

М.И. КАЗАКЕВИЧ

# ИЗБРАННОЕ

Днепропетровск  
2009



В фар библиотеке ДМШ  
с любовью и благодарностью

от автора

15.10.09

**МИХАИЛ  
ИСААКОВИЧ  
КАЗАКЕВИЧ**

**«ИЗБРАННОЕ»**

**Днепропетровск 2009**

УДК 024.01+624.04+533.6  
ББК 38.112+38.5+22.253.3

**Казакевич М.И.**  
**К 14** Избранное: монография / М.И. Казакевич. – Днепропетровск, 2009. – 524 с.

ISBN 978-966-8050-58-9

Сборник избранных статей и докладов составлен автором на основе собственных предпочтений, отражая объективную оценку приоритетов в его многолетней научной деятельности. Монография охватывает довольно широкий круг вопросов, включая как фундаментальные работы автора по теории нелинейных колебаний, так и работы по ряду актуальных прикладных задач, затрагивающие теоретические и практические вопросы аэроупругой неустойчивости гибких конструкций в ветровом потоке. Кроме этого, в сборник вошли ряд работ по смежным проблемам – стабилизация морских платформ, инфранизкочастотные ветровые колебания.

УДК 024.01+624.04+533.6  
ББК 38.112+38.5+22.253.3

ISBN 978-966-8050-58-9

© Казакевич М.И., 2009.

***Моему отцу, другу и первому  
учителю, посвящается***

*«Художнику, когда он рисует пейзаж,  
надо спуститься в долину,  
чтобы охватить взглядом холмы и горы, ...  
и подняться на гору, чтобы охватить взглядом долину»*

*Никколо Маккиавели*

# СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ .....	4
<b>РАЗДЕЛ 1. ТЕОРИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА</b>	
К ВОПРОСУ О БИГАРМОНИЧЕСКОМ ВОЗМУЩЕНИИ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ.....	9
ЧАСТОТЫ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ СИСТЕМ С ПЕРЕСКОКОМ.....	21
ГАРМОНИЧЕСКОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ СИСТЕМ С ПЕРЕСКОКОМ.....	25
БИГАРМОНИЧЕСКОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ СИСТЕМ С ПЕРЕСКОКОМ.....	36
ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ХЛОПАЮЩИХ МЕМБРАН.....	43
ВЛИЯНИЕ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ НА ХАРАКТЕР УСТАНОВИВШИХСЯ КОЛЕБАНИЙ СИСТЕМ С НЕЛИНЕЙНОЙ ВОССТАНАВЛИВАЮЩЕЙ СИЛОЙ.....	49
ПРЕДСКАЗУЕМЫЕ АТТРАКТОРЫ В НЕЛИНЕЙНЫХ НЕСИММЕТРИЧНЫХ СИСТЕМАХ...□	
ЭВОЛЮЦИИ ОБЛАСТЕЙ ПРИТЯЖЕНИЯ В НЕЛИНЕЙНОЙ НЕСИММЕТРИЧНОЙ СИСТЕМЕ ДУФФИНГА.....	59
ОБЛАСТИ ПРИТЯЖЕНИЯ УСТОЙЧИВЫХ РЕЖИМОВ КОЛЕБАНИЙ СИММЕТРИЧНЫХ СИСТЕМ С ПЕРЕСКОКОМ.....	63
MODELLING OF THE FORCED OSCILLATIONS ON THE HYBRID □	
THE APPLICATION OF HYBRID MODELLING TO INVESTIGATION OF NON-LINEAR OSCILLATIONS.....	75
ПРЕДИСЛОВИЕ □	
ПРИЛОЖЕНИЕ. КРАТКИЙ АНАЛИЗ РАБОТ ПО ДИНАМИКЕ ГИБКИХ ЭЛЕМЕНТОВ.....	87
IDENTIFICATION OF NON-LINEAR DYNAMIC SYSTEMS.....	102
APPLICATION OF QUALITATIVE METHODS TO RESEARCH OF POLYHARMONIC OSCILLATIONS.....	111
ОТОБРАЖЕНИЯ ФАЗОВЫХ ТРАЕКТОРИЙ В АНАЛИЗЕ ДИНАМИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ХАОТИЧЕСКИХ СИСТЕМ.....	121
PHASE TRAJECTORY VARIATIONS IN DYNAMIC SYSTEMS IN AN EXPANDED PHASE SP□	
APPLICATION OF THE EXTENDED PHASE TRAJECTORIES TO IDENTIFICATION OF CHAOTIC SYSTEMS.....	139

<b>РАЗДЕЛ 2. ГИДРОАЭРОДИНАМИКА. ТЕОРИЯ. ЭКСПЕРИМЕНТ. ПРАКТИКА</b>	
АЭРОУПРУГИЕ КОЛЕБАНИЯ ТЕЛА КРУГЛОЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ	
В ПОТОКЕ ВОЗДУХА.....	152
ГАШЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ НАДЗЕМНЫХ ТРУБОПРОВОДОВ	
В ВЕТРОВОМ ПОТОКЕ.....	163
АЭРОДИНАМИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ МОДЕЛИ	
ОТСЕКА ВАНТОВОГО ПЕРЕХОДА ГАЗОПРОВОДА ЧЕРЕЗ АМУДАРЬЮ.....	168
К МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ СИНХРОНИЗАЦИИ	
АЭРОУПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ КРУГЛОЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ТЕЛ	
В ВЕТРОВОМ ПОТОКЕ.....	175
ОБЕСПЕЧЕНИЕ АЭРОДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ	
СТАЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ И МОСТОВ.....	183
АЭРОДИНАМИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ	
ОДНОСТОЕЧНОГО ПИЛОНА В РАВНОМЕРНОМ ПОТОКЕ.....	189
ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ	
АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИИ	
СОВРЕМЕННЫХ ВАНТОВЫХ МОСТОВ.....	197
АЭРОДИНАМИЧЕСКАЯ ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ	
ДВУХ КРУГОВЫХ ЦИЛИНДРОВ.....	205
СУБГАРМОНИЧЕСКИЙ ЗАХВАТ АЭРОУПРУГИХ АВТОКОЛЕБАНИЙ	
КРУГОВОГО ЦИЛИНДРА.....	213
ИДЕНТИФИКАЦИЯ УЛЬТРАГАРМОНИЧЕСКИХ АВТОКОЛЕБАНИЙ	
ПРИ АЭРОДИНАМИЧЕСКОЙ ИНТЕРФЕРЕНЦИИ ТАНДЕМА	
КРУГОВЫХ ЦИЛИНДРОВ В СКОШЕННОМ ПОТОКЕ.....	217
АЭРОУПРУГИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЭЛЕМЕНТОВ МОСТОВЫХ КОНСТРУКЦИЙ.....	222
АЭРОДИНАМИЧЕСКОЕ ДЕМПФИРОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ	
ПЛОХООБТЕКАЕМЫХ ТЕЛ, ОБУСЛОВЛЕННЫХ ВИХРЕВЫМ ВОЗБУЖДЕНИЕМ.....	231
THE AERODYNAMIC PROBLEMS OF CABLE-STAYED BRIDGES	
UNDE□	
ANALYTICAL SOLUTION FOR GALLOPING OSCILLATIONS.....	257
THE PROBLEMATIC TASKS OF AERODYNAMICS OF STRUCTURES ABSTRACT.....	266
THE ADMISSIBLE FLEXIBILITY OF STRUCTURE ELEMENTS IN THE FLOW.....	277
THE AERODYNAMICS OF A HANGAR MEMBRANE ROOF.....	282
THE INTERACTION OF WIND WITH THE ICE-COVERED	
STRUCTURAL ELEMENTS.....	296
СТАБИЛИЗАЦИЯ ВАНТ ПРИ ДЕЙСТВИИ ВЕТРА И ПОДВИЖНЫХ НАГРУЗОК.....	304
THE OFFSHORE STRUCTURES STABILIZATION UNDER	
THE SURFACE WAVE EFFECTS.....	316
СТАБІЛІЗАЦІЯ КОНСТРУКЦІЙ У ВІТРОВОМУ ПОТОЦІ.....	322
АЭРОДИНАМИЧЕСКАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ КОРОБЧАТЫХ МОСТОВ.....	342
ГЕНЕРИРОВАНИЕ ВЕТРОВЫМ ПОТОКОМ ИНФРАЗВУКОВЫХ ВОЛН	
В ПРИЗЕМНОМ СЛОЕ АТМОСФЕРЫ.....	347
АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ АЭРОДИНАМИКИ ВЫСОТНЫХ ЗДАНИЙ.....	353
ХАОС В АЭРОУПРУГИХ СИСТЕМАХ.....	367

### **РАЗДЕЛ 3. МОСТЫ И КОНСТРУКЦИИ. ДИНАМИКА. ВИБРОЭКОЛОГИЯ**

НАТУРНЫЕ ИСПЫТАНИЯ ВИСЯЧЕГО ТРУБОПРОВОДНОГО МОСТА ЧЕРЕЗ р. ДНЕПР ПРОЛОТОМ 720 МЕТРОВ.....	380
РЕАКЦИЯ ВИСЯЧЕГО ПЕРЕХОДА ПРОЛОТОМ 720 М НА РЕАЛЬНОЕ ВЕТРОВОЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ.....	390
К НОРМИРОВАНИЮ УРОВНЯ ДОПУСТИМЫХ ВИБРАЦИЙ В СИСТЕМЕ «ПЕШЕХОД–МОСТ».....	401
ИНСТРУМЕНТАЛЬНЫЕ НАБЛЮДЕНИЯ ЗА РАБОТОЙ ВАНТОВЫХ ТРУБОПРОВОДНЫХ МОСТОВ БОЛЬШИХ ПРОЛЕТОВ.....	415
ДИАГНОСТИКА МЕТАЛЛИЧЕСКИХ КОНСТРУКЦИЙ И ЕЕ РОЛЬ В ОБЕСПЕЧЕНИИ НАДЕЖНОСТИ СООРУЖЕНИЙ.....	423
STABILIZATION OF A CABLE-STAYED FOOTBRIDGE.....	427
АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ ДИНАМИКИ СООРУЖЕНИЙ.....	433
ДИНАМИЧЕСКАЯ ДИАГНОСТИКА КОНСТРУКЦИИ СТАЛЬНОГО БУНКЕРА.....	453
IMPROVEMENT OF STEEL BUNKER DESIGNING METHOD.....	460
DYNAMIC PROPERTIES OF STEEL BUNKERS.....	471
ОСНОВНЫЕ ПРИЧИНЫ АВАРИЙ ЖЕСТКИХ СТАЛЬНЫХ БУНКЕРОВ И НИЗКИХ СИЛОСОВ.....	478
НОВАЯ КОНСТРУКЦИЯ БУНКЕРНОЙ ЕМКОСТИ ИЗ СТАЛЬНЫХ ПАНЕЛЕЙ.....	492
СОВРЕМЕННЫЕ АСПЕКТЫ МОНИТОРИНГА МОСТОВ.....	502
ВИБРАЦИЯ И БЕРЕМЕННОСТЬ.....	512
 <b>ПРИЛОЖЕНИЯ.....</b>	 515

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Сборник избранных статей и докладов составлен автором на основе собственных предпочтений. Вместе с тем следует отметить, что они отражают объективную оценку приоритетов в многолетней научной деятельности автора. Как смеет надеяться автор, они оставили определенный след в виде отдельных мазков в многоликой картине мироздания.

Три постулата, которым автор следовал на протяжении всей своей разноплановой научной деятельности, заключены в словах: «природа едина и неделима», «природу обмануть нельзя», «природа непостижима, но познаваема». В той или иной мере эту мысль подтверждали и развивали те известные представители отечественной и зарубежной науки, с которыми автор имел счастье общаться на протяжении всей своей творческой жизни и черпать их интеллектуальный опыт. Будет в высшей степени справедливо упомянуть их в предисловии независимо от того, были ли это многократные встречи и беседы, или единичные, эпизодические контакты.

Академик А.Н. Колмогоров, декан механико-математического факультета МГУ им. М. Ломоносова, убедил автора не бросать технический институт ради юношеского увлечения математикой, а получить системные знания в первоначально выбранной области и одновременно приобрести современную математическую подготовку. Спустя несколько лет этот совет был воплощен в жизнь и дальнейшая творческая деятельность автора подтвердила правоту академика.

Академик Н.Г. Бондарь ввел меня в мир науки в студенческие годы; тогда же я ощутил влияние масштабной личности в науке академика В.А. Лазаряна.

Искромётный ум и энциклопедичность члена Латвийской академии Я.Г. Пановко повлияли на развитие научных интересов автора.

Яркий урок сочетания глубочайших знаний, таланта и изящной доброжелательности был преподнесен им как современный мастер-класс на защите кандидатской диссертации автора в качестве официального оппонента.

Начинался новый этап приобретения научного и жизненного опыта. Испуг, переходящий в страх от осознания «открытия» недостаточной обусловленности решений динамических задач в зоне многозначности амплитуд колебаний, подвиг автора дерзнуть по молодости и наивности обратиться к авторитету легендарных академиков Ю.А. Митропольского и А.П. Филиппова. Их доброжелательное и действенное отношение привело к изучению автором областей притяжения начальных условий в нелинейных динамических системах. Результатом этого стал приоритет автора в решении данной проблемы. Подобная доброжелательность сопровождала автора на протяжении многих лет научной деятельности и в результате сформировала у него поведенческую модель для подражания в последующие творческие годы.

Единственная встреча с Л.Г. Лойцянским вселила уверенность (не перешедшую в самонадеянность, часто присущую молодым ученым) при вхождении в неведомый мир гидроаэродинамики. Общение со многими замечательными коллегами Л.Х. Блюминой, К.К. Федяевским, А.С. Вольмиром, Г.М. Фоминым, С.И. Девниным, И.И. Гольденблатом, Э. Симиу (E. Simiu), Р. Сканланом (R. Scanlan), Дж. Солари (G. Solari), Ю.А. Савицким, В.А. Светлицким, А.С. Гиневским, П.С. Ландой, С.Я. Герценштейном, Э.Я. Слонимом, К.С. Стрелковым, С.Ф. Редько, Л.И. и А.И. Маневичами, М.В. Хвингия, О.Г. Сулаберидзе, Ю.К. Мелашвили, А.В. Перельмутером, В.А. Пермяковым, Е.В. Гороховым, Г.Б. Фуksom, А.И. Лантух–Лященко, оставило след в мироощущении автора в части истинности смысла уже приводившихся выше слов: «природа едина и неделима», «природа непостижима, но познаваема».

Сборник избранных трудов состоит из трех разделов. Первый из них представляет оригинальные работы автора, в т.ч. с соавторами, по теории нелинейных колебаний, выполненные в 1963–1973 годах. В этот период были получены уникальные результаты. В первую очередь, это относится к вынужденным колебаниям при бигармоническом возбуждении и изучению эффекта подавления гармоник. Затем, впервые, задолго до М. Фейгенбаума (M.I. Feigenbaum, 1980), был обнаружен эффект удвоения периодов колебаний (1965 г.) в системах с двумя потенциальными ямами ( в системах с перескоком) при переходе от «малых» колебаний к «большим». Было показано существование наряду с периодическими процессами на основной

частоте возбуждения и с комбинационными тонами (ультра- и суб-гармониками) непериодических процессов, получивших впоследствии название «хаос», как непредсказуемость.

Несколько лет спустя (1972 г.) была сформулирована недостаточность «предыстории системы» – истории нагружения динамической системы. Автор вслед за Т. Хаяси (1961 г.) обратил внимание на тот физический факт, что «предыстория» не обладает достаточной обусловленностью устойчивых состояний нелинейных динамических систем. Была доказана исключительная роль начальных условий в возникновении предсказуемых и непредсказуемых («странных» – strange) аттракторов и соответствующих им областей притяжения начальных условий. Удивительно, что эти результаты в ту пору не были оценены ни Я.Г. Пановко, ни В.А. Лазаряном, ни Н.Г. Бондарем, ознакомившимися с ними к моменту защиты автором кандидатской диссертации. По-видимому, результаты опережали время. Тем не менее их заметили Ю.А. Митропольский и А.П. Филиппов, оценили и опубликовали (1973 г.), о чем было уже упомянуто выше.

Позднее в своей книге «Порядок и хаос. Новый диалог человека с природой» (1984 г.) И. Пригожин (I. Prigogine) заметил, что начальные условия и динамика перестают быть независимыми и конечные состояния зависят от «предыстории системы». Однако последнее утверждение справедливо только для простейших динамических систем с «бистабильными» режимами.

В 1990–2007 годы интерес автора к продолжению исследований по теории нелинейных колебаний был вызван решением ряда актуальных проблем аэроупругой неустойчивости гибких конструкций в ветровом потоке. Работы в этой области автор поместил во второй части Сборника избранных трудов. К этому же периоду относятся дискуссии и беседы с Э. Симиу (E. Simiu) во время лекций в Национальном институте стандартов и технологий США (NIST, Gaithersburg, MD, USA), прочитанных автором в 1996 и 1997 годах по инициативе Р. Сканлана (R. Scanlan). В этот период автор совместно с С.Ф. Редько и В.В. Кулябко изучал поведение динамических систем, в т.ч. несимметричных, с двумя потенциальными ямами. При этом была подробно исследована, совместно с В.Е. Волковой, эффективность многообразия фазовых траекторий нелинейных динамических систем различного типа. Были убедительно показаны уникальные свойства фазовых траекторий на плоскостях  $(y, \dot{y})$  и  $(\dot{y}, \ddot{y})$ . Наряду с аналитическими исследованиями применялись вычислительные методы и гибридно-вычислительные комплексы (ГВК) на базе аналогового моделирования.

Во второй раздел Сборника избранных трудов включены как гео-

ретические работы по аэродинамике и аэроупругости гибких зданий и сооружений, так и результаты экспериментальных исследований в аэродинамических трубах ДГУ и ЦАГИ им. проф. Н.Е. Жуковского. Кроме того, сюда вошли несколько статей по смежным проблемам: стабилизация морских платформ; инфранизкочастотные колебания, вызванные ветром.

Цикл статей по аэродинамике и аэроупругости содержит ряд оригинальных результатов и, в первую очередь, по физическим моделям и аналитическим решениям при изучении аэроупругих автоколебаний вихревого возбуждения, галопирования, параметрических резонансов; при исследовании явлений субгармонического захвата в режимах вихревого возбуждения; по идентификации аэроупругих систем и по хаотическим процессам в аэроупругих системах.

Даже беглого анализа работ, представленных во второй части Сборника, достаточно, чтобы убедиться в органичной связи между математическими моделями теории нелинейных колебаний и физическими моделями аэроупругих систем – гибких мостов, мембранных и висячих покрытий, линий электропередач, высотных зданий башенного типа и других гибких конструкций в ветровом потоке.

Динамика сооружений, в т.ч. мостов, динамическая интегральная диагностика, мониторинг инженерных сооружений и виброэкология зданий и сооружений вошли в третий раздел.

В сборник включены некоторые фрагменты из 15 монографий автора, отвечающие в максимальной мере основному критерию принятого отбора.

Особая признательность и благодарность моим немногочисленным ученикам, коллегам, с которыми я работал, огорчался неудачам, радовался успехам, ибо не только их учил, наставлял, помогал, но и учился с ними и у них. Нас связывали взаимоуважительные, доброжелательные отношения, доверие, удовлетворение от бесед и дискуссий, а также результаты, которыми можно гордиться. Качества работы и удовлетворения от бесед и дискуссий, а также результатов, которыми можно гордиться. Их имена независимо от возраста, научного авторитета и «веса» в науке можно встретить в отобранных для данного сборника работах и я их с особым удовольствием называю: И.Ю. Графский, А.Г. Василенко, В.В. Кулябко, А.С. Распопов, В.Е. Волкова, Д.О. Банников и В.Н. Косяк.

*Автор сердечно благодарен  
Валерию Яковлевичу Цыганенко  
за поддержку в издании этой книги*

# **РАЗДЕЛ 1**

## **ТЕОРИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ.**

### **МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА**

*«Во всякой науке столько научного,  
сколько в ней математического ...»*

*Им. Кант*

## К ВОПРОСУ О БИГАРМОНИЧЕСКОМ ВОЗМУЩЕНИИ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ\*

Рассмотрим вынужденные колебания системы, описываемые дифференциальным уравнением вида

$$\ddot{x} + R(x) = P_1 \sin \omega_1 t + P_2 \sin \omega_2 t. \quad (1)$$

В случае кубической характеристики восстанавливающей функции системы  $R(x)$  последняя запишется так:

$$R(x) = \alpha x + \beta x^3, \quad (2)$$

что соответствует жесткой симметричной упругой характеристике. Дифференциальное уравнение примет вид

$$\ddot{x} + \alpha x + \beta x^3 = P_1 \sin \omega_1 t + P_2 \sin \omega_2 t. \quad (3)$$

Сообразуясь с гипотезой И.Г. Малкина [1] о том, что в вынужденном колебании с бигармоническим возмущением преобладают гармоники с частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$  или хотя бы одна из них, и не принимая во внимание комбинации гармоник («комбинационные тона» [4]), решение ищем в виде

$$x = A_1 \sin \omega_1 t + A_2 \sin \omega_2 t. \quad (4)$$

---

\*Опубликовано в Трудах ДИИТ, вып. 53, 1964, Харьков.

Подставив решение (4) в дифференциальное уравнение (3), получим

$$\begin{aligned} \alpha A_1 \sin \omega_1 t + \alpha A_2 \sin \omega_2 t + \beta (A_1 \sin \omega_1 t + A_2 \sin \omega_2 t)^3 = \\ = (A_1 \omega_1^2 + P_1) \sin \omega_1 t + (A_2 \omega_2^2 + P_2) \sin \omega_2 t. \end{aligned} \quad (5)$$

Для определения амплитуд  $A_1$  и  $A_2$  приравняем коэффициенты при одинаковых гармониках

$$\left. \begin{aligned} A_1 \omega_1^2 + P_1 &= \alpha A_1 + \frac{3}{4} \beta A_1^3 + \frac{3}{2} \beta A_2^2 A_1; \\ A_2 \omega_2^2 + P_2 &= \alpha A_2 + \frac{3}{4} \beta A_2^3 + \frac{3}{2} \beta A_1^2 A_2. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Здесь использованы равенства

$$\begin{aligned} \sin^3 \varphi &= \frac{3}{4} \sin \varphi - \frac{1}{4} \sin 3\varphi; \\ \sin^2 \varphi &= 1 - \cos^2 \varphi. \end{aligned}$$

Кроме того, члены

$$\left. \begin{aligned} 3A_1^2 A_2 \sin^2 \omega_1 t \sin \omega_2 t; \\ 3A_2^2 A_1 \sin \omega_1 t \sin^2 \omega_2 t, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

получающиеся при раскрытии скобки в левой части выражения (5), осреднены. Принято, что

$$\left. \begin{aligned} \sin^2 \omega_1 t &= \frac{1}{2} \\ \sin^2 \omega_2 t &= \frac{1}{2} \end{aligned} \right\} [0 \leq \sin^2 \omega_1 t \leq 1]. \quad (8)$$

В самом деле, среднее по абсолютной величине значение функции  $f(t) = \sin \omega_i t$  меньше единицы, квадрат его тем более меньше единицы, а средняя арифметическая величина равна  $\frac{1}{2}$ .

Осреднение коэффициентов при  $A_i$  для более сложных случаев приведено в работе [3]. Таким образом, члены (7) упростятся:

$$\left. \begin{aligned} \frac{3}{2} A_1^2 A_2 \sin \omega_2 t; \\ \frac{3}{2} A_2^2 A_1 \sin \omega_1 t. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

При моногармоническом возмущении ( $P_2=0$  и  $A_2=0$ ) имеем

$$A_1\omega_1^2 + P_1 = \alpha A_1 + \frac{3}{4}\beta A_1^3, \quad \text{откуда} \quad (10)$$

$$\omega_1^2 = \alpha + \frac{3}{4}\beta A_1^2 - \frac{P_1}{A_1}. \quad (11)$$

Выражение (11) в полной мере совпадает с выражением Дурффинга для аналогичной системы [2].

Подобное выражение имеем и при отсутствии первой возбуждающей гармоники

$$\omega_2^2 = \alpha + \frac{3}{4}\beta A_2^2 - \frac{P_2}{A_2}. \quad (12)$$

Будем считать, что гармоники имеют кратные значения частот; их отношение

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \mu, \quad \text{где } \mu = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (13)$$

Исключая  $\omega_1^2$  из выражений (6) [во втором уравнении (6) воспользуемся для  $\omega_2$  отношением (13)], найдем связь между амплитудами и  $A_1$  и  $A_2$ , независимую от частот, но зависящую от их соотношения  $\mu$ :

$$\omega_1^2 = \alpha + \frac{3}{4}\beta A_1^2 + \frac{3}{2}\beta A_2^2 - \frac{P_1}{A_1};$$

$$\omega_1^2 = \left( \alpha + \frac{3}{4}\beta A_2^2 + \frac{3}{2}\beta A_1^2 - \frac{P_2}{A_2} \right) \frac{1}{\mu^2},$$

откуда

$$(2 - \mu^2)A_1^2 + \frac{4\mu^2 P_1}{3\beta A_1} - (2\mu^2 - 1)A_2^2 + \frac{4P_2}{3\beta A_2} + \frac{4(\mu^2 - 1)\alpha}{3\beta}. \quad (14)$$

Интерес представляет рассмотрение случая, когда характеристика восстанавливающей силы  $R(x)$  описывается по линейному закону. Пусть

$$R(x) = \alpha x, \quad \text{т. е. } \beta = 0. \quad (15)$$

Тогда в выражениях (6) отсутствуют вторые и третьи члены пра-

вых частей и

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{P_1}{\alpha - \omega_1^2}; \\ A_2 &= \frac{P_2}{\alpha - \omega_2^2}, \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

что указывает на независимость амплитуд, возбужденных различными гармониками. Это позволяет применять метод наложения действия гармоник, т. е. принцип суперпозиции [5].

Решения (6) строим в такой последовательности. Обозначим левую часть выражения (14) через  $F(A_1)$ , а правую – через  $\Phi(A_2)$ , тогда выражение (14) примет вид

$$F(A_1) = \Phi(A_2), \quad (17)$$

где

$$F(A_1) = (2 - \mu^2)A_1^2 + \frac{4\mu^2 P_1}{3\beta A_1}; \quad (18)$$

$$F(A_2) = (2\mu^2 - 1)A_2^2 + \frac{4P_2}{3\beta A_2} + \frac{4(\mu^2 - 1)\alpha}{3\beta}. \quad (19)$$

Строим графики уравнений (18) и (19).

Из графиков на рис. 1, используя равенство (17), определяем значения  $A_1$  и  $A_2$ , удовлетворяющие выражению (14). Затем из уравнений (6) находим зависимость амплитуд  $A_1$  и  $A_2$  от частоты  $\omega_1$  ( $\omega_2 = \mu\omega_1$ ), где  $\mu$  – заданное отношение частот возмущающих гармоник) или наоборот \*.

На рис. 2а и 2б изображены амплитудно-частотные характеристики при раздельном решении для каждой из возмущающих гармоник.

Предположим, что в случае нелинейных дифференциальных уравнений справедлив метод суперпозиции, тогда амплитудно-частотная кривая представляла бы собой картину, изображенную на рис. 3. В действительности, для нелинейных систем метод сложения движений неприменим, ибо при совместном действии гармоник сказывается их взаимное влияние на характер колебаний, а справедлив своеобразный эффект «подавления гармоник» \*, наглядно представленный на рис. 4а и 4б.

---

\*С целью получения правильных результатов необходимо пользоваться методикой Дж. Стокера [2].

\*Этот вопрос с большой ясностью и наглядностью изложен в статье [3].

Результаты решения (6), изображенные на рис. 4а и 4б, отвечают как устойчивым, так и неустойчивым движениям. Переход от устойчивых к неустойчивым движениям, как отмечает А.И. Чекмарев [3], намечается в точках кривых (см. рис. 4), где касательные вертикальны. Жирной линией на рис. 3 изображены устойчивые участки кривых амплитудно-частотных характеристик, а тонкой линией — неустойчивые участки. Пунктирные линии соответствуют кривым, изображенным на рис. 2.

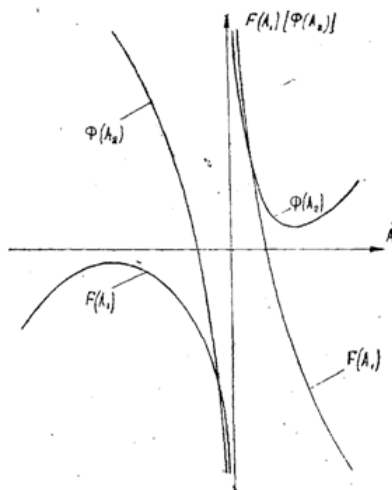


Рис. 1

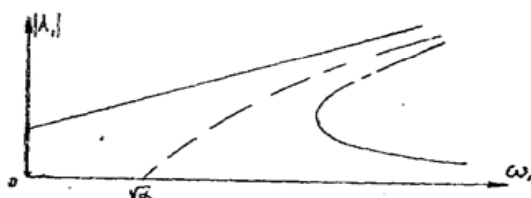


Рис. 2а

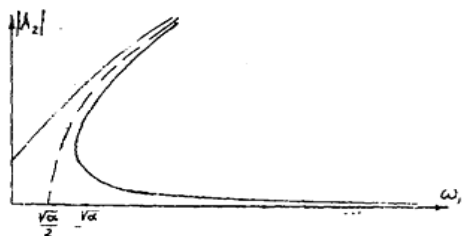


Рис. 2б

При далеких соотношениях частот (13), когда  $\mu > 1,5^{****}$ , взаимное влияние гармоник весьма мало, особенно в зоне развития больших амплитуд. Это обстоятельство позволяет ввести гипотезу об исключении одновременного развития больших амплитуд колебаний нескольких гармоник [3]: развивающаяся амплитуда одной гармоники сбивает развитие других гармоник, возможное при их раздельном действии. К таким же выводам приводят математические исследования И.Г. Малкина [1].

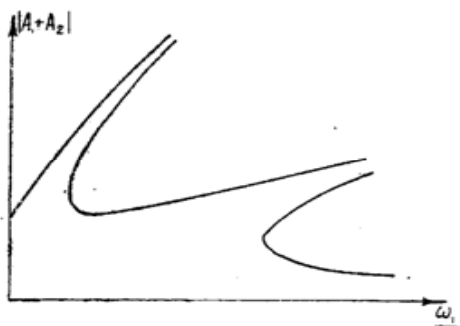


Рис. 3

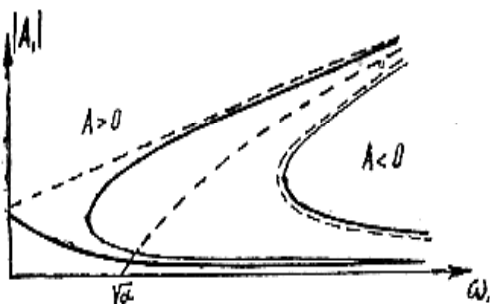


Рис. 4а

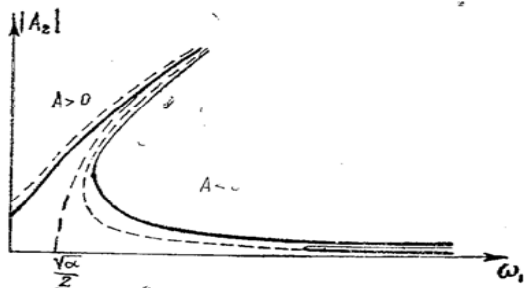


Рис. 4б

\*\*\*\*См. В.П. Терских. Расчеты крутильных колебаний силовых установок. Т. 2, Машгиз, 1951.

Экспериментальные исследования, описанные в работе [3], с достаточной точностью отвечают кривым, изображенным на рис. 4.

2. Определенный интерес представляет аналитическое решение уравнения (1). Метод переменного масштаба времени, идея которого изложена в работах [6, 7, 8, 10], позволяет нелинейное дифференциальное уравнение (1) привести к линейному дифференциальному уравнению, для которого будет справедлив метод наложения действия гармоник [5] – метод суперпозиции.

Представим функцию  $R(x)$  как

$$R(x) = f(x)f'(x), \quad (20)$$

где  $f(x)$  – некоторая функция аргумента  $x$ .

Решение уравнения (20), учитывая граничное условие  $f(0)=0$ , вытекающее из физического условия  $R(0)=0$ , имеет вид

$$f(x) = \sqrt{2 \int_0^x R(x) dx}. \quad (21)$$

Вводим следующие замены [6], [7], [8], [10]:

$$z(\varepsilon) = f(x), \quad \varepsilon = \varphi(t), \quad \dot{\varphi} = f'(x). \quad (22)$$

Тогда нелинейное дифференциальное уравнение (1) преобразуется в линейное дифференциальное уравнение

$$z''(\varepsilon) + z(\varepsilon) = \frac{1}{\dot{\varphi}} F(t), \quad (23)$$

где

$$F(t) = P_1 \sin \omega_1 t + P_2 \sin \omega_2 t. \quad (24)$$

Считая мгновенную частоту колебаний постоянной, уравнение (23) примет несколько иной вид:

$$\ddot{z} + \nu^2 z = \nu F(t), \quad (25)$$

где  $\nu$  – собственная частота системы.

Решение уравнения (25) ищем в форме правой части:

$$z(\varepsilon) = f(x) = C_1 \sin \omega_1 t + C_2 \sin \omega_2 t. \quad (26)$$

Двойное дифференцирование решения (26) дает возможность определить постоянные  $C_1$  и  $C_2$ .

$$C_1 = \frac{\nu P_1}{\nu^2 - \omega_1^2}; \quad C_2 = \frac{\nu P_2}{\nu^2 - \omega_2^2}. \quad (27)$$

Решение (26) соответственно примет вид

$$f(x) = \frac{v P_1}{v^2 - \omega_1^2} \sin \omega_1 t + \frac{v P_2}{v^2 - \omega_2^2} \sin \omega_2 t. \quad (28)$$

Определим максимальное значение функции  $f(x)$ , приравнявая нулю первую производную от этой функции по переменной  $t$ :

$$\dot{f}(x) = \frac{v \omega_1 P_1}{v^2 - \omega_1^2} \cos \omega_1 t + \frac{v \omega_2 P_2}{v^2 - \omega_2^2} \cos \omega_2 t. \quad (29)$$

откуда

$$\frac{\cos \omega_2 t}{\cos \omega_1 t} = - \frac{\omega_1 P_1 (v^2 - \omega_2^2)}{\omega_2 P_2 (v^2 - \omega_1^2)}. \quad (30)$$

Положив в (30)

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \mu, \quad \frac{P_1}{P_2} = \gamma, \quad \frac{v^2 - \omega_2^2}{v^2 - \omega_1^2} = \Omega. \quad (31)$$

и принимая  $\mu = 2$ , получим

$$\frac{\cos 2\omega_1 t}{\cos \omega_1 t} = - \frac{\gamma}{2} \Omega \quad (32)$$

или после тригонометрических и алгебраических преобразований

$$\cos^2 \omega_1 t + \frac{\gamma}{4} \Omega \cos \omega_1 t - \frac{1}{2} = 0, \quad (33)$$

откуда

$$\cos \omega_1 t = - \frac{\gamma}{8} \Omega \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{64} \Omega^2 + \frac{1}{2}}. \quad (34)$$

Корни (34) квадратного уравнения (33) соответствуют двум экстремальным значениям функции  $f(x)$  в замкнутом промежутке  $[0 < \omega_1 t < \pi]$ , когда

$$\cos \omega_1 t = - \frac{\gamma}{8} \Omega + \sqrt{\frac{\gamma^2}{64} \Omega^2 + \frac{1}{2}}. \quad (35a)$$

и

$$\cos \omega_1 t = - \frac{\gamma}{8} \Omega - \sqrt{\frac{\gamma^2}{64} \Omega^2 + \frac{1}{2}}. \quad (35b)$$

причем необходимо

$$\left| \frac{\gamma}{8} \Omega + \sqrt{\frac{\gamma^2}{64} \Omega^2 + \frac{1}{2}} \right| \leq 1. \quad (36)$$

Учитывая, что

$$0 \leq \omega_1 t \leq \pi, \quad (37)$$

мы можем записать

$$0 \leq \omega_1 t \leq \frac{\pi}{2} \text{ при (35a);} \quad (38a)$$

$$\frac{\pi}{2} \leq \omega_1 t \leq \pi \text{ при (35б).} \quad (38б)$$

Определим, какому из этих значений  $\omega_1 t$  – (38a) или (38б) – соответствует максимальное значение функции  $f(x)$ . Для этого исследуем вторую производную от этой функции по переменной  $t$ :

$$\ddot{f}(x) = -\frac{v\omega_1^2 P_1}{v^2 - \omega_1^2} \sin \omega_1 t - \frac{v\omega_2^2 P_2}{v^2 - \omega_2^2} \sin \omega_2 t. \quad (39)$$

Для значений  $\omega_1 t$ , находящихся в интервале (38a),

$$\left. \begin{array}{l} \sin \omega_1 t > 0; \\ \sin \omega_2 t > 0; \end{array} \right\} \quad (40)$$

и, следовательно,  $\ddot{f}(x) < 0$ , значит,  $f(x) = f_{\max}(x)$ . Для значений  $\omega_1 t$  находящихся в интервале (38б)

$$\left. \begin{array}{l} \sin \omega_1 t > 0; \\ \sin \omega_2 t < 0; \end{array} \right\} \quad (41)$$

Необходимо  $\ddot{f}(x) > 0$ , так как в этом случае  $f(x) = f_{\min}(x)$ . На самом деле, являясь решением дифференциального уравнения (25) при стационарном режиме, функция  $f(x)$  (28) в промежутке (37) определена и имеет производные в точках этого промежутка, также непрерывные, и принимает два экстремальных значения. Следовательно, в этом промежутке она имеет максимум и минимум, причем

$$|f_{\max}(x)| > |f_{\min}(x)|, \quad (42)$$

так как в выражении для  $f(x)$  (28) первое слагаемое всегда боль-

ше 0, потому что  $\sin \omega_1 t$  в промежутке (37) всегда больше 0. Таким образом, функция  $f(x)$  максимальна при значениях  $\omega_1 t$ , лежащих в промежутке (38а) и определяемых из уравнения (35а). Обозначим выражение для  $\cos \omega_1 t$  из (35а) через  $\lambda$ :

$$\lambda = \cos \omega_1 t = -\frac{\gamma}{8} \Omega + \sqrt{\frac{\gamma^2}{64} \Omega^2 + \frac{1}{2}}. \quad (43)$$

Из (39), учитывая (41), можно составить неравенство

$$\frac{v \omega_2^2 P_2}{v^2 - \omega_2^2} \sin \omega_2 t > \frac{v \omega_1^2 P_1}{v^2 - \omega_1^2} \sin \omega_1 t. \quad (44)$$

Имея в виду (31) и считая  $\mu=2$ , из (44) получим

$$\lambda > \frac{\gamma \Omega}{8}. \quad (45)$$

Подстановка (43) в (45) дает

$$\gamma \Omega < 4 \sqrt{\frac{2}{3}}. \quad (46)$$

Итак, учитывая обозначение (43), а также (31), получим

$$f_{\max}(x) = f(A) = \frac{v P_1}{v^2 - \omega_1^2} \sqrt{1 - \lambda^2} \left( 1 + \frac{2\lambda}{\gamma \Omega} \right), \quad (47)$$

откуда

$$\omega_1^2 - v^2 - \frac{v P_1}{f(A)} \sqrt{1 - \lambda^2} \left( 1 + \frac{2\lambda}{\gamma \Omega} \right), \quad (48)$$

Полученное выражение (48) связывает частоту  $\omega_1$ , следовательно, и  $\omega_2$ , с амплитудой  $A$ .

