

УДК 004:512

В. М. Ильман – Днепропетровский национальный университет железнодорожного транспорта имени академика В. Лазаряна

Е. С. Куропятник – Днепропетровский национальный университет железнодорожного транспорта имени академика В. Лазаряна, elenadiit@rambler.ru

## КОНЦЕВЫЕ ОБЪЕКТЫ И ИХ ГРАММАТИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА

*Статью представили д.т.н. проф. В. И. Шинкаренко (ДНУЖТ),  
д.ф.-м.н. проф. В. Е. Белозеров (ДНУ)*

### Введение

Среди множества подходов используемых для моделирования предметных областей грамматический подход информатики выделяется своей простотой и универсальностью. Существует большое разнообразие моделирующих грамматик: мультисимвольные, программные, графические и пр. [1, 2, 3]; формальных систем, использующих грамматики [4, 5] и др. Носителями грамматик являются алфавиты, элементы которых являются некоторыми формализмами предметных областей, представляемые терминальными и нетерминальными символами. Формально, алфавит – множество свободных не связанных с системой отсчета элементов (символов, формальных имен и пр.), из которых с помощью определенных операций составляются цепочки-слова некоторого языка. Однако, элементами алфавитов могут быть объекты более сложной структуры. Так в информационных, транспортных, графических, экономических, биологических и прочих системах объекты предметных областей могут иметь строковую, интервальную, древовидную и иную природу и представляться концами (префиксами, суффиксами) строк, интервалов [6] или более сложными конечными конструкциями. Аналогичная ситуация возникает при рассмотрении конечных элементов строительной механики, математических объектов в комплексной области, представлений потоковых сетей, блоков алгоритмов – программ. В самих формальных грамматиках порождаемые ими цепоч-

ки языков связаны также с понятиями концов [3]. Поэтому, носители таких грамматик должны задаваться определенными конструктивными структурами, а сами грамматики – грамматическими структурами. Грамматическая структура задает модель предметной области, предназначенную для конструирования и анализа теоретических и практических вопросов в частности алгоритмических программ, информационных потоков, технологических цепочек, производственных процессов и других. Грамматическая структура представляется [7, 8] как носитель, сигнатура и конструктивная аксиоматика. Составляющие структуры неоднородны по составу, правилам выполнения и другим показателям.

*Объектом наших исследований являются* свободные конечные конструкции. В рассматриваемой работе вводится структура свободных концов и предлагаются операции над конечными объектами. Свободные концы определяются как упорядоченные или неупорядоченные наборы элементов некоторого алфавита, и могут характеризоваться длиной и другими характеристиками. Концевые объекты несвязаны с системой отсчета [9]. Предложена конструктивная грамматическая структура на свободных концах и рассмотрена задача построения формального языка на свободных концах при условии совместимости конечных конструкций. Такая конечная грамматическая структура, например, позволяет проектировать технологический

процесс формирования информационных списков объектов предметной области с заданными характеристиками, ограничениями на совместимость и прочее. Носитель грамматической структуры состоит из конструктивных терминальных и нетерминальных структур концов, вспомогательных символов и множеств характеристик, причем нетерминальные концы могут иметь нулевую характеристику длины. Сигнатура включает двуместные операции конкатенации и подстановки, многоместные отношения конкатенации, непосредственного вывода и других операций и операторов. Конструктивная аксиоматика грамматической структуры позволяет строить свободные языки на свободных концах и, следовательно, корректно применять правила подстановок. Правила подстановок грамматической структуры могут иметь детерминированную и недетерминированную нагрузки, обусловленные особенностями предметных областей. Кроме того, некоторые нетерминальные концы в правилах подстановки являются контекстными сопровождениями и так же могут нести определенную смысловую нагрузку. Предложенная грамматическая структура концов при наложении ограничений на правила подстановок, на их веса и прочее обобщает грамматические структуры, определенные на классических алфавитах [1].

**Целью данной работы является** формализация понятия концевых конструкций (свободных концов), определения их структуры и аксиоматику.

### Структура свободных концов

Носители формальных грамматик состоят из алфавитов, элементы которых являются свободными в том отношении, что их можно вставлять в конструкцию цепочки в любое место, предусмотренное правилами грамматики. Поэтому постулируем следующее:

- любой алфавит  $A$  носителя формальной грамматики свободный;

- конструктивный алфавит  $B$ , элементы которого построены на свободном алфавите  $A$  – свободный;
- $A \subset B$ .

Рассмотрим некоторые свободные элементы, которые могут составлять конструктивные алфавиты грамматик.

Пусть задан терминальный алфавит  $A = \{a_i\}_{i=0}^n$  такой, что  $a_0 = \varepsilon$  – пустой (нейтральный) символ, и подмножество положительных действительных чисел  $R^+$ , такое, что  $0 \in R^+$ . На алфавите  $A$  зададим конструкцию  $c_i$  из набора элементов  $a_{i_j}$  такую, что элементы из алфавита могут повторяться:

$$(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}). \quad (1)$$

В конструкции (1) все или часть элементов могут быть концами.

Например, конструкция (1) может быть мультимножеством или образовывать список  $[a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}]$  [6], или быть гибридным – составленным из элементов мультимножества и списка. Если  $0 \leq |c_i| \leq m$  размер конструкции (1) такой, что при размере  $|c_i| = 0$ ,  $c_i = \varepsilon$  и  $|c_i| = 1$ ,  $c_i = a_{i_j}$ ; то конструктивный алфавит  $A_c = \{c_i\}$  свободный и  $A \subset A_c$ . Другими объектами, задаваемыми выражением (1) могут быть наборы концевых и не концевых вершин графа, вершин симплекса и прочее.

Концы могут быть простыми, если «тело» объекта не учитывается (например, простой интервал [7]).

**Определение 1.1.** Пару  $(a_{i_j}, a_{i_k}) = s_i$  назовем свободной концевой конструкцией  $s_i$  простых концов, для которых  $a_{i_j}$  и  $a_{i_k}$  элементы свободного алфавита  $A$  и на индексах  $j$  и  $k$  не установлено отношение порядка.

Множество  $\{s_i\}$  задает свободный алфавит простых концов  $A_s$ , причем при усло-

вии  $s_i = (a_{i_j}, a_{i_j}) = a_{i_j}$  имеем  $A \subset A_s$ . Очевидно, свободная концевая конструкция  $s_i$  является частным случаем конструкции (1).

**Определение 1.2.**  $k$ -мерной (по количеству пар) свободной простой концевой конструкцией называется набор  $((a_{i_1}, a_{i_2}), \dots, (a_{i_j}, a_{i_{j+1}})) = S_k$ .

