск, 1975, с. 140-157.
2. Kirste L. Beitrag zum Problem des "Tragwerks-Mindestgewicht" // Z. Flugwissenschaften. 1960, Bd. 8, №12, s. 352-359.
3. Saelman B., Rubin A.E. Designing minimum-section columns // Mach. Design. 1961, V.33, №22, p. 167-169.
4. Gorski S. Optimalizacja projektowania stalowych dwugęziowych prętów sciskanych osiowo // Inz-ia i budown. 1968, t.25, №12, s. 465-469.
5. Губайдуллин Р.Г. Метод определения оптимального сечения центрально сжатых стоек // Изв. вузов. Строит.-во и арх-ра. 1969, №2, с. 12-18.
6. Yoshida H., Maegawa K. The optimum cross section of channel columns. Int. J. Mech. Sci., V. 21, 1979, N 3, pp. 149-160.
7. Шэнли Ф.Р. Анализ веса и прочности самолётных конструкций. М., Оборонгиз, 1957. - 408 с.
8. Власов В.З. Тонкостенные упругие стержни. Изд-е 2-е. М.: ГИФМЛ. 1959, 568 с.
9. Маневич А.И., Ракша С.В. Местное и связанное выпучивание тонкостенных стержней при сжатии и изгибе в двух плоскостях. В сб.: Theoretical Foundations in Civil Engineering. 4, V.1, part 2 (Proc. Of the Polish-Ukrainian seminar, Warsaw, July 1996), Dnepropetrovsk, 1996. - с. 270-275.
10. Маневич А.И., Зайденберг А.И. Линеаризованный метод приведенного градиента для решения задач нелинейного программирования // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1974. № 6, с. 13-18.
11. Баловнев Г.Г. Определение оптимальных размеров тонкостенных гнутых профилей для сжатых элементов // Строит. механика и расчет сооруж. 1962. № 6, с. 40-44.
12. СНиП II-23-81. Строительные нормы и правила. Часть 2. Нормы проектирования. Глава 23. Стальные конструкции. Москва, 1990. Госстрой СССР, с. 9-10.

*Поступила в редколлегию 28.04.2000р.*