Считая значения  $\omega_1$  лежащими в промежутке

$$0 \leq \omega_1 \leq \frac{v}{2}, \quad (49)$$

что для  $\omega_2$  дает диапазон

$$0 \leq \omega_2 \leq v, \quad (50)$$

параметр  $\lambda$  (31) окажется в промежутке

$$0 \leq \Omega \leq 1, \quad (51)$$

Параметр  $\lambda$  (31) допускает произвол.

Величина  $\lambda$  (43) находится в зависимости от определяющих ее параметров в промежутке

$$0 \leq \lambda \leq \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad (52)$$

Собственную частоту нелинейной системы, зависящую от амплитуды  $A$ , в противоположность линейной постановке задачи можно вычислять по приближенной формуле [9]

$$\nu = \sqrt{\alpha} \left( 1 + \frac{3\beta}{8\alpha} A^2 \right). \quad (53)$$

для случая кубической характеристики восстанавливающей функции системы  $R(x)$  (2).

Развитие амплитуд, отвечающее уравнению (48), показано на рис. 5. Так как вследствие физических представлений функция  $f(x)$  (21) предполагается нечетной (соответственно  $f(A)$  – также нечетная функция), ветви *I* и *III* амплитудно-частотной кривой соответствуют значениям  $A > 0$ , а ветви *II* и *IV* – значениям  $A < 0$ .

Проанализируем ход развития амплитуд по кривой, изображенной на рис. 5. При возрастании частоты  $\omega_1$  от нуля до  $\nu/2$  влияние первой гармоники не сказывается на колебаниях системы (1) и развивается амплитуда только от действия второй гармоники (ветвь *I*). В дальнейшем, с возрастанием частоты  $\omega_1$ , амплитуда от действия второй гармоники уменьшается (ветвь *II*); начиная с некоторого значения частоты  $\omega_1$ , амплитуда уже возрастает от действия первой гармоники (ветвь *III*), тогда как действие второй гармоники почти не сказывается. И начиная со значения  $\omega_1 = \nu$ , амплитуда от действия первой гармоники убывает. Таким образом, ветвь *I–II* отвечает развитию амплитуд от второй гармоники, а ветвь *III–IV* – от первой гармоники.

Применение метода переменного масштаба времени позволило определить полную амплитуду колебаний системы (1) как функцию частот (рис. 5).

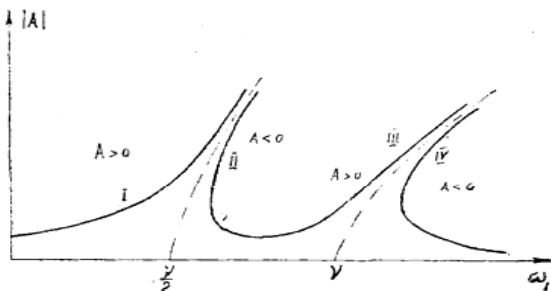


Рис. 5

## *Литература*

1. И.Г. Малкин. Методы Ляпунова и Пуанкаре в теории нелинейных колебаний. Гостехиздат, 1949.
2. Дж. Стокер. Нелинейные колебаниям механических и электрических системах. Изд. ИЛ, 1953.
3. А.И. Чекмарев. Взаимное влияние гармоник в нелинейных системах. Сб. «Динамика и прочность коленчатых валов», II, Изд. АН СССР, 1950.
4. Дж. В. Стрэтт. (РЭЛЕЙ). Теория звука, т. 2. ГосТехиздат, 1954.
5. С.П. Стрелков. Введение в теорию колебаний. Гостехиздат, 1951.
6. М.Г. Бондар. Розв'язок задач нелінійних коливань систем без тертя методом змінного масштабу часу. «Прикладна механіка», т. VII, В. 5. 1961.
7. М.Г. Бондар. Про новий спосіб розв'язку задач коливань нелінійних консервативних систем. Доповіді АН УРСР, № 10, 1961.
8. М.Г. Бондар. Розв'язок задач про коливання одного класу нелінійних систем методом змінного масштабу часу. Доповіді АН УРСР, №11, 1961.
9. Н.Г. Бондарь. Решение задач нелинейных колебаний методом переменного масштаба времени. Труды ДИИТа, вып. 38, 1962.
10. Н.Г. Бондарь. Применение метода переменного масштаба времени к изучению нелинейных колебаний осциллятора, вызванных импульсами. Исследования по теории сооружений, вып. XIII, 1964.

## ЧАСТОТЫ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ СИСТЕМ С ПЕРЕСКОКОМ\*

Некоторые механические системы обладают интересной особенностью — наличием несмежных форм равновесия. Эта особенность, естественно, накладывает свой отпечаток на динамические свойства указанных систем. Поскольку в «их переход от одной устойчивой формы к другой происходит скачкообразно, они получили название систем с перескоком. Такие системы нашли очень широкое применение в технике. Это пружинные механизмы и хлопающие мембраны, желобчатые полосы и гибкие пологие оболочки, обратный маятник со спиральной пружиной.

Бели восстанавливающая сила систем с перескоком описывается симметричной функцией от обобщенной координаты, то, ограничиваясь двумя первыми членами разложения этой функции в степенной ряд, уравнение движения приближенно будет иметь вид:

$$\ddot{q} - \alpha q + \beta q^3 = 0, \quad (1)$$

где  $-\alpha q + \beta q^3 = R(q)$  — нелинейная восстанавливающая сила. Точное решение этого уравнения в квадратурах приведено в работах [1, 4]. При этом получаются выражения для периодов свободных колебаний в эллиптических функциях Якоби [3].

В настоящей статье указана возможность линеаризации фазовой функции по методу переменного масштаба и на этом основании определена частота свободных колебаний систем с перескоком.

Заменой переменных  $z(\varepsilon) = f(q)$ ;  $\varepsilon = \varepsilon(t)$  нелинейное дифференциальное уравнение (1) приводится [2] к линейному

$$\frac{d^2 z}{d\varepsilon^2} + z = 0.$$

При начальных условиях  $t = 0$ ,  $q = A$ ;  $dq/dt = 0$  последнее имеет решение

$$f(q) = f(A) \cos \eta(t); \quad \eta(t) = \varepsilon(t) - \varepsilon(0). \quad (2)$$

Для принятого случая восстанавливающей силы, когда  $R(q) = -\alpha(q) + \beta q^3$ , амплитудная функция  $f(q)$  имеет вид [3]:

$$f(q) = \pm \left( \frac{\alpha}{\sqrt{2\beta}} - \frac{\beta}{2} q^2 \right). \quad (3)$$

---

\*Опубликовано в Трудах ДИИТ, вып. 73, Москва: «Транспорт», 1968.

Знак плюс принимаем для интервала  $0 < q^2 \leq \alpha/\beta$ , а знак минус для интервала  $q^2 \geq \alpha/\beta$ . Для нахождения фазовой функции  $\varepsilon(t)$  воспользуемся соотношением [2]

$$\frac{d}{dq} f(q) = \frac{d}{dt} \varepsilon(t),$$

из которого получим

$$dt = \frac{d\varepsilon}{\frac{d}{dq} f(q)}.$$

Внеся выражение (3) в решение (2), найдем

$$q = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \sqrt{1 + (\tau - 1) \cos \eta(t)}. \quad (4)$$

Здесь введено обозначение  $\tau = \beta / \alpha \cdot A^2$ . В силу равенств (3) и (4) имеем

$$\frac{d}{dq} f(q) = \sqrt{2\alpha} \sqrt{1 + (\tau - 1) \cos \eta(t)}.$$

Следовательно,

$$dt = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} \cdot \frac{d\varepsilon}{\sqrt{1 + (\tau - 1) \cos \eta(t)}},$$

откуда ввиду принятых обозначений (2)  $\frac{d\eta}{dt} = \frac{d\varepsilon}{dt}$  получим

$$\sqrt{2\alpha} t = \int_0^{\eta} \frac{d\eta}{\sqrt{1 + (\tau - 1) \cos \eta(t)}}.$$

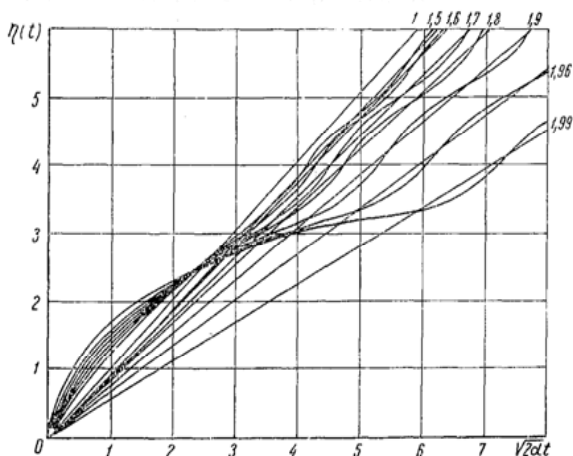


Рис. 1

Этот интеграл был вычислен на ЭВМ «УРАЛ-3» для различных значений безразмерного параметра  $\tau$ . Результаты вычислений приведены в виде графиков на рисунках 1 и 2. Анализируя графики, приходим к выводу, что в первом приближении можно принять линейную зависимость фазовой функции  $\varepsilon$  от времени  $t$

$$\varepsilon(t) = k \sqrt{2\alpha} t \quad (5)$$

с точностью до постоянной  $\varepsilon(0)$  (2). Коэффициент пропорциональности  $k$  зависит от параметра нелинейности  $\tau$ . В правой части уравнения (5) постоянный (во времени) множитель есть не что иное, как частота свободных колебаний системы.

На самом деле

$$\nu = \frac{d\varepsilon}{dt} = k \sqrt{2\alpha} \quad \text{и} \quad k = \frac{\nu}{\sqrt{2\alpha}}. \quad (6)$$

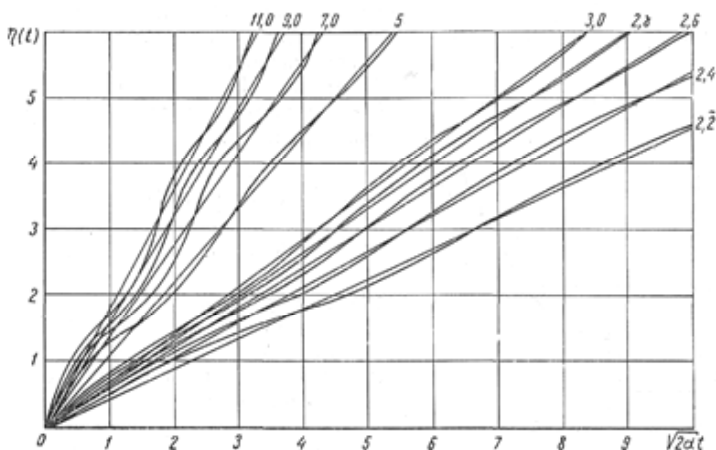


Рис. 2

На рис. 3 крестиками отмечена зависимость  $k = k(\tau)$ , взятая из графиков на рисунках 1 и 2, а сплошной толстой линией —  $k(\tau)$ , вычисленная по точным формулам [1, 3]. Зависимость  $k(\tau)$  может быть аппроксимирована кривыми:

$$k_M = \sqrt[9]{2 - \tau}; \quad 0 < \tau \leq 2;$$

$$k_6 = 0,77 \sqrt[3]{\tau - 2}; \quad \tau \geq 2,$$

для малых и больших колебаний соответственно.

Отсюда легко получить уравнения «скелетных» кривых — частот

свободных колебаний системы (1):

$$\nu_M = \sqrt[9]{2\alpha} \sqrt[9]{2-\tau}; \quad 0 < \tau \leq 2; \quad (7)$$

$$\nu_6 = 0,77 \sqrt[3]{2\alpha} \sqrt[3]{\tau-2}; \quad \tau \geq 2. \quad (8)$$

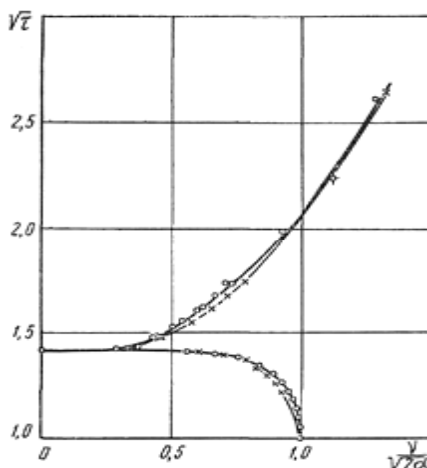


Рис. 3

Малые колебания систем с перескоком аналогичны колебаниям нелинейных систем с мягкой характеристикой восстанавливающей силы  $R(q)$ , а большие колебания – с жесткой характеристикой  $R(q)$ . При  $\tau = 2$  система находится в неустойчивом состоянии. При этом период колебаний равен бесконечности (частота равна нулю). Это состояние является переходным между малыми и большими колебаниями.

### Литература

1. Каудерер Г. Нелинейная механика. М.: Изд-во «Иностранная литература», 1961.
2. Бондарь Н.Г. Решение задач нелинейных колебаний методом переменного масштаба времени. Труды ДИИТ, вып. 38, Днепропетровск, изд-е ДИИТ, 1962.
3. Бондарь Н.Г. Нелинейные колебания консервативных систем с несимметричными характеристиками. Труды ДИИТ, вып. 56, изд-во «Транспорт», 1966.
4. Mises R. Über die Stabilitätsprobleme der Elastizitätstheorie, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik. № 4, 1923.

## ГАРМОНИЧЕСКОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ СИСТЕМ С ПЕРЕСКОКОМ\*

Задача о вынужденных колебаниях механических систем с одной степенью свободы, имеющих несмежные формы равновесия при гармоническом возбуждении рассматривалась рядом авторов [1, 2, 3]. В настоящей статье приведены результаты исследования с помощью метода переменного масштаба [4] стационарных колебаний таких систем. Рассмотрено возбуждение консервативной системы с вязким трением. Даны простые оценки и приемы определения характера колебаний. Построены амплитудно-частотные характеристики стационарных колебаний. Проведено сравнение полученных результатов с решением задачи на ЭЦВМ и машинах-аналогах.

### Системы без сопротивления.

Рассмотрим стационарные колебания нелинейной системы, описываемой дифференциальным уравнением

$$\ddot{q} + R(q) = F(t), \quad (1)$$

где

$$\left. \begin{aligned} R(q) &= -\alpha q + \beta q^3; \quad \alpha > 0; \quad \beta > 0; \\ F(t) &= F_0 \cos \omega t. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Заменой переменных

$$z(\varepsilon) = f(q) \text{ и } \varepsilon = \varepsilon(t)$$

это линейное уравнение можно свести [4] к линейному

$$\ddot{z} + v^2 z = v F(t) \quad (3)$$

в первом приближении [5].

Собственная частота системы  $v$  определяется по одной из формул, полученных в работе [5]. Первое условие эквивалентности нелинейного (1) и линейного (3) уравнений согласно первому приближению преобразуется

$$f'(q) = \dot{\varepsilon} = v. \quad (4)$$

Решая это дифференциальное уравнение, находим

$$f(q) = z = vq + C,$$

где  $C$  – постоянная интегрирования.

Следовательно,  $\ddot{z} = v\ddot{q}$ .

Подставляя два последних выражения в уравнение (3), получаем

---

\* Опубликовано совместно с Чуваевым Д.П. в Сб. Тр. ДИИТ, вып. 83 «Вопросы прикладной механики и мостов». Киев: Будівельник, 1968.

линеаризованное уравнение

$$\ddot{q} + v(vq + C) = F(t,)$$

в котором восстанавливающая сила линеаризована и имеет вид

$$R(q) \cong v(vq + C), \quad (5)$$

Для нахождения постоянной  $C$  будем руководствоваться следующими соображениями.

Для центра малых колебаний  $q_2 = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$  определяем [5]

$$R(q_2) = 0.$$

Поэтому из равенства (5) находим  $C = -v \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$ ;

$$R(q) = v^2 \left( q - \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \right).$$

Для центра больших колебаний  $q_1 = 0$  определяем [5]

$$R(q_1) = 0; C = 0,$$

и, следовательно,

$$R(q) = v^2 q. \quad (6)$$

Таким образом, дифференциальное уравнение (1) при линеаризации по методу переменного масштаба распадается на два уравнения:

для малых колебаний

$$\ddot{q} + v_m^2 \left( q - \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \right) = F_0 \cos \omega t; \quad (7)$$

для больших колебаний

$$\ddot{q} + v_8^2 q = F_0 \cos \omega t. \quad (8)$$

Естественно, что собственная частота системы  $v$  в этих уравнениях различна и определяется по методу переменного масштаба формулами из работы [5]

$$v_m = \sqrt{2\alpha^3 \sqrt{2 - \tau}}; \quad (9)$$

$$v_8 = 0,77 \sqrt{2\alpha^3 \sqrt{2 - \tau}}. \quad (10)$$

Уравнения (7) и (8) являются линейными, а эффект нелинейности самой колебательной системы заключен в определении собственной частоты  $v$ .

Исследуем вначале малые колебания. Решение уравнения (7) ищем в форме

$$q = C_1 + C_2 \cos \omega t; C_1, C_2 = \text{const.}$$

Подставляя это выражение в уравнение (7), находим

$$C_1 = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}; C_2 = \frac{F_0}{v_M^2 - \omega^2}.$$

Тогда решение принимает вид

$$q = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} + \frac{F_0}{v_M^2 - \omega^2} \cos \omega t. \quad (11)$$

Переходя в этом решении к амплитудным значениям, получаем уравнение амплитудно-частотной характеристики

$$A = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \pm \frac{F_0}{v_M^2 - \omega^2}, \quad (12)$$

или, решая относительно частоты возбуждения  $\omega$ ,

$$\omega^2 = v_M^2 \pm \frac{F_0}{A - \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}}. \quad (13)$$

В зависимости от амплитуды возмущающей силы  $F_0$  будут развиваться либо малые, либо большие колебания. Определим амплитуду установившихся колебаний при нулевой частоте возбуждения  $\omega$ , т. е. при действии постоянной силы  $F_0$ . В этом случае амплитуда  $A$  согласно уравнению амплитудно-частотной кривой (12) определится из выражения

$$v_M^2 \left( A - \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \right) = |F_0|. \quad (14)$$

Здесь собственная частота системы  $v_M$  определяется по формуле (9). Обозначим левую часть выражения (14) через  $\Phi_1(A)$ . Уравнение

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1(A) &= v_M^2 \left( A - \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \right), \\ \Phi_1(A) &= |F_0| \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

трансцендентное и его легко решить графическим путем.

На рис. 1 дана схема решения уравнения (15); функция  $\Phi_1(A)$  – кривая 1 – имеет два корня при выполнении условия

$$F_0 \leq F_0^{\text{кр}}. \quad (16)$$

Это же неравенство является условием существования малых колебаний.

Рассмотрим большие колебания. Решение уравнения движения (8) будем искать в виде  $q = C_3 \cos \omega t$ .

Постоянную  $A_3$  найдем, подставив последнее выражение в уравнение (8)

$$C_3 = \frac{F_0}{v_0^2 - \omega^2}.$$

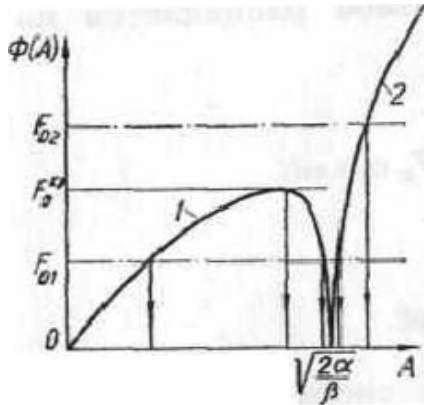


Рис. 1. График  $\Phi(A)$

Следовательно, решение принимает вид

$$q = \frac{F_0}{v_0^2 - \omega^2} \cos \omega t, \quad (17)$$

откуда получим уравнение амплитудно-частотной характеристики

$$A = \pm \frac{F_0}{v_0^2 - \omega^2},$$

или, решая относительно частоты возбуждения  $\omega$ ,

$$\omega^2 = v_0^2 \mp \frac{F_0}{A}. \quad (18)$$

Амплитуду установившихся колебаний при действии постоянной силы  $F_0$  определим, решая трансцендентное уравнение

$$v_0^2 A = |F_0|,$$

в котором частота свободных колебаний  $v_0$  описывается уравнением (10). Кривой 2 (см. рис. 1) показана функция  $\Phi_2(A)$ , равная

$$\Phi_2(A) = v_0^2 A. \quad (19)$$

Как видно из рисунка, уравнение

$$\Phi_2(A) = |F_0| \quad (20)$$

имеет лишь один корень.

Таким образом, зная амплитуду возмущающей силы  $F(t)$ , графически находим смещение центра колебаний, вызванное действием постоянной силы  $\Phi_0$ .

Вернемся к формулам (9) и (10) собственной частоты  $v$ . При  $\tau=2$

$$(\text{соответственно } A = \sqrt{2 \frac{\alpha}{\beta}}) \quad v_m = v_\delta = 0. \quad (21)$$

Это соответствует переходному состоянию между малыми и большими колебаниями. Найдем соответствующую этому состоянию значения частоты возбуждения  $\omega$ . Так при малых колебаниях из уравнения (14), учитывая равенство (21), получаем

$$\omega^2 = \frac{F_0}{\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}(\sqrt{2}-1)} \cong 2,42 \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} F_0. \quad (22)$$

При больших колебаниях из уравнения (18) находим

$$\omega^2 = \frac{F_0}{\sqrt{2 \frac{\alpha}{\beta}}} \cong 0,707 \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} F_0. \quad (23)$$

Сравнивая значения (22) и (23), и видим, что частота малых колебаний почти в два раза больше частоты больших колебаний. Этот результат соответствует физическому процессу, происходящему при переходе от малых колебаний к большим или от больших к малым, поскольку время одного цикла (перехода) больших колебаний почти в два раза больше периода малых колебаний и при переходе изменяется скачкообразно.

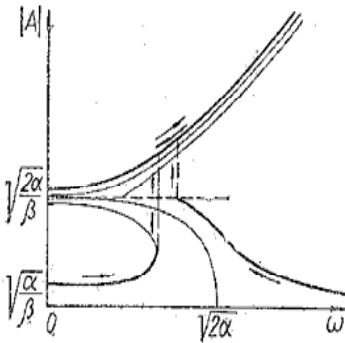


Рис. 2. Амплитудно-частотная характеристика для  $F_0 \leq F_0^{kp}$  при отсутствии сопротивлений

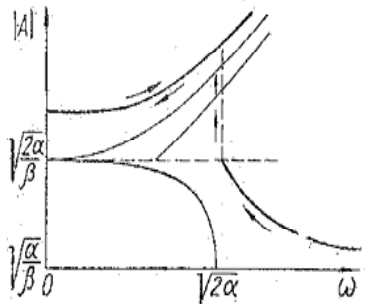


Рис. 3. Амплитудно-частотная характеристика для  $F_0 > F_0^{kp}$  при отсутствии сопротивлений

На рис. 2 и 3 построены амплитудно-частотные характеристики по уравнениям (13) для малых колебаний (ниже пунктирной линии) и (18) для больших колебаний (выше пунктирной линии). Кривая на

рис. 2 построена при значении амплитуды возмущающей силы  $F_0$ , удовлетворяющей условию (16), а кривая на рис. 3 – при значении амплитуды возбуждения  $F_0 > F_0^{kp}$ . Стрелками изображен ход развития амплитуд со скачкообразными переходами от малых колебаний к большим и от больших к малым.

### Влияние вязкого сопротивления.

Введем в систему (1) линейное неупругое сопротивление

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + R(q) = F(t). \quad (24)$$

Замена переменных

$$z(\varepsilon) = f(q)e^{nt}; \quad \varepsilon = \varepsilon(t) \quad (25)$$

позволяет свести это нелинейное уравнение к линейному вида

$$\ddot{Z} + v^2 Z = ve^{nt} F(t) \quad (26)$$

в первом приближении [2], когда выполняется условие (4).

Подставим решение уравнения (4)

$$f(q) = vq + C; \quad C = const$$

в выражение (25)

$$z = e^{nt}(vq + C). \quad (27)$$

Нетрудно убедиться, что постоянная интегрирования  $C$  зависит, как и выше, от типа колебаний: при малых колебаниях  $C = -v\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$ , а при больших –  $C=0$ .

Подставляя выражение (27) в уравнение (26), получаем линейаризованные уравнения

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + (v_m^2 + n^2) \left( q - \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \right) = F(t) \quad (28)$$

для малых колебаний и

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + (v_0^2 + n^2)q = F(t) \quad (29)$$

для больших колебаний.

Будем считать, что возмущающая сила задана со сдвигом фаз, т.е.

$$F(t) = F_0 \cos(\omega t + \varphi).$$

Решение уравнения малых колебаний (28) ищем в форме

$$q = C_1 + C_2 \cos \omega t.$$

Для нахождения постоянных  $C_1$  и  $C_2$ , а также сдвига фаз  $\varphi$  (полагая, что он неизвестен) подставим решение (30) в уравнение (28); сравнивая коэффициенты при одинаковых гармониках, получим:

$$C_1 = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}};$$

$$C_2 = \frac{F_0}{\sqrt{(v_M^2 + n^2 - \omega^2) + 4n^2 \omega^2}}; \quad (31)$$

$$\varphi = \text{Arc tan} \frac{2n\omega}{v_M^2 + n^2 - \omega^2}. \quad (32)$$

Решение (30) в силу полученных выражений (31) и (32) принимает вид

$$q = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} + \frac{F_0 \cos \omega t}{\sqrt{(v_M^2 + n^2 - \omega^2) + 4n^2 \omega^2}}. \quad (33)$$

Отсюда получаем уравнение амплитудно-частотной характеристики для малых колебаний

$$A = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \pm \frac{F_0}{\sqrt{(v_M^2 + n^2 - \omega^2) + 4n^2 \omega^2}} \quad (34)$$

или после простых преобразований под знаком радикала

$$A = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \pm \frac{F_0}{\sqrt{(v_M^2 - n^2 - \omega^2)^2 + 4n^2 v_M^2}}. \quad (35)$$

Решив это уравнение относительно частоты возбуждения  $\omega$ , найдем

$$\omega^2 = v_M^2 - n^2 \pm \sqrt{\frac{F_0^2}{\left(A - \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\right)^2} - 4n^2 v_M^2}. \quad (36)$$

При  $n=0$  (отсутствие сил диссипации) из последнего выражения получим выражение (13).

Резонансное значение амплитуды  $A_p$  определим, приравняв нулю производную  $\frac{dA}{d\omega}$ :

$$\frac{dA}{d\omega} = 0; \quad v_M^2 - n^2 - \omega^2 = 0, \quad (37)$$

откуда

$$\omega_p^2 = v_M^2 - n^2.$$

Поэтому

$$A_p = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} + \frac{F_0}{2nv_M}.$$

Видоизменим запись этого выражения

$$v_m \left( A_p - \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \right) = \frac{F_0}{2n}. \quad (38)$$

Полученное трансцендентное уравнение\*\* относительно резонансной амплитуды  $A_p$  решается графическим путем. Для этого левую часть уравнения (38) обозначим через  $L_1(A)$ . На рис. 4 эта функция изображена кривой 1; на этом же рисунке представлена схема решения уравнения (38). Из уравнения (36) можно убедиться в том, что не может существовать стационарных колебаний с амплитудой большей, чем  $A_p$ . В самом деле, из уравнения (36) со всей очевидностью вытекает неравенство

$$\frac{F_0}{A - \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}} \geq 2nv_m,$$

откуда

$$v_m \left( A - \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \right) \leq \frac{F_0}{2n} = L_1(A).$$

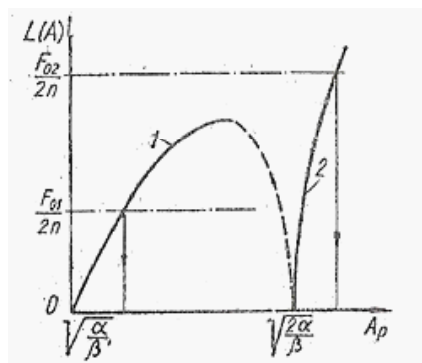


Рис. 4. График  $L(A)$

При  $n=0$  из уравнения (38) найдем  $A_p = \infty$ . Рассмотрим большие колебания. Решение уравнения больших колебаний (29) имеет вид

$$q = \frac{F_0 \cos \omega t}{\sqrt{(v_0^2 + n^2 - \omega^2) + 4n^2 \omega^2}}.$$

Амплитудно-частотная характеристика описывается уравнением

$$A = \pm \frac{F_0}{\sqrt{(v_0^2 - n^2 - \omega^2)^2 + 4n^2 \omega^2}} = \pm \frac{F_0}{\sqrt{(v_0^2 - n^2 - \omega^2)^2 + 4n^2 v_0^2}}, \quad (39)$$

\*\*Уравнение (38) трансцендентное, поскольку частота свободных колебаний  $v_m$  также зависит от амплитуды (9).

Откуда, решая относительно  $\omega$ , находим

$$\omega^2 = v_6^2 - n^2 \mp \sqrt{\frac{F_0^2}{A^2} - 4n^2 v_6^2}. \quad (40)$$

При  $n=0$  получаем отсюда формулу (18).

Резонансное значение амплитуды находится из условия (37) и равно  $A_p = \frac{F_0}{2nv_6}$ ,

или

$$v_6 A_p = \frac{F_0}{2n}. \quad (41)$$

Первую часть последнего уравнения обозначаем через  $L_2(A)$ . Трансцендентное уравнение (41) относительно  $A_p$  решается графическим путем. На рис. 4 функция  $L_2(A)$  изображена кривой 2; там же дана схема решения уравнения (41).

Из выражения (40) получаем условие  $\frac{F}{A} \geq 2nv_6$ ,

откуда  $v_6 A \leq \frac{F_0}{2n} = L_2(A)$ .

Следовательно, амплитуды колебаний (стационарных) не превосходят резонансной.

При слабом затухании ( $n \ll 1$ ) амплитуды установившихся колебаний при нулевой частоте возмущающей силы (действие постоянной силы) очень близки к амплитудам недиссипативных систем. Из уравнения (34) при  $\omega=0$  для малых колебаний получаем

$$v^2 + n^2 = \frac{F_0}{A - \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}},$$

а для больших колебаний из уравнения (39) находим

$$v^2 + n^2 = \frac{F_0}{A}.$$

Эти выражения отличаются от аналогичных им выражений (18) и (20) на величину второго порядка малости  $n^2$ .

Для частот возбуждения  $\omega$ , соответствующих переходному состоянию  $\left(A = \sqrt{2\frac{\alpha}{\beta}}; v = 0\right)$ ,

также получаются выражения, отличающиеся от значений (22) и (23) на величину второго порядка малости  $n^2$ .

На рис. 5, 6 и 7 построены амплитудно-частотные кривые (ниже пунктирной линии) по уровню (36) и (выше пунктирной линии) по уровню (40); причем на рис. 5 и 6 при различных коэффициентах затухания  $n_1$  и  $n_2$  соответственно ( $n_1 > n_2$ ), но при одинаковой амплитуде

де возбуждения  $F_0 < F_0^{кр}$ ,

а на рис. 7 – при амплитуде возбуждения  $F_0 > F_0^{кр}$ .

Стрелками на рисунках показан ход развития амплитуд и срывы колебаний на большие и наоборот.

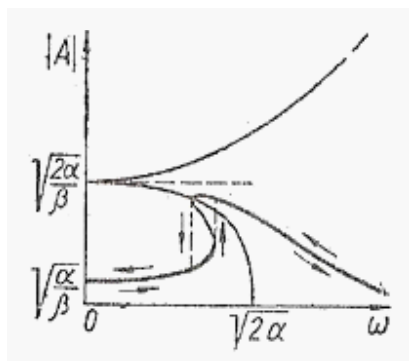


Рис. 5. Амплитудно-частотная характеристика для  $F_0 < F_0^{кр}$  при наличии сопротивления  $n_1$

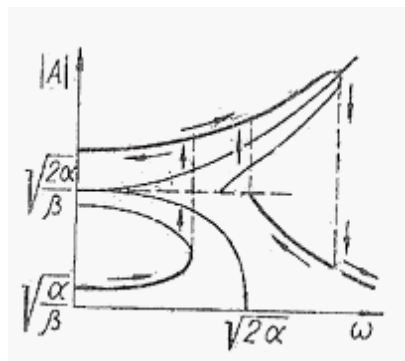


Рис. 6. Амплитудно-частотная характеристика для  $F_0 < F_0^{кр}$  при наличии сопротивления  $n_2$

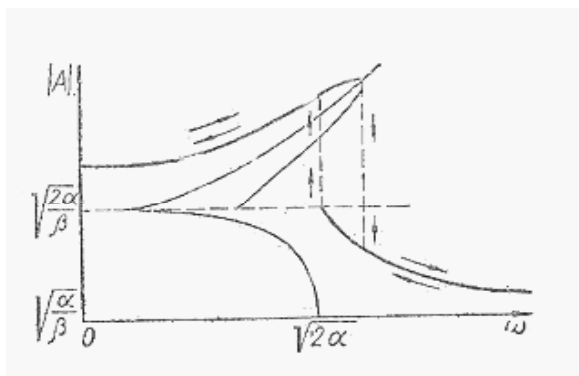
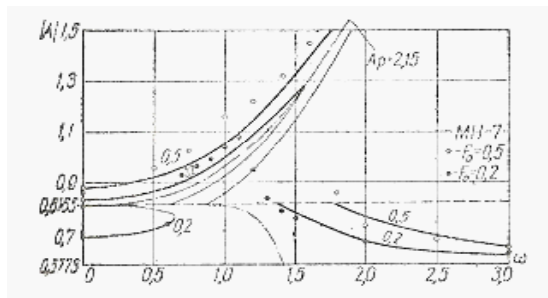


Рис. 7. Амплитудно-частотная характеристика для  $F_0 > F_0^{кр}$  при наличии сопротивления

**Пример.** Для количественной оценки полученных выше результатов рассмотрим нелинейную систему (24) с восстанавливающей силой  $R(q)$  вида (2). На рис. 8 построены амплитудно-частотные характеристики при различных значениях амплитуды возбуждения  $F_0$ .

Ветви амплитудно-частотной кривой, расположенные ниже пунктирной линии  $\left(A = \sqrt{2\frac{\alpha}{\beta}}\right)$ , построены по формуле (36), а ветви,

расположенные выше пунктирной линии, по формуле (40). Начальные и резонансные значения амплитуд взяты в зависимости от амплитуды возбуждения  $F_0$  и коэффициента затухания  $n$  из графика на рис. 1 и 4. Приняты следующие значения параметров:  $\alpha=1 \text{ сек}^{-2}$ ;  $\beta=3 \text{ сек}^{-2}$ ;  $n=0,05 \text{ сек}^{-1}$ ;  $F_0=0,2 \text{ сек}^{-2}$  и  $F_0=0,5 \text{ сек}^{-2}$ .