Различные концевые конструкции  $S_k$  образуют конструктивный алфавит  $A_{sk}$  такой, что  $A \subset A_{sk}$ , если, например,  $S_k = ((a_{i_1}, a_{i_1}), (\varepsilon, \varepsilon) \dots, (\varepsilon, \varepsilon)) = a_{i_1}$ .  $k$ -мерная свободная концевая конструкция  $S_k$  задает другое представление конструкции (1).

Если концевая конструкция имеет «тело» (например, простая дуга [7]), то с конструкцией  $s_i$  свяжем набор конечных чисел  $\{r_j\}_{j=1}^{k-1} \subset R^+$  таких, что каждой паре концов  $(a_{i_j}, a_{i_{j+1}}) \mapsto r_j$ .

**Определение 1.3.** Тройка  $(a_{i_j}, a_{i_{j+1}}, r_j)$  образует нагруженную (постоянную) свободную конструкцию концов  $a_{i_j}$  и  $a_{i_{j+1}}$ .

**Определение 1.4.** Нагруженной  $k$ -мерной свободной концевой конструкцией называется

$$((a_{i_1}, a_{i_2}, r_1), (a_{i_2}, a_{i_3}, r_2), \dots, (a_{i_{k-1}}, a_{i_k}, r_k)).$$

Очевидно, совокупности нагруженных концевых конструкций также образуют конструктивные алфавиты. Если конструкции в определениях 1.1 – 1.4 ориентированные (на индексах элементов концов установлено отношение порядка), то они задают списочные свободные концевые конструкции. Определенные выше концевые пары могут служить моделями таких математических объектов как интервал, вектор, матрица и др.; концами лингвистических и программных выражений; концами программных процедур и прочее. Концевые конструкции на парах допускают обобщение на тройки, четверки концов, симплексы, симплицальные комплексы и так далее. Чтобы не загромождать предмет

исследований ограничимся в дальнейшем только одномерными концами.

Данные выше упрощенные определения свободных концов является понятиями и требуют уточнения, поэтому определим элементарную структуру  $C_s$ , порождающую свободные бинарные концы:

$$C_s = \langle M_s, \Sigma_s, \Lambda_s \rangle, \quad (2)$$

где  $M_s = (A, U, V_1, V_2, \dots, V_l, D)$ ,  $A$  – свободный алфавит определенный выше,  $U$  – ограниченное подмножество множества  $R^+$  такое, что  $0 \in U$ ,  $V_j$  – характеристические конечные множества, в общем, разной природы, для которых  $\varepsilon \in V_j$ ;

$D = \{ (, ), [, ], ., -, s, s_i \}$  – множество специальных символов;  $\Sigma_s = \{ f_{1,2}^2, h_{1,2}^3, \frac{r}{a} \rightarrow^2 \}$  – сигнатура приписывающих отношений порядка и отображений и  $\Lambda_s$  – конструктивная аксиоматика порождения алфавитов свободных концов, которая может состоять из отдельных или комбинаций следующих аксиоматик:  $\Lambda_{s1}$  – аксиоматика свободных простых концов и конструктивного алфавита

$\forall a_i, a_j \in A, f_1(a_i, a_j) = (a_i, a_j); (a_i, a_j) = (a_j, a_i) = s; s$  – простая концевая конструкция;

$$s = (a_j, a_j) = a_j, s = (\varepsilon, a_j) = a_j; \{s_k\}_{k=0}^m = A_s, s_0 = \varepsilon,$$

$$m = n + \frac{n!}{2(n-2)!} + 1, A \subset A_s; A_s \text{ – конструк-}$$

тивный алфавит свободных простых концов;  $\Lambda_{s2}$  – аксиоматика свободных списочных простых концов и конструктивного алфавита:

$$\forall a_i, a_j \in A, f_2(a_i, a_j) = [a_i, a_j] = \bar{s};$$

$$[a_i, a_j] \neq [a_j, a_i];$$

$\bar{s}$  – списочная простая концевая конструкция;  $\bar{s} = [a_j, a_j] = a_j, \bar{s} = [\varepsilon, a_j] = [a_j, \varepsilon] = a_j;$

$$\{\bar{s}_k\}_{k=0}^{m_1} = \bar{A}_s, \bar{s}_0 = \varepsilon, m_1 = n + \frac{n!}{(n-2)!} + 1,$$

$A \subset \bar{A}_s$ ;  $\bar{A}_s$  – конструктивный алфавит свободных списочных простых концов;

$\Lambda_{s3}(w)$  – аксиоматика свободных нагруженных концов и конструктивного алфавита:

$$\begin{cases} r_p \in U \ \& \ v_{qg} \in V_q, w = [r_p, v_{1g_1}, v_{2g_2}, \dots, v_{1g_l}]; \\ w - \text{характеристический список}; \\ \begin{cases} \forall a_i, a_j \in A \ \& \ r_p \in U \ \& \ v_{qg} \in V_q, \\ h_1(a_i, a_j, w) = (a_i, a_j, w); \\ (a_i, a_j, w) = (a_j, a_i, w) = s(w); \end{cases} \end{cases}$$

$s(w)$  – нагруженная концевая конструкция;

$\{s_k(w)\}_{k=0}^{m_k} = A_s(w)$  – конструктивный алфавит свободных нагруженных концов;

$\Lambda_{s4}(w)$  – аксиоматика свободных нагруженных списочных концов и конструктивного алфавита:

$$\begin{cases} \forall a_i, a_j \in A \ \& \ r_p \in U \ \& \ v_{qg} \in V_q, \\ h_2(a_i, a_j, w) = (\bar{s}, w) = \bar{s}(w); \end{cases}$$

$\bar{s}(w)$  – нагруженная списочная концевая конструкция;

$\{\bar{s}_k(w)\}_{k=0}^{m_k} = \bar{A}_s(w)$  – конструктивный алфавит свободных нагруженных списочных концов.

Кроме того аксиоматики нагруженных концов должны быть дополнены аксиомами:

- $\begin{cases} \forall a_i, a_j \in A \ \& \ r_p \in U \Rightarrow \\ s(w) \mid \bar{s}(w) \xrightarrow[r_p=a_j]{r_p=0} a_j(w); \\ w = [0, \varepsilon, \varepsilon, \dots, \varepsilon] \Rightarrow a_j(w) = a_j; \end{cases}$
- $A \subset A_s, A_s \subset A_s(w) \ \& \ A_s \subset \bar{A}_s(w);$
- $\begin{cases} \exists v_{kj_i} \in w - \text{вероятностный} \\ \text{элемент характеристики}, \\ \Rightarrow v_{kj_i} = p_{ij} \ \& \ \sum_{j=1}^{k_i} p_{ij} = 1. \end{cases}$

Структура (2) обобщает структуры классических алфавитов с элементарными структурами символов и позволяет распространить ее на алфавиты с другой структурой символов. В частности, если алфавит носителя  $M$  числовой, то получим обычную структуру концов в системе координат.