**Рис. 8. Амплитудно-частотные характеристики для  $F_0=0,2$  и  $F_0=0,5$**

Скелетные кривые построены по формулам (9) и (10). Ветви, изображенные жирной линией, соответствуют устойчивым колебаниям, а тонкой линией – неустойчивым колебаниям [6].

Эта система также моделировалась на электронной нелинейной установке МН-7 при тех же значениях параметров. Результаты моделирования показаны на рис. 8 точками.

Моделирование систем с перескоком не вызывает особых затруднений. Однако в связи со сравнительно большой погрешностью установки МН-7 (10%) результаты моделирования могут оказаться достаточными для частот возбуждения  $\omega < 0,5 \alpha$ , когда  $F_0$  близко  $F_0^{кр}$  ( $|F_0^{кр} - F_0| \ll 1$ ).

### **Литература**

1. Григолюк Э.И. Нелинейные колебания и устойчивость пологих стержней и оболочек. «Известия АН СССР. Отделение технических наук», 1955, № 3.
2. Григолюк Э.И. О колебаниях пологой круговой цилиндрической панели, испытывающей конечные прогибы. «Прикладная механика и математика», т. XIX, вып. 3. М., изд. АН СССР, 1955.
3. Мишенков Г.В. Вынужденные колебания механической системы при наличии сухого трения и асимметричном квазиупругой характеристики. «Инженерный журнал», т. IV, вып. 4. М.: Изд-во «Наука», 1964.
4. Бондарь Н.Г. Решение задач нелинейных колебаний методом переменного масштаба времени. Сб. «Труды ДИИТ», вып. 38. Днепропетровск, облиздат, 1962.
5. Казакевич М.И. Частоты свободных колебаний систем с перескоком. Сб. «Труды ДИИТ», вып. 73. М., изд-во «Транспорт», 1967.

## БИГАРМОНИЧЕСКОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ СИСТЕМ С ПЕРЕСКОКОМ\*

Несмотря на практическую важность, задача о бигармоническом возбуждении систем с перескоком ставится впервые. Это объясняется прежде всего трудностями, связанными с построением аналитических решений, хотя бы приближенных. Особую роль при этом играют физические особенности указанных систем. Так, восстанавливающая сила может быть и мягкой и жесткой для различных диапазонов перемещений одной и той же системы [1]. Кроме того, в таких системах возможны две различные формы колебаний: малые колебания относительно одного из устойчивых центров и большие колебания с охватом трех возможных положений равновесия.

1. Системы с перескоком описываются нелинейным дифференциальным уравнением

$$\ddot{q} + R(q) = F(t) \quad (1)$$

где  $R(q)$  – восстанавливающая сила, которую можно принять в виде

$$R(q) = -\alpha q + \beta q^3, \quad \alpha > 0, \beta > 0, \quad (2)$$

а  $F(t)$  – возмущающая сила, состоящая из двух гармоник

$$F(t) = F_1 \cos \omega t + F_2 \cos \mu \omega t; \quad \mu > 1, \quad (3)$$

$\omega$  – основная частота возбуждения.

С помощью метода переменного масштаба нелинейное уравнение (1) можно линеаризовать. При этом в связи с физическими особенностями систем с перескоком оно распадается на два [2]: для малых колебаний

$$\ddot{q} + \nu_m^2 (q - \sqrt{\alpha/\beta}) = F_1 \cos \omega t + F_2 \cos \mu \omega t \quad (4)$$

и для больших колебаний

$$\ddot{q} + \nu_o^2 q = F_1 \cos \omega t + F_2 \cos \mu \omega t. \quad (5)$$

Собственная частота системы  $\nu$  в случае восстанавливающей силы типа (2) в первом приближении определяется формулами [1]

$$\nu_m = \sqrt{2\alpha} \cdot \sqrt[3]{2-\tau}, \quad 0 < \tau \leq 2, \quad (6)$$

$$\nu_o = 0,7 \sqrt{2\alpha} \cdot \sqrt[3]{\tau-2}, \quad \tau \geq 2. \quad (7)$$

Рассмотрим малые колебания, описываемые уравнением (4). Решение его будем искать в форме

$$q = C_1 + C_2 \cos \omega t + C_3 \cos \mu \omega t.$$

---

\*Опубликовано в журнале «Динамика и прочность машин», вып. 11, Харьков, 1970.

Постоянные коэффициенты  $C_1$ ,  $C_2$  и  $C_3$  находим обычным путем, подставляя это решение в уравнение (4) и приравнявая множители при одинаковых гармониках:

$$C_1 = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}, \quad (8)$$

$$C_2 = \frac{F_1}{v_m^2 - \omega^2}, \quad C_3 = \frac{F_2}{v_m^2 - \mu^2 \omega^2}, \quad (9)$$

Таким образом, решение уравнения (4) имеет вид

$$q = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} + \frac{F_1}{v_m^2 - \omega^2} \cos \omega t + \frac{F_2}{v_m^2 - \mu^2 \omega^2} \cos \mu \omega t. \quad (10)$$

Положим, что аргументы гармоник кратны между собой, т.е. коэффициент  $\mu$  принимает только целочисленные значения:  $\mu = 1, 2, 3, \dots$ . Тогда для амплитудно-частотной характеристики получаем уравнение, переходя в решении (10) к амплитудным значениям

$$A = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} + \frac{F_1}{v_m^2 - \omega^2} + \frac{F_2}{v_m^2 - \mu^2 \omega^2}, \quad (11)$$

поскольку  $\cos \omega t$  и  $\cos \mu \omega t$  принимают одновременно наибольшее значение (единицу) в течение каждого периода колебаний  $T = 2\pi/\omega$ .

Заметим, что действие постоянной силы равнозначно действию бигармонической возмущающей силы  $F(t)$  с частотой возбуждения  $\omega = 0$ . Смещение системы при этом определяется действием силы  $F_0 = F_1 + F_2$  [2].

Исследуем большие колебания системы (1), описываемые уравнением (5). Опуская промежуточные выкладки, записываем решение этого уравнения:

$$q = \frac{F_1}{v_\sigma^2 - \omega^2} \cos \omega t + \frac{F_2}{v_\sigma^2 - \mu^2 \omega^2} \cos \mu \omega t. \quad (12)$$

Для амплитудно-частотной кривой больших колебаний имеем уравнение

$$A = \frac{F_1}{v_\sigma^2 - \omega^2} + \frac{F_2}{v_\sigma^2 - \mu^2 \omega^2}, \quad (13)$$

из которого заключаем, что при резонансе по одной из гармоник с частотой  $\omega$  или  $\mu\omega$ , когда  $v = \omega$  или  $v = \mu\omega$  соответственно, резонансная амплитуда принимает бесконечно большое значение  $A_p = \infty$ .

2. Рассмотрим влияние вязкого сопротивления на стационарные колебания систем с перескоком, возбуждаемых бигармонической силой (3). Движение таких систем описывается уравнениями [2]

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + (v_m^2 + n^2) \left( q - \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \right) = F(t) \quad (14)$$

и

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + (v_o^2 + n^2)q = F(t) \quad (15)$$

для малых и больших колебаний соответственно. Будем полагать, что возмущающая сила задана со сдвигом фаз, который, однако, подлeжит определению:

$$F(t) = F_1 \cos(\omega t + \phi_1) + F_2 \cos(\mu \omega t + \phi_2). \quad (16)$$

Решения уравнений (14) и (15) будем искать, без сдвига фаз. В частности, решение для малых колебаний

$$q = C_1 + C_2 \cos \omega t + C_3 \cos \mu \omega t.$$

Коэффициенты  $C_1, C_2, C_3$ , найденные обычным путем, равны

$$C_1 = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}, \quad (17)$$

$$C_2 = \frac{F_1}{\sqrt{(v_m^2 + n^2 - \omega^2)^2 + 4n^2 \omega^2}}, \quad C_3 = \frac{F_2}{\sqrt{(v_m^2 + n^2 - \mu^2 \omega^2)^2 + 4n^2 \mu^2 \omega^2}}, \quad (18)$$

Следовательно, решение уравнения (14) имеет вид

$$q = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} + \frac{F_1 \cos \omega t}{\sqrt{(v_m^2 + n^2 - \omega^2)^2 + 4n^2 \omega^2}} + \frac{F_2 \cos \mu \omega t}{\sqrt{(v_m^2 + n^2 - \mu^2 \omega^2)^2 + 4n^2 \mu^2 \omega^2}}. \quad (19)$$

а сдвиги фаз  $\phi_1$  и  $\phi_2$  определяются формулами

$$\phi_1 = \arctg \frac{2n\omega}{v_m^2 + n^2 - \omega^2}; \quad \phi_2 = \arctg \frac{2n\mu\omega}{v_m^2 + n^2 - \mu^2 \omega^2}. \quad (20)$$

Переходя в решении (19) к амплитудным значениям, получаем уравнение амплитудно-частотной характеристики:

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} + \frac{F_1}{\sqrt{(v_m^2 + n^2 - \omega^2)^2 + 4n^2 \omega^2}} + \frac{F_2}{\sqrt{(v_m^2 + n^2 - \mu^2 \omega^2)^2 + 4n^2 \mu^2 \omega^2}} = \\ &= \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} + \frac{F_1}{\sqrt{(v_m^2 + n^2 - \omega^2)^2 + 4n^2 v_m^2}} + \frac{F_2}{\sqrt{(v_m^2 + n^2 - \mu^2 \omega^2)^2 + 4n^2 v_m^2}}. \end{aligned} \quad (21)$$

Условия резонанса гармоник с частотами  $\omega$  и  $\mu\omega$  описываются равенствами [2]

$$v_m^2 - n^2 - \omega^2 = 0, \quad (22)$$

$$v_m^2 - n^2 - \mu^2 \omega^2 = 0, \quad (23)$$

Поочередная подстановка этих условий в уравнение (21) дает резонансные значения амплитуд. Так, при выполнении условия (22) наступает резонанс по частоте  $\omega$ , резонансная амплитуда определяется из выражения

$$A = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} + \frac{F_1}{2n v_m} + \frac{F_2}{\sqrt{(1-\mu^3)^2 (v_m^2 - n^2)^2 + 4n^2 v_m^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} + \frac{F_1}{2n v_m} + \left( 1 + \frac{F_2}{F_1} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{(1-\mu)^2 (v_m^2 - n^2)^2}{4n^2 v_m^2}}} \right). \quad (24)$$

При выполнении условия (23), т. е. при резонансе по частоте  $\mu\omega$ , резонансное значение амплитуды

$$A = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} + \left( \frac{F_1}{\sqrt{\frac{(\mu^2 - 1)^2}{\mu^4} (v_m^2 - n^2)^2 + 4n^2 v_m^2}} \right) + \frac{F_2}{2n v_m} =$$

$$= \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} + \frac{F_2}{2n v_m} + \left( 1 + \frac{F_1}{F_2} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{(\mu^2 - 1)^2 (v_m^2 - n^2)^2}{\mu^4 4n^2 v_m^2}}} \right). \quad (25)$$

Выражения, стоящие в скобках левых частей равенств (24) и (25), указывают на влияние гармоник при резонансах и называются коэффициентами влияния  $\rho_{ij}$  (влияние  $i$ -й гармоники на  $j$ -ю гармонику):

$$P_{12} = 1 + \frac{F_1}{F_2} \cdot \frac{2n\mu^2}{v_m(\mu^2 - 1)}, \quad (26)$$

$$P_{21} = 1 + \frac{F_2}{F_1} \cdot \frac{2n}{v_m(1 - \mu^2)}. \quad (27)$$

Исследуем большие колебания. Решение уравнения (15) с учетом выражения для коэффициентов (17) и (18) имеет вид

$$q = \frac{F_1 \cos \omega t}{\sqrt{(v_\sigma^2 + n^2 - \omega^2)^2 + 4n^2 \omega^2}} + \frac{F_2 \cos \mu \omega t}{\sqrt{(v_\sigma^2 + n^2 - \mu^2 \omega^2)^2 + 4n^2 \mu^2 \omega^2}}. \quad (28)$$

Сдвиги фаз силы возбуждения  $F(t)$  находятся по прежним формулам (20).

Амплитудно-частотная характеристика при больших колебаниях определяется выражением

$$A = \frac{F_1}{\sqrt{(v_0^2 - n^2 - \omega^2)^2 + 4n^2 v_0^2}} + \frac{F_2}{\sqrt{(v_0^2 - n^2 - \mu^2 \omega^2)^2 + 4n^2 v_0^2}}, \quad (29)$$

а резонансные значения амплитуд

$$A_p = \frac{F_1}{2n v_0} P_{21}, \quad (30)$$

и

$$A_p = \frac{F_2}{2n v_0} P_{12}, \quad (31)$$

где коэффициенты влияния  $\rho_{ij}$  имеют прежний вид (26) и (27).

**Пример.** Проиллюстрируем применение полученных выше результатов для исследования колебаний упругих систем, имеющих несмежные формы равновесия. Пусть ферма Мизеса (рис. 1) имеет следующие данные: длина пружин в ненапряженном состоянии  $L=30$  см; начальный угол наклона их к горизонтالي в ненапряженном состоянии  $\varphi_0 = 33^\circ 30'$ ; жесткость линейных пружин  $c = 1,25$  кГ/м; масса груза, прикрепленного в шарнире  $A$ ,  $m = 0,5$  кГ сек<sup>2</sup>/см', коэффициент сопротивления  $\delta = 0,05$  кг сек/см.

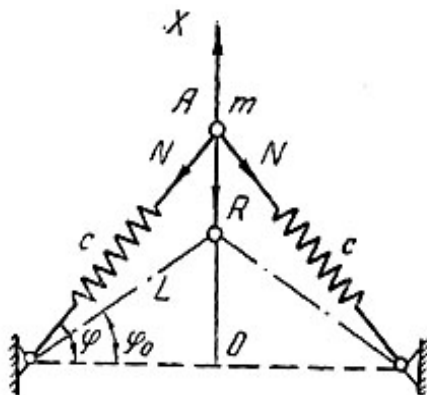


Рис. 1. Ферма Мизеса:  $m$  – масса груза, прикрепленного в шарнире  $A$ ;  $\varphi_0$  – начальный угол наклона продольной оси пружин в ненапряженном состоянии

Принимая за обобщенную координату тангенс угла наклона пружины к горизонтали  $q = \operatorname{tg} \varphi$ , получаем приближенное уравнение движения этой системы [3]

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} - \alpha q + \beta q^3 = F(t), \quad (32)$$

$$\text{где } 2n = \frac{\delta}{m} = 0,1 \text{ сек}^{-1}; \quad \alpha = \frac{2c}{m} \left( \frac{1}{\cos \varphi_0} - 1 \right) = 1 \text{ сек}^{-2}; \quad \beta = \frac{c}{m \cos \varphi_0} = 3 \text{ сек}^{-2}.$$

Будем считать, что амплитуды возмущающих гармонических сил равны между собой:  $F_1 = F_2$ , а кратность гармоник  $\mu=2$ . Далее с помощью графиков, приведенных на рис. 1 в работе [2], определим, какие начинают развиваться колебания с увеличением частот, начиная с  $\omega=0$ , в зависимости от величины  $F_0 = F_1 + F_2$ . Амплитудно-частотные кривые строятся по формулам (21) и (29), а «скелетные» кривые – по формулам (6), (7). Резонансные значения амплитуд находятся следующим образом. С помощью графиков, приведенных на рис. 4 в работе [2], определяются резонансные значения при монохроматических движениях (раздельное действие гармоник), а затем умножаются на соответствующие коэффициенты влияния гармоник  $\rho_{ij}$ , найденные по формулам (26) и (27). Так, при  $F_1 = F_2 = 0,1 \text{ сек}^{-2}$  находим для малых колебаний

$$A_0 = 0,69, A_{\rho_1 \text{ монохр}} = A_{\rho_2 \text{ монохр}} = 0,975, \rho_{12} = 1,09; \rho_{21} = 0,978.$$

Следовательно,

$$A_{\rho_1} = A_{\rho_1 \text{ монохр}} \cdot \rho_{12} = 1,06; A_{\rho_2} = A_{\rho_2 \text{ монохр}} \cdot \rho_{21} = 0,953.$$

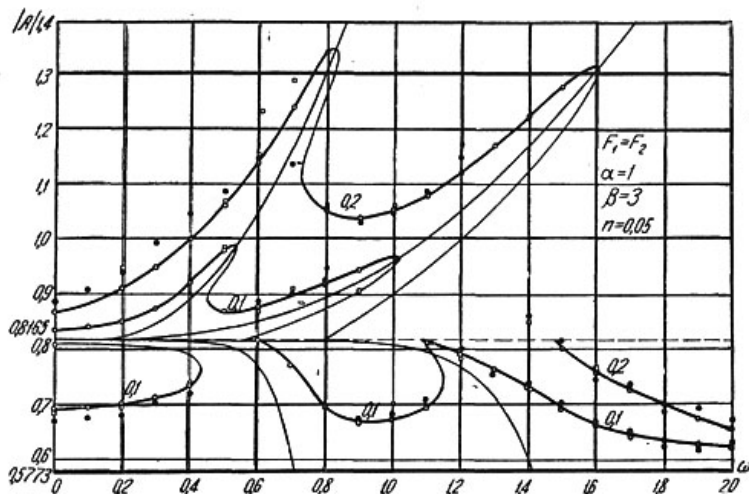


Рис. 2. Амплитудно-частотные характеристики, построенные для двух значений амплитуд возмущающих гармонических сил  $F_1$ :  $F_1 = F_2 = 0,1$  и  $F_1 = F_2 = 0,2$ . Обозначения: ● – «Урал-3», □ – МН = 7.

Увеличив амплитуду возбуждения:  $F_1 = F_2 = 0,2 \text{ сек}^{-2}$ ; получим для больших колебаний

$$A_0 = 0,867; A_{p1 \text{ монохр}} = A_{p2 \text{ монохр}} = 1,3; p_{12} = 1,067; p_{21} = 0,983.$$

Поэтому,

$$A_{p1} = A_{p1 \text{ монохр}} \cdot p_{12} = 1,38; A_{p2} = A_{p2 \text{ монохр}} \cdot p_{21} = 1,28.$$

На рис. 2 построены амплитудно-частотные характеристики для двух значений амплитуды возбуждения  $F_i = 0,1$  и  $F_i = 0,2$ .

Проанализируем ход развития амплитуд при изменении частот в системе с перескоком (32). Когда  $F_i = 0,1$ , малые колебания происходят при значениях частот возбуждения  $\omega$ , лежащих в следующих диапазонах:  $0 \leq \omega \leq 0,43$  и  $\omega > 1,075$ , а большие колебания – в диапазоне частот  $0,6 < \omega < 1,0$ . Заметим, что в диапазоне частот  $0,6 < \omega < 1,0$  также возможны малые колебания. Это зависит от «предыстории» системы (уменьшение или увеличение частоты возбуждения  $\omega$ ). Иную картину наблюдаем при  $F_i = 0,2$ . В этом случае большие колебания развиваются вплоть до частоты возбуждения  $\omega = 1,6$ , а затем происходит срыв амплитудно-частотной кривой на нижнюю ветвь. Это указывает на то, что при частотах возбуждения  $\omega > 1,6$  развиваются только малые колебания. С целью проверки результатов аналитических решений, в том числе характера развития колебаний, система (32) была моделирована на нелинейной установке МН-7, а также численно интегрировалась на ЭВМ «Урал-3». Результаты моделирования и численного интегрирования приведены на рис. 2.

Заметим, что сделанные в работе [2] замечания о моделировании систем с перескоком остаются в силе и при бигармоническом возбуждении. Следует также отметить, что при решении на ЭВМ «Урал-3» уравнения (32) с правой частью вида (16) был обнаружен субгармонический резонанс второго рода, т. е. при частоте возбуждения, кратной собственной частоте:  $\omega = 2\nu$  при заданной кратности гармоник  $\mu = 2$ . Амплитуда стационарных колебаний при субгармоническом резонансе меньше, чем при резонансе по основной частоте.

### *Литература*

1. М.И. Казакевич. Частоты свободных колебаний систем с перескоком. Труды ДИИТа, вып. 73. Изд-во «Транспорт», 1967.
2. М.И. Казакевич, Д.П. Чуваев. Гармоническое возбуждение систем с перескоком. Труды ДИИТа, вып. 83. Изд-во «Будівельник», Киев, 1968.
3. Г. Каудерер. Нелинейная механика. Изд-во иностр. лит-ры, 1961.

## ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ХЛОПАЮЩИХ МЕМБРАН\*

Рассмотрены стационарные колебания хлопающих мембран, вызванные гармонической и бигармонической внешней нагрузкой, при наличии эквивалентного вязкого сопротивления. Приведен критерий возникновения установившихся колебаний с хлопками. Получены приближенные аналитические выражения для амплитудно-частотных характеристик и резонансных значений амплитуд.

На конкретных примерах дано сопоставление результатов приближенных аналитических решений и электронного моделирования на установке МН-7.

Рассмотрим колебания тонкостенного ( $\delta/R \ll 1$ ) сферического купола, или мембраны, с начальным прогибом  $h$  (рис. 1, а).

Известно [1, 2], что состояния равновесия мембран с начальным прогибом определяются нелинейной зависимостью между внешней нагрузкой и деформациями, вызванными этой нагрузкой.

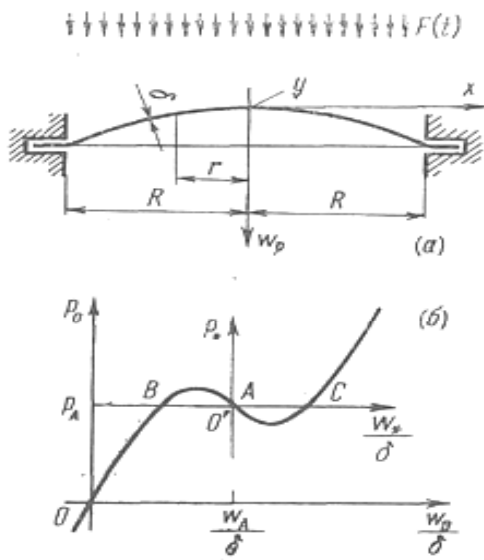


Рис. 1

\* Опубликовано в Трудах VII Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластинок, Москва, 1970.

Связь между давлением на поверхность мембраны  $p$  и прогибом центра мембраны  $w_0$  характеризует состояния равновесия системы и имеет вид [1]:

$$p_0 = \frac{p}{E} \frac{R^4}{\delta^4} = \left[ A_1 \left( \frac{h}{\delta} \right)^2 + \frac{A_0}{1-\mu^2} \right] \frac{w_0}{\delta} - A_2 \frac{h}{\delta} \left( \frac{w_0}{\delta} \right)^2 + A_3 \left( \frac{w_0}{\delta} \right)^3. \quad (1)$$

Здесь  $E$  и  $\mu$  – упругие постоянные материала мембраны,  $\delta$  – толщина мембраны,  $R$  – радиус опорного контура,  $A_i$  – коэффициенты, зависящие от условий закрепления контура мембраны.

Введем обозначения

$$p_* = p_0 - p_A, \quad w_* = w_0 - w_A, \quad (2)$$

где  $w_p$ ,  $p_A$  – абсцисса и, соответственно, ордината точки перегиба  $A$  кривой равновесных состояний системы (рис. 1, б), определяемые из условия

$$d^2 p_0 / dw_0^2 = 0. \quad (3)$$

Такое преобразование системы координат позволяет упростить исследование колебаний мембран в силу симметризации кривой ( $p_0$ ,  $w_0/\delta$ ). Решение уравнения (3) дает

$$\frac{w_A}{\delta} = \frac{1}{3} \frac{A_2}{A_3} \frac{h}{\delta}.$$

Выполняя преобразование, находим

$$p_A = \frac{1}{3} \frac{A_2}{A_3} \frac{h}{\delta} \left[ \frac{A_0}{1-\mu^2} + \left( A_1 - \frac{2}{9} \frac{A_2^2}{A_3} \right) \left( \frac{h}{\delta} \right)^2 \right], \quad (4)$$

$$p_* = \alpha_* \left( \frac{w_*}{\delta} \right) + \beta_* \left( \frac{w_*}{\delta} \right)^3.$$

Здесь

$$\alpha_* = \frac{A_0}{1-\mu^2} + \left( A_1 - \frac{A_2^2}{3A_3} \right) \left( \frac{h}{\delta} \right)^2, \quad \beta_* = A_3. \quad (5)$$

Полученная упругая характеристика системы (4) относится к любому случаю закрепления контура мембраны.

Ограничимся рассмотрением случая защемленной мембраны со свободно смещающимся контуром. Значения коэффициентов  $A$  приведены в работе [1].

Анализ упругой характеристики  $p_*$  показывает, что явление хлопка в такой мембране возможно при условии  $\alpha < 0$ , откуда находим

$$h/\delta > \sqrt{11/(1-\mu^2)}.$$

Дифференциальное уравнение колебаний мембраны с учетом эквивалентного вязкого сопротивления имеет вид

$$T_0 \Delta W + m \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + h_0 \frac{\partial W}{\partial t} = F(t) \quad \left( \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right).$$

Здесь  $W(x, y, t)$  – динамический прогиб мембраны,  $T_0$  – натяжение по контуру мембраны,  $m$  – масса единицы площади,  $h_0$  – эквивалентный коэффициент сопротивления.

Полагая, что нагрузка  $F(t)$  и динамические прогибы  $W(x, y, t)$  распределены равномерно по окружности радиуса  $r$  ( $r^2 = x^2 + y^2$ ), можно записать уравнение вынужденных колебаний центра мембраны  $w_0$ :

$$m \frac{d^2 w_0}{dt^2} + h_0 \frac{dw_0}{dt} + R(w_0) = f(t)$$

$$R(w_0) = \left[ \alpha_* \frac{w_*^*}{\delta} + \beta_* \left( \frac{w_*^*}{\delta} \right)^3 + p_A \right] E \left( \frac{\delta}{R} \right)^4.$$

Здесь  $f(t)$  – возмущающая сила,  $R(w_0)$  – упругая характеристика мембраны.

Принимая  $w_*/\delta = q$ , в силу обозначений (2) получим дифференциальное уравнение колебаний центра мембраны относительно системы координат  $(w_*, p_*)$

$$q'' + 2\varepsilon q' + \alpha q + \beta q^3 = \varphi(t). \quad (6)$$

$$\alpha = \frac{\alpha_*}{m} \frac{E\delta^3}{R^4}, \quad \beta = \frac{\beta_*}{m} \frac{E\delta^3}{R^4}, \quad \varphi(t) = \frac{f(t)}{m\delta}, \quad 2\varepsilon = \frac{h_0}{m}. \quad (7)$$

Полученное нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка в предположении  $\alpha < 0$  (типичная система с перескоками) можно приближенно решить, пользуясь методом, изложенным в работах [3а, б, в].

Будем различать два типа колебаний хлопающей мембраны: малые колебания относительно одного из устойчивых положений (точки  $B$  и  $C$  на рис. 1, б) и большие колебания с охватом всех трех положений равновесия как устойчивых (точки  $B$  и  $C$ ), так и неустойчивого (точка  $A$ ).

Собственная частота системы в этих двух случаях определяется по приближенным формулам [4]:

для малых колебаний

$$\omega_- = \sqrt{2\alpha} (2 - \tau)^{1/2}, \quad (0 < \tau \leq 2), \quad (\tau = a^2\beta/\alpha).$$

для больших колебаний

$$v_+ = 0.77 \sqrt{2\alpha} (\tau - 2)^{1/2} \quad (\tau \geq 2).$$

Здесь  $\tau$  – параметр нелинейности,  $a$  – амплитуда колебаний. Заметим, что

$$q_B = -q_C = \sqrt{\alpha/\beta}.$$

**1. Гармоническое возбуждение.** Будем считать, что возмущающая сила задана со сдвигом фаз, т. е.

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cos(\omega t + \psi).$$

В этом случае, как показано в работе [5], уравнение амплитудно-частотной характеристики для малых колебаний имеет вид

$$a = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \pm \frac{\varphi_0}{\sqrt{(v_-^2 + \varepsilon^2 - \omega^2)^2 + 4\varepsilon^2\omega^2}}. \quad (8)$$

Резонансное значение амплитуды равно

$$a_* = \sqrt{\alpha/\beta} + 1/2 \varphi_0 / \varepsilon v_-$$

Аналогичные выражения для амплитудно-частотной кривой и резонансного значения амплитуды можно записать для больших колебаний

$$a = \pm \frac{\varphi_0}{\sqrt{(v_+^2 + \varepsilon^2 - \omega^2)^2 + 4\varepsilon^2\omega^2}}, \quad a_* = \frac{\varphi_0}{2\varepsilon v_+}. \quad (9)$$

Полагая в решении (8)  $\omega = 0$ , получим трансцендентное уравнение

$$\Phi(A) = (v_-^2 + \varepsilon^2)(a - \sqrt{\alpha/\beta}) = |\varphi_0|. \quad (10)$$

Условием существования дорезонансных малых колебаний при заданном уровне возмущающей силы  $\varphi_{0*}$ , является наличие вещественных корней уравнения (10). Критическое значение амплитуды возмущающей силы  $\varphi_{0i}$ , при котором уравнение (10) имеет кратные корни, определяется графическим путем. Возмущающие силы выше этого значения вызывают большие колебания системы.

В качестве примера рассмотрена система со следующими значениями параметров:  $\alpha = 1 \text{ сек}^{-1}$ ,  $\beta = 3 \text{ сек}^{-2}$ ,  $\varepsilon = 0.05 \text{ сек}^{-1}$ ,  $\varphi_0 = 0.2 \text{ сек}^{-2}$ ,  $\varphi_{0i} = 0.5 \text{ сек}^{-2}$ . Результаты приближенного аналитического решения (8), (9) и моделирования на электронной установке МН-7 представлены на рис. 2.

**2. Бигармоническое возбуждение.** Пусть возмущающая сила состоит из двух гармоник

$$\varphi(t) = \varphi_1 \cos(\omega t + \psi_1) + \varphi_2 \cos(\mu\omega t + \psi_2). \quad (11)$$

Тогда, аналогично предыдущему, амплитудно-частотная характеристика для малых колебаний

$$a = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} + \frac{\Phi_1}{\sqrt{(v_-^2 + \varepsilon^2 - \omega^2)^2 + 4\varepsilon^2\omega^2}} + \frac{\Phi_2}{\sqrt{(v_-^2 + \varepsilon^2 - \mu^2\omega^2)^2 + 4\varepsilon^2\mu^2\omega^2}} \quad (12)$$

для больших колебаний

$$a = \frac{\Phi_1}{\sqrt{(v_+^2 + \varepsilon^2 - \omega^2)^2 + 4\varepsilon^2\omega^2}} + \frac{\Phi_2}{\sqrt{(v_+^2 + \varepsilon^2 - \mu^2\omega^2)^2 + 4\varepsilon^2\mu^2\omega^2}} \quad (13)$$

В последних двух уравнениях  $\mu$ , может иметь только целочисленные значения:  $\mu = 1, 2, \dots$

Условие существования дорезонансных малых колебаний определяется уравнением (10), в котором следует считать  $\Phi_0 = \Phi_1 + \Phi_2$ .

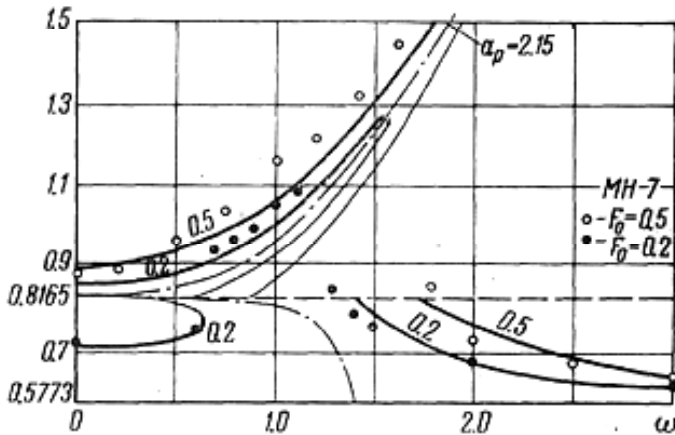


Рис. 2

На рис. 3 представлены амплитудно-частотные кривые для прежнего примера, но с возмущающей силой вида (11), для которой принято  $\mu = 2$ ,

$$\Phi_1 = \Phi_2 = 0.1 \text{ сек}^{-2} \text{ и } \Phi_1 = \Phi_2 = 0.2 \text{ сек}^{-2}.$$

На основе полученных аналитических уравнений амплитудно-частотных характеристик системы при фиксированной величине ам-

плитуды возмущающей силы  $\varphi_0$  ( $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ ) можно установить диапазоны частот возбуждения, в которых существуют большие или малые колебания (рис. 2, 3).

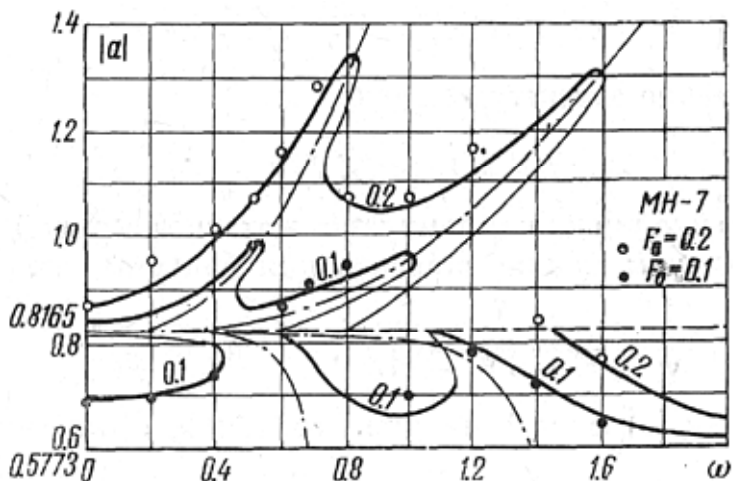


Рис. 3

Следует отметить, что ветви амплитудно-частотных кривых, изображенные на рис. 2 и 3 жирными линиями, соответствуют устойчивым колебаниям системы, а изображенные тонкими линиями — неустойчивым.

### Литература

1. Феодосьев В.И., 1946.
2. Пановко Я.Г., Губанова И.И., 1967.
- 3а. Бондар М.Г., 1961.
- 3б. Бондар М.Г., 1962.
- 3в. Бондар М.Г., 1963.
4. Казакевич М.И., 1968.
5. Казакевич М.И., Чуваев Д.П., 1968.

## ВЛИЯНИЕ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ НА ХАРАКТЕР УСТАНОВИВШИХСЯ КОЛЕБАНИЙ СИСТЕМ С НЕЛИНЕЙНОЙ ВОССТАНАВЛИВАЮЩЕЙ СИЛОЙ\*

На примере нелинейного дифференциального уравнения типа Дuffинга исследуем влияние начальных условий на характер установившихся колебаний в зоне многозначности амплитуд. Рассмотрим нелинейное дифференциальное уравнение

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + \alpha x + \beta x^3 = f_0 \cos \omega t. \quad (1)$$

Решение этого уравнения может быть получено одним из приближенных методов (гармонического баланса, энергетическим или прямой линеаризации, переменного масштаба и т. п.). Точность решений уравнения (1) зависит от степени его нелинейности, т. е. от отношения  $\beta/\alpha$ .

Предположим, что полученное решение уравнения (1) позволяет построить амплитудно-частотную характеристику  $a=a(\omega)$ . Точность полученных решений проверяется, как правило, численным интегрированием нелинейного дифференциального уравнения (1) на ЭЦВМ. При численном интегрировании решения задачи Коши может возникнуть вопрос о влиянии начальных условий на характер установившихся колебаний

В линейных системах с диссипацией энергии начальные условия влияют только на характер переходного процесса и не отражаются на величине амплитуд установившихся колебаний, в чем легко убедиться, применив принцип суперпозиции, справедливый только для линейных систем. С течением времени свободные колебания, определяемые лишь начальными условиями, затухают; установившиеся колебания являются вынужденными колебаниями, определяемыми возмущающей силой  $f(t) = f_0 \cos \omega t$ .

При исследовании нелинейных систем, в частности (1), начальными условиями определяются не только свободные колебания, но и вынужденные колебания в переходном и установившемся режимах. В диапазоне изменения частоты с возмущающей силы  $f(t)$ , характеризуемом существованием нескольких периодических решений одинаковой частоты, именно начальные условия определяют реализацию того или иного устойчивого периодического решения при численном интегрировании нелинейного дифференциального уравнения.

---

\*Опубликовано совместно с Э.Н. Квашей и С.Ф. Редько в журнале «Математическая физика», АН УССР, вып. 15. Киев, 1974.

Хаяси [1], исследуя влияние начальных условий на устойчивые периодические решения нелинейных систем, на примере уравнения

$$\ddot{x} + k\dot{x} + x^3 = A \cos t \quad (2)$$

построил области притяжения резонансных и нерезонансных колебаний при единичной частоте возбуждения ( $\omega=1$ ), а также области начальных условий  $x(0)$  и  $\dot{x}(0)$  для уравнения (2), приводящих к резонансному и нерезонансному колебаниям. Он показал, что при начальных условиях вида

$$t = 0, \quad x(0) > 0, \quad \dot{x}(0) = 0. \quad (3)$$

существует нижняя  $x_u(0)$  и верхняя  $x_o(0)$  границы начальных условий, приводящих к резонансному колебанию. Начальным условием вида  $t = 0, x(0) < 0, \dot{x}(0) = 0$  соответствует граница, разделяющая резонансные и нерезонансные колебания. Начальные условия для границ соответствуют неустойчивым колебаниям.