Если алфавит носителя нетерминальный, задающий некоторый контекст, то символы этого алфавита в структуре (2) можно определить как ненагруженные концевые конструкции или нагруженными конструкциями нулевой длины со смысловыми характеристиками заданного списка.

Выясним некоторые свойства концевых структур. Предположим, что на алфавите  $B_1$  определена структура концов типа (2)  $C_s(B_1)$ , а на алфавите  $B_2$  соответствующая структура  $C_s(B_2)$ .

**Определение 1.5.** Структуры концов  $C_s(B_1) = \langle M_1, \Sigma_1, \Lambda_1 \rangle$  и  $C_s(B_2) = \langle M_2, \Sigma_2, \Lambda_2 \rangle$  однотипные, если  $M_1 = M_2 \mid M_1 \neq M_2$ ,  $\Sigma_1 = \Sigma_2$  с точностью до обозначений операций и аксиомы аксиоматик  $\Lambda_1$  и  $\Lambda_2$  одинаковы с точностью до имен символов алфавитов и характеристических списков.

Введенная концевая структура с помощью дополнительных операций дает возможность строить концевые конструкции, заданные определениями 1.3 и 1.4. Для этого введем в рассмотрение словарь алфавитов.

Предположим, что словарь  $B = \bigcup_{k=0}^m B_k$ ,

составленный из некоторых алфавитов  $B_k$

таких, что  $\bigcap_{k=1}^m B_k = \emptyset$  и на каждом определена однотипная концевая структура

$C_s(B_k) = \langle M_k, \Sigma, \Lambda \rangle$ . Тогда на словаре  $B$  определена структура

$C_s(B) = \langle M, \Sigma, \Lambda \rangle$ , в

которой носитель  $M = \bigcup_{k=0}^m M_k$ .

**Определение 1.6.** Пусть  $C_s(B_1) = \langle M_1, \Sigma_1, \Lambda_1 \rangle$  и  $C_s(B_2) = \langle M_2, \Sigma_2, \Lambda_2 \rangle$  однотипные структуры, тогда концевая структура  $C_s(B_1)$  есть *подструктурой* структуры  $C_s(B_2)$ , ( $C_s(B_1) \subset C_s(B_2)$ ), если  $M_1 \subset M_2$ .

Очевидно, что составляющие словаря  $B$  определяют подструктуры  $C_s(B_k)$  конечной структуры  $C_s(B) = \langle M, \Sigma, \Lambda \rangle$ .

Для свободной конечной структуры  $C_s(B) = \langle M, \Sigma, \Lambda \rangle$  укажем некоторые алгебраические свойства.

**Свойство 1.1.** В структуре  $C_s(B)$  всегда можно выделить однотипную подструктуру  $C_s(D_j)$ ,  $D_j \subset B$ .

Множество всех подструктур  $C_s(D_j)$  структуры  $C_s(B)$  обозначим как  $\tilde{B}$ .

**Определение 1.7.** Подструктура  $C_s(D_j)$  пустая, если  $D_j = \{\varepsilon\}$ .

**Свойство 1.2.**  $C_s(\{\varepsilon\}) \in \tilde{B}$ , пустая подструктура порождает пустой конечный алфавит.

**Определение 1.8.** Подструктуры  $C_s(D_1), C_s(D_2) \in \tilde{B}$  эквивалентны, если  $\hat{D}_1 = \hat{D}_2$ .

**Определение 1.9.** Подмножество подструктур  $S \subset \tilde{B}$  такое, что

$$S = \left\{ C_s(D_j); j \in J, \bigcup_{j \in J} C_s(D_j) = C_s(B) \right\}$$

называется образующим.

**Свойство 1.3.** Подструктуры, определенные на составляющих  $B_k$  словаря  $B$  являются образующими структуры  $C_s(B)$ .

Введенное определение 1.8 задает отношение эквивалентности на множестве подструктур  $\tilde{B}$ . Так же как в грамматических структурах [4], это отношение позволяет разбить множество  $\tilde{B}$  на классы эквивалентности и совместно с образующим множеством  $S$  дает возможность получить новые алгебраические свойства свободной конечной структуры.

Так как из аксиом аксиоматики структуры (2) следует, что нагруженные конечные алфавиты обобщают ненагруженные алфавиты, то в дальнейшем будем рассматривать только нагруженные алфавиты и обо-

значать их, независимо от ориентации, как  $\hat{B}$ , а при необходимости использовать обычные обозначения как в структуре (2).

### Операции над свободными концевыми конструкциями

Рассмотрим теперь конструктивную аксиоматику некоторых операций над свободными концами, порожденными структурой  $C_s(\hat{B})$ .

Аксиоматику  $\Lambda(\otimes)$  линейной (двухместной) конкатенации  $\otimes$  над концами структуры  $C_s(B)$  определим следующим образом:

$$\begin{cases} \forall \hat{s}_1, \hat{s}_2, \hat{s}_3 \in \hat{B}_k, \hat{s}_1 \otimes \hat{s}_2 = \hat{s}_1 \hat{s}_2 = \hat{l}, \\ \hat{s}_1 \otimes \hat{s}_2 \neq \hat{s}_2 \otimes \hat{s}_1, \hat{s}_1 \otimes \varepsilon = \varepsilon \otimes \hat{s}_1 = \hat{s}_1 = \hat{l}, \\ \hat{s}_1 \otimes \hat{s}_2 \otimes \hat{s}_3 = (\hat{s}_1 \otimes \hat{s}_2) \otimes \hat{s}_3 \\ \hat{s}_1 \otimes \hat{s}_2 \otimes \hat{s}_3 = \hat{s}_1 \otimes (\hat{s}_2 \otimes \hat{s}_3) = \hat{s}_1 \hat{s}_2 \hat{s}_3 = \hat{l}; \\ \forall \hat{s}_1, \hat{s}_2 \in \hat{B}_k = B_{ks} \Rightarrow \hat{l} = l = s_1 s_2; \\ \hat{B}_k = \bar{B}_{ks} \Rightarrow \hat{l} = \bar{l} = \bar{s}_1 \bar{s}_2; \\ \hat{s}_1 = \hat{s}_1(w_1) \& \hat{s}_2 = \hat{s}_2(w_2), \\ \hat{s}_2(w_2) \Rightarrow \hat{s}_1 \otimes \hat{s}_2 = \hat{l} = \bar{l}(w_1, w_2); \end{cases} \quad (3)$$

$\hat{l}$  – конечная цепочка.