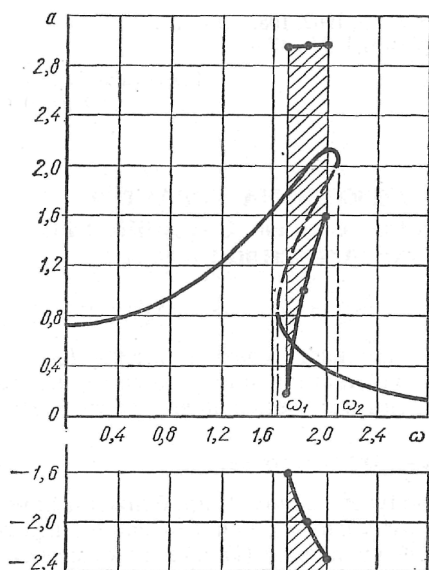


Рис. 1

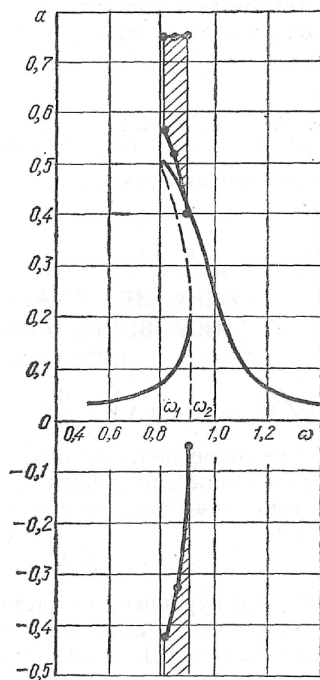


Рис. 2

Для исследования нижней и верхней границ начальных условий, приводящих к резонансному и нерезонансному колебаниям, в зоне многозначности амплитуд при изменении частоты со возмущающей силы  $f(t)$  нами выполнено численное интегрирование нелинейного

дифференциального уравнения (1) методом Рунге-Кутты на ЭЦВМ «Урал-3».

На рис. 1 ( $\alpha = 1,0$ ;  $\beta = 1,0$ ;  $f_0 = 1,0$ ;  $n = 0,1$ ) и 2 ( $\alpha = 1,0$ ;  $\beta = -1,8$ ;  $f_0 = 0,025$ ;  $n=0,025$ ) представлены амплитудно-частотные кривые, полученные соответственно при жесткой и мягкой характеристиках системы. Точками обозначены границы начальных условий  $t = 0$ ,  $x(0) = a_0 \geq 0$ ,  $\dot{x}(0) = 0$ , приводящих к различным режимам колебаний, заштрихованные области соответствуют начальным условиям, приводящим к резонансным колебаниям по верхней ветви амплитудно-частотной кривой. Амплитудно-частотными кривыми описываются установившиеся колебания системы (1). Переходные режимы колебаний с жесткой ( $\beta > 0$ ) и мягкой ( $\beta < 0$ ) характеристиками прослеживаются при помощи огибающих амплитуд колебаний, изображенных соответственно на рис. 3 и 4 для фиксированных значений частоты  $\omega = 1,7$  и  $\omega = 0,805$ . При  $x(0) = a_0 < a_+$  и  $a_0 > a_-$  огибающая стремится к стационарному значению, соответствующему амплитуде установившихся колебаний на нижней ветви амплитудно-частотной кривой (нерезонансные колебания). Если  $\beta > 0$ , при  $a_0 > a_+$  огибающая стремится к этому же стационарному значению, а если  $\beta < 0$ , она неограниченно растет. Если начальные условия взяты в интервале  $a_+ < a_0 < a_-$  или  $a_0 < a_-$ , то огибающая стремится к стационарному значению, определяющему амплитуду установившихся резонансных колебаний (рис. 1, 2, верхняя ветвь амплитудно-частотной кривой). Аналогичная картина наблюдается и при других значениях частоты возмущающей силы  $F(t)$  в интервале  $\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2$  (рис. 1, 2).

Аналитическое исследование влияния начальных условий на характер установившихся колебаний нелинейных систем связано с весьма существенными трудностями: необходимо анализировать переходный процесс. Его можно выполнить методом итераций или асимптотическим методом Боголюбова-Митропольского [2].

Решение уравнения (1) для переходного режима можно принять в виде

$$x(t) = u(t) \sin \omega t + v(t) \cos \omega t. \quad (4)$$

Применяя метод медленно изменяющихся амплитуд (метод Ван-дер-Поля), из уравнения (1) получаем

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{1}{2\omega} \left[ \left( \omega^2 - \alpha - \frac{3}{4} \beta z^2 \right) v - 2n\omega u + f_0 \right], \\ \frac{dv}{dt} &= \frac{1}{2\omega} \left[ - \left( \omega^2 - \alpha - \frac{3}{4} \beta z^2 \right) u - 2n\omega v \right], \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$z^2 = u^2 + v^2. \quad (6)$$

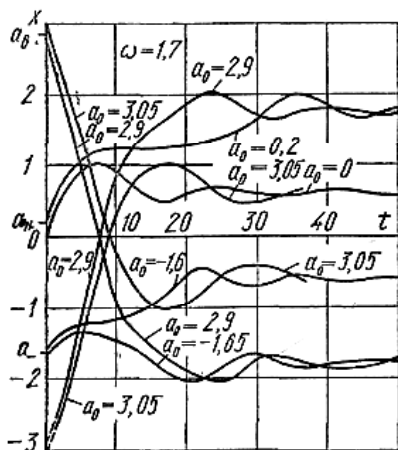


Рис. 3

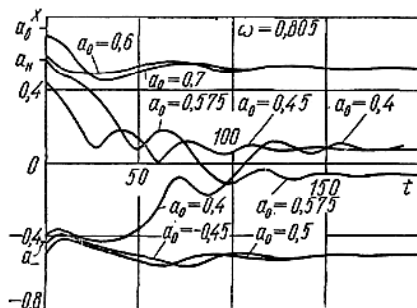


Рис. 4

В стационарном режиме колебаний амплитуды  $u(t)$  и  $v(t)$  постоянными, следовательно, и

$$\frac{du}{dt} = 0, \quad \frac{dv}{dt} = 0.$$

Отсюда для амплитуды установившихся колебаний  $a = z_{ст}$  в неявном виде находим

$$\left[ \left( \omega^2 - \alpha - \frac{3}{4} \beta a^2 \right)^2 + 4n^2 \omega^2 \right] a^2 = f_0^2. \quad (7)$$

Решение (4) должно быть подчинено начальным условиям задачи независимо от того, исследуется переходный или стационарный процесс. При  $t = 0$

$$\left. \begin{aligned} x(0) &= v(0) \\ \dot{x}(0) &= \omega \dot{u}(0) + \dot{v}(0) = \frac{1}{2\omega} \left[ \left( \omega^2 + \alpha + \frac{3}{4} \beta z^2(0) \right) u(0) - 2n\omega v(0) \right] \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Система (8) вместе с уравнением амплитудно-частотной кривой (7) определяет области начальных условий на плоскости  $x(0), \dot{x}(0)$ , приводящих к резонансному и нерезонансному колебаниям. Принимаем начальные условия вида

$$t = 0, \quad x(0) = a_0, \quad \dot{x}(0) = 0.$$

Уравнение амплитудно-частотной кривой (7) позволяет найти как устойчивые (см. рис. 1, 2, сплошная кривая), так и неустойчивые (пунктирная кривая) решения. Подставляя значения амплитуд, соответствующие неустойчивым колебаниям, в систему (8), получаем выражение для определения значений границ начальных условий (9), приводящих к резонансному колебанию, в зависимости от заданных величин параметров  $a$ ,  $\beta$ ,  $n$ ,  $f_0$ ,  $\omega$  исходной колебательной системы (1).

### *Литература*

1. Хаяси Т. Нелинейные колебания в физических системах. «Мир», М., 1968.
2. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Изд. 3-е. Физматгиз, М., 1963.

## ПРЕДСКАЗУЕМЫЕ АТТРАКТОРЫ В НЕЛИНЕЙНЫХ НЕСИММЕТРИЧНЫХ СИСТЕМАХ\*

В общем случае аттрактор – это либо точка (состояние равновесия), либо замкнутая кривая (предельный цикл). Если состояние равновесия или колебательный процесс неустойчивы, аттрактор имеет сложную структуру и называется странным аттрактором [1]. Ниже исследуются устойчивые предельные циклы, зависящие от начальных условий, поэтому уместно называть их предсказуемыми аттракторами

Задача обусловленности периодических решений в нелинейных системах в области существования многозначности амплитуд колебаний вне рамок концепции «истории» изменения частоты возмущающего воздействия на примере симметричной системы Дуффинга впервые решена в работах [2, 3]. Позднее этот же вопрос обсуждался в работе [4]. Представляет интерес изучение областей притяжения начальных условий в несимметричных нелинейных системах типа Дуффинга. При этом признаком несимметрии должен выступать тип колебаний, а не математический образ – дифференциальное уравнение. В самом деле, два класса задач обнаруживают математическое единство при различном их физическом смысле. Первый относится к классической системе Дуффинга, но при возбуждении, содержащем постоянный компонент [5, 6]:

$$\ddot{y} + \varepsilon \dot{y} + \alpha y + \beta y^3 = P_0 + P_1 \cos \omega t \quad (P_0 \neq 0). \quad (1)$$

Второй относится к системе с нелинейной несимметричной характеристикой

$$\ddot{x} + \varepsilon \dot{x} + \mu x + \nu x^3 + \beta x^3 = P_1 \cos \omega t. \quad (2)$$

Существует однозначное соответствие между обоими уравнениями в силу следующей связи между их параметрами:

$$y = \Delta_0 + x; \quad \mu = \alpha + 3\beta \Delta_0^2 \equiv \alpha + \Delta_0 \nu; \quad \nu = \beta \Delta_0; \\ P_0 = \frac{9\beta \mu \nu - 2\nu^3}{27\beta^2}. \quad (3)$$

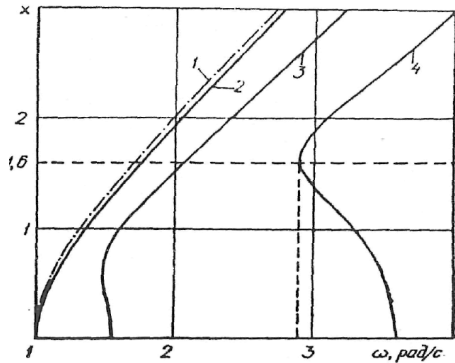
---

\*Опубликовано совместно с Ю.В. Кулябко и С.Ф. Редько в Докл. АН УССР, серия А, № 1, Киев, 1990.

Анализ колебательных процессов в таких системах показывает, что центр колебаний (среднее положение между крайними амплитудными состояниями) не совпадает ни с точкой  $y=0$ , ни с точкой  $x=0$ . Это несовпадение обусловлено нелинейностью систем (1) и (2).

Сделаем еще одно замечание. Постоянное возмущение  $P_0$  (1) адекватно изменению собственной частоты нелинейной системы (рис. 1), зависящей от амплитуды колебаний

$$\omega_0^2 = \alpha + 3\beta \Delta_0^2 + \frac{3}{4} \beta \alpha^2. \quad (4)$$



**Рис. 1.** Влияние постоянного возмущения  $P_0$  на собственную частоту нелинейной несимметричной системы: 1— $P_0=0$ ; 2— $P_0=0,1$ ; 3— $P_0=1,0$ ; 4— $P_0=10,0$

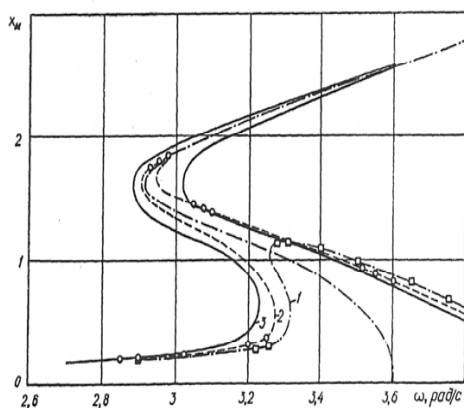
Связь между параметрами  $\Delta_0$  и  $P_0$  также зависит от амплитуд стационарных колебаний  $a$

$$\alpha \Delta_0 + \beta \Delta_0^3 + \frac{3}{2} \beta \Delta_0 a^2 = P_0. \quad (5)$$

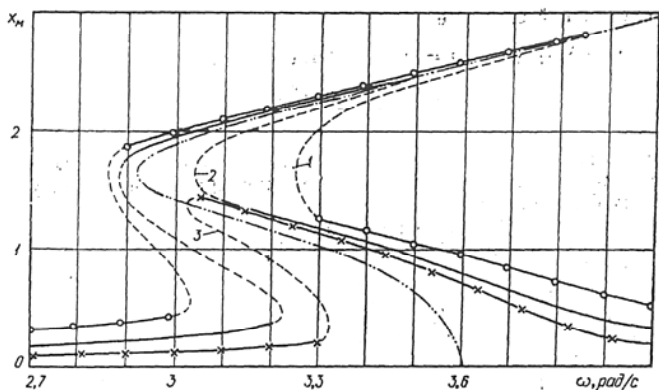
В частном случае  $a = 0$  и  $P_0 = \alpha \Delta_0 + \beta \Delta_0^3$ . Формула (4) описывает уравнение скелетной кривой нелинейной системы (1) и адекватной ей системы (2) с точностью параметра  $\Delta_0$ . Уравнение семейства амплитудно-частотных характеристик системы (1) имеет вид

$$a = \frac{P_1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \varepsilon^2 \omega^2}}. \quad (6)$$

При  $P_0 = 0$ ,  $\Delta_0 = 0$  и  $\omega^2 = \alpha + 3/4 \beta a^2$ , что совпадает с известным частотным уравнением симметричной системы Дуффинга.



**Рис. 2.** Влияние параметра затухания  $\varepsilon$  на амплитудно-частотную характеристику нелинейной несимметричной системы при  $\alpha=1$ ;  $\beta=1$ ;  $P_0=10$ ;  $P_1=1$ : 1 –  $\varepsilon=0,20$ ; 2 –  $\varepsilon=0,12$ ; 3 –  $\varepsilon=0,05$



**Рис. 3.** Влияние амплитуды гармонического возбуждения на амплитудно-частотную характеристику нелинейной несимметричной системы при  $\alpha=1$ ;  $\beta=1$ ;  $P_0=10$ ; 1 –  $P_1=1,8$ ; 2 –  $P_1=1,0$ ; 3 –  $P_1=0,5$

Влияние параметров затухания ( $\varepsilon$ ) и возмущения ( $P_1$ ) системы (1) показано на рис. 2 и 3, соответственно. Как видно из графиков на рис. 2 и 3, для несимметричных систем существуют интервалы частот возбуждения, характеризующихся многозначностью амплитуд стационарных колебаний. Границы этих интервалов определяются параметрами как самих систем, так и возбуждения. При некоторых значениях параметров возможно существование пяти аттракторов,

соответствующих трем устойчивым и двум неустойчивым режимам колебаний на одной и той же частоте возбуждения.

Ранее [3], отмечалось, что аналитическое решение уравнений (1) и (2) и исследование периодических режимов в зависимости от начальных условий  $(x_0; \dot{x}_0)$  и  $(y_0; \dot{y}_0)$  сопряжено с непреодолимыми математическими трудностями. На данном этапе развития нелинейной механики изучение влияния начальных условий на возможные устойчивые режимы колебаний в зоне многозначности амплитуд может быть связано только с численным экспериментом, что подтверждается работой [4]. Как и в случае классической задачи Дуффинга, численными методами получены области притяжения (т. е. множества точек, приводящие к некоторому аттрактору) начальных перемещений ( $\dot{y}_0 = 0$ ) в несимметричных системах типа (1) и (2) на плоскости  $(y, \omega)$ , приводящие к предсказуемым аттракторам (рис. 4). Как легко установить, ветви АВ, EF и CD – устойчивые, а ветви ВС и ЕК – неустойчивые.

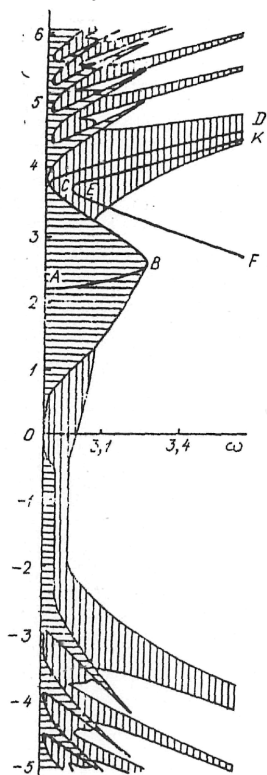


Рис. 4. Области притяжения начальных условий ( $\dot{y}_0 = 0$ ) устойчивых периодических решений системы (2) в зоне многозначности амплитуд при  $\alpha=1$ ;  $\beta=1$ ;  $\varepsilon=0,05$ ;  $P_0=10,0$ ;  $P_1=1,0$ ; 1 – на ветви АВ; 2 – на ветви EF; 3 – на ветви CD

Анализ приведенных на рис. 4 результатов показывает, что при выбранных значениях параметров системы (1) в интервале изменения частоты возбуждения  $2,9 < \omega < 3,6$  начальные условия ( $\dot{y}_0 = 0$ ) в диапазоне  $-3,5 < y_0 < 4,5$  вполне обуславливают предсказуемые аттракторы, однозначно соответствующие ветвям АВ, ЕF и СД. Однако за пределами указанного диапазона начальных условий чередование областей притяжения и их значительное сужение создают предпосылки к возникновению непредсказуемых режимов колебаний, т. е. странных аттракторов.

### **Summary.**

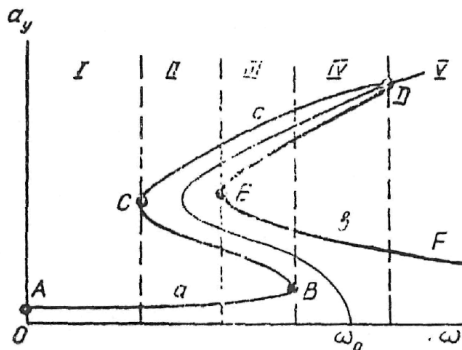
A problem on the existence of stable periodical solutions in the non-linear non-symmetrical systems in the zone of the **amplitude multivaluedness** is solved. The existence of five attractors, corresponding to three stable and two unstable oscillation conditions with the same exciting frequency is shown possible. The spheres of attraction (i. e.; multitude of points) of the primary conditions are obtained, which cause the predicted attractors: stable, limit cycles.

### **Литература**

1. *Странные аттракторы* // Математика. Новое в зарубежной науке. Вып. 22. – М.: Мир, 1981. – 254 с.
2. *Хаяси Т.* Нелинейные колебания в физических системах. – М.: Мир, 1968.
3. *Казакевич М.И., Кваша Э.Н., Редько С.Ф.* Влияние начальных условий на характер установившихся колебаний систем с нелинейной восстанавливающей силой // Мат. физика. Вып. 15. – Киев: Наукова думка, 1974. – С. 59–62.
4. *Fang T., Dowell E.H.* Numerical simulation of jump phenomena in stable. Duffing systems // Int. J. Non-Linear Mechanics, 4987. – 22, N. 3. – P. 267–274.
5. *Reif Z.F.* The effect of static deflection on the harmonic resonance of a system with a hardening non-linear spring // The Aeronautical Journal of the Royal Aeronautical Society, 1970. – 74, N. 1. – P. 59–62.
6. *Бондарь Н.Г.* Нелинейные стационарные колебания. – Киев: Наукова думка, 1974. – 212 с.

## ЭВОЛЮЦИИ ОБЛАСТЕЙ ПРИТЯЖЕНИЯ В НЕЛИНЕЙНОЙ НЕСИММЕТРИЧНОЙ СИСТЕМЕ ДУФФИНГА\*

Возникновение странных аттракторов в нелинейных динамических системах связано с трансформацией гладких границ областей притяжения, их расслоением и образованием фрактальных структур. Проследить переход от предсказуемых аттракторов к странным или наоборот весьма затруднительно. Вместе с тем, во многих нелинейных системах, допускающих существование нескольких режимов периодических движений при фиксированном значении частоты возбуждения, обнаруживается сильная зависимость траекторий движения от начальных условий [1, 2]. Области притяжения начальных условий образуют непрерывные подпространства в фазовом пространстве, гладкие границы которых при переходе от предсказуемых аттракторов [2] к странным распадаются (расслаиваются) на бесконечное множество складок, образующих фрактальные множества.



*Рис. 1. Общий вид амплитудно-частотной характеристики  
несимметричной системы Дуффинга*

Чувствительность нелинейных динамических систем к изменению начальных условий является основным признаком хаотических колебаний [3]. Эволюцию областей притяжения начальных условий можно проследить на примере нелинейной несимметричной системы Дуффинга, рассмотренной в работах [2]

$$\ddot{y} + \varepsilon \dot{y} + \alpha y + \beta y^3 = P_0 + P_1 \cos \omega t \quad (P_0 \neq 0) \quad (1)$$

\*Опубликовано совместно с С.Ф. Редько в Докл. НАН Украины № 1, Киев, 1991.

или адекватной ей

$$\ddot{x} + \varepsilon \dot{x} + \mu x + \nu x^3 + \beta x^3 = P_1 \cos \omega t \quad (2)$$

в силу соотношений

$$\left. \begin{aligned} y &= \Delta_0 + x; \\ \mu &= \alpha + 3\beta \Delta_0^2 \equiv \alpha + \Delta_0 \nu; \\ \nu &= \beta \Delta_0; \\ P_0 &= \frac{9\beta \mu \nu - 2\nu^3}{27\beta^2} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

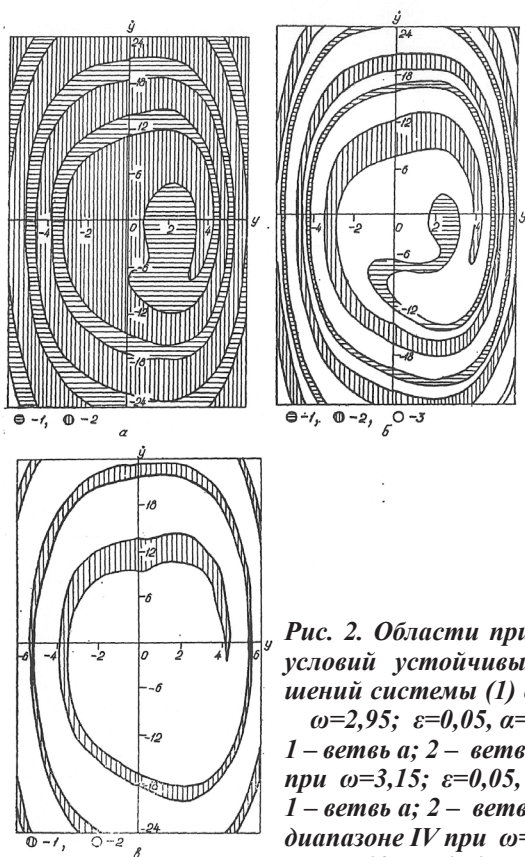


Рис. 2. Области притяжения начальных условий устойчивых периодических решений системы (1) а – в диапазоне II при  $\omega=2,95$ ;  $\varepsilon=0,05$ ,  $\alpha=1$ ,  $\beta=1$ ,  $P_0=10$ ,  $P_1=1$ : 1 – ветвь а; 2 – ветвь с; б – в диапазоне III при  $\omega=3,15$ ;  $\varepsilon=0,05$ ,  $\alpha=1$ ,  $\beta=1$ ,  $P_0=10$ ,  $P_1=1$ : 1 – ветвь а; 2 – ветвь с; 3 – ветвь б; в – в диапазоне IV при  $\omega=3,4$ ;  $\varepsilon=0,05$ ,  $\alpha=1$ ,  $\beta=1$ ,  $P_0=10$ ,  $P_1=1$ : 1 – ветвь с; 2 – ветвь б

Результаты исследования влияния параметров  $P_0$ ,  $P_1$ ,  $\varepsilon$  на амплитудно-частотные характеристики и скелетные кривые системы, области притяжения начальных условий  $y_0$  ( $y_0 = 0$ ), а также зависимости  $\omega = \omega_0(\alpha, \beta, \Delta_0, \alpha)$ ;  $\Delta_0 = \Delta_0(\alpha, \beta, P_0, \alpha)$  приведены в работе [2].

Если параметр  $\alpha$  принимает отрицательные значения, система обладает потенциалом с двумя ямами. Характерными примерами таких систем (системы с «перескоком») являются: ферма Мизеса, гибкая полая арка, хлопающая мембрана и т. п. В этой системе была впервые обнаружена и подробно описана [5] бифуркация удвоения периодов колебаний. Позднее этот эффект был описан в работе [6]. Впоследствии было установлено, что бифуркация удвоения периодов, получившая название «закон Фейгенбаума», играет ключевую роль в возникновении странных аттракторов [3].

На рис. 1 изображена амплитудно-частотная зависимость системы (1), заимствованная из работы [2]. В соответствии с принятыми значениями параметров  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\varepsilon$ ,  $P_0$  и  $P_1$  устойчивые ветви  $AB$ ,  $CD$  и  $EF$  образуют пять диапазонов частот возбуждения (I–V) с различным количеством устойчивых предельных циклов Пуанкаре. Не принимая во внимание тривиальные диапазоны I и V, исследуем эволюции областей притяжения начальных условий для диапазонов II и IV с одним неустойчивым и двумя устойчивыми предельными циклами, а также для диапазона III с двумя неустойчивыми и тремя устойчивыми предельными циклами. Легко заметить, что поведение данной системы в диапазонах II и IV аналогично поведению мягкой и жесткой симметричных систем Дуффинга, соответственно [1]. Диапазон III характерен только для несимметричных систем и систем, обладающих потенциалом с двумя и более потенциальными ямами [5]. Наличие точек бифуркации траекторий движений  $B$ ,  $C$ ,  $D$  и  $E$  для нелинейной несимметричной системы (1) свидетельствует о возможности возникновения хаотических колебаний в окрестности соответствующих значений частот возбуждения:  $\omega$ :  $\omega_B$ ,  $\omega_C$ ,  $\omega_D$ ,  $\omega_E$ , чувствительных к начальным возмущениям параметра  $\omega$ .

Эволюции областей притяжения начальных условий  $y_0, \dot{y}_0(x_0, \dot{x}_0)$  наглядно прослеживаются при сопоставительном анализе их (рис. 2, а, б, в). Области притяжения начальных условий обнаруживают следующие признаки: непрерывность; спиральную эволюцию; суживание по мере увеличения начальной энергии  $E(y_0, \dot{y}_0)$  непрерывное чередование в строгой иерархической последовательности для диапазонов II, III и IV, в частности, во II диапазоне – (с)  $\rightarrow$  (а)  $\rightarrow$  (с)  $\rightarrow$  (а)  $\rightarrow$  ...; в III – (б)  $\rightarrow$  (а)  $\rightarrow$  (с)  $\rightarrow$  (б)  $\rightarrow$  (а)  $\rightarrow$  (с)  $\rightarrow$  ...; в IV – (б)  $\rightarrow$  (с)  $\rightarrow$  (б)  $\rightarrow$  (с)  $\rightarrow$  ... .

Отметим, что множества  $(y_0, \dot{y}_0)$  и  $(x_0, \dot{x}_0)$  адекватны с точностью константы  $\Delta_0$  в силу обозначения (3)  $y = x + \Delta_0$ , причем  $y_0 = x_0 + 2$ , поскольку  $\Delta_0 = 2$  при  $P_0 = 10$  [2].

### *Литература*

1. Казакевич М.И., Кваша Э.П., Редько С.Ф. Влияние начальных условий на характер установившихся колебаний систем с нелинейной восстанавливающей силой // Мат. физика. Вып. 15. – Киев: Наукова думка, 1974. – С. 59–62.
2. Казакевич М.И., Редько С.Ф., Кулябко Ю.В. Предсказуемые аттракторы в нелинейных несимметричных системах // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1990. – № 1. – С. 18–20.
3. Мун Ф. Хаотические колебания. – М.: Мир, 1990. – 312 с.

## ОБЛАСТИ ПРИТЯЖЕНИЯ УСТОЙЧИВЫХ РЕЖИМОВ КОЛЕБАНИЙ СИММЕТРИЧНЫХ СИСТЕМ С ПЕРЕСЕКОМ\*

Изгибная жесткость больших космических антенных систем значительно ниже жесткости наземных конструкций. Это легко объяснимо в связи с практическим отсутствием гравитации в космосе. Однако это обстоятельство не снижает требований к их прочности. Она, как правило, достигается предварительным натяжением (напряжением) металлоконструкций больших космических антенных систем. Такие конструкции обладают интересной особенностью – возможностью существования нескольких режимов движения при фиксированной частоте возмущения, которые весьма чувствительны к изменению начальных условий. Переход от одной устойчивой формы колебаний к другой обычно происходит скачкообразно. Поэтому они относятся к классу систем с перескоком или систем с двумя «потенциальными ямами».

В данной статье приведены результаты анализа областей притяжения устойчивых режимов колебаний в резонансной и зарезонансной зонах для физической модели элемента больших космических антенн.

Положим, что расчетная схема исследуемой системы (рис. 1) может быть представлена в виде однородного стержня, поджатого силой  $N$  по центрам крайних поперечных сечений. Опирается стержень шарнирно.

Вынужденные колебания средней точки такого стержня описываются нелинейным дифференциальным уравнением типа Дуффинга

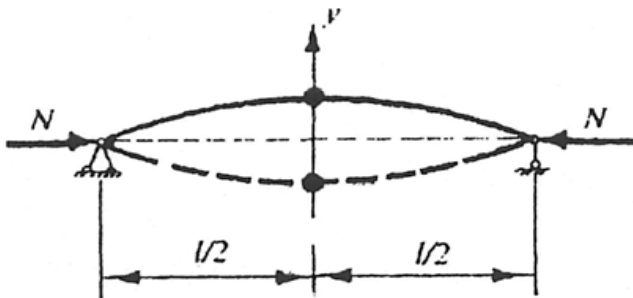


Рис. 1

\*Опубликовано совместно с С.Ф. Редько и В.Е. Волковой в ж-ле «Техническая механика» НАН Украины, Вып. 8, 1993, Киев.

$$\ddot{y} + \varepsilon \dot{y} - \alpha y + \beta y^3 = P_1 \cos \omega t, \quad (1)$$

где  $y$  – обобщенная координата поперечных перемещений средней по длине стержня точки;  $\varepsilon$  – коэффициент демпфирования;  $\alpha$ ,  $\beta$  – коэффициенты, определяющие характер восстанавливающей силы  $R(y) = -\alpha y + \beta y^3$ , график которой приведем на рис.2,а;  $P_1$ ,  $\omega$  – параметры внешнего возмущения.

Исследуем колебания стержня длиной  $l = 3$  м, с прямоугольным поперечным сечением  $b \times h = 0,3 \times 0,004$  м. Модуль упругости материала  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа, плотность  $\rho = 7,85$  т  $\cdot$  м $^{-3}$ . Сила поджатия  $N = 720$  Н.

В соответствии с [1], коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$  могут быть вычислены по формулам

$$\alpha = \frac{1}{m} \left( \frac{\pi}{l} \right)^2 (N - N_n^E); \quad \beta = \frac{EF}{4m} \left( \frac{\pi}{l} \right)^4. \quad (2)$$

где  $m$  – масса погонного метра стержня;  $F$  – площадь поперечного сечения стержня;  $EI$  – изгибная жесткость стержня;  $N_n^E$  – критическая сила  $n$ -ой формы потери устойчивости оси стержня, равная  $N_n^E = EI (n\pi/l)^2$ .

Для выбранных значений параметров стержня и первой (симметричной) формы потери устойчивости  $\alpha = 40,8$  с $^{-1}$ ,  $\beta = 7660000$  м $^{-2} \cdot$  с $^{-2}$ . Исследования проводились при амплитуде внешнего возмущения  $P_1 = 1,5$  м с $^{-2}$  и коэффициенте демпфирования  $\varepsilon = 4$  с $^{-1}$ .

Данная система имеет три положения равновесия, два из которых устойчивые ( $y_{b,c} = \pm 0,0023$  м), а третье ( $y_a = 0$ ) – неустойчиво. Бифуркационные точки  $y_{c,d} = \pm 0,0032$  м разделяют зоны существования «больших» и «малых» колебаний [2].

В зависимости от уровня потенциальной энергии

$$U(y) = -\frac{\alpha y^2}{2} + \frac{\beta y^4}{4} \quad (3)$$

возможно [1] существование одного из трех (см. рис.2,б,в) устойчивых режимов колебаний; 1) «большие» колебания вокруг всех трех положений равновесия (точки  $a$ ,  $b$  и  $c$ ); 2) «малые» колебания относительно левого положения равновесия (точка  $b$ ); 3) «малые» колебания относительно правого положения равновесия (точка  $c$ ).

Колебательная система, описываемая уравнением (1), обладает двойственными свойствами. Так, при «больших» колебаниях она имеет свойства жесткой, а при «малых» колебаниях – свойства мягкой системы.

На рис. 2, г приведен общий вид амплитудно-частотной харак-

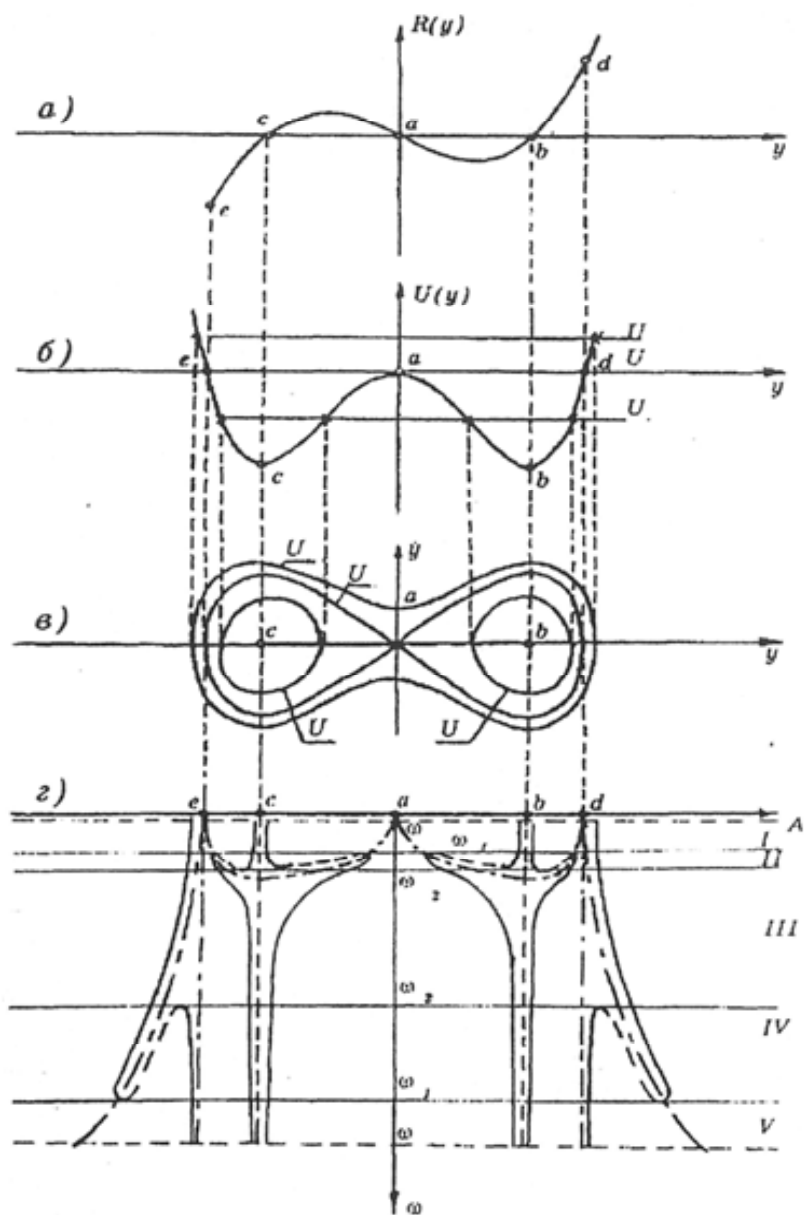


Рис. 2

теристики такой системы. Из этого рисунка видно, что устойчивые ветви амплитудно-частотных характеристик образуют (см. рис. 2,г) пять диапазонов частот. Диапазон I – дорезонансная зона, в которой в зависимости от начальных условий может устанавливаться один из трех устойчивых режимов колебаний: «малые» колебания относительно точки  $b$  и такие же относительно точки  $c$ , а также «большие» колебания вокруг всех трех положений равновесия (точки  $a$ ,  $b$  и  $c$ ). Диапазон II – резонансная зона «малых» колебаний, в которой возможна реализация одного из пяти устойчивых режимов колебаний: «малые» резонансные и нерезонансные колебания относительно точки  $b$  и такие же – относительно точки  $c$ , а также «большие» колебания вокруг точек  $a$ ,  $b$  и  $c$ . Диапазон III – зарезонансная зона «малых» колебаний, в которой устанавливается один из трех устойчивых режимов колебаний: «малые» колебания относительно точки  $b$  и такие же – относительно точки  $c$ , а также «большие» резонансные и нерезонансные колебания вокруг точек  $a$ ,  $b$  и  $c$ . Диапазон IV – резонансная зона «больших» колебаний, в которой может установиться один из четырех устойчивых режимов колебаний: «малые» колебания относительно точки  $b$  и такие же – относительно точки  $c$ , а также «большие» колебания вокруг всех трех положений равновесия (точки  $a$ ,  $b$  и  $c$ ). Диапазон V – зарезонансная зона «больших» колебаний, в которой возможна реализация одного из трех устойчивых режимов: «малые» колебания относительно точки  $b$  и такие же – относительно точки  $c$ , а также «большие» колебания вокруг точек  $a$ ,  $b$  и  $c$ .