Операцию конкатенации  $\otimes$  двух конечных конструкций  $\hat{s}_1, \hat{s}_2$  можно модифицировать, определив поворот конструкции  $\hat{s}_2$  относительно  $\hat{s}_1$  или, наоборот, на заданный угол  $\gamma$ , т.е. выполнить операцию конкатенации с поворотом  $\otimes(\gamma)$  [8]. Другие модификации конкатенации получаются как конкатенации левых  $\otimes_l$ , правых  $\otimes_p$  и обоих  $\otimes_g$  концов конструкций. Так для операций  $\otimes_l, \otimes_p$  и

$$\begin{aligned} \hat{l}_r \not\in \hat{l} &\Rightarrow f(\hat{l}, q_i) = q_j \in W_i \mid \\ \hat{l} &\stackrel{f(\hat{l}, q_i)=q_j}{\Rightarrow} \hat{l}_n; \end{aligned} \quad \text{соответственно}$$

имеем:

$$\bullet \quad \begin{cases} \hat{s}_1 = (\hat{b}_{11}, \hat{b}_{12}) \& \hat{s}_2 = (\hat{b}_{21}, \hat{b}_{22}); \\ \hat{b}_{11}, \hat{b}_{12}, \hat{b}_{21}, \hat{b}_{22} \in \hat{B} \\ \Rightarrow \hat{s}_1 \otimes_l \hat{s}_2 = \hat{l} = (\hat{b}, \hat{b}_{12}) \vee (\hat{b}, \hat{b}_{22}), \\ \hat{b} = \hat{b}_{11} \mid \hat{b}_{21}; \end{cases}$$

- $\hat{s}_1 \otimes_p \hat{s}_2 = \hat{l} = (\hat{b}_{11}, \hat{b}) \wedge (\hat{b}_{21}, \hat{b}),$   
 $\hat{b} = \hat{b}_{12} \mid \hat{b}_{22};$
- $\hat{s}_1 \otimes_g \hat{s}_2 = \hat{l} = ((\hat{b}_{11} = \hat{b}_{21}), (\hat{b}_{12} = \hat{b}_{22})),$   
 $w_1 \neq w_2;$

что соответствует слиянию соответствующих концов концевых конструкций.

Если аксиоматику операции  $\otimes$  над нагруженными концами дополнить списочным отображением  $\eta$ , то получим сложную операцию конкатенации  $\otimes_1$ , для которой дополнение к аксиоматике будет

$$\begin{aligned} \hat{s}_1 &= \hat{s}_1(w_1) \& \hat{s}_2 = \hat{s}_2(w_2), \\ \hat{s}_2(w_2) &\Rightarrow \hat{s}_1 \otimes_1 \hat{s}_2 = \hat{l}(w), \\ w &= \eta(w_1, w_2); \end{aligned} \quad (4)$$

Введем некоторые ограничения на носители списка

$$\begin{cases} \forall \hat{l} = \hat{l}_1^s \hat{l}_j^s \hat{l}_2^s, \hat{l}_1, \hat{l}_2 \in F(\hat{A}_s \cup \hat{H}_s); \\ \text{по аксиоматике } \Lambda_j \Rightarrow \\ \mu(\hat{l}_{i,j}^s) = \hat{s}_{i,j} \alpha_{i,j}(\mu(t_{i,j})), \\ \mu(t_{i,j}) = [\tau_{i,j_1}, \tau_{i,j_2}, \dots, \alpha_{i,j} \tau_{i,j_r}, \dots, \\ \tau_{i,j_k}], \end{cases} \quad \text{и опре-}$$

делим правило отображения  $\eta$ .

Пусть  $|w|$  длина характеристического списка некоторой свободной конструкции  $\hat{s}(w)$ .

1.  $\forall \hat{s}_1, \hat{s}_2 \in \hat{B}_k, |w_1| = |w_2|$ , это требование естественно выполняется, если ввести пустой символ  $\varepsilon$  вместо недостающего элемента в списке;

$$2. \begin{cases} \forall \hat{s}_1, \hat{s}_2 \in \hat{B}_k, w_1 = [r_{1p}, v_{1g_1}, v_{1g_2}, \dots, v_{1g_l}], \\ w_2 = [r_{2p}, v_{2g_1}, v_{2g_2}, \dots, v_{2g_l}], \\ \Rightarrow v_{1g_j}, v_{2g_j} \in V_j; \end{cases}$$

3.  $U \times V_1 \times V_2 \times \dots \times V_l$  упорядоченно;

$$4. \begin{cases} U_1, U_2 \subset U \& V_{i1}, V_{i2} \subset V_i \Rightarrow \\ \eta: (U_1 \times_{i=1}^l V_{i1}, U_2 \times_{i=1}^l V_{i2}) \rightarrow \quad, \\ \rightarrow \eta_0(U_1 \times U_2) \times_{i=1}^l \eta_i(V_{i1} \times V_{i2}) \end{cases}$$

где компоненты  $\eta_i$  отображения  $\eta$  операции, операторы, алгоритмы или структуры в зависимости от природы множеств  $V_i$ , причем относительно соответствующих

компонент отображения во множествах  $q_k: (\hat{m}_k: [\alpha_i \tau_{i_r} \rightarrow \tau_{i_r} \alpha_i, \alpha_j \tau_{j_r} \rightarrow \alpha_j \tau_{i_r}], \{q_{k+1}\}, \{\emptyset\})$ ; имеется единица  $\theta_i$ ; в частности, для компоненты  $\eta_0 \equiv +$ ,  $\theta_0 \equiv 0$ .

Разновидностью операции конкатенации  $\otimes_1$  является операция с поглощением концов конструкций  $\hat{s}_1(w_1)$  и  $\hat{s}_2(w_2) - \otimes_2$ . Для этой операции имеет место:

$$\begin{cases} \hat{s}_1 = (\hat{b}_{11}, \hat{b}_{12}) = \hat{s}_1(w_1) \& \\ \hat{s}_2 = (\hat{b}_{21}, \hat{b}_{22}) = \hat{s}_2(w_2); \\ \hat{b}_{11}, \hat{b}_{12}, \hat{b}_{21}, \hat{b}_{22} \in \hat{B} \Rightarrow \hat{s}_1 \otimes_2 \hat{s}_2 = \\ = (\hat{b}_{11}, \hat{b}_{22}) = \hat{s}_3(w), \\ w = \eta(w_1, w_2). \end{cases}$$

Могут быть модифицированные операции конкатенации  $\otimes_2$ , например, поглощение, только по одноименным концам конструкций  $\hat{s}_1(w_1)$  и  $\hat{s}_2(w_2)$ , т.е. когда  $\hat{b}_{12} = \hat{b}_{21}$ .