Следует отметить, что подобная амплитудно-частотная зависимость характерна для систем с двумя и более «потенциальными ямами». Результаты исследования влияния параметров  $P_l$  и  $\varepsilon$  на амплитудно-частотные характеристики системы подробно описаны в работе [3].

Области притяжения устойчивых режимов колебаний строились с использованием процедуры численного интегрирования уравнения (I) методом Рунге-Кутты 4-го порядка. Для выделения основного тона колебаний был использован алгоритм Герцеля. Начальные условия перебирались на плоскости  $(y_0, \dot{y}_0)$  в прямоугольнике

$$[y_{0нач}; y_{0кон}] \text{ и } [\dot{y}_{0нач}; \dot{y}_{0кон}]$$

который покрывался сеткой с шагом  $\Delta y_0 = 0,01 [y_{0нач}; y_{0кон}]$  по оси  $y_0$  и  $\Delta \dot{y}_0 = 0,01 [\dot{y}_{0нач}; \dot{y}_{0кон}]$  по оси  $\dot{y}_0$ .

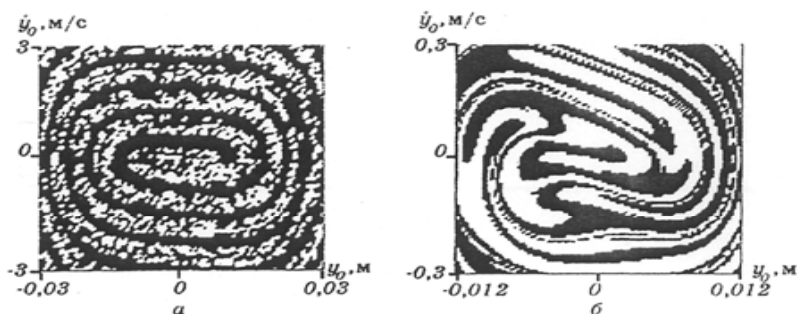


Рис. 3

На рис.3,а в качестве примера, приведены области притяжения установившихся режимов колебаний исследуемой системы, построенные для IV диапазона частот при  $\omega=28$  рад/с. Здесь белым цветом отмечены области начальных условий, при которых реализуются «малые» колебания относительно точки  $b$ , а черным – «большие» колебания вокруг всех трех положений равновесия.

На рис. 3,б приведены аналогичные данные для V диапазона частот при  $\omega=40$  рад/с, с той лишь разницей, что черным цветом отмечены области начальных условий, приводящие к «малым» колебаниям относительно точки  $c$ .

Графики зон притяжения устойчивых режимов колебаний имеют сложную конфигурацию в виде раскручивающейся спирали. Из анализа полученных графиков следует, что по мере увеличения начальной энергии системы частота чередования зон увеличивается, а сами они сужаются. Наличие графиков таких зон позволяет предсказывать поведение анализируемых систем и оценивать уровни амплитуд установившихся колебаний.

### Литература

1. Казакевич М.И., Волкова В.Е. Точное решение свободных колебания преднапряженных стержней // Тр. междуна. конф. «Современные строительные материалы, конструкции, технологии», том III. –Вильнюс: Техника. 1997. – С. 145 – 150.
2. Казакевич М.И., Кваша Э.Н., Редько С.Ф. Влияние начальных условий на характер установившихся колебаний систем с нелинейной восстанавливающей силой // Математическая физика. Вып. 15. – К.: Наукова думка. 1974. – С. 59 – 62.
3. Казакевич М.И., Редько С.Ф., Волкова В.Е. Вынужденные колебания преднапряженных стержней // Тр. междуна. конф. «Теория и практика металлических конструкций», том I. Донецк: издание Донецкой государственной строительной академии. 1997. –С. 15 – 20.
4. Хаяси Т. Нелинейные колебания в физических системах. – М.: Мир. 1965 – 265 с.

# MODELLING OF THE FORCED OSCILLATIONS ON THE HYBRID COMPUTING COMPLEXES\*

## **Abstract.**

The analysis of the results of the hybrid modelling of the forced oscillations of the systems with buckling is presented in this paper. The dynamic behaviour of such systems is described by the non-linear differential equation of the Duffing type. The amplitude – frequency dependencies for the three values of the damping coefficient and three values harmonic disturbance amplitude are given here. The stable branches of the amplitude – frequency characteristics form four frequency ranges, for which the graphic of the time process, Poincare map and spectral characteristics are received. The results of the modelling on the hybrid computing complexes are compared with the results of the numerical modelling and the analytical solutions of the authors.

## **1. Introduction.**

The possibility of the non-adjacent stable oscillations at the fixed frequency of excitation is the peculiarity of the investigated systems. The realization of one of the stable regimes of oscillations depends on the initial conditions in a complicated manner (Kazakevitch, Kwasha & Redko 1974). The analytical solution of the Duffing type equation for the autonomous system is given in (Kazakevitch & Volkova 1997). Here the results of the investigations of the forced oscillation stable periodical solutions of the mechanical systems with buckling are presented.

## **2. The methods of modelling.**

The hybrid computing complexes (HCC) present the synthesis of analog and numerical computers. They possess the fastness of the analog and the precision of the numerical computers at the large volume of memory. HCC gives the possibility to observe visually the computing process during the investigations by means of oscillographs, self-recorders, etc. Besides, it is possible to change the parameters of the investigated system in the process of computing.

The investigation of the forced oscillation systems with buckling was carried out on the HCC produced on the base of the IBM PC and analog computer ACC-31 with the signal generator of special shape. The maximum output signal constitutes 10 V at the frequency range 0.001-10 KHz. The double-trace oscillograph C1-99 was used for visual observation of

---

\* Опубликовано совместно с В.Е. Волоковой в книге «Structural Dynamics - EURO DYN 99, Rotterdam.

the computing process – electric signals from the major amplifier outputs. The results of the non-linear differential equation system integration were transmitted by means of the interface devices on IBM PC.

The standard mathematical securing is used for the analog – to – digital converter functioning. The information, input into IBM PC, is stored on the hard disk in the form of the text file. The spectral characteristics of the oscillating processes are obtained by means of the standard programme of the fast Fourier transformation. The standard graphic programme complex is used for the graphic formation of the dynamic processes.

The usage of HCC is described further after the definite example.

### 3. The differential equation of the forced oscillation.

Suppose the bar of the length  $l$  has the constant cross-section and is pre-stressed by the tie. The forced oscillations of such a bar are described by the non-linear differential equation of the type (Kazakevitch, Volkova & Redko 1997)

$$\ddot{y} + \varepsilon \dot{y} + \alpha y - \gamma y^2 + \beta y^3 = P_0 + P_1 \cos \omega t, \quad (1)$$

where  $y$  = is the generalized coordinate or the cross displacement of the midpoint of the bar length;  $\varepsilon$  = the coefficient of the system damping;  $\alpha$ ,  $\gamma$  and  $\beta$  = the parameters characterizing the elastic qualities of the system «bar – tie» (Kazakevitch, Volkova & Redko 1997);  $P_0$ ,  $P_1$ ,  $\omega$  – the parameters of outer excitement.

To solve the equation (1) we transform it, introducing new variables: (2)

In the result we obtain:  $\dot{y} = y_1$  ;  $\dot{y}_1 = y_2$  .

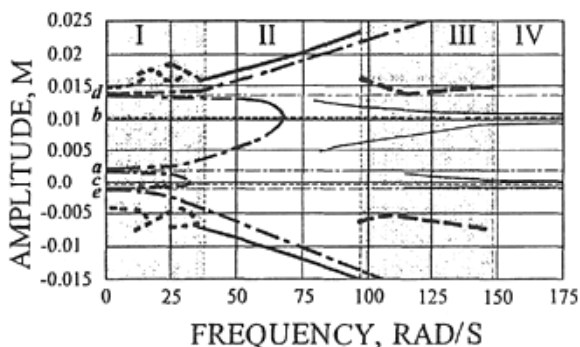
$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = -\varepsilon y_1 - \alpha y + \gamma y^2 + \beta y^3 + P_0 + P_1 \cos \omega t. \end{cases} \quad (3)$$

To solve the system of the equations (3) on HCC it is necessary to introduce the time scale  $N$  and the displacement scale  $N_y$  so that all the variables (the tensions at the amplifier outputs) would be in the permissible limits  $\pm 10V$  (Gorbatsevitch & Levinzon 1984). Suppose we form up the analog model after the example of pre-stressed bar of  $l = 3$  m, with cross-section  $b \times h = 0.004 \times 0,300$  m. The material elastic modulus is  $E = 2 \cdot 10^5$  MPa, the density  $p = 7850$  kg/m<sup>3</sup>. The tie tension is  $N^* = 720$  N. In correspondence with (Kazakevitch & Volkova 1997) the coefficients of equation (1) take the following values:

$$\begin{aligned} \alpha &= 754s^{-2}; \gamma = 597000 m^{-1}s^{-2}; \\ \beta &= 49800000 m^{-1}s^{-2}; P_0 = -0,326 ms^{-2}; \\ \varepsilon &= 1.0 s^{-1}; P_1 = 15 ms^{-2}. \end{aligned}$$

Proceeding from the above-described condition, take  $N_t = 0,25$ ;  $N_y = 100V/m$  . In the result the system (3) takes the following form:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = -8y_1 - 12064y(1 - 7,29y + 6,6y^2) - 0,005 \cdot 10^5 + 0,24 \cdot 10^5 \cos \omega t. \end{cases}^{(4)}$$



**Figure 1.** *Amplitude – frequency characteristics of asymmetric system (1). The frequency ranges are indicated by I–IV numbers*

To solve the obtained system of equations (4) on HCC the scheme of its solution is formed up.

#### 4. The analysis of the forced oscillation.

The existence of one from three stable oscillation regimes (Kazakevitch, Kwasha & Redko, 1974) is possible depending on the potential energy value in system (1):

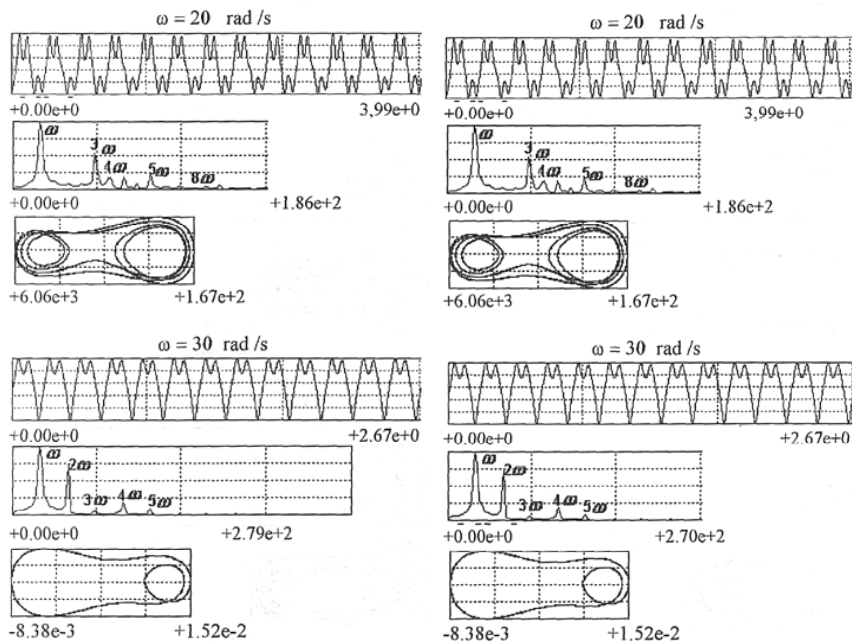
- «large» oscillations relative to all three equilibrium conditions (points *a*, *b*, *c* in Figure 1);
- «small» oscillations relative to the equilibrium condition in point *b*;
- «small» oscillations relative to the equilibrium condition in point *c*.

The general view of amplitude - frequency characteristics of system (1) and also the «skeleton» curves of the initial system which reflect the qualities of this asymmetric system free oscillations, are given in Figure 1. At  $P_0 = 0$  and  $\gamma = 0$  system (1) becomes symmetric. The analysis of the «skeleton» curves disclosed the double qualities of system (1). Thus, «large» oscillations possess the peculiarities of the rigid system behaviour, and «small» oscillations possess the qualities of soft systems. The character of the oscillation amplitude changing with the increase or decrease of the excitation frequencies is followed in Figure 1. The stalls of the forced oscillation regimes from one branch to another is accompanied not only by the transition from «large» oscillations to «small», or vice-versa, but

also by the appearance of the combination tones ( $2\omega$ ,  $3\omega$ ,  $5\omega$ , ...,  $\omega/2$ ,  $\omega/3$ ,  $3\omega/2$ ,  $5\omega/3$ ...). **The use of HCC makes it possible to follow these evolutions of the forced oscillations in particular.**

The stable branches of amplitude - frequency characteristics make up four frequency ranges (Szemplincka - Stupnicka W. & Rudowski J. 1993), where the system (1) behaviour differs considerably (see Figure 1).

The time processes  $y(t)$  phase trajectories  $(y, \dot{y})$  and spectral densities of the forced oscillation energy distribution at different frequencies are shown in Figure 2. As it is seen from the results, presented in Figure 2, range I ( $\omega = 0 \div 37$  rad/s) - is the area of the laying -on of ultra-harmonic «small» oscillations of  $n\omega$  ( $n = 2, 3, 4, 5$ ...) order on the «large» oscillations of the fundamental tone both at increasing and decreasing of the excitement frequencies. In the border of ranges I and II in the stall area the chaotic oscillations appear.



**Figure 2. Time processes, phase trajectories and spectral densities of oscillation energy distribution: to the left – at the increase of the excitation frequency; to the right – at the decrease of the excitation frequency**

Range II ( $\omega = 37 \div 97 \text{ rad/s}$ ) is the area of the «large» oscillations of fundamental tone at the increase of excitation frequencies and the combination with the «small» ultra- and subharmonic oscillations of  $2\omega, 3\omega$  and  $\omega/2$  order at the excitation frequency decrease. The appearance of chaotic oscillations is also observed in this range.

Range III ( $\omega = 97 \div 145 \text{ rad/s}$ ) is the area of «large» subharmonic oscillations of  $\omega/2$  and  $\omega/3$  order both at increase and decrease of excitation frequencies.

Range IV ( $\omega \geq 145 \text{ rad/s}$ ) - is the superresonance area where only «small» oscillations of fundamental tone exist. In this area the forced oscillations are possible relative to one equilibrium condition (point *b*) as well as to another, non-adjacent to it (point *c*).

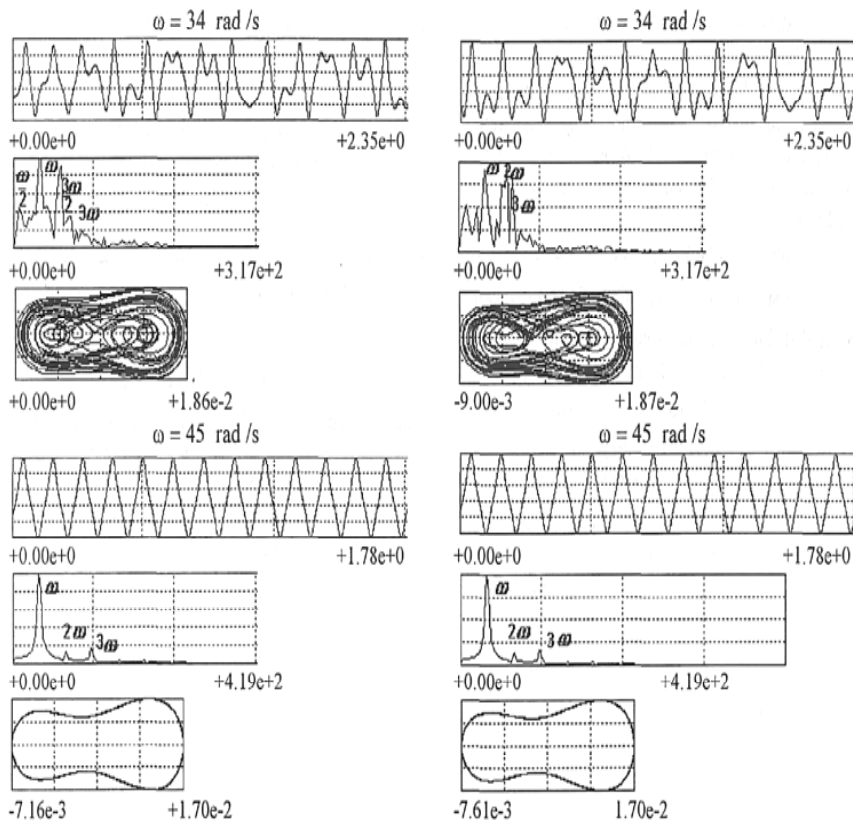


Figure 2. Continuation

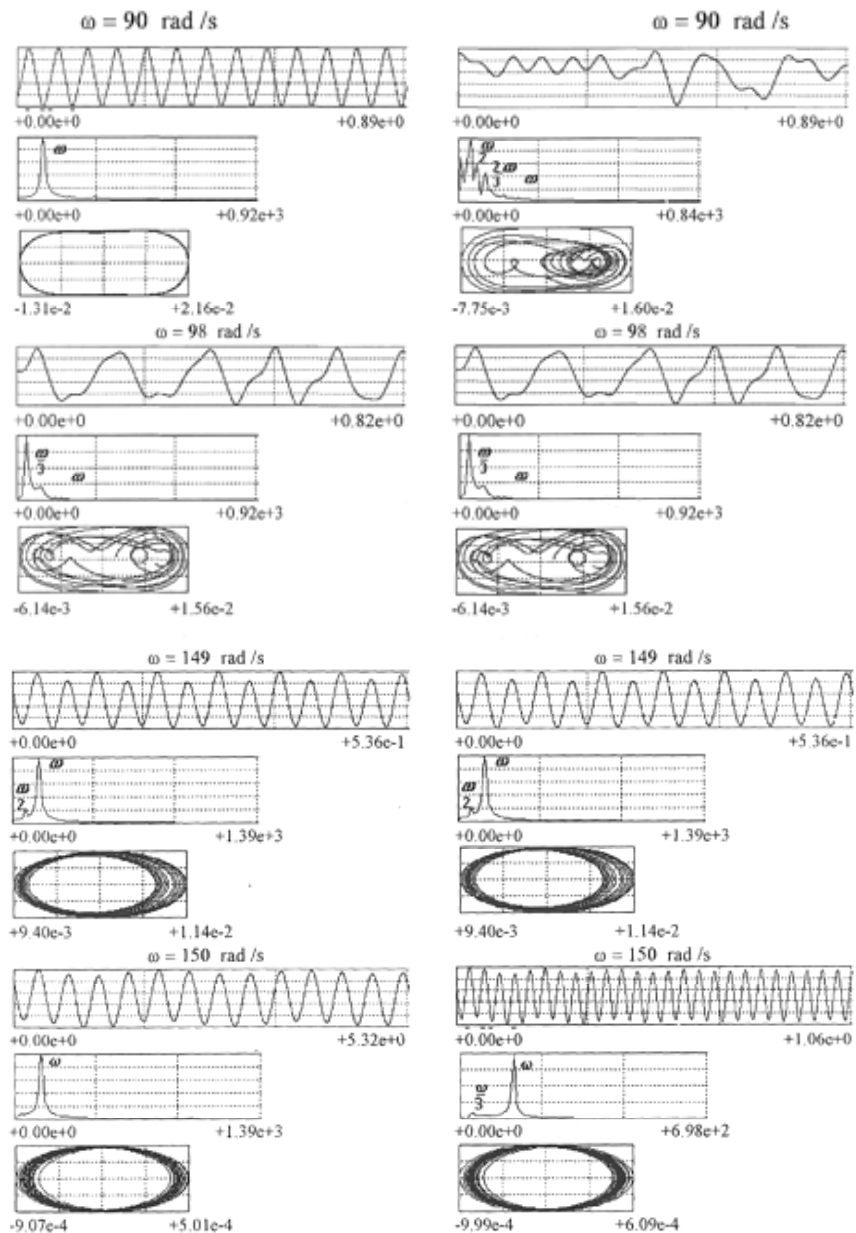


Figure 2. Continuation

## 5. Conclusions.

The non-linear Duffing systems with to «potential gaps» demand the investigation of the forced oscillations simultaneously in the area of the positive and negative values of the amplitudes, especially if they are asymmetric. The range of the multivalentness of the forced oscillation amplitudes of fundamental tone increases at the increase of the outer excitation  $P_1$  amplitude and decreases at the increase of the damping coefficient  $\epsilon$ . The use of HCC permits to determine the excitation frequency ranges, corresponding to the chaotic oscillations.

## References

1. Gorbatsevitch E.D. & Levinzon F.F. 1984. *Analog modelling of the control systems*. Moscow: Nauka.
2. Kazakevitch M.I., Kwasha E.M. & Redko S.F. 1974. The influence of the initial conditions on the character of the settled oscillations of systems with non-linear restoring force. *Mechanical Physics*. 15:59–62
3. Kazakevitch M.I. & Volkova V.E. 1997. The precise solutions of the free oscillations of prestressed bars. In Atkociunas I., Ciras A. & Ciras P. (eds.), *Modern building materials, structures and techniques*; 111:145–150. Vilnius: Technika.
4. Kazakevitch M.I., Volkova V.E. & Redko S.F. 1997. Forced oscillations of pre-stressed bars. In Gorohov E.V, Korolev V.P, & Ugov A.M. (eds.), *Theory and practice of steel structures*, 1: 15-20. Donetsk - Maakevka: DSACE.
5. Szemplincka-Stupnicka W. & Rudowski J. 1993. Steady states in the twin-well potential oscillator: computer simulations and approximate analytical studies. *Chaos*. 3: 375–385.

## THE APPLICATION OF HYBRID MODELLING TO INVESTIGATION OF NON-LINEAR OSCILLATIONS\*

A broad number of the determined mechanical systems shows a surprising peculiarity – possibility of several non-adjacent oscillation behaviours existence, including chaotic regimes, on the fixed frequency of excitation. In section of mathematical physics, theory of chaos – they have received a title of systems with two potential wells. To these systems concern: a slow arch, girder on elastic mountings, membrane, shell, prestressed rods. The forced vibrations of systems with two potential wells are described by the following non-linear differential equations:

$$\ddot{\phi} + \varepsilon \dot{\phi} + \alpha \phi + \gamma \phi^2 + \beta \phi^3 = P_0 + P_1 \cos \omega t, \quad (1)$$

where  $\phi$  – generalized coordinate;  $\varepsilon$  – damping coefficient;  $\alpha, \gamma, \beta, P_0$  – parameters determining the character of restoring force;  $P_1, \omega$  – parameters of an external excitation.

The existing methods of the qualitative research of oscillation processes [2] are grounded on research of singular points of a system (1) on a phase plane  $(\phi, \dot{\phi})$ . They stipulate a behavior pattern of trajectories, but do not give possibilities to find their existence and position.

In the given paper the investigation results of systems with two potential wells oscillations are shown:

- symmetrical ( $\alpha < 0; \gamma = 0; P_0 = 0$ );
- non-symmetrical ( $\alpha > 0; \gamma < 0$  or  $\alpha < 0; \gamma \neq 0$ ).

### 1. Technique of hybrid modeling.

Considering the mentioned above peculiarities of dynamic behavior of the systems with two potential wells, the most effective method of their investigation is the hybrid simulation. It includes in itself the elements of analogue and numerical experiments. On the basis of analogue computer complex of a time ACC-31 [1] the model of a system (1) was formed. The visual observation of oscillation processes was hold with the help of the double trace oscillograph C1-99. The external excitation was reproduced by the generator of the special shape signals G6-26. Setting voltage on the inputs of analogue model amplifiers, the change of initial conditions and parameters of a oscillation system (1) was modelled. With the help of these procedures the oscillating behaviours which can't be realized on

---

\*Опубликовано совместно с В.Е. Волковой в Bauhaus - Universitat Weimar, IKM, 2000, Weimar.

the digital computer (IBM) were obtained. The results of integrating with the help of interface units were transmitted on IBM Obtaining of spectral characteristics and graphic processing of the results implemented with the help of standard program complex.

In the given paper the results of investigation of resonant and nonresonance oscillations fundamental and combinative tones, and also chaotic oscillations are given. The time processes  $(t, \phi)$  and  $(t, \ddot{\phi})$ , spectral characteristics, phase trajectories  $(\phi, \dot{\phi})$ ,  $(\phi, \ddot{\phi})$  and  $(\dot{\phi}, \ddot{\phi})$  were obtained.

## 2. Research of behavior of the figuring point in the field of dynamic parameters.

The peculiarities of dynamic behavior of investigated systems are connected with two potential wells with existence. System (1) has three stable equilibrium states, two of which one (point  $b$ ,  $c$ ) are stable, and third (the point  $c$ ) is unstable (see fig. 1,2). Dependently on of parameters of an external excitation in the system (1) one of three possible(probable) oscillating behaviours is set: «small» oscillations concerning the point  $b$ ; «small» oscillations concerning the point  $c$ ; «large» oscillations concerning the all three final equilibrium state. The bifurcation points separate areas of existence «small» and «large» oscillations. It is necessary to point, that the systems with two potential wells have the dual properties. The systems show the properties of soft one at «small» oscillations, and rigid – at «large» oscillations.

Analyzing the amplitude-frequency characteristics of the symmetrical and non-symmetrical systems with two potential wells, it is possible to mark four frequency ranges.

I frequency range – zone of resonances on ultraharmonics.

II frequency range – zone of a multivalence of amplitudes. In this range the implementation of one of several oscillating behaviours is possible: for symmetrical systems (see fig. 1)

- «large» resonance oscillations of the fundamental tone (AA ‘–A1A1 ‘);
- «small» oscillations of the fundamental tone concerning the point  $b$  (CC ‘–C1C1’);
- «small» oscillations of the fundamental tone concerning the point  $c$  (DD ‘–D1D1’);
- «large» resonant subharmonic oscillation (BB ‘–B1B1 ‘).

– chaotic oscillations;

for non-symmetrical systems (see fig. 2)

- chaotic oscillations;
- «large» resonance oscillations of the fundamental tone (AA ‘–A1A1’);
- «small» oscillations of the fundamental tone concerning the point

b (CC' - C1C1').

III frequency range – zone of the “large” resonant subharmonic oscillation (branch B'B'')

– B<sub>1</sub>'B<sub>1</sub>'') and nonresonance oscillations of the fundamental tone concerning the point b (C'C' – C<sub>1</sub>'C<sub>1</sub>') and point c (D'D' – D<sub>1</sub>'D<sub>1</sub>'').

IV frequency range – nonresonance zone.

## 2.1. Symmetrical systems.

Let's investigated dynamic behavior of the symmetrical system with two potential wells having following parameters:  $\varepsilon = 0.5 \text{ s}^{-1}$ ;  $\alpha = -40.8 \text{ s}^{-2}$ ;  $\gamma = 0$ ;  $\beta = 7660000 \text{ m}^{-2}\text{s}^{-2}$ ;  $P_1 = 0.15 \text{ ms}^{-2}$ .

To stable equilibrium state there correspond points  $\phi_{b,c} = \pm 0.0023 \text{ m}$ , and bifurcation points –  $\phi_{e,d} = \pm 0.0032 \text{ m}$ . The results of hybrid modelling of symmetrical systems – amplitude (frequency characteristic and dependencies of dynamic parameters) are presented accordingly on fig. 1. and in table. 1. They indicate a possibility of existence of subharmonic and ultraharmonic oscillations with amplitudes that are in the level and even higher then the amplitude of the fundamental tone.

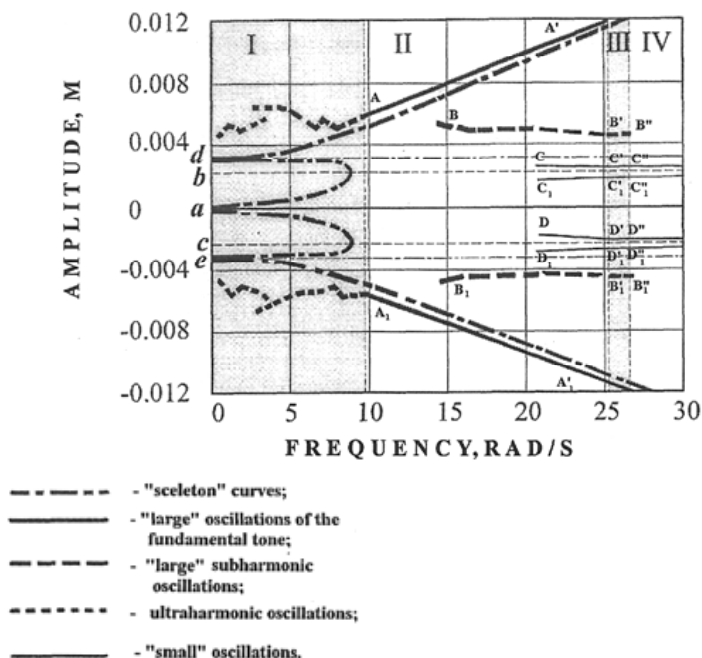


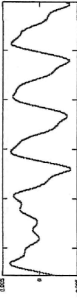
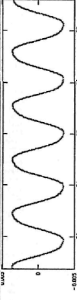


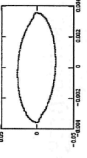
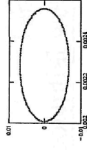
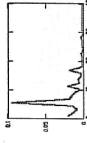
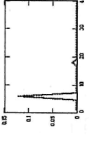
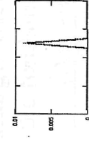
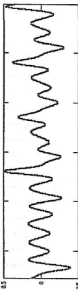
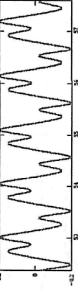


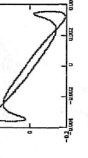
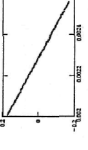

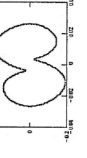
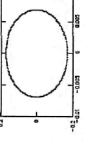
Figure 1. Amplitude-frequency characteristic of the symmetrical system with two potential wells

Table 1

*Dependencies of the dynamic parameters of the symmetrical systems with two potential wells*

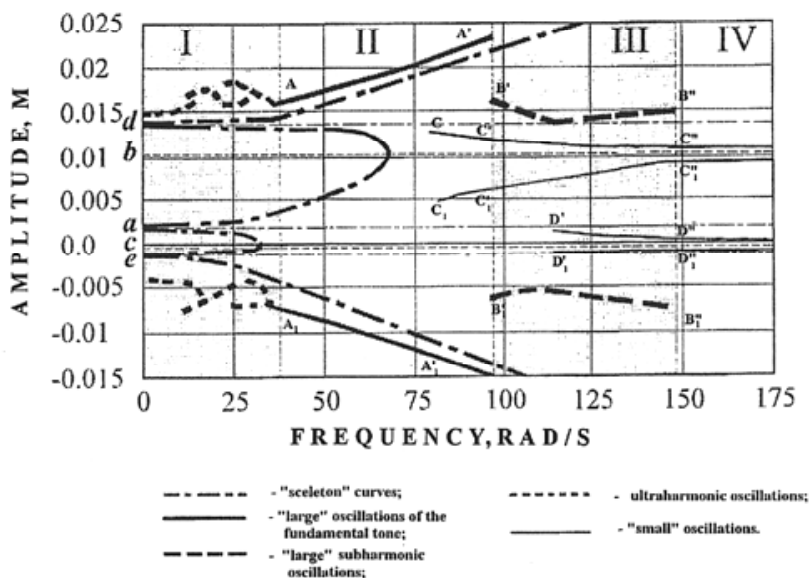
Dependencies	Combinative oscillations ( I frequency range)		«Large» oscillations of the fundamental tone ( $AA^2 - A_1 A_1^3$ )
$(t, \phi)$			
$(\phi, \dot{\phi})$			
Spectral characteristics			
$(t, \ddot{\phi})$			
$(\phi, \ddot{\phi})$			
$(\dot{\phi}, \ddot{\phi})$			

Table 1  
Continuation

Dependencies	Chaotic oscillations	«Large» subharmonic oscillations ( $BB' - B_1B_1'$ )	«Small» oscillations of the fundamental tone concerning the point $b$ ( $CC' - C_1C_1'$ )
$(t, \phi)$			
$(\phi, \dot{\phi})$			
Spectral characteristics			
$(t, \ddot{\phi})$			
$(\phi, \ddot{\phi})$			
$(\dot{\phi}, \ddot{\phi})$			

## 2.2. Asymmetrical systems.

Let the parameters of a system (1) take the following values:  $\varepsilon = 4 \text{ s}^{-1}$ ;  $\alpha = 754 \text{ s}^{-2}$ ;  $\gamma = -597000 \text{ m}^{-2}\text{s}^{-2}$ ;  $\beta = 49800000 \text{ m}^{-2}\text{s}^{-2}$ ;  $P_0 = -0.326$ ;  $P_1 = 15 \text{ ms}^{-2}$ .



*Figure 2. Amplitude-frequency characteristic of the asymmetrical system with two potential wells*

The peculiarities of the asymmetrical systems is that the stable equilibrium states are asymmetrical. So, a position  $\Phi_b = 0.0104m$  there corresponds to the point  $b$ , and  $\Phi_c = -0.0003 m$  – point  $c$ . It is necessary to note, that the resonant values of frequencies of «small» free oscillations concerning these points are various ( $\omega_b = 68.1 \text{ rad/s}$ ;  $\omega_c = 34.28 \text{ rad/s}$ ). Thus, at definite parameters of an external excitation the implementation only of one mode of «small» oscillations – concerning the point  $b$  is possible.

Table 2

*Dependencies of dynamic parameters of asymmetrical systems with two potential wells*

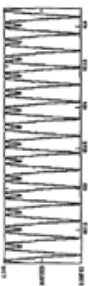
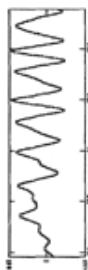
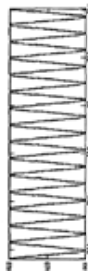




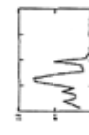
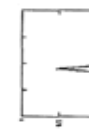
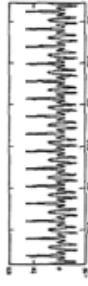
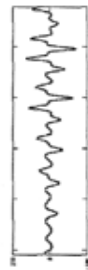
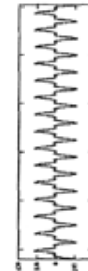


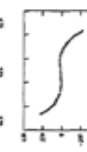
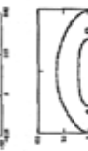





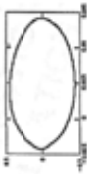
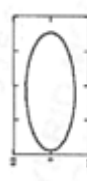
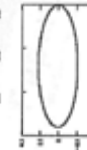
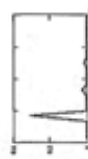

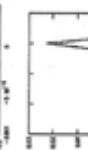
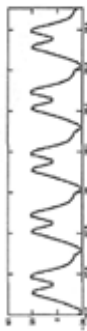




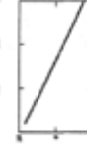
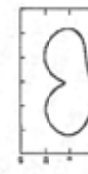


Dependencies	Combinative oscillations I frequency range	Chaotic oscillations	«Large» oscillations of the fundamental tone ( $AA^2-A_1A_1'$ )
$(t, \phi)$			
$(\phi, \dot{\phi})$			
Spectral characteristics			
$(t, \ddot{\phi})$			
$(\phi, \ddot{\phi})$			
$(\dot{\phi}, \ddot{\phi})$			

Table 2  
Continuation

Dependencies	«Large» subharmonic oscillations ( $B''B''', B_1''B_1'''$ )	«Small» oscillations of the fundamental tone concerning the point $b$ ( $C''C''', C_1''C_1'''$ )	Small» oscillations of the fundamental tone concerning the point $c$ ( $A''A''', A_1''A_1'''$ )
$(t, \phi)$			
$(\phi, \dot{\phi})$			
Spectral characteristics			
$(t, \ddot{\phi})$			
$(\phi, \ddot{\phi})$			
$(\dot{\phi}, \ddot{\phi})$			

### 3. Analysis of dependencies of dynamic parameters of studied systems.

Presented in the tables 1 and 2 dependencies of the dynamic parameters of systems with two potential wells allow to make following conclusions:

- the influencing of odd ultraharmonics leads to creating of the «small» oscillations concerning points  $b$  and  $c$ , and even – to originating «small» oscillations concerning one

- of final equilibrium positions. Thus, on the graphics of time processes  $(t, \dot{\phi})$  the oscillations modulation of a figuring point is observed. The phase trajectories of the first frequency range on planes  $(\phi, \dot{\phi})$  and  $(\phi, \ddot{\phi})$  have character of closed curves: symmetrical at resonances on the odd harmonics, and asymmetrical on even harmonics. Thus, main segment on the phase trajectories  $(\phi, \ddot{\phi})$  is similar cubic parabola and the adding curves are members of square parabolas. The phase trajectories  $(\dot{\phi}, \ddot{\phi})$  look like ellipses on which the adding closed loops lay. They are symmetrical concerning an axis  $\dot{\phi}$ ;

- for the resonance oscillations of the fundamental tone the phase trajectories  $(\phi, \dot{\phi})$  and  $(\phi, \ddot{\phi})$  look like the ellipses, and time processes  $(t, \dot{\phi})$  – ramp view, the set of the phase trajectories  $(\phi, \dot{\phi})$  degenerates in a negative cubic parabola;

- for the «small» oscillations of the fundamental tone the phase trajectories  $(\phi, \dot{\phi})$  and  $(\phi, \ddot{\phi})$  represent circumferences, and the time processes  $(t, \dot{\phi})$  have a harmonicity, but the graphic  $(\phi, \ddot{\phi})$  represents a straight line;

- for the resonant «large» subharmonic oscillation the influencing of the fundamental tone harmonic invokes appearance of closed loops on the phase trajectories  $(\phi, \dot{\phi})$  and  $(\phi, \ddot{\phi})$ , which one look like inclined ellipses. Thus the time processes  $(t, \dot{\phi})$  represent the graphics of the periodic polyharmonic process. The dependencies  $(\phi, \ddot{\phi})$  look like closed curves.

### References

1. Gorbatsevitch E.D., Levinzon E.F. Analog Modelling of the Control Systems. – Moscow: «Nauka», 1984.
2. Stoker J.J. Nonlinear Oscillations in Mechanical and Electrical Systems – New York, 1956.

## ПРЕДИСЛОВИЕ\*

Системы с двумя потенциальными ямами оказались очень мощным инструментом в развитии теории нелинейных колебаний. Их специфические свойства позволили приоткрыть новую страницу в современной физике. Самосинхронизация, самоорганизация, междисциплинарность, бифуркации и, наконец, хаос как непредсказуемость в нелинейных детерминированных системах (по Пригожину – диссипативных структурах) с дискретностью возможных состояний позволяют на данном историческом отрезке развития науки расширить наши познания о живом и неживом, о микромире и макромире.

Именно в таких системах, независимо от того, являются ли они моделями физических объектов, или химических процессов, или биологического поведения живых структур, или социально-политических, экономических явлений, энергетический обмен носит неадекватный характер. Т.е. большие затраты начальной энергии не гарантируют экстремальных состояний. И, наоборот, при определенных условиях незначительные порции энергии способны вывести систему на резонансные траектории [1].

Академик В.Л. Гинзбург предложил амбициозный «Список особенно важных и интересных проблем на пороге XXI века» [2], где под номером 11 приведена проблема «Нелинейная физика. Турбулентность. Солитоны. Хаос. Странные аттракторы».

Данная книга содержит результаты исследования динамических свойств нелинейного осциллятора Дуффинга с двумя потенциальными ямами. Такой осциллятор является идеальной моделью целого класса механических систем. Несмотря на элементарную простоту с точки зрения физики, эти системы описывают поведение «конструкции» с несмежными формами равновесия таких, как гибкий стержень, гибкая пластина, гибкая мембрана и т.п.

Механические системы, занимающие простейшую нишу в общей физике, сыграли заметную роль в познании мира и сослужили великую службу в открытии многих законов природы. По В.Л. Гинзбургу [2], биология на пороге XXI века заняла место лидирующей науки и ее связь с физикой подобна эффекту «редукционизма»: можно ожидать сведения законов биологии к совокупности законов физи-

---

\*Предисловие к монографии М.И. Казакевича и В.Е. Волковой «Динамика систем с двумя потенциальными ямами». Днепропетровск, 2000.

ки. Поэтому так соблазнительно изучать общие свойства осцилляторов на примере динамического поведения механических систем. При этом необходимо всегда помнить о постоянных смещениях фокуса междисциплинарных исследований природы. Великое многообразие и единство природы порождается качественными взаимодействиями и скачками четырех основных первоначальных материй – огня, воздуха, земли и воды (Авиценна).

В 60-х годах при исследовании нелинейного осциллятора Дуффинга с двумя потенциальными ямами я обнаружил несколько удивительных эффектов. Во-первых, трудно было согласиться с утверждением о достаточной обусловленности существования устойчивых решений в области частот, характеризуемой многозначностью амплитуд. При дискретном задании частоты эта обусловленность не срабатывала. Пришло понимание доминирующей роли начальных условий в проблеме достаточной обусловленности и это нашло поддержку у академика Ю.А. Митропольского. В этой работе было введено понятие «области притяжения начальных условий», которое впоследствии стало широко известно под названием «аттрактора». Теперь уже можно было предсказывать существование устойчивых решений осциллятора Дуффинга в частотной области с тремя и более устойчивыми предельными циклами Пуанкаре [3]. В настоящее время является неоспоримой роль начальных условий в возникновении странных аттракторов в нелинейных детерминированных системах как признака непредсказуемости – хаоса.

Второй эффект, обнаруженный в те же 60-е годы, был связан со скачкообразным изменением периода колебаний нелинейной системы Дуффинга с двумя потенциальными ямами. Такое изменение происходило при переходе от «малых» колебаний относительно одного ненулевого положения равновесия, к «большим» колебаниям относительно одновременно трех положений равновесия: нулевого положения неустойчивого равновесия и двух несмежных ненулевых положений устойчивого равновесия. Самое удивительное заключалось в том, что происходило удвоение периода колебаний [4]. Впоследствии этот эффект вошел в научную литературу под названием «закона Фейгенбаума». По выражению академика Р.З. Сагдеева закон об удвоении периода колебаний является «основным законом эволюции Вселенной».

Таким образом, предлагаемую книгу можно рассматривать как своеобразный промежуточный итог наших скромных усилий в развитии актуального направления нелинейной физики. При этом мы хотели обратить внимание на два аспекта.

Первый аспект состоит в более широком, чем принято, приме-

нении в анализе поведения нелинейного осциллятора Дуффинга с двумя потенциальными ямами гибридных комплексов. Синтез аналогового моделирования с компьютерным оказался не только эффективным, но и в высшей степени наглядным, эффективным.

Второй аспект заслуживает еще большего внимания. Наряду с известными и широко используемыми в динамическом анализе фазовыми траекториями Пуанкаре  $\dot{\phi}(\phi)$  мы ввели в рассмотрение также траектории  $\phi(\phi)$  и  $\ddot{\phi}(\phi)$ . Такое многообразие фазовых траекторий позволяет более эффективно использовать динамические свойства нелинейного осциллятора любого класса и на начальном этапе исследований идентифицировать изучаемые объекты.

### *Литература*

1. Казакевич М.И., Кваша Э.Н., Редько С.Ф. Влияние начальных условий на характер установившихся колебаний систем с нелинейной восстанавливающей силой. // Математическая физика. Вып. 15. – К.: Наукова думка. – 1974.
2. Успехи физических наук, № 4, 1999.
3. Казакевич М.И., Редько С.Ф. Эволюции областей притяжения в нелинейной несимметричной системе Дуффинга. РАН Украины, № 1, 1991.
4. Казакевич М.И., Чуваев Д.П. Гармоническое возбуждение систем с перескоком. Труды ДИИТ «Вопросы прикладной динамики мостов», Киев, 1968.

## ПРИЛОЖЕНИЕ. КРАТКИЙ АНАЛИЗ РАБОТ ПО ДИНАМИКЕ ГИБКИХ ЭЛЕМЕНТОВ\*

В существующей литературе по динамике гибких элементов систем значительное место отведено системам с симметричными характеристиками. Однако на практике гораздо чаще встречаются системы с несимметричными характеристиками, системы «с перескоком».

В работах, опубликованных до середины 60-х годов, многие авторы пренебрегали несимметрией параметров систем, тем самым избегали трудностей, сопряженных с математическими вычислениями. Однако такое упрощение искажает природу процесса. В настоящее время существуют программные комплексы, которые позволяют быстро и эффективно в численной форме получать решение с требуемой точностью.

В публикациях, посвященных вынужденным колебаниям основное внимание уделено гармонической составляющей возмущения, которая соответствует первому члену разложения периодического возбуждения в ряд Фурье. Таким упрощением возмущающих сил часто пользовались для выяснения физических особенностей систем, не усложняя в то же время постановку задачи. Однако в приложениях чаще встречаются более сложные типы возбуждения.

Впервые вопрос о динамической устойчивости упругих систем поставлен Н.М. Беляевым в 1924 г., который рассмотрел устойчивость прямолинейного призматического стержня, опертого по концам и сжатого продольной синусоидально изменяющейся во времени силой  $P(t) = P_1 \cos t$ .

Дифференциальное уравнение поперечных колебаний такого стержня легко получается из соответствующего уравнения свободных колебаний добавлением отнесенной к единице длины стержня разности перерезывающих сил, действующих по концам элемента стержня длины  $dx$

$$EI \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + \rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = -P_1 \cos \omega t \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad (1)$$

где  $\rho$  – линейная плотность;  $EI$  – жесткость стержня на изгиб;  
 $U$  – перемещение.

---

\*Приложение к монографии М.И. Казакевича и В.Е. Волковой «Динамика систем с двумя потенциальными ямами». Днепропетровск, 2000.

Решение уравнения (1) определялось в форме

$$U(x, t) = V(x)T(t). \quad (2)$$

Проведена аналогия между данной задачей и соответствующей задачей статической устойчивости – вместо двух возможных форм равновесия существуют две различные формы движения.

Определение функции  $T(t)$  было сведено к решению уравнения типа Матье. Н.М. Беляевым было также получено решение для стержня, нагруженного продольной силой  $P_0 + P_l \cos \omega t$ .

Используя приближенную формулу, легко получаемую по методу Хилла, Н.М. Беляев определил границы первой зоны динамической устойчивости; остальные указаны А.А. Андроновым и М.А. Леонтовичем.

В 1935 г. Н.М. Крылов и Н.Н. Боголюбов обратились к задаче о динамической устойчивости стержней, которую поставили в более общем виде. Результаты этого исследования совпадают с приближенным решением Н.М. Беляева. В этой же работе рассматривается задача о динамической устойчивости стержня под действием произвольной полигармонической силы при различных условиях закрепления концов. Авторы используют вариационный метод Б.Г. Галеркина, задавая  $U(x, t)$  в форме  $U(x, t) = V(x)T(t)$ , где  $V(x)$  – заданная функция, удовлетворяющая граничным условиям. Умножая дифференциальное уравнение на вариацию  $\delta V$ , они получают после интегрирования по  $x$  дифференциальное уравнение вида

$$\ddot{T} + \mathfrak{J}_n^0 \left[ 1 - \frac{P(t)}{Q_n^0} \right] T = 0, \quad (3)$$

где  $\mathfrak{J}_n^0$  и  $Q_n^0$  – приближенные значения частоты собственных колебаний и статической критической нагрузки. Данный в работе вывод выражений этих параметров через  $V(x)$  пригоден только для основных случаев закрепления концов, что не отмечается авторами. Разлагая  $P(t)$  в ряд Фурье и применяя метод усреднения, Н.М. Крылов и Н.Н. Боголюбов получили границы зон устойчивости.

В приложении к переводу книги Стретта А.М. Эфрос воспроизвел в 1935 г. результаты Н.М. Беляева. В 1936 г. Г.В. Бондаренко рассмотрел несколько простейших задач динамической устойчивости стержней: 1) невесомый стержень, опертый по концам, с массой, приложенной по середине пролета; 2) невесомый консольный стержень с массой на конце. В 1938–1939 гг. В.Н. Челомей решил ряд задач по динамической устойчивости стержней, неразрезных балок, плит, оболочек, собранных в его книге.

В.Н. Челомею принадлежит постановка задачи о динамической

устойчивости плит и оболочек. Применение энергетического метода к задаче о динамической устойчивости плиты, нагруженной по кромке переменными во времени силами, приводит к бесконечной системе дифференциальных уравнений. В первом приближении В.Н. Челомей решает задачи об устойчивости пластин, подкрепленных точечными или линейными жесткими и упругими опорами.

В 1938 г. Б.А. Боднер, независимо от В.Н. Челомея, решил ряд задач по динамической устойчивости плит. Для свободно опертой плиты им получено точное решение, а для других случаев закрепления концов – приближенное, при помощи метода Б.Г. Галеркина.

В 1940 г. Г.Ю. Джаненлидзе и А.М. Радциг поставили задачу о динамической устойчивости криволинейных стержней, исследовали поведение кругового кольца, нагруженного в своей плоскости радиальной, периодически изменяющейся во времени по гармоническому закону, равномерно распределенной нагрузкой. Оказалось, что кольцо имеет два типа потери динамической устойчивости (аналогично устойчивости статической): первый тип – потеря устойчивости в своей плоскости, второй – соответствующий выходу кольца из плоскости. Разделение переменных в задаче о кольце приводит к уравнениям Матье, имеющим ту же структуру, что и уравнение Н.М. Беляева.

В работе Б.З. Брачковского показано, что решение задачи динамической устойчивости при действии нагрузок вида  $P_0 + P_1 \cos \omega t$  точно сводится к уравнению Матье только для таких упругих систем, у которых статические формы потери устойчивости совпадают с соответствующими формами свободных колебаний. Это первая общая теорема в теории динамической устойчивости упругих систем не получила в литературе должного распространения.

Ряд задач динамической устойчивости упругих систем исследован И.И. Гольденблантом, Им была поставлена и рассмотрена задача о динамической устойчивости плоской формы изгиба тонкостенных стержней. И.И. Гольденблантом также выполнено исследование нелинейной задачи динамической устойчивости призматического стержня и были проведены специальные экспериментальные исследования.

В 1945 г В.М. Макушкин изучил динамическую устойчивость стержня под действием приложенных на концах продольных сил, меняющихся по кусочно-постоянному закону, и показал, что зоны неустойчивости в этой задаче близки к таковым в задаче Н.М Беляева. Позднее, в 1947 г., В.М. Макушкин рассмотрел поведение криволинейных стержней при потере динамической устойчивости и, ограничившись изучением устойчивости кольца, разобрал в отличие

от Г.Ю. Джанелидзе и М.А. Радцига несколько случаев возможного изменения нагрузки в пространстве.

В 1947 г. А.Ф. Смирнов, пользуясь методами матричного исчисления, рассмотрел задачу о динамической устойчивости стержня, нагруженного произвольно распределенными силами. Автором было решено несколько частных задач, в частности задача о динамической устойчивости балки на упругих опорах с произвольной продольной нагрузкой. А.Ф. Смирнов убедительно показал необходимость перехода к нелинейной постановке задачи. Им предложено также построение зон неустойчивости в случае нагрузки вида  $P_0 + P_1 \cos \omega t$  в плоскости параметров  $\omega/\vartheta_1$  и  $P_0/Q_1$ .

В 1949 г. А.Л. Марков исследовал динамическую устойчивость анизотропных (ортотропных) цилиндрических оболочек под действием гармонических сил. В этой работе рассмотрен только случай свободного опирания торцов.

Вопросу о динамической устойчивости цилиндрических оболочек посвящена работа О.Д. Ониашвили, использовавшего вариационный метод Б.Г. Галеркина. Им изучена сложная задача об одновременном действии переменных продольных и радиальных усилий.

В 1950 г. динамическую устойчивость плоской формы изгиба двутавра и полосы при чистом изгибе приближенно рассмотрел В.Е. Салион. Дальнейшее развитие этих задач дано в работе Е.А. Бейлина, в которой рассмотрена динамическая устойчивость прямолинейного стержня с упруго закрепленными концами и динамическая устойчивость круговой арки с упруго закрепленными пятнами.

Своеобразный характер носят явления, обусловленные ударными воздействиями или внезапным приложением нагрузок. М.А. Лаврентьев и А.Ю. Ишлинский показали, что при внезапном приложении нагрузок, превышающих  $n$ -ю критическую статическую силу, оказывается возможным появление  $n$ -ой устойчивой формы равновесия, имеющей и полуволн. Этот результат был подтвержден авторами экспериментально.

Н.К. Снитко показал, что при быстро приложенной нагрузке устойчивость теряется при силе, значительно меньше критической. Понижение границ устойчивости тем резче, чем выше скорость приложения нагрузки, и для очень гибких стержней это понижение достигает 60%. Вследствие влияния трения зоны неустойчивости сдвигаются вправо и сужаются. Поэтому потерю устойчивости, соответствующую второй области, трудно осуществить даже в лабораторных условиях. Третья и высшие области неустойчивости при наличии затухания практически не имеют значения.

Рассмотренные выше исследования по линейной теории динами-

ческой устойчивости позволяют определять границы неустойчивости, однако они оставляют открытым вопрос о параметрах движения, которое устанавливается после потери устойчивости. Совершенно ясно, что для выяснения характера процессов, происходящих при динамической потере устойчивости, необходимо перейти от линейной к нелинейной трактовке этой проблемы.

Несмотря на то, что такой переход в математически идентичной задаче из области электрических колебаний был сделан еще в 1934 г. Л.И. Мандельштамом и Н.Д. Папалекси, первая работа в этом направлении в области динамической устойчивости упругих систем появилась только в 1948 г.: И.И. Гольденблант в монографии рассмотрел динамическую устойчивость стойки, поддерживающей упругое перекрытие.

В 1953 г. И.К. Мелдер поставил задачу о свободных поперечных колебаниях прямолинейного стержня под действием продольной переменной силы. В отличие от задачи Н.М. Беляева, где поперечные колебания были вызваны действием активных сил, в задаче И.К. Мелдера переменные продольные силы были вызваны поперечными колебаниями стержня с несмещающимися концами. Автором было получено выражение для определения переменной продольной силы, точное решение уравнения свободных колебаний в эллиптических функциях. И.К. Мелдер выполнил сравнительный анализ между динамическими характеристиками шарнирно опертых стержней со смещающимися и несмещающимися концами.

В 60-е годы возрос интерес к вопросам расчета, конструирования и эксплуатации предварительно напряженных конструкций в индустриальном строительстве и в машиностроении. Применение преднапряжения позволяет повысить качество конструкций по основным показателям: а) уменьшить собственный вес конструкций; б) увеличить жесткость конструкций. Среди многих способов предварительного напряжения наибольшее распространение получило обжатие балок, ферм, рам затяжками из высокопрочных материалов. В связи с этим возникла необходимость в разработке теории колебаний таких конструкций, в частности теории колебаний стержневых конструкций, предварительно напряженных затяжками.

По сравнению с обычной балкой, особенность поведения балки, предварительно напряженной затяжкой, связана с действием сил реакции затяжек. Влияние затяжки на вибрирующую балку сводится, во-первых, к действию продольных сил, сжимающих  $i$ -й пролет балки; во-вторых, к сосредоточенным поперечным силам, приложенным в точках крепления затяжки; в-третьих, к изгибающим моментам, приложенным в поперечных сечениях балки. В процессе колебаний

эти силы не только изменяют свою величину, но также вращаются вместе с тем участком затяжки, реакциями которого они являются.

Среди работ этого периода следует упомянуть исследования Д.А. Юрченко, И.В. Лакуткина и А.Н. Тер-Мкртчян, которые теоретически и экспериментально изучали колебания тонкостенных преднапряженных балочных конструкций мостовых кранов. Авторами исследовались свободные колебания тонкостенных преднапряженных стержней открытого и закрытого симметричного профиля. При помощи вариационного метода теории упругости был дан вывод дифференциальных уравнений колебаний систем. Задача решалась в линейной постановке.

В 1970 г. А.И. Богданова рассмотрела задачу устойчивости односимметричной балки с напрягающим элементом, расположенным в плоскости симметрии. Соединение балки со струной производится в отдельных сечениях. В статье приведены дифференциальные уравнения устойчивости плоской формы изгиба, записаны дополнительные условия в точках крепления струны к балке. Автором исследована устойчивость преднапряженной полосы при чистом изгибе. Сила натяжения в затяжке предполагалась заданной. А.И. Богдановой проведен анализ влияния числа узлов крепления струны с балкой, силы натяжения струны и эксцентриситета на устойчивость балки.

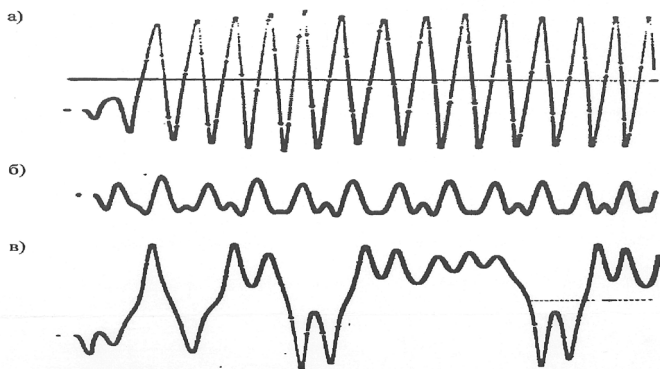
Отсутствие методологического единства и высокий математический уровень большинства монографий этого периода не позволили их использовать в расчетах. В конце 50-х годов П.Г. Бондарь предложил метод переменного масштаба для изучения стационарных колебаний нелинейных систем. Сущность метода состоит в том, что при изменении масштабов зависимой и независимой переменных нелинейные дифференциальные уравнения преобразуются в линейные с постоянными коэффициентами. Использование этого метода позволяло преодолеть главную трудность теории нелинейных колебаний – неприменимость принципа суперпозиции. Данный метод использовался для решения как автономных, так и неавтономных задач. Предложенный Н.Г. Бондарем метод был изложен с позиций, доступных для практического решения инженерных задач.

Следует отметить следующие работы, в которых для решения поставленных задач использовался метод переменного масштаба. В 1966 г. Н.Г. Бондарем и М.И. Казакевичем делается попытка обоснования метода переменного масштаба. Получено решение дифференциального уравнения типа Дуффинга (симметричная система) в эллиптических функциях и по приближенным формулам метода переменного масштаба в дробно-иррациональных функциях. Авторами было произведено сравнение результатов, полученных по точ-

ным и приближенным формулам, для систем с жесткими и мягкими характеристиками при различных значениях начального смещения и параметра нелинейности  $\beta/\alpha$ .

В середине 60-х годов при изучении динамических свойств систем с перескоком (систем с двумя потенциальными ямами), таких как ферма Мизеса, обратный маятник со спиральной пружиной и др., М.И. Казакевич ввел понятие «малых» и «больших» колебаний. Было обнаружено явление скачкообразного удвоения периода при переходе от «малых» колебаний к «большим». В этих исследованиях было также обращено внимание на существование наряду с устойчивыми «малыми» колебаниями относительно одного из двух несмежных ненулевых положений устойчивого равновесия и «большими» колебаниями относительно одновременно трех положений равновесия (нулевого положения неустойчивого равновесия и двух несмежных ненулевых положений устойчивого равновесия) также непериодических колебаний (рис. 1). Впоследствии они получили в научной литературе название хаотических колебаний [2].

М.И. Казакевичем и Д.П. Чуваевым в 1968 г. методом переменного масштаба была решена задача о вынужденных стационарных колебаниях механических систем с одной степенью свободы, имеющих несмежные формы равновесия. Исследовано возбуждение консервативной системы и системы с вязким трением. Даны простые оценки и приемы определения характера колебаний. Построены амплитудно-частотные характеристики стационарных колебаний. Авторами проведено сравнение полученных результатов на ЭЦВМ и аналоговых машинах.



**Рис. 1. Временные процессы нелинейных систем с двумя потенциальными ямами: а) «большие» колебания; б) «малые» колебания; в) хаотические колебания**

В 1971 г. М.И. Казакевич и Б.Я. Шаломов решили задачу о вынужденных поперечных колебаниях однопролетного предварительно напряженного стержня постоянного сечения, достаточно жесткого на сжатие. Дифференциальное уравнение поперечных колебаний такого стержня было получено в работе. М.И. Казакевич и Б.Я. Шаломов указали условия существования «прощелкиваний» в данной системе. Авторами были получены решения для гармонических и бигармонических колебаний систем с «перескоком» и без «перескока». Результаты аналитического исследования сопоставлялись с результатами аналогового моделирования.

Метод переменного масштаба используется для анализа динамического поведения конструкций и в настоящее время. Баевым С.В. в 1998 г. методом переменного масштаба решена задача свободных колебаний балки с переменными параметрами (жесткостью) и выполнено сопоставление с результатами, полученными методом Бубнова-Галеркина. Автор отмечает, что уже при первом приближении решение уравнения содержит нелинейные множители, что на практике позволяет ограничиться построением первого приближения. Удачный выбор нулевого приближения позволяет резко ускорить сходимость.

Наиболее точно среди работ этого периода поведение преднапряженных стержней описывалось уравнениями, которые получили В.П. Бабий и Н.Г. Нудельман. Авторами в 1965 г. был дан вывод интегро-дифференциального уравнения поперечных колебаний преднапряженного стержня. Установлено влияние предварительно напряжения и статической силы (нагрузки) на амплитуды и периоды свободных колебаний. Исследована устойчивость равновесных состояний исследуемых систем. В 1971 г. В.П. Бабий исследует влияние эксцентриситета приложения усилия преднапряжения на период и амплитуду свободных колебаний внецентренно преднапряженного стержня. Автор указывает на то, что введение эксцентриситета приводит к понижению частоты собственных колебаний. Как и в большинстве работ этого периода, автор пренебрегает несимметричностью системы, что вносит искажения в описании характера колебаний.

Остановимся на некоторых работах зарубежных авторов.

Dröszynsky J. в 1971 г. **провел аналитическое исследование потери устойчивости второго рода стального стержня, предварительно напряженного гибкой тягой с тремя дискретными контактами (два по концам стержня и один по середине стержня).** Автор рассмотрел два случая: 1) потерю устойчивости при действии сосредоточенной поперечной силы  $Q$ , приложенной по середине пролета и вызываю-

шей изгиб, обратный изгибу созданному предварительным сжатием; 2) потерю устойчивости при действии осевой сжимающей силы  $P$  от эксплуатационной нагрузки, создающей изгиб, дополнительный к созданному. В основу расчета положена приближенная методика К. Ежика, основанная на замене реальной формы изгиба синусоидальной, а также некоторые результаты исследований К. Ежика о влиянии формы поперечного сечения идеального упругопластического стержня на величину критического напряжения.

Prathap, Gangah, Vardan в 1971 г. изложили аналитический подход к определению значения критической силы и формы послекритических устойчивых состояний консольного стержня. Специфика работы связана с рассмотрением действия наклонных по отношению к оси стержня сил. Анализ проводится в рамках действия метода Релея-Ритца с одночленной аппроксимацией оси стержня тригонометрической функцией и с последующим численным интегрированием при построении зависимостей «прогиб – нагрузка». Проводится сравнение результатов такого приближенного подхода с данными более точных решений на основе численных методов. Конкретные вычисления проведены для однородного стержня, когда линия действия приложенной на конце силы проходит через некоторую фиксированную точку. R.J.H. Plaut и E.R. Johnson в 1980 г. проанализировали влияние начального распора и упругого основания на свободные колебания арок. Движение арки описывалось нелинейным дифференциальным уравнением. Опирающие концы арки шарнирное. Статическая (весовая) нагрузка полагалась распределенной по закону синуса. Начальная форма арки синусоидальная. Авторами были получены результаты для арок с различной стрелой подъема при различных значениях распора для жесткого и упругого основания. Результаты представлены в виде графиков зависимостей нагрузки от квадрата частоты.

Raju K., Rao G. и W. Venkateswara в 1986 г. исследовали свободные колебания предварительно сжатой шарнирно опертой балки. Авторами учитывался эффект сдвига и инерция вращения. В работе приведены выражения кинетической и потенциальной энергий и сжимающей силы. Параметр частоты определяется с помощью формулы Релея-Ритца. Даны зависимости параметра частоты от сжимающей силы и размеров балки. Авторами было показано, что для шарнирно опертых преднапряженных балок влияние деформаций сдвига значительно только для высших форм колебаний даже для гибких балок, а влияние осевой сжимающей нагрузки (преднапряжения) значительно для низших форм.

W.Y. Tseng и J. Dugundji в 1971 г. теоретически и эксперименталь-

но исследовали колебания прямолинейного и выпученных стержней с защемленными концами при поперечном возбуждении опор. При помощи метода Бубнова-Галеркина основное дифференциальное уравнение в частных производных сведено к модифицированному уравнению Дуффинга, которое в свою очередь было решено при помощи метода гармонического баланса. Помимо решения, соответствующего простым гармоническим колебаниям, найдены также другие ветви, соответствующие комбинационным тонам. Эти колебания обнаружены также и в эксперименте. На основании решения уравнения в вариациях типа Хилла исследована устойчивость установившихся гармонических и ультрагармонических колебаний. Выполнено аналогичное исследование устойчивости с учетом колебаний по второй форме и дана оценка роли этой формы с точки зрения устойчивости. При помощи численного интегрирования по методу Рунге-Кутты исследована задача о прощелкивании. Обнаружены как эпизодические так и стабильные прощелкивания. Авторами отмечается возможность нарушения чередования форм колебаний при определенных значениях начального статического прогиба. Следует отметить, что при построении амплитудно-частотных кривых авторами было принято, что четверти «малых» колебаний одинаковы, вследствие чего возникли искажения в «скелетных» кривых. В работе также не учтены квадратичный член и статическая нагрузка, вызванные начальными деформациями стержня, которые приводят к тому, что «малые» колебания относительно устойчивых положений равновесия различны.

Развитие космической техники привело к необходимости создания принципиально новых классов конструкций. Это вызвано спецификой их работы в космосе – практическим отсутствием гравитации. Космическая конструкция должна обладать низким весом, низкой жесткостью, но достаточной прочностью, что достигается их преднапряжением.

Зеркальные антенны являются основными элементами устройств для передачи сигналов сверхвысокой частоты, эксплуатируемых на борту летательных аппаратов и судов различных типов. В связи с этим большое значение приобрела разработка методов расчета и экспериментальных исследований прочности и устойчивости оболочечных конструкций зеркальных антенн. Известно, что теория оболочек в настоящее время получила значительное развитие. Однако при расчете указанных систем возникает необходимость решения вопросов прочности и устойчивости, связанных как с конструктивными особенностями, так и со специальными условиями эксплуатации. Среди работ посвященных этому направлению следует выделить следующие.

Гудрамович В.С. в 1986 г. предложил методику и привел результаты деформирования оболочки, имеющей начальное регулярное или нерегулярное несовершенство формы. В линейной постановке решена задача динамики оболочки с начальными несовершенствами формы при кратковременном нагружении неидеальным импульсом и при многократном импульсном нагружении.

Housner Jerold, M. Belvin, W. Keith в 1983 г. провели теоретическое моделирование нелинейных колебаний «hoop-column» космической антенны. Антенна моделировалась как пространственная двумерная конструкция, усиленная тросом при гармоническом синусоидальном возмущении. Исследование проводилось с помощью линейного, нелинейного и квазилинейного подходов. В линейной постановке использовались как точное, так и приближенное решение, при котором каждый трос моделировался пружиной с массой, сосредоточенной на концах. С помощью квазилинейного анализа упрощенная модель была перенесена на расчет ослабленного троса при его смещении из-за снятия осевой нагрузки. Нелинейный подход был применен для троса с распределенной массой в случае больших деформаций и его естественного изгиба при ослаблении.

Особенностью нелинейных систем является высокая чувствительность к изменению начальных условий, что является основным признаком возникновения хаотических колебаний. В нелинейных системах с диссипацией энергии начальные условия влияют не только на свободные колебания, но и на вынужденные колебания в переходном и установившемся режимах. В диапазоне изменения частоты возмущающей силы, характеризуемом существованием нескольких периодических решений одинаковой частоты, именно начальные условия определяют реализацию того или иного устойчивого периодического решения.

Задача о реализации периодических решений в области существования многозначности амплитуд колебаний в рамках концепции «истории» изменения частоты возмущения на примере симметричной системы Дуффинга впервые была решена в работах Казакевича М.И., Редько С.Ф., Кваши Э.Н. и Хаяси Т. В этих работах отмечалось, что аналитическое решение уравнений типа Дуффинга и исследование периодических режимов зависит от начальных условий и связано с большими математическими трудностями. На данном этапе развития нелинейной механики изучение влияния канальных условий на возможные устойчивые режимы колебаний в зоне многозначности амплитуд может быть связано только с численным экспериментом.

М.И. Казакевич и С.Ф. Редько, Кулябко Ю.В. в 1990 г. исследовали области притяжения начальных условий в нелинейных несимме-

тричных системах типа Дуффинга. Авторами была проведена оценка влияния параметров затухания и амплитуды гармонического возмущения на возможность реализации устойчивых режимов колебаний. В 1991 г. М.И. Казакевич и С.Ф. Редько отмечают, что для систем «с прощелкиванием» бифуркация и удвоение периода, получившее название «закон Фейгенбаума», играют ключевую роль в возникновении странных аттракторов.

В 90-е гг. школой польских ученых были проведены обширные исследования динамического поведения симметричных систем с «перескоком» для частных значений их параметров. Так, в 1993 г. Szemplinska-Stupnicka W. и Rudowski J. представили результаты численного моделирования вынужденных колебаний. Авторами на основе исследования различных форм неустойчивости периодических колебаний был получен аппроксимированный критерий существования «больших» и «малых» периодических колебаний. В 1995г. Szemplinska-Stupnicka W. исследовала условия возникновения хаотических колебаний в резонансных зонах колебаний основного тона и субгармонических колебаний. Автором был получен критерий для определения критических параметров системы, при которых возможно возникновение хаотических колебаний. Работа Szemplinska-Stupnicka W. и Janicki K 1997 г., посвященная исследованию явления бифуркации «больших» периодических колебаний в области параметров системы, стала продолжением исследований.

В конце 50-х – начале 60-х годов профессором Института Объединенных Ядерных Исследований (г. Дубна, Россия) Мельниковым В.К. был разработан метод, позволяющий получать нижние границы параметров динамических систем, при которых возможны хаотические явления. Объектом его исследований стали динамические системы с несколькими несмежными положениями равновесия (рис. 2), находящиеся под действием квазипериодического возмущения. Поведение таких систем описывается уравнением вида

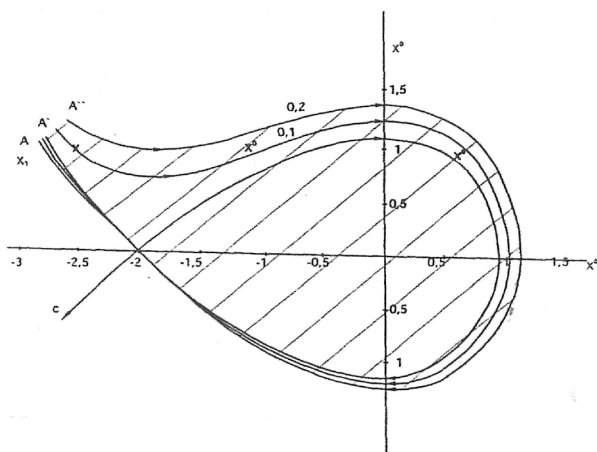
$$\ddot{\phi} + R(\phi) + \epsilon (\dot{\phi} + P(t)) = 0, \quad (4)$$

где  $\epsilon \ll 1$  – безразмерный малый параметр.

Для оценки возможности хаотических явлений и среднего времени выходя из «привилегированной» области фазового подпространства, связанной с потенциальной ямой, Мельниковым В.К. был предложен параметр

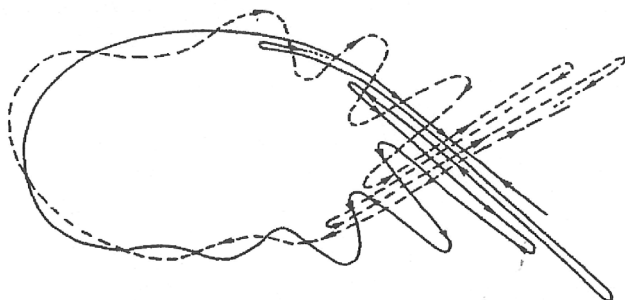
$$M(t) = -\epsilon \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{\phi}_0^2(\tau) d\tau + \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) P(t) d\tau, \quad (5)$$

где  $h(\tau) = \phi_0(-t); \phi_0(t)$  – значение начальной скорости.



**Рис. 2. Влияние малого параметра  
при «медленном времени» на ширину области захвата**

Выходу системы из «привилегированной» области соответствует момент времени  $t$ , при котором  $M(t)$  обращается в нуль. Основными предпосылками применимости метода Мельникова В.К. являются равномерная однородность и непрерывность границ фазовых подпространств. Следствием этого допущения является возможность одновременного существования как стохастических (случайных), так и хаотических, чувствительных к начальным условиям, процессов [4] (рис. 3). Данный подход к исследованию хаотических процессов в детерминированных системах при квазипериодическом возмущении получил название детерминированного метода Мельникова В.К.



**Рис. 3. Асимптотические траектории «множества Мельникова»  
и образуемые ими «каналы»**

Широкий ряд детерминированных систем с несколькими несмежными устойчивыми положениями равновесия подвергаются действию стохастического (случайного) воздействия, например, ветрового, волнового или сейсмического. В большинстве исследований виды возмущения идеализировались как гармонические, что приводило к ошибочным результатам. Для таких систем детерминированный метод Мельникова малоприменим. В частности он дает ошибочное заключение о невозможности хаоса при низких уровнях возмущения в стохастических системах, что противоречит их природе.