Введенные операции предполагают внешние действия над концами, но операции конкатенации могут быть внутренними, т.е. расширять границы концов, создавать «тело» концов или дополнять его. Множество всех внешних и внутренних операций конкатенации над свободными концевыми конструкциями обозначим символом  $\Omega$ .

Рассмотренные операции конкатенации позволяют получить композицию концевых конструкций над любыми элементами конструктивного алфавита. И далее исследовать свойства этих композиций.

Установим некоторые свойства концевых конструкций и рассмотрим другие операции над свободными концами.

**Определение 2.1.** Две свободные концевые конструкции  $\hat{s}_1(w_1)$  и  $\hat{s}_2(w_2)$  называются *однотипными*, если их характеристические списки  $w_1$  и  $w_2$  могут отличаться только первыми элементами.

**Свойство 2.1.** Концевые конструкции  $\hat{s}(w_1)$  и  $\hat{s}(w_2)$ , характеристические списки

которых удовлетворяют условиям определения 2.1 однотипные.

Свойство 2.2. Однотипная последовательность  $\{\hat{s}(w_i)\}$  упорядочена по характеристикам длин в списках  $w_i$  и элементы этой последовательности образуют цепь по включению  $\hat{s}(w_i) \subset \hat{s}(w_{i+1})$ , если  $r_i < r_{i+1}$ ,  $i = 0, 1, \dots$ .

Свойство 2.3. Однотипная конечная последовательность  $\{\hat{s}(w_i)\}$  ограничена снизу определенным свободным элементом алфавита  $A$ .

Определим операцию сложения двух однотипных свободных конечных конструкций:

$$\begin{cases} \hat{s}_1 = (\hat{b}_{11}, \hat{b}_{12}) \& \hat{s}_2 = (\hat{b}_{21}, \hat{b}_{22}); \\ \hat{b}_{11}, \hat{b}_{12}, \hat{b}_{21}, \hat{b}_{22} \in \hat{B}; \\ w_1 = [r_1, v_1, v_2, \dots, v_l], \\ w_2 = [r_2, v_1, v_2, \dots, v_l] \\ \Rightarrow \hat{s}_1(w_1) + \hat{s}_2(w_2) = \hat{s}(w) = (\hat{b}_{11}, \hat{b}_{22}), \\ w = [r_1 + r_2, v_1, v_2, \dots, v_l]; \\ \hat{s}_1(w_1) + \hat{s}_2(w_2) \neq \hat{s}_2(w_2) + \hat{s}_1(w_1). \end{cases} \quad (5)$$

Подобным образом можно определить операцию умножения однотипных конечных конструкций:

$$\begin{cases} \hat{s}_1(w_1) * \hat{s}_2(w_2) = \hat{s}(w) = (\hat{b}_{11}, \hat{b}_{22}), \\ w = [r_1 * r_2, v_1, v_2, \dots, v_l]; \\ \hat{s}_1(w_1) * \hat{s}_2(w_2) \neq \hat{s}_2(w_2) * \hat{s}_1(w_1). \end{cases} \quad (6)$$

**Определение 2.2.** Список  $w_0 = [r, \varepsilon, \varepsilon, \dots, \varepsilon]$  множества характеристических списков  $W = U \times_{i=1}^l V_i$  называется скалярным.

Введем операцию умножения свободной конечной конструкции  $\hat{s}(w)$  на скалярный список правилом:

$$\begin{aligned} w_0 \circ \hat{s}(w) &= \hat{s}(w_1), \quad w = [r_1, v_1, v_2, \dots, v_l], \\ w_1 &= [r * r_1, \varepsilon \otimes v_1, \varepsilon \otimes v_2, \dots, \varepsilon \otimes v_l]. \end{aligned} \quad (7)$$

**Свойство 2.4.** Операция умножения конечной конструкции на скалярный список коммутативна и ассоциативна.

Введенные операции сложения и умножения являются полезными при представлении концов. Так конструктивная конеч-

ная структура (2) для нагруженных концов порождает, вообще говоря, бесконечный конечной алфавит. Однако, если воспользоваться операцией умножения нагруженной конечной конструкции на скалярный список, то конечной алфавит будет конечным и его элементы можно определить как  $\hat{s}_g([1, v_{1g_1}, v_{2g_2}, \dots, v_{lg_l}])$ .

**Определение 2.3.** Алфавит  $\hat{B}$  с элементами  $\hat{s}_g$  называется нормальным конструктивным алфавитом свободных нагруженных концов.

### Грамматическая структура концов

Традиционно формальные грамматики строятся как безусловные, т. е. порождаемые цепочки языка грамматики выделяются в пределах выбранных правил из некоторого свободного языка без всяких условий. Условия отбора цепочек формального языка удобно задавать в грамматической структуре. Для этого необходимо поставим определенную задачу. Рассмотрим следующую задачу.

**Задача.** На структурах концов (2) необходимо построить формальную конструктивную структуру грамматики, порождающую такой язык, чтобы цепочки языка удовлетворяли условиям совместимости смысловых характеристик смежных концов по операциям конкатенации.

Некоторые подходы проверки контекстных условий в языках программирования приведены в работе [10]. Один из них основан на использовании формальных программных грамматик для проверки совпадения контекстов по индексу. Модификация этого подхода к решению вопроса смысловой совместимости конечных конструкций состоит в следующем:

- на конечных конструкциях порожденных структурой (2) строятся цепочки с приписанным смысловым контекстом или выделяются из свободного языка (такие цепочки имеются в свободном языке);

- с помощью оператора гомоморфизма [3], как в  $S$ -системах, выделяются по соответствующему индексу из характеристических списков концов определенный смысловой показатель;

- проверка совместимости (совпадения по индексу) смысловых показателей конечных конструкций реализуется в программной грамматике с ядрами в виде матричных продукций [11].

Таким образом, решение поставленной задачи требует интегрированного подхода, как в грамматиках структурного проектирования [11].

Пусть  $A$ , определенный выше, терминальный алфавит и  $N = H \cup T$  нетерминальный алфавит. Где  $H = \{\alpha_i\}_{i=1}^p$  – основной алфавит и  $T = T_1 \times T_2 \times \dots \times T_m$  – характеристический алфавит концевой структуры (2), причем  $T_i = \{\tau_{ij}\}_{j=0}^{t_i}$ ,  $\tau_{i0} = \varepsilon$ . Предположим, что, если нетерминальные концевые конструкции нагружены, то они имеют нулевую длину, поэтому их представление по структуре (2) зададим так:  $(\alpha_i, \alpha_i) = \alpha_i(t)$ , в котором характеристический список  $t \in T$ . Если  $t = [\varepsilon, \varepsilon, \dots, \varepsilon]$ , то примем  $\alpha_i(t) = \alpha_i$ .

Построение формального языка концевых конструкций  $L(G)$  будем проводить с помощью грамматической структуры [4]. Представим формальную концевую грамматическую структуру в виде:

$$C_G = \langle M_G, \Sigma_G, \Lambda_G \rangle. \quad (8)$$

Носитель грамматической структуры (8) зададим на конструктивных структурах концов построенных на этих свободных алфавитах  $\hat{A}_s$ , и  $\hat{H}_s$ , т. е.  $M_G = \langle C_s(A), C_s(H), N \rangle$ . Причем нагруженный конструктивный алфавит, который может порождаться структурой  $C_s(A)$  является нормальным, а нагруженный нетерминальный конструктивный алфавит состоит их конструктивных концов нулевой длины (в списке  $t$  этот элемент опущен).

Сигнатуру и аксиоматику грамматической структуры (8) определим, как

$$\Sigma_G = \Omega \cup \{\circ^2, \eta^k, +^2, *^2, \mu^k,$$

$$m^k, \rightarrow^2, \Rightarrow^{p_i^2}, f^2, \chi^1\}$$

и

$$\Lambda_G = (\Lambda_F, \Lambda_K, \Lambda_J, \Lambda_Y, \Lambda_M,$$

$$\Lambda_P, \Lambda_V, \Lambda_C, \Lambda_H, \Lambda_L)$$

Операции сигнатуры  $(\circ, \eta, +, *)$  задаются правилами (4) – (7), смысл других операций будет дан в аксиоматике. Составляющие аксиоматики имеют следующий смысл и задаются конструктивными аксиомами:

$\Lambda_F$  – аксиоматика свободного языка:

- $\begin{cases} \forall \hat{s}_1, \hat{s}_2, \hat{s}_3 \in \hat{A}_s \cup \hat{H}_s \ \& \ \forall \bullet \in \Omega \Rightarrow \\ \Rightarrow \hat{s}_1 \bullet \hat{s}_2 = \hat{s}_1 \hat{s}_2 = \hat{l}; \\ \forall \alpha, \beta \in N \Rightarrow \alpha \otimes \beta = \alpha \beta = l; \end{cases}$
- списочное отображение  $\eta$  применяется только над конструктивными концами алфавита  $\hat{A}_s$ ;
- $\begin{cases} \forall \hat{s}_i, \hat{s}_j \in \hat{A}_s \mid \hat{H}_s \mid \hat{A}_s \cup \hat{H}_s \ \& \\ \hat{l} = \hat{s}_i \mid \hat{s}_j \Rightarrow \hat{l} \bullet \hat{l} = \hat{l}; \\ \forall \alpha, \beta \in N \ \& \ l = \alpha \mid \beta \Rightarrow l \otimes l = l; \\ \{\hat{l}\} = F(\hat{A}_s) \mid F(\hat{H}_s) \mid F(\hat{A}_s \cup \hat{H}_s), \\ \{l\} = F(N) - \text{свободные языки}. \end{cases}$

$\Lambda_K$  – аксиоматика контекста:

- $\begin{cases} \forall \hat{s}_i \in \hat{A}_s \ \& \ \forall \hat{s}_j(t) \in \hat{H}_s, \\ t \neq [\varepsilon, \varepsilon, \dots, \varepsilon] \Rightarrow \\ \hat{s}_i \otimes \hat{s}_j = \hat{s}_i \hat{s}_j = \hat{s}_i \alpha_j(t) = \hat{l}^s \\ \hat{l}^s - \text{цепочка с контекстом}; \\ \{\hat{l}^s\} = F^s \subset F(\hat{A}_s \cup \hat{H}_s), \\ F^s - \text{свободный язык}. \end{cases}$

$\Lambda_J$  – аксиоматика гомоморфизма  $\mu$ :

- $\begin{cases} \forall \hat{l} \in F(\hat{A}_s) \mid F(\hat{H}_s) \mid F(\hat{A}_s \cup \hat{H}_s) \mid \\ \mid F(N) \\ \ \& \ \hat{l} = \hat{s}_1 \hat{s}_2 \dots \hat{s}_r \\ \Rightarrow \mu(\hat{l}) = \mu(\hat{s}_1) \otimes \mu(\hat{s}_2) \otimes \dots \otimes \mu(\hat{s}_r); \end{cases}$
- $\forall \hat{s}_i \in \hat{A}_s \mid \hat{H}_s \Rightarrow \mu(\hat{s}_i) = \hat{s}_i;$



- $\begin{cases} \forall \hat{l}^s \in F^s \ \& \ \hat{l}^s = \hat{s}_i \alpha_j(t), \\ t = [\tau_{j_1}, \tau_{j_2}, \dots, \tau_{j_r}, \dots, \tau_{j_k}], \\ \text{для заданного } r \\ \Rightarrow \mu(\hat{l}^s) = \hat{s}_i \mu(\alpha_j(t)) = \\ = \hat{s}_i \alpha_j(\mu(t) \mu()), \\ \mu(t) = [\tau_{j_1}, \tau_{j_2}, \dots, \mu(\tau_{j_r}), \dots, \tau_{j_k}], \\ \mu(\tau_{j_r}) = \alpha_j \tau_{j_r}. \end{cases}$

$\Lambda_Y$  – аксиоматика продукций подстановок и отношения непосредственного вывода:

- $\begin{cases} \hat{p}_i : \hat{l}_i \rightarrow \hat{l}_k, \ \hat{l}_j, \hat{l}_k \in F(\hat{H}_s) | \\ |F(\hat{A}_s \cup \hat{H}_s), \\ 0 < |\hat{l}_j| < k_1, \ 0 \leq |\hat{l}_k| < k_2; \end{cases}$
- $\forall \hat{p}_i : \hat{l}_j \rightarrow \hat{l}_k \ \& \ \forall \hat{p}_r : \hat{l}_i \rightarrow \hat{l}_m \ \& \ i \neq r \Rightarrow \hat{l}_j \neq \hat{l}_i \mid \hat{l}_j = \hat{l}_i;$
- $\{\hat{p}_i\}_{i=1}^r = \hat{P}$  – продукционная схема;
- $\begin{cases} (\hat{l} = \hat{l}_1 \hat{l}_2) \in (\hat{A}_s \cup \hat{H}_s) \ \& \\ \ \& \ \exists (\hat{p}_i : \hat{l}_j \rightarrow \hat{l}_k) \in \hat{P} \\ \Rightarrow \hat{l}_1 \hat{l}_2 \xrightarrow{\hat{p}_i} \hat{l}_1 \hat{l}_k \hat{l}_2 \end{cases}$

$\hat{p}_i$  допустимая продукция к цепочке  $\hat{l}$ .