Holmes и Mardsen, Simiu и Frey и другие предложили ряд процедур, расширяющих возможности детерминированного метода Мельникова. На их основе был построен стохастический метод (вариация этого метода) Мельникова. Его возможности авторы проиллюстрировали на примере систем с аддитивным и мультипликативным шумами. Для оценки достоверности предложенных процедур было выполнено сопоставление результатов численного моделирования и аналитического исследования. Авторами доказано, что данный метод применим при возмущениях с дисперсией меньшей, чем дисперсия минимальной гармоники, при которой возможен хаос.

За последние пятнадцать лет детерминированный и стохастический методы Мельникова получили свое применение в исследованиях медленно меняющихся систем (Wiggins, Holmes), систем с дихотомным к мультипликативным шумом (Simiu, Frey).

### *Литература*

1. Казакевич М.И., Кваша Э.Н., Редько С.Ф. Влияние начальных условий на характер установившихся колебаний систем с нелинейной восстанавливающей силой. // Математическая физика. Вып. 15. – К.: Наукова думка. – 1974. – С. 59–62.
2. Успехи физических наук, № 4. 1999.
3. Мельников В.К., Саясов Ю.С. Теория захвата частиц в синхронный режим ускорения с учетом неконсервативности уравнений движения. Препринт Института Объединенных Ядерных Исследований (Лаборатория теоретической физики). Р-201, Дубна, 1958. – 20 с.; ЖТФ, XXX, вып.6, 1960, С. 656–664.
4. Мельников В.К. Об устойчивости центра при малых периодических возмущениях. Препринт Института Объединенных Ядерных Исследований (Лаборатория теоретической физики). Р-737, Дубна, 1961. – 45 с.
5. Holmes P., Mardsen P. A partial differential equation with infinitely

many periodic orbits» Chaotic oscillators of a forced beam // Archives of Rational Mechanics and Analysis. – 1981. – Vol. 76. – P. 135–166.

6. Simiu E., Frey M. Melnikov processes and noise induced exits from a well // Journal Engineering Mechanics. – March, 1996. – P. 263–276.

7. Wiggins S., Holmes R. Homoclinic orbits in slowly varying oscillator // SIAM, Journal of Mathematical Analysis. – 1987. – Vol. 18, – P. 612–629.

8. Simiu P., Franczek M. Melnikov based open-loop control for a class of nonlinear systems // Proc. Design Engineering Technical Conferences, ASME «Symposium on Vibration and Control of Stochastic Dynamics Systems», L.A. Bergman, ed. ASME, New-York, – P. 897–902.

# IDENTIFICATION OF NON-LINEAR DYNAMIC SYSTEMS\*

## 1. Introduction.

Mechanical system call non-linear, if the ratio describing processes of its motion or static deforming are non-linear. Then even one of generalized forces is non-linearly connected to generalized coordinates or speeds.

Generally oscillations arising in a non-linear dynamic system is possible to describe by an equation of a view [1]:

$$\ddot{\Phi} + R(\Phi) + H(\dot{\Phi}) = P(t). \quad (1)$$

where  $\Phi$  – generalized coordinate;  $R(\Phi)$ ,  $H(\dot{\Phi})$  – restoring and dissipative characteristic;  $P(t)$  – parameter of an external disturbance.

The non-linearity of dynamic systems, as a rule, is a consequent of non-linearity inertial and rigid of the characteristics.

Peculiarities of investigated systems is:

- relation of oscillation frequency to frequency;
- capability of originating sub- and superharmonic oscillations;
- multi regimes on a fixed frequency of a disturbance;
- capability of originating of a spurious oscillation. These phenomena can become the cause of destruction or installation of emergency operation in dynamic systems. On the other hand, usage of non-linear effects described above, allows to increase efficiency of vibration machines, and also to engineer qualitatively new vibration, signal and vibration proved of the device.

At analytical investigation of oscillations there is a necessity of construction of mathematical model. For this purpose will use the data of technical drawings, descriptions, and also other documentation about frame and values of separate parameters. However in some cases this information can be poor. Effective thus there is usage of methods of identification of systems. They are concluded on construction of mathematical model of object on experimental records.

## 2. Differential equation of free oscillations.

It is known, that the non-linear effects in dynamic systems are a development of absolute properties, i.e. free oscillations. In the given report the researches of dynamic systems are shown, the non-linearity which one is called by non-linearity of the restoring characteristic. The

---

\* Опубликовано совместно с В.Е. Волковой в Трудах 7 Международной Конференции, Вильнюс, 2001.

results were obtained for systems having the piecewise linear restoring characteristics [2]:

- double links system;
- three links system;
- systems with «backlash»;
- systems with «interference»;

– system with «interference» and «backlash». As reference the linear system was adopted.

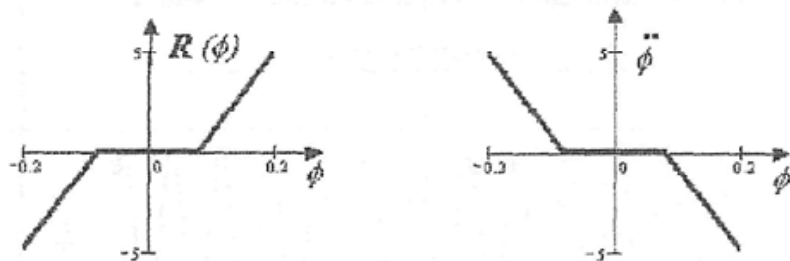
The graphics of change of the restoring characteristics [2], the skeleton curves of considered systems are shown in Table 1.

### 3. Application of phase trajectories to research of oscillation processes.

Fundamentals of the qualitative theory of research of dynamic processes were found by Poincare. The charts, offered him, on which one the motion of a point is represented by some trajectory on a phase plane  $(\phi, \dot{\phi})$  allows to judge periodicity of dynamic processes and existence of singular points conforming to steady or unstable final equilibrium state.

They are widely used for analysis of off-line systems unidirectional. The frame of the phase diagrams  $(\phi, \dot{\phi})$ .

Diverse selection of parameters of phase planes is possible also. The greatest concern is introduced by phase trajectory on a plane  $(\phi, \dot{\phi})$ . It is connected, that the power yardsticks on her are interpreted most visually. So, area, the restricted curve  $\dot{\phi}(\phi)$ , is peer to activity. And the circumvention of its contour counter-clockwise corresponds to energy loiter system. Besides the relation  $\dot{\phi}(\phi)$  back is symmetrical concerning an axis  $\phi$  to the graphic of change of the restoring characteristic. In particular, in a Figure 1 the graphics of change of the restoring characteristic and accelerations for a system with «backlash» are shown. The chart  $\dot{\phi}(\phi)$  allows to establish a kind and level of non-linearity of a system.



*Figure 1. The graphics of change of the accelerations and restoring characteristic*

*Restoring characteristics, the skeleton curves of investigated systems*

*Table 1*

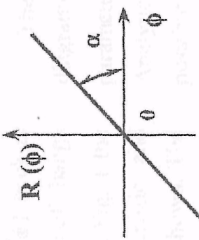
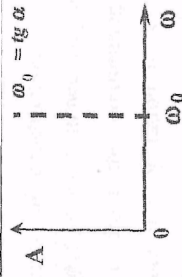
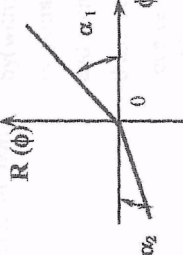
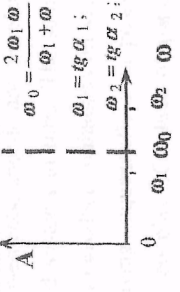
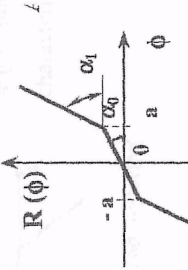
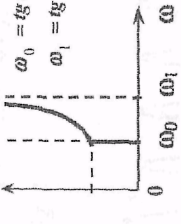
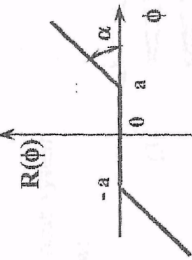
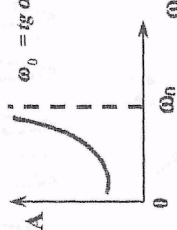
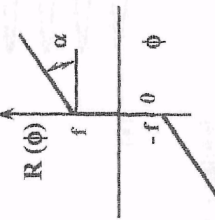
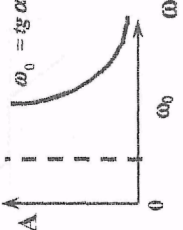
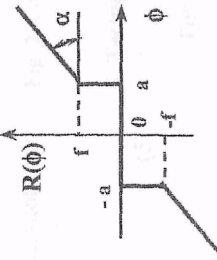
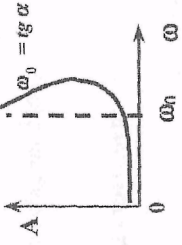
№ of system	The type of a system	The graphics of the restoring characteristic	Amplitude-frequency dependencies
1	Linear system		 <p style="text-align: center;"><math>\omega_0 = \text{tg } \alpha ;</math></p>
2	Double links system		 <p style="text-align: center;"><math>\omega_0 = \frac{2 \omega_1 \omega_2}{\omega_1 + \omega_2};</math>  <math>\omega_1 = \text{tg } \alpha_1 ;</math>  <math>\omega_2 = \text{tg } \alpha_2 ;</math></p>
3	Three links system		 <p style="text-align: center;"><math>\omega_0 = \text{tg } \alpha_0 ;</math>  <math>\omega_1 = \text{tg } \alpha_1 ;</math></p>

Table 1

## Continuation

№ of system	The type of a system	The graphics of the restoring characteristic	Amplitude-frequency dependencies
4	System with «back-lash»		
5	System with «interference»		
6	System with «interference» and «backlash»		

For example, the free oscillations of a linear system are described by a differential equation of a view: ..

$$m\ddot{\phi} + k\phi = 0, \quad (2)$$

$m$  – mass of system;  $k$  – rigidity of system.

Let's take advantage of the known solution:

$$\phi = A \cos(\omega_0 t). \quad (3)$$

where  $A$  – amplitude of oscillations;  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$  – natural frequency. Then the relation between acceleration and generalized coordinate is determined by a ratio:

$$\ddot{\phi} = -\omega_0^2 \phi, \quad (4)$$

And the angle of lean of a function  $\ddot{\phi}(\phi)$  to an axis  $\phi$  makes:

$$\operatorname{tg} \theta = -\omega_0 = -\sqrt{k/m}. \quad (5)$$

Except for the offered phase diagram  $(\ddot{\phi}, \phi)$  for the analysis of dissipative properties of a system the chart  $(\dot{\phi}, \dot{\phi})$  can be utilized.

The main difficulty of construction of the phase diagrams  $(\ddot{\phi}, \phi)$  and  $(\dot{\phi}, \dot{\phi})$  consists in necessity to eliminate parameter of time  $t$  from the conforming relations. Analytically to execute this operation it is not always possible. The majority of metering devices is registered by (with) changes of movements, speeds and accelerations of points of investigated systems in time. The sanitary and technological norms introduce limitations on values of these parameters. Receiving sequentially it is possible to receive the conforming couples of values of parameters  $\ddot{\phi}(t)$  both  $\phi(t)$  or  $\dot{\phi}(t)$  and  $\dot{\phi}(t)$ , data of phase characteristics (Figure 2).

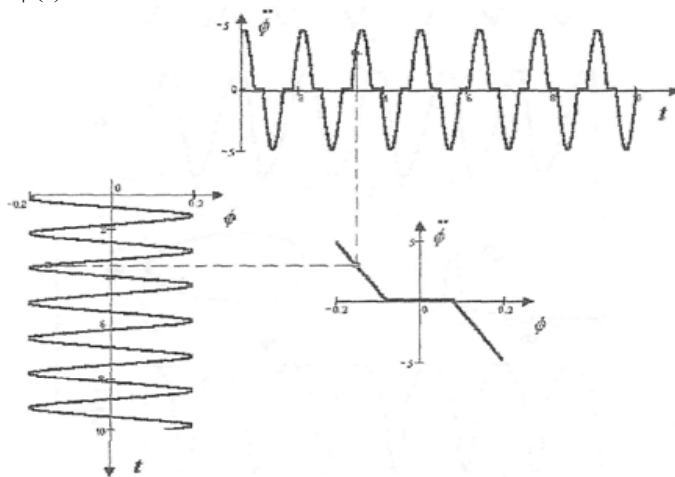


Figure 2. Construction of the phase diagram  $(\ddot{\phi}, \phi)$

Table 2. The and time processes, phase diagrams, spectral characteristics

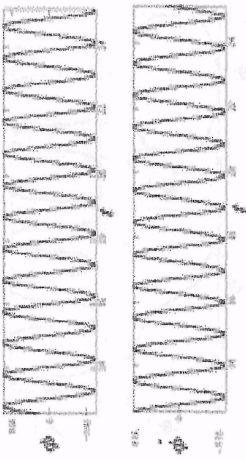
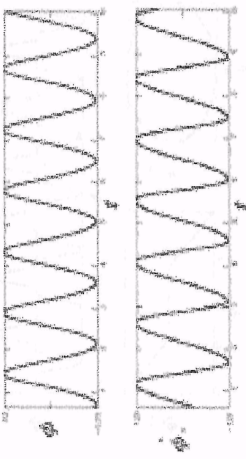
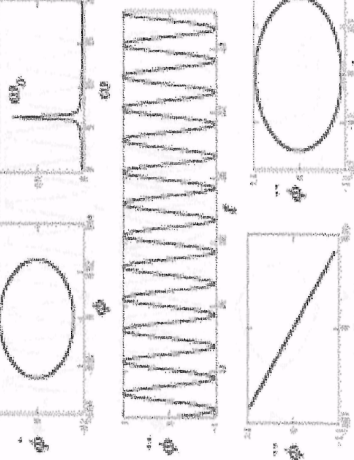
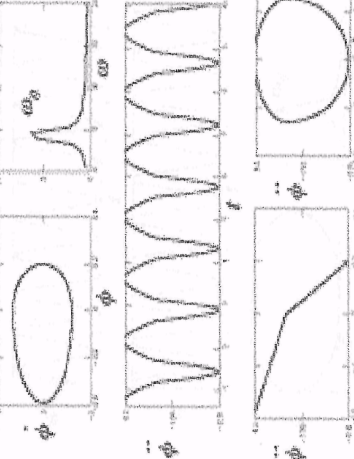
№ of system	The time processes and phase diagrams, spectral characteristics	№ of system	The time processes and phase diagrams, spectral characteristics
1		2	
1		2	
4		3	

Table 2. Continuation

1	2	3	4
3		4	

Table 2. Continuation

1	2	3	4
5		6	

#### 4. Technique of computing experiment

For obtaining parametric relations  $\dot{\phi}(t)$ ,  $\ddot{\phi}(t)$ ,  $\phi(t)$  the software was built. In its basis the method of Runge-Kutta of the fourth order utilized. The integration step was adopted

$$\Delta t = \frac{T}{600}, \text{ where } T = \frac{2\pi}{\omega_0}, \text{ that}$$

provided stability of a procedure of a numerical integration at different parameters of an equation (1).

It is known, that the free oscillations of non-linear systems are not monoharmonic. For an estimation of influencing of separate harmonics in the software the unit of spectral analysis utilized. He realized on the basis of algorithm of a fast Fourier transform. Allowing influencing of initial conditions on installation of one of possible oscillating behaviours, the results were obtained for several values of initial movements and speeds. The results of numerical experiment for systems 1–6 are shown in Table 2.

#### 5. Concluding remarks.

Not always precise enough and full mathematical description of actual objects can be constructed ground, of time processes  $\dot{\phi}(t)$ , phase trajectories  $(\phi, \dot{\phi})$  and spectral characteristics.

As demonstrate results, these characteristics in some cases do not give the answer to a problem: «Whether the system is linear or not?» It is connected that in at non-resonance modes of oscillation are close to monoharmonic. The known lobe of an error can also be introduced by an error in selection of a discretization. In too time, the phase trajectories  $(\phi, \dot{\phi})$  allow qualitatively to reveal displacings of the law of the restoring characteristic  $R(\phi)$  in case of double and three links characteristic. This  $\ddot{\phi}(t)$  for systems 2 and 3 look like curves asymmetrical concerning a zero position, and for systems 4, 5 and 6 have a ramp view with well-marked horizontal and vertical segments, accordingly. To determine a kind and parameters of relation  $R(\phi)$  it is possible only due to phase trajectories on a plane  $(\phi, \dot{\phi})$ .

The similar results were obtained and for non-linear systems with the continuous law of change of the restoring characteristic [3].

#### References

1. Vibrations in engineering: Reference book in 6 volumes.. Vol. 2. Moscow: Engineering, 1979. – 315 p.
2. N.M. Zakrzhevskij. Oscillations in essential non-linear mechanical systems. – Riga: Zinante, 1980. – 190 p.
3. M.I. Kazakevitch, V.E. Volkova. Dynamics of systems with two potential wells. Dnepropetrovsk: Art-Press, 2000. – 160 p.

# APPLICATION OF QUALITATIVE METHODS TO RESEARCH OF POLYHARMONIC OSCILLATIONS\*

## 1. Introduction.

The development of the qualitative methods of investigation of dynamic systems, suggested by the authors, is the effective means for identification of dynamic systems. The results of the extensive investigations of the behaviour of linear dynamic systems and symmetrical system with double well potential under polyharmonic excitation are given in the paper. The bases of the method of qualitative investigation of oscillations were developed by Poincare. Application of these methods is most effective for the investigation of oscillations of systems with one degree of freedom. The classical approach to qualitative investigation of oscillations consists in finding out special points on a phase plane  $(y, \dot{y})$  and definition of their type (node, saddle, centre or focus). Studying of special points of system explains the picture of trajectories of points on a phase plane (displacement, velocity) in their neighbourhood, however does not allow to study oscillatory processes finally.

Phase space of dynamic systems is multi-dimensional. Each point of this space is characterized by not less than four co-ordinates. In particular: displacement, velocity, acceleration and time. Real space has three dimensions. It is more convenient for the analysis. We consider the phase space as limited to three dimensions, namely displacement, velocity and acceleration. Another choice of parameters of phase planes is also possible [1, 2]. Phase trajectory on a plane  $(y, \dot{y})$  is of the greatest interest. It is known that accelerations of points are more sensitive to deviations of oscillations from harmonic ones.

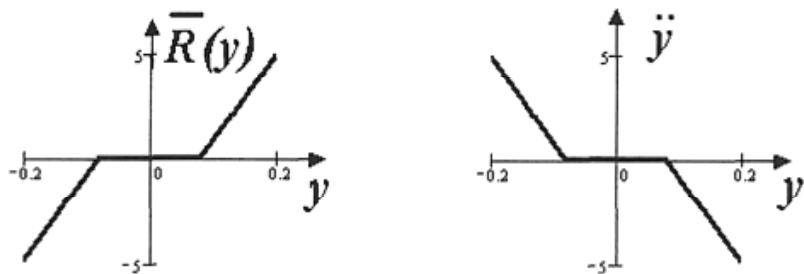
It is connected with the fact that power criteria on it are interpreted most evidently.

Besides, dependence  $\ddot{y}(y)$  is back symmetric relative to axis  $y$  of the diagram of elastic characteristic. For example, in Figure 1 diagrams of change of the elastic characteristic and acceleration for the system with “backlash” are shown. Only the phase trajectories  $\ddot{y}(y)$  allow establishing a type and a level of non-linearity of a system.

The results of the extensive investigations of the dynamic systems behaviour under polyharmonic excitation are given in the paper.

---

\*Опубликовано совместно с В.Е. Волковой в Bauhaus – Universitat Weimar, IKM 2003, Weimar.



*Figure 1. Diagrams of change of the elastic properties and acceleration for system with «backlash»*

## 2. Differential equation of polyharmonic forced oscillations.

Let's remark that outer excitation can contain some harmonics for wide range of mechanical dynamic systems. Their amplitudes might be various. The forced oscillations of such systems described by the nonlinear differential equation of the type

$$\ddot{y} + \varepsilon \dot{y} + R(y) = F(t);$$

$$F(t) = F_0 + \sum_{i=1}^n F_i(t) \cos(\omega_i t) + \sum_{j=1}^n F_j(t) \sin(\omega_j t), \quad (1)$$

$$i = 1, 2, 3 \dots n, j = 1, 2, 3 \dots n,$$

where  $y$  is the generalized coordinate;  $\varepsilon$  is the damping coefficient of the system;  $R(y)$  is the elastic characteristic of the system; and  $F_0, F_1, F_j, \omega_i$  are parameters of the outer polyharmonic excitation.

Let's restrict our investigation to symmetrical biharmonic oscillations, then outer polyharmonic excitation has the form:

$$F(t) = F_1 \cos(\omega_1 t) + F_m \cos(\omega_m t), m = 1, 2, 3 \dots, \quad (2)$$

The excitation is monoharmonic in a case if  $m = 1$ . The results of investigation for  $m = 2, 3$  are presented in the paper. We compare linear system to nonlinear symmetric system with double well potential (buckling).

### 3. The methods of modelling.

The hybrid computing complexes (HCC) present the synthesis of analogue and numerical computers. They possess the fastness of the analogue and the precision of the numerical computers with large memory size. The HCC gives the possibility to observe visually the computing process during the investigations by means of oscillographs, self-recorders etc. Besides, it is possible to change the parameters of the investigated system in the process of computing.

The investigation of the forced oscillation systems with buckling was carried out on the HCC produced on the base of IBM PC and analogue computer ACC-31 with the signal generator of special shape. The maximum output signal constitutes 10 V within the frequency range 0.001–10 kHz. The double-trace oscillograph C1-99 was used for visual observation of the computing process – electric signals from the major amplifier outputs. The results of the non-linear differential equation system integration were transmitted by means of the interface devices to IBM PC.

The standard mathematical securing is used for the analogue-to-digital converter functioning. The information input into IBM PC is stored on the hard disk in the text file form. The spectral characteristics of the oscillating processes are obtained by means of the standard programme of the fast Fourier transformation. The standard graphic software package is used for the graphic presentation of the dynamic processes.

### 4. Analysis of biharmonic oscillations of the linear systems.

The system with a linear elastic characteristic has been adopted as a reference. The elastic characteristic in this case has the following form:

$$R(y) = \alpha y, \quad (3)$$

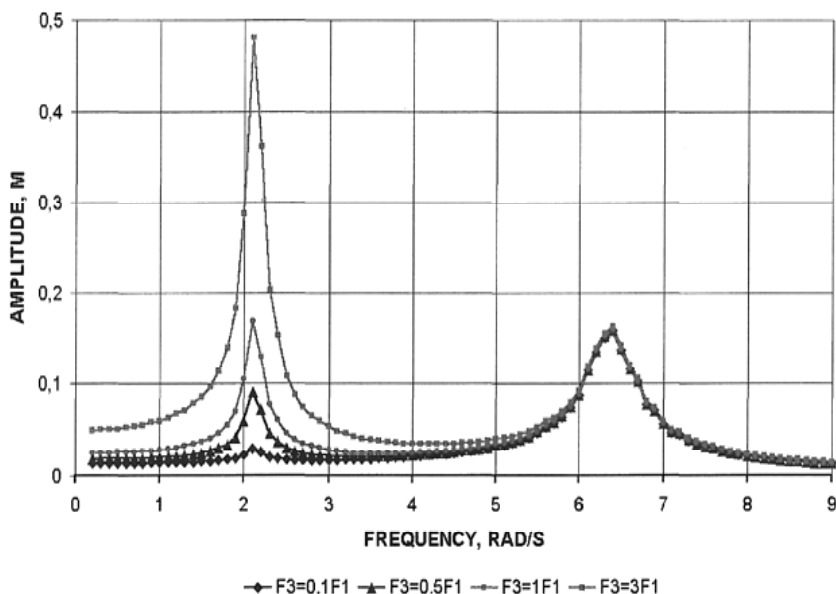
The values of system parameters have been taken as follows:  $\alpha = 408 \text{ s}^{-2}$ ;  $\varepsilon = 0.1; 0.5; 1 \text{ s}^{-1}$ ;  $F_1 = 0.5; 1; 1.5/\text{ws}^{-2}$ ,  $F_{2,3} = 0.05 \dots 4.5 \text{ ms}^{-2}$ .

The general forms of amplitude-frequency characteristics of system (1) are given in Figure 2.

As it is shown in Figure 2, the linear dynamic system with one degree of freedom can have an infinite number of resonance zones on harmonics with multiple frequencies according to conditions  $\omega_\mu = \mu \omega_1 = \omega_0$ ,  $\mu = 0, 1, 2, 3, \dots$ .

The stable branches of amplitude-frequency characteristics form two frequency ranges with considerably different behaviour. As it is seen from the results presented in Figure 2, range I is the area of appearance of combinative oscillations, range II is the area of resonance oscillations of the fundamental tone.

The time processes, phase trajectories and spectral densities of the forced oscillation energy distribution at different amplitudes of the outer excitation are shown in Figure 3.

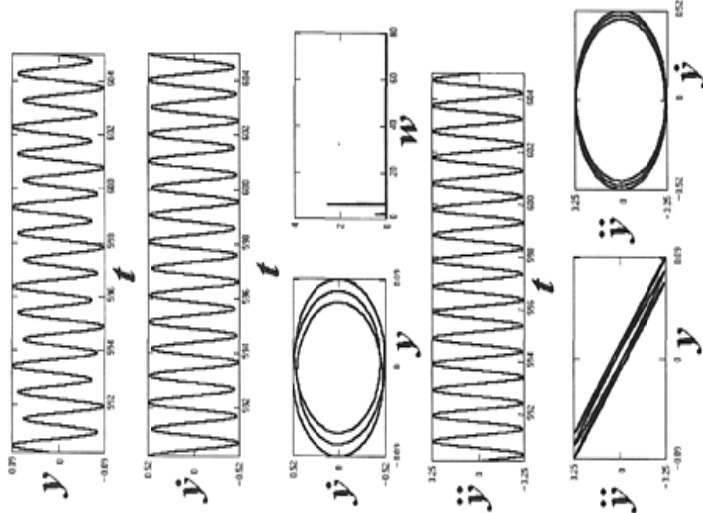


**Figure 2. Amplitude-frequency characteristic of the linear system:  $m=3$ ;  
 $\alpha=408\text{ s}^{-2}$ ;  $\varepsilon=0.5\text{ s}^{-1}$ ;  $F_1=0.5\text{ ms}^{-2}$**

Within the first frequency range beat-like oscillations arise. The amplitudes of fundamental harmonic and sub-harmonic are commensurable. The position of oscillations centre is not constant. That is why additional closed loops appear on the Poincare map. The additional closed loops occur as well on phase trajectories on a plane  $(y, \dot{y})$ . It is necessary to note that 2 all of them are parallel. The angle of lean of these pathways to an axis  $y$  is  $-\omega^2$ .

The amplitude of sub-harmonic oscillations is too small in a second resonance zone. The time processes  $y(t)$ ,  $\dot{y}(t)$  and  $\ddot{y}(t)$  look like monoharmonic. Meanwhile, the phase trajectories  $(y, \dot{y})$  and  $(\dot{y}, \ddot{y})$  have some peculiarities. The phase trajectories on a plane  $(y, \dot{y})$  have two additional loops on their ends. They are symmetrical to a “skeleton” curve. The phase trajectories on a plane  $(\dot{y}, \ddot{y})$  are ellipses. Their main axes are inclined. The angle of lean of axes depends on a ratio of phases of the outer excitation.

a)



b)

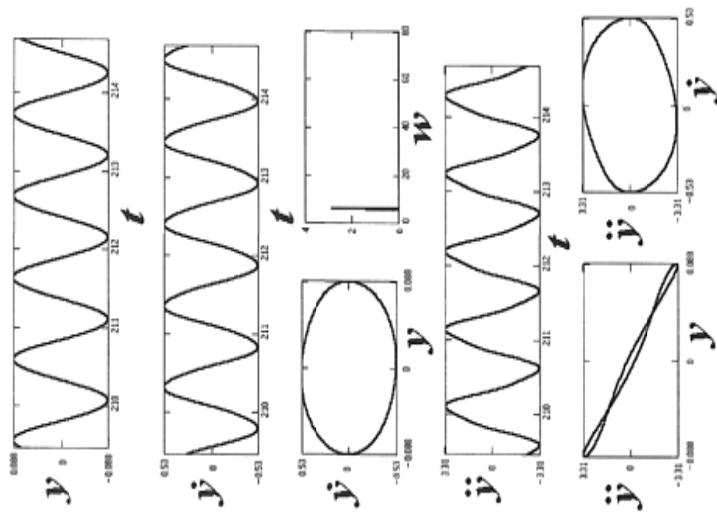


Figure 3. Time characteristic phase trajectories:  $m=3$ ;  $\varepsilon=0.1 \text{ s}^{-1}$ ;  $F_1=0.5\text{ms}^2$ ;  $F_3=0.25\text{ms}^2$ ; a) resonance oscillations at the frequency  $\omega=2.19 \text{ rad/s}$ ; b) resonance oscillations at the frequency  $\omega=6.39 \text{ rad/s}$

## 5. Analysis of biharmonic oscillations of the systems with double well potential.

The dynamic behaviour of such systems is described by the non-linear differential Duffing-type equation. The elastic characteristic has the following form:

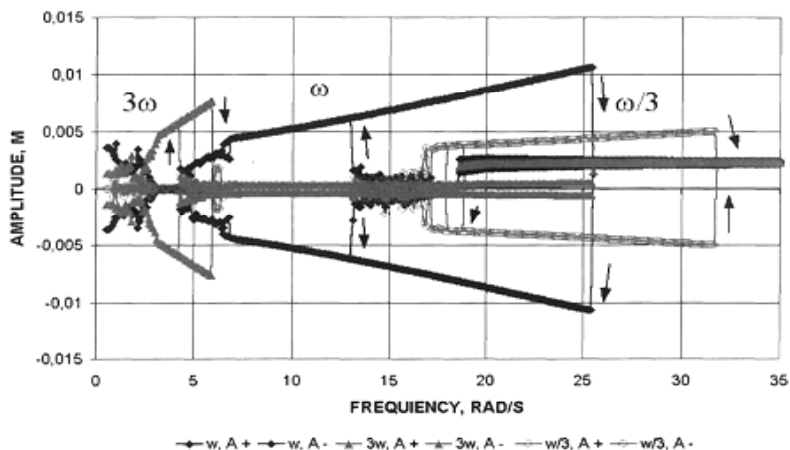
$$R(y) = -\alpha y + \beta y^3, \quad (4)$$

The values of system parameters have been taken as follows:  $m = 2; 3$ ;  $\varepsilon = 0.1; 0.5; b^{-1}$ ;  $\alpha = 408 \text{ s}^{-2}$ ;  $\beta = 7660000 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$ ;  $F = 0.15; 0.5; 1.5 \text{ ms}^{-2}$ ;  $F_1 = 0.015 \dots 3 \text{ ms}^{-2}$ .

The existence of one from three stable oscillation regimes is possible depending on the potential energy value in the system:

- «large» oscillations relative to all three equilibrium point;
- «small» oscillations relative to the upper equilibrium point;
- «small» oscillations relative to the lower equilibrium point.

The «large» oscillations possess the peculiarities of the rigid system behaviour, and «small» oscillations possess the qualities of soft systems. The character of the oscillation amplitude changing with the increase or decrease of the excitation frequencies is presented in Figure 4. The stable branches of the amplitude-frequency characteristic form five frequency ranges, for which the graphic of the time process, phase trajectories on planes and spectral characteristics are obtained. The stalls of the forced oscillation regimes from one branch to another are accompanied not only by the transition from «large» oscillations to «small», or vice versa, but also by the appearance of the combination tones.



**Figure 4. Amplitude-frequency characteristic of the system with double well potential:  $m=3$ ;  $\alpha=408 \text{ s}^{-2}$ ;  $\varepsilon=0.5 \text{ s}^{-1}$ ;  $\beta=7660000 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$ ;  $F_1=0.15 \text{ ms}^{-2}$ ;  $F_1=0.075 \text{ ms}^{-2}$**

Range I ( $\omega = 0 \div 3 \text{ rad/s}$ ) is the area of the laying-on of ultra-harmonic «small» oscillations of  $n\omega$  ( $n = 2, 3, 4, 5, \dots$ ) order on the «large» oscillations of the fundamental tone both at increasing and decreasing of the excitation frequencies.

Range II ( $\omega = 3 \div 7 \text{ rad/s}$ ) is the area of the «large» ultra-harmonic oscillations of 3 co order at the excitation frequency.

Range III ( $\omega = 7 \div 26 \text{ rad/s}$ ) is the area of the «large» oscillations of fundamental tone at the increase of excitation frequencies and the combination with the «small» ultra- and subharmonic oscillations of  $2\omega$ ,  $3\omega$  and  $\omega/2$  order at the excitation frequency decrease. It should be noted that oscillations on even harmonics are not stable because the system is symmetrical. The appearance of chaotic oscillations is also observed within this range.

Range IV is the area of «large» sub-harmonic oscillations of CO/3 order both at increasing and decreasing the excitation frequencies.

Range V is the super-resonance area where only «small» oscillations exist. In this area the forced oscillations are possible relative to one equilibrium condition as well as to another non-adjacent to it.

The possibility of occurrence of the non-adjacent stable oscillations at the fixed frequency of excitation is the peculiarity of the investigated systems. The realization of one of the stable regimes of oscillations depends on the initial conditions in a complicated manner.

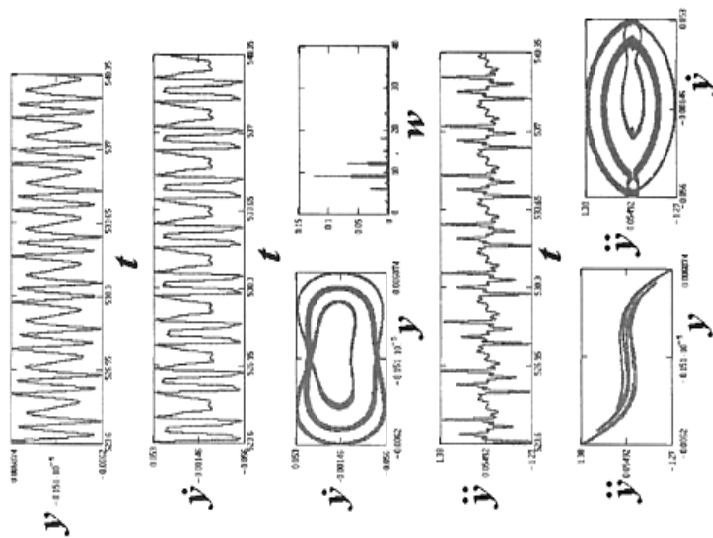
The frequencies of «large» oscillations stall for the cases of monoharmonic and biharmonic excitation are different. It is important that «skeleton» curves for oscillations on fundamental tone, ultra- and subharmonic oscillations have different angles. The amplitude of oscillations within the frequency range III is larger than if it was a monoharmonic excitation.

As shown in Figure 5 a-c, for all the types of «large» oscillations the phase trajectories are back symmetrical relative to axis  $y$  of the diagram of elastic characteristic. It allows to recognise the type of dynamic system.

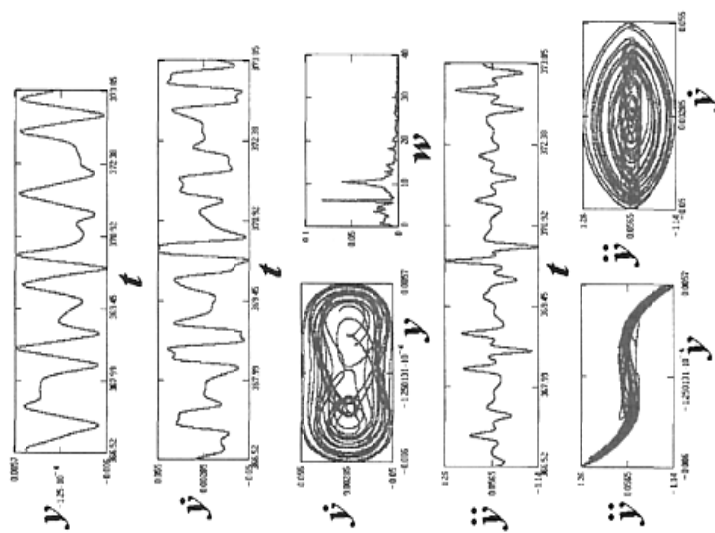
The development of qualitative methods of investigation of dynamic systems suggested by the authors is effective means of analysis and identification of dynamic systems. Simultaneous use of all three types of signals registered in time, namely displacement, velocity and acceleration allows to expand considerably the opportunities of traditional methods of investigation. The use of the given phase trajectories enables us to determine with a high degree of reliability the following peculiarities:

- presence or absence of non-linear character of behaviour of a dynamic system; type of non-linearity;
- type of dynamic process (oscillations of the basic tone, combinative

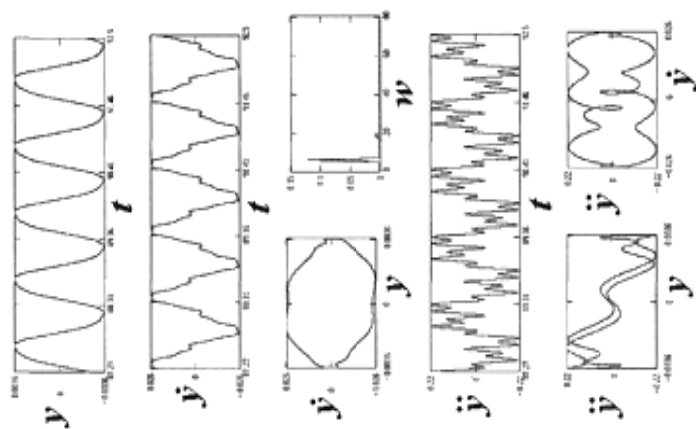
a)



b)



c)



d)

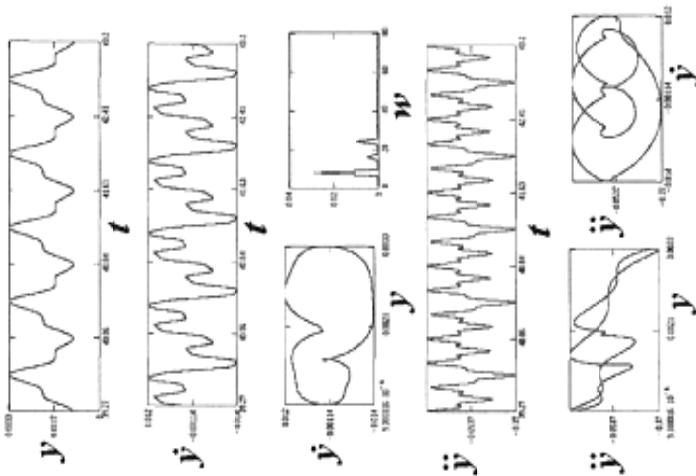


Figure 5. Time characteristic phase trajectories of the system with double well potential ( $m=3$ ;  $a=408 \text{ s}^{-2}$ ;  $\varepsilon=0.5 \text{ s}^{-1}$ ;  $\beta=766000 \text{ m}^{-2}\text{s}^{-2}$ ;  $F_l=0.15 \text{ ms}^{-2}$ ;  $F_r=0.075 \text{ ms}^{-2}$ ): a) combinative oscillations; b) chaotic oscillations; c) «large» sub-harmonic oscillations; d) «small» oscillations

oscillations, chaotic oscillations).