$\Lambda_M$  – аксиоматика списочных (матричных) продукций и отношения непосредственного вывода:

- $\begin{cases} \hat{m}_j \text{ – списочная подстановка,} \\ \hat{m}_j = [\hat{p}_{j_1}, \hat{p}_{j_2}, \dots, \hat{p}_{j_k}], \\ \hat{p}_{j_i} \in \hat{P}; \text{ – уникальный список;} \end{cases}$
- $\hat{M} = \{\hat{m}_j\}_{j=1}^k$  продукционная списочная схема;
- $\begin{cases} \hat{m}_j \in \hat{M} \text{ – допустимая к } \hat{l}, \\ \hat{l} \xRightarrow{\hat{m}_j} \hat{l}_j; \\ \hat{l} \xRightarrow{\hat{p}_{j_1} \hat{p}_{j_2} \dots \hat{p}_{j_k}} \hat{l}_1 \hat{l}_2 \dots \hat{l}_k = \hat{l}_j. \end{cases}$

$\Lambda_P$  – аксиоматика программных продукций отношений выбора и непосредственных выводов:

- $\forall \hat{m}_i \in \hat{M}, \ \exists q_i : (\hat{m}_i, K_i, W_i); \text{ – программная продукция;}$
- $\{q_i\}_{i=1}^n = Q, \ q_i \neq q_j, \ i \neq j; \text{ – множество меток продукций;}$

- $K_i \subseteq Q$  – множество удач, и  $W_i \subseteq Q$  – множество неудач продукции  $\hat{m}_i$ .

- $\begin{cases} q_i \in Q, \ q_i : (\hat{m}_i, K_i, W_i) \ \& \\ \hat{m}_i \text{ допустимая к } \hat{l}, \ \hat{l} \xRightarrow{\hat{m}_i} \hat{l}_i; \\ \Rightarrow \exists q_j \in K_i, \ \hat{m}_j \text{ допустимая к } \hat{l}_i; \\ \hat{l} \xRightarrow{\hat{m}_i, \hat{m}_j} \hat{l}_j; \end{cases}$

$q_i$  – допустимая продукция к цепочке  $\hat{l}$  на множестве удач  $K_i$ ;

- $\begin{cases} q_i \in Q, \ q_i : (\hat{m}_i, K_i, W_i) \ \& \\ \hat{m}_i \text{ недопустимая к } \hat{l}; \\ \Rightarrow \exists q_j \in W_i, \ \hat{m}_j \text{ допустимая к } \hat{l}; \\ \hat{l} \xRightarrow{\hat{m}_j} \hat{l}_j; \end{cases}$

$q_i$  – допустимая продукция к цепочке  $\hat{l}$  на множестве неудач  $W_j$ .

$\Lambda_V$  – аксиоматика оператора выбора продукций для непосредственного вывода:

- $\begin{cases} \forall q_i \in Q, \ q_i : (\hat{m}_i, K_i, W_i) \ \& \\ \ \& \ \hat{l} \in F(\hat{A}_s \cup \hat{H}_s); \\ f(\hat{l}, q_i) \text{ – оператор выбора продукций;} \end{cases}$
- $\begin{cases} \hat{l}_r \xRightarrow{\hat{m}_i} \hat{l}_i \ \& \\ \hat{l}_r \in \hat{l} \Rightarrow f(\hat{l}, q_i) = q_j \in K_i \mid \\ \hat{l} \xRightarrow{q_i, f(\hat{l}, q_i)=q_j} \hat{l}_n; \end{cases}$
- $\begin{cases} \hat{l}_r \xRightarrow{\hat{m}_i} \hat{l}_i \ \& \\ \hat{l}_r \notin \hat{l} \Rightarrow f(\hat{l}, q_i) = q_j \in W_i \mid \\ \hat{l} \xRightarrow{f(\hat{l}, q_i)=q_j} \hat{l}_n; \end{cases}$

$\Lambda_C$  – аксиоматика совместимости контекстных характеристик:

- $\begin{cases} \forall \hat{l}_i^s, \hat{l}_j^s \in F^s, \ \hat{l}_{i,j}^s = \hat{s}_{i,j} \alpha_{i,j}(t_{i,j}), \\ t_{i,j} = [\tau_{i_1,j_1}, \tau_{i_2,j_2}, \dots, \tau_{i_r,j_r}, \dots, \tau_{i_k,j_k}] \ \& \\ \tau_{i_r} = \tau_{j_r} \Rightarrow \hat{l}_i^s, \hat{l}_j^s \text{ – совместны по индексур;} \end{cases}$

- $\forall r, \hat{l}_i^s, \hat{l}_j^s$  – совместны по индексу  $r \Rightarrow \hat{l}_i^s, \hat{l}_j^s$  – совместны;

- $\left\{ \begin{array}{l} \forall \hat{l} = \hat{l}_1^s \hat{l}_j^s \hat{l}_2^s, \hat{l}_1, \hat{l}_2 \in F(\hat{A}_s \cup \hat{H}_s); \\ \text{по аксиоматике } \Lambda_J \Rightarrow \\ \mu(\hat{l}_{i,j}^s) = \hat{s}_{i,j} \alpha_{i,j}(\mu(t_{i,j})), \\ \mu(t_{i,j}) = [\tau_{i_1,j_1}, \tau_{i_2,j_2}, \dots, \alpha_{i,j} \tau_{i_r,j_r}, \dots, \\ \tau_{i_k,j_k}]; \end{array} \right.$

- для фиксированных значений индексов  $i_r$  и  $j_r$  проверяется по списочной схеме  $\hat{M}$  совпадение характеристик  $\tau_{i_r}$  и  $\tau_{j_r}$  (по этим индексам):

$$q_k : (\hat{m}_k : [\alpha_i \tau_{i_r} \rightarrow \tau_{i_r} \alpha_i, \\ \alpha_j \tau_{j_r} \rightarrow \alpha_j \tau_{j_r}], \{q_{k+1}\}, \{\emptyset\});$$

$$q_{k+1} : (\hat{m}_{k+1} : [\alpha_i \rightarrow \varepsilon, \alpha_j \rightarrow \varepsilon], \\ \{q_{k+2}\}, \{\emptyset\});$$

$$q_{k+2} : \dots$$

$\Lambda_H$  – аксиоматика инструктивных правил:

- $U \subseteq \hat{H}_s$  – множество начальных концевых конструкций,
- $\hat{l}_0 \in U \text{ \& } \exists q_i : (\hat{m}_i : \hat{l}_0 \rightarrow \hat{l}_i, Y_i, W_i) \in Q \Rightarrow q_i$  – аксиома начала;
- $\left\{ \begin{array}{l} \hat{l}_k \in F(\hat{A}_s) | F^s \\ \text{\& } \exists q_i : (\hat{m}_i : \hat{l}_j \rightarrow \hat{l}_k, K_i, W_i) \in Q, \\ W_i = \emptyset | (K_i = \emptyset \text{ \& } W_i = \emptyset) \Rightarrow q_i^*; \end{array} \right.$

– заключительная аксиома.

$\Lambda_L$  – аксиоматика управления выводом правильных цепочек и формального языка:

- $\left\{ \begin{array}{l} \hat{l} \in F(\hat{A}_s \cup \hat{H}_s) | F^s \text{ \& } \forall q_i \in Q, \\ q_i : (\hat{m}_i, K_i, W_i); \\ \chi(\hat{l}) \text{ – оператор управления выводом;} \end{array} \right.$
- $\chi(\hat{l}) = f(\mu(\circ | + | * | \bullet | \eta, (\hat{l}))) = q_j \in Q$  – суперпозиция альтернативных операций и операторов;

- $\left\{ \begin{array}{l} (\exists (q_1, q_2, \dots, q_m) \subseteq Q; ) \\ q_j = q_k | q_j \neq q_k \\ \text{\& } \hat{l}_0 \in U \text{ \& } \hat{l}_m \in F(\hat{A}_s) | F^s; \\ \left( \begin{array}{c} \chi(\hat{l}_0) = q_{j_1} \quad \chi(\hat{l}_1) = q_{j_2} \quad \dots \quad \chi(\hat{l}_{m-1}) = q_{j_m}^* \\ \hat{l}_0 \Rightarrow \hat{l}_1 \Rightarrow \dots \Rightarrow \hat{l}_m \end{array} \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \hat{l}_m \text{ – правильная цепочка;} \end{array} \right.$

- $W(\hat{l}_m) = (\hat{l}_0 \xRightarrow{q_1} \hat{l}_1 \xRightarrow{q_2} \dots \xRightarrow{q_m^*} \hat{l}_m)$  – вывод цепочки  $\hat{l}_m$ ;

- $\{\hat{l}_m\} = L(C_G)$  – формальный язык, порождаемый концевой грамматической структурой.

Таким образом, построена формальная конструктивная грамматическая структура свободных концов, которая порождает согласованный по определенной семантике язык.

## Выводы

Введенные концевые структуры алфавитов и разработанные на их основе конструктивные грамматические структуры обобщают классические структуры грамматик. Предложенные модификации свободных концов позволяют строить предметные концевые грамматические структуры для конструирования и автоматизации технологических процессов предметных областей, выполнять анализ технологических конфигураций и пр.

Представляется возможным рассмотреть методику построения свободных пар концов и грамматических структур распространить на более сложные концевые конструкции, симплексы, симплицальные комплексы и др.

Важным аспектом при разработке грамматических структур систем искусственного интеллекта является управляемость. Включение элементов управления в грамматику приводит к существенному усложнению ее структуры. В работе управление реализовано через выбор в свободном языке согласованных, по одному характери-

стическому показателю конечных конструкций, что потребовало введения оператора управления выводом и сопутствующих ему аксиоматик. Решение вопроса управляемости в грамматических структурах по нескольким показателям является не простым, так как может привести вычислительной неустойчивости при реализации конфигураций языковых представлений, т.е. решение проблемы управляемости возможно, например, при включении алгоритмической структуры [5] в грамматическую структуру.

#### Библіографічний список

1. Гладкий, А. В. Формальные грамматики и языки [Текст] / А. В. Гладкий. – Москва: Наука, 1973. – 368 с.
2. Гинзбург, С. Математическая теория контекстно-свободных языков [Текст] / С. Гинзбург. – Москва: Мир, 1970. – 328 с.
3. Фу, К. С. Структурные методы в распознавании образов [Текст] / К. С. Фу. – Москва: Мир, 1977. – 318 с.
4. Lindenmayer, A. Mathematical models for cellular interaction in development. Pats I and II. [Text] / A. Lindenmayer // Journal of Theoretical Biology. – 1968. – V. 18. – P. 280-315.
5. Лисовик, Л. П. Об одном методе задания фрактальных множеств [Текст] / Л. П. Лисовик, Т. А. Карнаух // Кибернетика и системный анализ. – 2009. – № 3. – С. 42-49.
6. Саломая, А. Жемчужины теории формальных языков [Текст] / А. Саломая. – Москва: Мир, 1986. – 159 с.
7. Ильман, В. М., Структурний підхід до проблеми відтворення граматик [Текст] / В. М. Ильман, В. І. Шинкаренко // Проблеми програмування. – 2007. – № 1. – С. 5-16.
8. Шинкаренко, В. И. Структурные модели алгоритмов в задачах прикладного программирования. I. Формальные алгоритмические структуры [Текст] / В. И. Шинкаренко, В. М. Ильман, В. В. Скалозуб // Кибернетика и системный анализ. – 2009. – № 3. – С. 3-14.
9. Суворов, Г. Д. Простые концы и последовательности плоских отображений [Текст] / Г. Д. Суворов. – Киев: Наукова думка, 1986. – 187 с.
10. Роджерс, Д. Математические основы машинной графики [Текст] / Д. Роджерс, Дж. Адамс. – Москва: Мир, 2001. – 604 с.
11. Андон, Ф. И., Алгебро-алгоритмические модели и методы параллельного программирования [Текст] / Ф. И. Андон, А. Е. Дорошенко, Г. Е. Цейтлин, Е. А. Яценко. – Киев: Академперіодика, 2007. – 634 с.

**Ключові слова:** конструктивні граматичні структури, вільні кінцеві об'єкти, ланцюжкові конструкції, сумісність об'єктів.

**Ключевые слова:** конструктивные грамматические структуры, свободные конечные объекты, цепочечные конструкции, совместимость объектов.

**Keywords:** constructive grammatical structures, free end-capping objects, chain constructions, compatibility objects.

Поступила в редколлегию 07.05.2014