Unlike existing asymptotic and stochastic methods of identification of dynamic systems, the use of the suggested technique is not connected with the use of a significant amount of computing procedures, and also it has a number of advantages at the investigation of complicated oscillations.

### *References*

1. Kazakevitch M.I. and Volkova V.E. *Dynamics of systems with double well potential*. – Dnepropetrovsk: Art-Press. – 2000. – 169 p. (in Russian).
2. Kazakevitch M.I. and Volkova V.E. Identification of non-linear dynamic systems. *Proc. 7-th International Conference on Modern Building Materials, Structures and Techniques*, vol. 3. – Vilnius: Technika. – 2001. – P. 145–150.
3. Blehman I.I. *Vibrations in engineering*. – Moscow: Nauka. – 1979. – 351 p.

# **ОТОБРАЖЕНИЯ ФАЗОВЫХ ТРАЕКТОРИЙ В АНАЛИЗЕ ДИНАМИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ХАОТИЧЕСКИХ СИСТЕМ\***

## **Введение.**

Хаотическое поведение обнаруживается во многих процессах, протекающих в различных природных и технических объектах. Особенностью исследуемого класса динамических систем является существенная зависимость их поведения от начальных условий.

Концепция динамического хаоса, основы которой были сформированы в 70–80 гг. XX века, позволяет предполагать, что хотя бы в некоторых случаях за сложным временным поведением может стоять сравнительно простая математическая модель.

Задачи прогнозирования динамического поведения механических систем являются весьма актуальными. Они неразрывно связаны с проблемами идентификации этих систем. Объектом предлагаемого исследования являются существенно нелинейные динамические системы. Цель исследования состоит в разработке методов идентификации моделей принципиально нелинейных механических систем по записям хаотических процессов.

## **1. Современное состояние методов идентификации механических систем.**

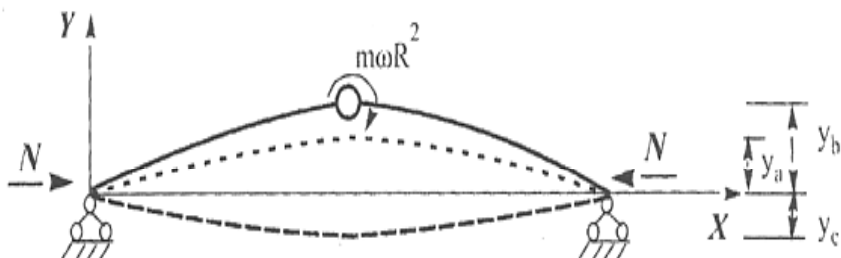
Последние два десятилетия проблемы построения математических моделей и прогнозирования динамического поведения элементов конструкций по данным экспериментальных записей вызывают повышенный интерес. Задачи идентификации различаются между собою как по своей цели – установление значений отдельных параметров динамической системы или определение преобладающего источника возмущения, так и по объему известной информации. Наиболее ответственными и актуальными являются задачи качественной идентификации выявления динамической модели колебаний элементов конструкций [3].

Область применения большинства классических методов идентификации ограничена одночастотными динамическим и процессам и. Данные методы идентификации основаны на использовании внешнего возмущения особой формы – прямоугольного импульсного или ступенчатого знакопеременного [3]. Подобные виды внешнего возмущения весьма сложны в реализации. Поскольку вместо внешне-

---

\*Опубликовано совместно с В.Е. Волковой в ж-ле «Металлические конструкции», Т. 12, № 4, Макеевка, 2006.

го возмущения, соответствующего нормальному режиму эксплуатации, для реализации данных методов требуется возмущение особого типа, то становится очевидным, что эти методы предполагают идентификацию модели механической системы вне условий нормальной эксплуатации. Таким образом, данные методы применимы только к линейным стационарным системам, в которых соотношение между внешним возмущением и откликом системы сохраняется для всех других типов возмущения.



*Рис. 1. Схема эксперимента*

Большинство современных методов качественной идентификации работают во временной области. Так, объектом их исследования являются временные процессы, а именно, записи изменения перемещений точек исследуемых систем по времени. Данные методы ориентированы на применение вейвлет преобразования, рядов Винера и Гаммерштейна. Данные подходы громоздки в реализации и предполагают применение вычислительной техники [4–6], а также необходимость хранения значительного объема исходной информации. Базисные функции, лежащие в основе этих методов, оперируют производными высших порядков (четвертого, пятого и шестого). Необходимость многократно численно дифференцировать исходный сигнал, содержащий шум, необратимо приводит к увеличению ошибок накопления и усечения, что оказывает существенное влияние на точность построения модели.

## **2. Экспериментальное исследование вынужденных колебаний стрелы.**

В качестве исследуемой механической модели был принят стрелень. Он был выполнен из полосы пружинной стали длиной  $l_1 = 2$  м и размерами поперечного сечения  $b \times h = 0,05 \times 0,0056$  м. Расстояние между опорными отверстиями составляло

$l = 1,955$  м. Геометрические характеристики сечения стержня составили: площадь сечения  $A = 2,8 \cdot 10^{-4}$  м<sup>2</sup> и момент инерции  $I = 7,32 \cdot 10^{-10}$  м<sup>4</sup>.

Для исследования вынужденных нелинейных колебаний гибкого стержня на стадии монтажа модели стержню было приложено начальное продольное усилие сжатия  $N$ . Величина усилия осевого сжатия принималась больше эйлеровой силы потери устойчивости, равной

$$N_E = E I (\pi / L)^2 = 363 \text{ Н}, \quad (1)$$

После обжатия прямолинейная форма продольной оси стержня становилась неустойчивой (рис. 1). Устойчивым положениям равновесия стержня соответствовали статические начальные прогибы  $y_b = 0,058$  см и  $y_c = 0,006$  м.

Для исследования вынужденных колебаний гибкого стержня был использован комплект измерительно-регистрирующей аппаратуры, в состав которого входили средства регистрации, преобразования, хранения сигналов, а также персональный компьютер.

Применение компьютера позволило автоматизировать процедуру численной обработки, дало возможность применять стандартные графические пакеты для представления сигналов.

Величина амплитуды внешнего моногармонического возмущения зависела от скорости вращения возбудителя колебаний и определялась по формуле

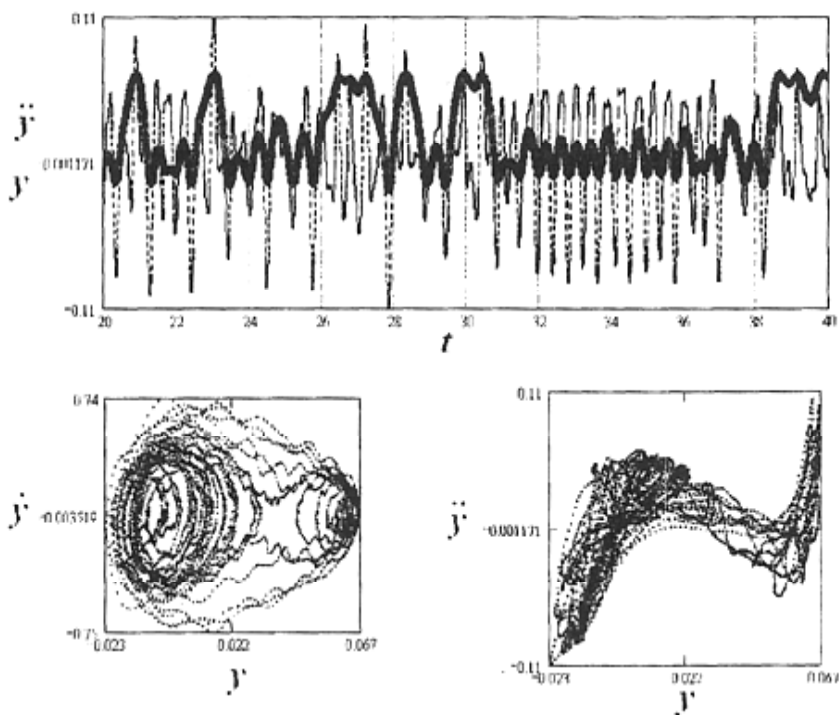
$$P = m_i a = m_i \omega^2 R_i, \quad (2)$$

где  $m_i$  – масса эксцентрика;  $a$  – центробежное ускорение;  $\omega$  – частота возбудителя колебаний;  $R_i$  – радиус вращения эксцентрика.

Форма колебаний измерялась посредством регистрации сигналов в процессе всего эксперимента. Формы изгибных колебаний определялись путем одновременной записи сигналов всех пяти тензодатчиков, расположенных на расстояниях  $1/8 l$ ,  $1/4 l$ ,  $1/2 l$ ,  $3/4 l$  и  $7/8 l$  от левой опоры. Изучение полученных осциллограмм показало, что колебания для всех пяти точек стержня одинаковы, а амплитуды колебаний возрастают от крайних сечений к среднему.

### 3. Отображения фазовых траекторий хаотических колебаний.

При динамических испытаниях гибкого стержня на действие периодического внешнего возмущения были обнаружены диапазоны частот  $l/l$ , в которых существуют несколько устойчивых режимов колебаний и получены временные процессы хаотических колебаний. Хаотические колебания представляют собою каскад бифуркаций удвоения периода (рис. 2).



**Рис. 2. Хаотические колебания экспериментальной модели**

Если колебательный процесс, несложен и достаточно изучен, то решение задачи идентификации не представляет особых трудностей. Иначе обстоит дело с хаотическими процессами, описание которых чаще всего выполняется на основе статистических закономерностей, несмотря на то, что их описание в виде дифференциальных уравнений известны.

Основным отличительным свойством таких систем является то, что предсказать их поведение на длительное время невозможно, незначительная ошибка в задании начальных условий, спустя короткое время, приводит к тому, что процесс переходит на другую траекторию. Процессы в таких системах эволюционируют вследствие рассеяния энергии в системе.

В последние годы в идентификации хаотических процессов наметились два основных подхода. Первый – основан на изучении поведения физической модели достаточно простого объекта, кото-

рая представлена нелинейными дифференциальными уравнениями. Заметим, что для реальной системы чаще всего крайне сложно найти описание с помощью дифференциальных уравнений. Второй подход к идентификации хаотических систем базируется на наблюдении хаотических процессов и построении аттрактора в так называемом реконструированном фазовом пространстве, которое восстанавливается из наблюдаемого временного ряда, представляющего собой последовательность дискретных значений какой-либо переменной, генерируемой системой.

Применим относительно простой метод непараметрической идентификации, который можно использовать для широкого класса механических систем с одной степенью свободы, проявляющих нелинейные свойства, присущие реальным системам. Метод основан на использовании информации относительно перемещений и ускорений [2], действующего на систему внешнего возмущения.

Предположим, что исследуемая физическая модель может быть описана дифференциальным уравнением второго порядка

$$m_1 \ddot{y} + h(y, \dot{y}) + r(y) = P(t), \quad (3)$$

где  $m_1$  – масса одного метра длины стержня,  $h(y, \dot{y})$  – диссипативная сила,  $r(y)$  – упругая сила,

Обозначим множество точек, описывающих измеренные значения перемещений, скоростей и ускорений системы (2) в дискретные моменты времени  $t = t_k = t_0 + kT$   $\{\Pi_k\} = \{y_k, \dot{y}_k, \ddot{y}_k\}$ ,  $k = 1, \dots, n$ , где  $T$  – период внешнего возмущения. Если мы представим эти точки в расширенном фазовом пространстве  $(y, \dot{y}, \ddot{y})$ , то получим набор точек, параметрически связанных по времени  $t_k$ .

Предварительно пренебрегая влиянием диссипации, можно предположить, что характеристика упругой силы может быть определена из соотношения:

$$r(y_k) = c - m_1 \ddot{y}_k. \quad (4)$$

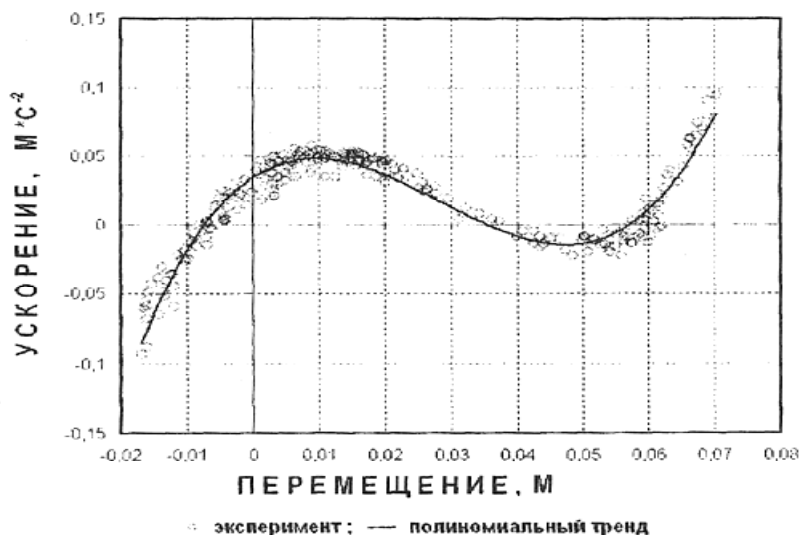
Для построения отображений фазовых траекторий была выполнена обработка временных процессов ускорения и перемещений длиной 252 периода внешнего возмущения. Построение отображений фазовых траекторий на плоскости  $(y, v)$  близ ко к методу обработки временных процессов по пикам. Оценка значений ускорений и перемещений выполнялась в дискретные моменты времени, удовлетворяющие условию  $c = F(t_o) = F(t_k)$  [7] (рис. 3).

Анализируя представленные на рис. 3 отображения фазовых траекторий, можно отметить рассеяние точек в области резонансных амплитуд «малых» колебаний [2]. Основной причиной этого эффекта

является наличие высокочастотных шумов с амплитудами, соизмеримыми с амплитудами «малых» колебаний. Путем осреднения полученных значений был получен полиномиальный тренд. Кривая тренда представляет собою несимметричную кубическую параболу, пересекающую ось перемещений в точках  $y_1 = 0,06$  м,  $y_2 = 0,039$  м и  $y_3 = -0,006$  м, близких по значению к координатам положений равновесия стержня  $y_b = 0,058$  м,  $y_a = 0,034$  м и  $y_c = -0,006$  м. Для оценки статистической достоверности полученного полиномиального тренда, было определено значение множественного коэффициента детерминации, которое составило  $R^2 = 0,835$ .

#### 4. Основные выводы.

В статье предложен относительно простой метод непараметрической идентификации, который может быть применен для широкого класса механических систем с одной степенью свободы, проявляющих нелинейные свойства присущие реальным системам. Метод основан на использовании информации об ускорениях, перемещениях, а также внешнем возмущении, определяемых методами качественной теории, а также регрессионными методами и аппроксимирующими выражениями упругой характеристики как: функции от обобщенной координаты.



*Рис. 3. Отображения фазовых траекторий хаотических колебаний экспериментальной модели*

Предлагаемый метод анализа детерминировано-хаотических процессов открывает новые возможности для обработки данных. Наиболее интересным является то, что при всей своей внешней простоте позволяет получить максимум информации об исследуемом процессе или явлении. Возможности предлагаемого метода ограничены только уровнем шумов, погрешностью измерения и объемом выборки обрабатываемого процента.

Перспективным для технических приложений является применение описанных приемов для количественного определения параметров детерминированных хаотических систем.

### *Литература*

1. Волкова В.Е. Экспериментальное исследование вынужденных колебаний гибкого стержня // Теоретические основы строительства: Сб. науч. тр. ПГАСиА. – Днепропетровск, 2006. – С. 725, 530.

2. Казакевич М.И., Волкова В.К. Фазовые траектории нелинейных динамических систем. Атлас. Днепропетровск: Наука и образование, 2002. – 94 с

3. Плахтиенко Н.И. Методы идентификаций нелинейных механических колебательных систем // Прикладная механика. 2000. – Т 36, № 12. – С. 38–68.

4. Kulisiewics M. **Modelling and identification of nonlinear mechanical systems under complex load.** Wroclaw (Poland): Oficyna wydawnicza Politechniki Wroclawskiej, 2005. – 190 p.

5. Masri S.F., Caughey T.K. A nonparametric identification technique for non-linear dynamic problems // Trans. ASMEJ. Appl. Mech. – 1979. Vol. 46. – P. 433–447.

6. Tjahjowido T., Al-Bender F., Von Brussel H., Identification of backlash in mechanical system // Proc. of the ISMA 2004. – P. 2195–2209.

7. Volkova V.E., Schneider K. Qualitative theory and identification of dynamic system with one degree of freedom // Прикладная механика, 2005. – Т. 11, №6. – С. 134–139.

# PHASE TRAJECTORY VARIATIONS IN DYNAMIC SYSTEMS IN AN EXPANDED PHASE SPACE\*

## **Abstract.**

The authors of this article propose to expand the phase space by taking into account the phase planes, namely, «acceleration – displacement» and «acceleration – speed». By so doing, they go over to the three-dimensional phase space, which is limited with three coordinate axes: displacement, velocity and acceleration. An interest taken into accelerations in dynamic systems is conditioned by the fact that these accelerations more sensitive to high-frequency components in oscillating processes. The authors have defined behavioral peculiarities of phase trajectories and their mappings in the expanded phase space.

The article presents the results of experimental, analytical and numerical investigations of an essentially nonlinear dynamic system. The authors have performed the structural analysis of the phase trajectories obtained in the test records for subharmonic, combined and chaotic oscillations in the expanded phase space.

## **Key words.**

System with double-well potential, chaotic oscillation, phase trajectories, analytical and experimental investigations.

## **1. Phase trajectories of oscillations of nonlinear systems in the expanded phase space.**

Dynamic behaviour of mechanical systems is usually presented as oscillating processes in various graphic forms such as time processes, the Lissajous patterns and hodograph. Such patterns of presentations enable to determine the type of a process and to perform numerical estimations of its characteristics, but do not disclose any properties of the governing system. Unlike them classic phase trajectories have the row of advantages.

A phase space in classic mechanics is represented as a multidimensional space. The number of measured values for a phase space is equal to the doubled number of degrees of freedom of the system being investigated [1].

---

\*Опубликовано совместно с В.Е. Волковой в Трудах: N.N. Semenov Inst. of Chem. Phys. Russian Acad. of Sci. Intern. Conf. «Nonlinear Phenomena in Polymer Solids and Low-Dimensional Systems». Moscow, Russia, 7-10 July, 2008.

The state of the system is presented as a point in the phase space, and any change in the system state in time is depicted as the displacement of the point along a line called a phase trajectory. The image on phase plane  $(y, \dot{y})$  is a more vivid presentation because it depicts inharmonious oscillations particularly well. Each phase trajectory represents only one definite clearly defined motion. A disadvantage of phase trajectories  $(y, \dot{y})$  consists in the fact that they do not provide for the immediate presentation of oscillating process in time. However, this drawback is compensated by a significant advantage. The geometric presentation of a single phase trajectory or a set of trajectories allows coming to important conclusions about the oscillation characteristics. It is foremost, true with the oscillations, which are described with nonlinear differential equations.

As it has been shown by the investigations of several authors [4, 5], the expansion of a phase space by taking into account the phase planes  $(y, \ddot{y})$  and  $(\dot{y}, \ddot{y})$  substantially promotes the efficiency in analyzing a dynamic system behaviour. Hereby, we pass on to a three-dimensional phase space confined with three coordinate axes, i.e. displacement, velocity and acceleration. An interest taken into accelerations in dynamic systems is conditioned by the fact that these accelerations are more sensitive to high-frequency components in oscillating processes. For the sake of illustration let us compare the time processes and the phase trajectories in a linear system and a nonlinear Duffing system (Fig. 1).

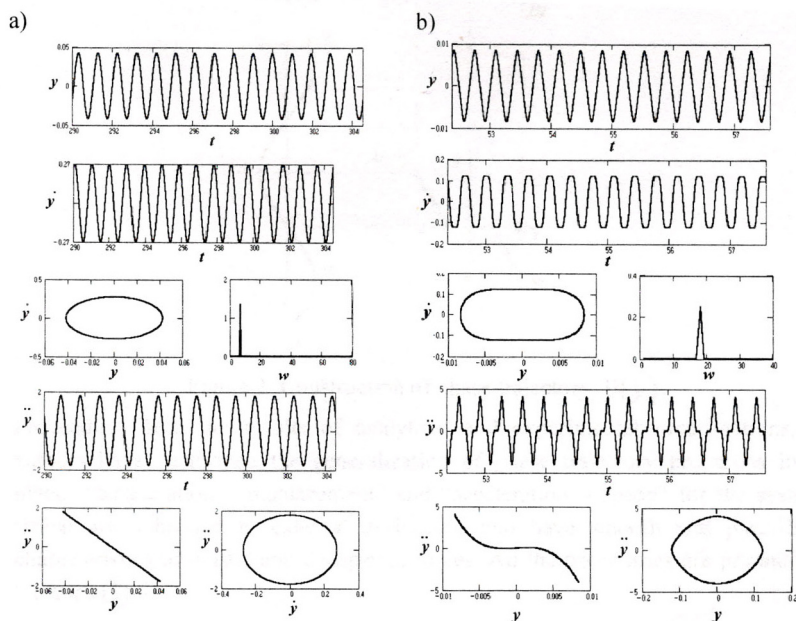
Thus, while analyzing time processes  $y(t)$  and  $\dot{y}(t)$  of resonance oscillations at the outer excitation frequencies in both systems, one can easily see that both processes  $y(t)$  and  $\dot{y}(t)$  are similar and each of them represents a monoharmonic process. The same conclusions also ensue from the analysis of spectral characteristics. At the same time, the recordings of the time processes  $\ddot{y}(t)$  are significantly different. The recordings of the time processes  $\ddot{y}(t)$  of the nonlinear Duffing system, unlike those of the linear systems, bear the areas of instantaneous rest.

Phase plane  $(y, \ddot{y})$  is of particular interest in the analysis of dynamic system behaviour, because it allows a more evident interpretation of power relations in the dynamic system under investigation. Namely, the area confined by curve  $\ddot{y}(y)$  and axis  $(0, \ddot{y})$  is equal to work, and the anticlockwise motion around its contour corresponds to the energy spent by the system for one cycle of oscillating. Another important characteristic of phase trajectories on plane  $(y, \ddot{y})$  is the fact that dependence  $\ddot{y}(y)$  for autonomous non-conservative systems is a mirror symmetric image in relation to axis  $(0, \ddot{y})$  to the graph of changes in elastic force characteristic.

It is precisely diagram  $\ddot{y}(y)$  that enables to define the type and the level of non-linearity in a system. The geometric presentation of an individual

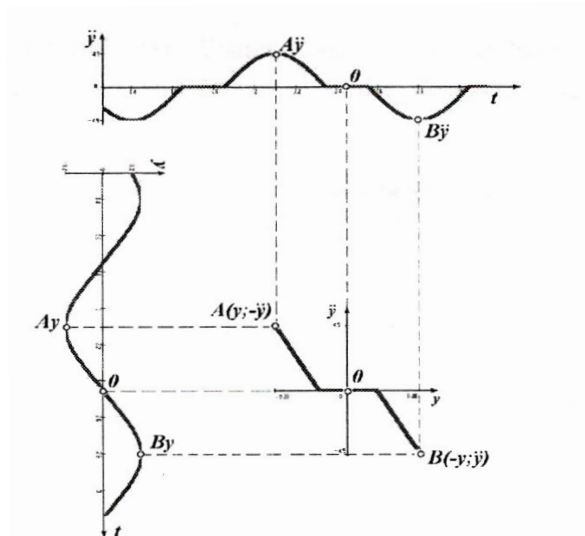
phase trajectory or of a family of trajectories allows coming to important conclusions about the properties of a model of the system being studied. Incorporation of phase trajectories on planes  $(y, \dot{y})$  and  $(\dot{y}, \ddot{y})$  enhances the capabilities of classic methods of the qualitative theory due to their extension onto the class of inverse problems of dynamics.

The major difficulty of formation of phase trajectories  $\dot{y}(y)$  and  $\ddot{y}(\dot{y})$  consists in the necessity to exclude parameter of time  $t$  from the appropriate dependencies. It's not always possible to perform this operation analytically. Accepting consistently appropriate pairs of parameter values  $y(t)$  and  $\dot{y}(t)$  or  $y(t)$  and  $\ddot{y}(t)$  it is possible to obtain phase characteristic data (Fig. 2).



**Figure 1. The time processes and the phase trajectories: a) in a linear system; b) in a nonlinear symmetrical Duffing system**

Proceeding from the results of analytical and experimental investigations, the authors have performed the generalization of phase trajectory properties in the planes «acceleration – displacement» and «acceleration – speed» for the systems, which are subjected to external excitations and have smooth and piece-linear characteristics of elastic and dissipative forces. All the trajectories are presented in the atlas [5].



**Figure 2. Construction of phase trajectory**

## **2. Identification of dynamic models of mechanical systems.**

In the past two decades, the issues of construction of mathematical models and prediction of dynamic behaviour of structural elements proceeding from recorded experimental data have attracted considerable interest.

In spite of intensive investigations into the above mentioned matter, which have been undertaken in the scientific centers in different countries (supported by numerous publications on theoretical research and experiments, a number of specialized conferences [8, 9, 11] as well as the important results obtained, there is no, so far, the only universal effective approach, which would allow for correct determination, prediction and analysis of dynamic properties in construction elements. Most of the methods of structural identification are based on the use of special types of outer excitation for a wide range of frequencies, such as symmetric monoharmonic excitation and rectangular impulse. These types of excitation are often unrealizable in mechanical systems. The methods based on the Fourier transformation do not allow classifying and localizing non-linearity [6, 7] and are inapplicable to investigating stochastic processes [3, 8, 9, 11]. It should be also noted that the application of Wiener series and Hilbert transformation for identification of non-smooth non-linear dynamic characteristics is unjustified. [9, 11].

### 3. Discrete mappings of phase trajectories in the expanded phase space.

Let us consider a mechanical system described by the following differential equation:

$$m\ddot{y} + H(y, \dot{y}) + R(y) = 0, \quad (1)$$

where  $m$  is mass; functions  $H(y, \dot{y})$  and  $R(y)$  describe dissipative and elastic force, respectively.

In order to obtain information about the structure of forces  $H(y, \dot{y})$  and  $R(y)$ , let us apply outer periodic excitation to the system (1). Thus, we investigate the system

$$m\ddot{y} + H(y, \dot{y}) + R(y) = F(t), \quad F(t + T) = F(t). \quad (2)$$

The qualitative analysis of  $T$ -periodic oscillations of the system (1) is based on studying Poincaré trajectories on phase plane  $(y, \dot{y})$ . It consists in studying distinctive trajectories (equilibrium conditions, limit cycles, separatrix) and their stability on plane  $(y, \dot{y})$  or so-called the phase plane. Acceleration of system  $y$  at every moment of time  $t$  is uniquely determined by displacement  $y$  and velocity  $\dot{y}$  according to equation (2).

#### 3.1. Testing for non-linearity.

The methods used for detection of non-linearity in mechanical systems are based on application of known regularities of dynamic system behaviour. There are well-known inherent to a system, which give the grounds to define it as a nonlinear one; these features are: 1) a failure of the principle of superposition; 2) the presence of harmonic components in the response of the system at the frequencies, which are not inherent to in the spectrum of outer excitation; 3) non-isochronous characteristics, i.e. the dependence between oscillation frequencies and amplitudes; 4) occasional occurrence of several stable oscillating regimes at a fixed frequency of outer excitation.

It is worth to note that these characteristics do not show up in all dynamic systems. The methods based on the first one from the above mentioned features acquired the widest application. So, in order to expose he failure of the principle superposition, it is necessary and sufficient to test the system under conditions of separate and combined actions of two different test signals. In the case of the investigated mechanical system is linear, the response from the sum of two test excitations will be equal to the sum of the responses obtained under conditions of separate actions of two test excitations. However, with a number of mechanical systems variations in the amplitudes of outer excitation are unrealizable because it can result in destruction or induce dangerous regimes of oscillations. This method is quite cumbersome in realization.

The isochronous nature of oscillations of the investigated system

does not always allow making a conclusion about linearity of an elastic force characteristic. It is known that among the class of systems with asymmetrical types of elastic force characteristics there are the systems, in which the period of oscillations is constant and does not depend on the amplitudes. For example, those are the systems with bilinear and tangential types of elastic force characteristics [6].

We will assume that functions describing dissipative and elastic forces are unknown to us. The first question consists of that, to set, the system is linear or not.

Let us denote a sequence of points by  $\{\Pi_k\} = \{y_k, \dot{y}_k, \ddot{y}_k\}$ ,  $k = 1, \dots, n$ , describing the measured displacement, velocity and acceleration in the system (2) at the discrete moments of time  $t = t_k = t_0 + kT$ , where  $T$  is a period of the outer excitation. When we represent these points in the extended phase space  $(y, \dot{y}, \ddot{y})$  we obtain a set of points parameterized by time  $t_k$ .

Ideally, a measurement error is nill, then

$$m\ddot{y}_k + H(\bar{y}_k, \dot{\bar{y}}_k) + R(\bar{y}_k) = c \text{ for } k = 1, \dots, n, \quad (3)$$

where  $c = F(t_0) - F(t_k)$  is a constant value for all values of  $k$ . That means that all points are located on the surface, which can be described by equation  $m w + h(u, v) + r(u) = 0$  in  $(u, v, w)$  space.

If functions  $H(y, \dot{y})$  and  $R(y)$ , which describe dissipative and elastic force characteristics in the mechanical system, are linear, then the surface in the expanded phase space transforms into a plane, i.e. all points of sequence  $\Pi_k$  are to lie on plane  $E$ . Then there are two real numbers  $a_1$  and  $a_2$ , and with these numbers all points of sequence  $\Pi_k$  have to satisfy the condition

$$m\ddot{y}_k + a_1\dot{\bar{y}}_k + a_2\bar{y}_k = c \text{ for } k = 1, \dots, n, \quad (4)$$

which is the evidence of the system linearity. Let us change the amplitude of governing force  $F(t)$  for  $a_3 F(t)$  where  $a_3 > 0$  is the real positive number. Then, if the system under investigation is a linear one, the relevant multitude of results for measured value  $\Pi_k^{(a_3)}$  meets the condition  $\Pi_k^{(a_3)} = a_3 \Pi_k$ , that the second evidence of linear of the system.

If there are constants  $a_1$  and  $a_2$  such that all measured points lie on the plane determined by the values of  $a_1$ ,  $a_2$ , and  $c$  or in the vicinity of that plane, we can make a conclusion that the system (2) is linear or weak non-linear.

In the case of linearity of functions  $H(y, \dot{y})$  and  $R(y)$ , which describe dissipative and elastic force characteristics in the mechanical system, all

points of projections of sequence  $\{\Pi_k\}$  along plane  $E$  on planes  $(\bar{y}, \bar{y})$ ,  $(\ddot{y}, \bar{y})$  and  $(\ddot{y}, \dot{y})$  are located on a straight line.

#### 4. Experimental investigations of forced oscillations in a rod.

A rod manufactured from spring steel and having a length of  $l=2\text{m}$  with cross-sectional dimensions  $b \times h = 5 \times 5,6\text{mm}$  was investigated as a mechanical model.

At the stage of mounting, the rod was subjected to initial longitudinal compression  $N$ . The value of this compression force was chosen greater than the value of Eulers force under the first form of the loss of stability equal to

$$N_E = EI(\pi/l)^2 = 363 \text{ H.}$$

As a result, the straight-line form of the rod longitudinal axis became unstable. The static initial displacements in the middle point of the rod length, either in  $y_b = 0,058\text{m}$  or in  $y_c = -0,006\text{m}$ , corresponded to stable curvilinear positions of equilibrium.

The complete set of measuring and recording instruments utilized in investigation of forced oscillations in the flexible rod included means for registration, transformation and storage of signals, and also a personal computer [2].

The value of amplitude of external monoharmonic excitation depended on the motor rotational speed and was determined by the equation:

$$P = m_i a = m_i \omega^2 R_i, \quad (5)$$

where  $m_i$  is the weight of an eccentric,  $a$  is centrifugal acceleration,  $\omega$  is a motor rotational speed,  $R_i$  is a radius of eccentric rotation.

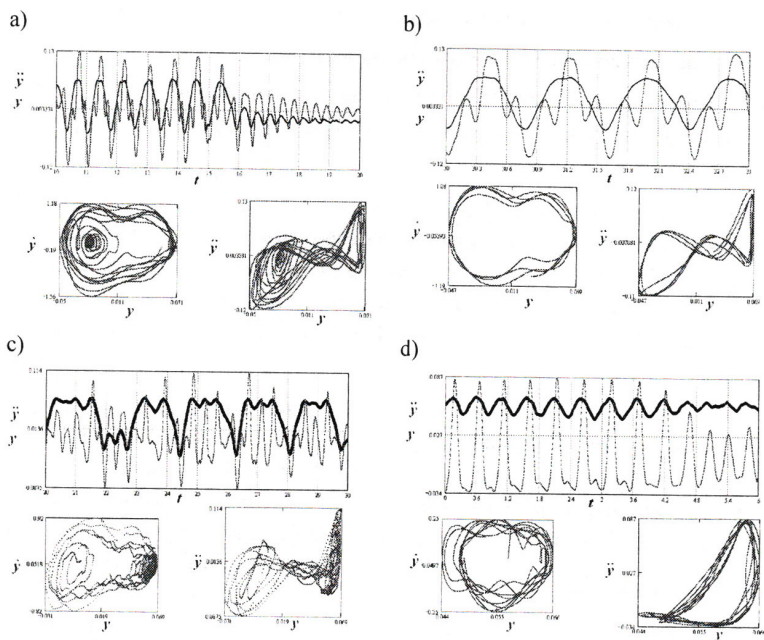
To study oscillation modes in the flexible rod, the gauges were placed at the points spaced at  $1/8$ ;  $3/8$ ;  $1/2$ ;  $3/4$   $l$  from a rigid support. The analysis of the oscillograms proves that the oscillation phases are identical in all points on the rod, and the oscillation amplitudes increase from the end sections towards the middle. Figures 3.b and 3.c show the typical regimes for «large» subharmonic and ultraharmonic forced oscillations, those for chaotic and for free oscillations in the investigated system.

Figure 3.a shows the trajectories on plane  $(y, \dot{y})$  at free oscillations of the rod; it clearly illustrates the transition from the oscillations typical for the systems with «rigid» elastic force characteristics to the oscillations inherent to the systems with «soft» elastic force characteristics. Thus, the initial loops of phase trajectory on plane  $(y, \dot{y})$  are shaped as a negative cubic parabola and correspond to the systems with rigid characteristics. The end loops of the phase trajectories on plane  $(y, \dot{y})$  are sloped to the right, the characteristic peculiar for the soft systems. Due to considerable

dissipation of oscillation energy and also because of run-outs, the center of phase trajectories changes its position with each period of oscillations. The analysis of the trajectories experimentally obtained on planes  $(y, \dot{y})$  and  $(y, \ddot{y})$  testifies to their topological similarity to the trajectories represented in the monograph [4].

There were the steady regimes of subharmonic oscillations of the rod in the frequency range of  $\omega = 14,5 \dots 16,5$  rad/s of outer excitation. Oscillogrammes and phase trajectories for subharmonic oscillations of  $\omega/3$  order is shown in Fig. 6.b. The effect of subharmonic oscillations on the structure of phase trajectory  $(y, \dot{y})$  revealed itself as intersections. Thus, the number of loops was the same as the subharmonic order, i.e. three.

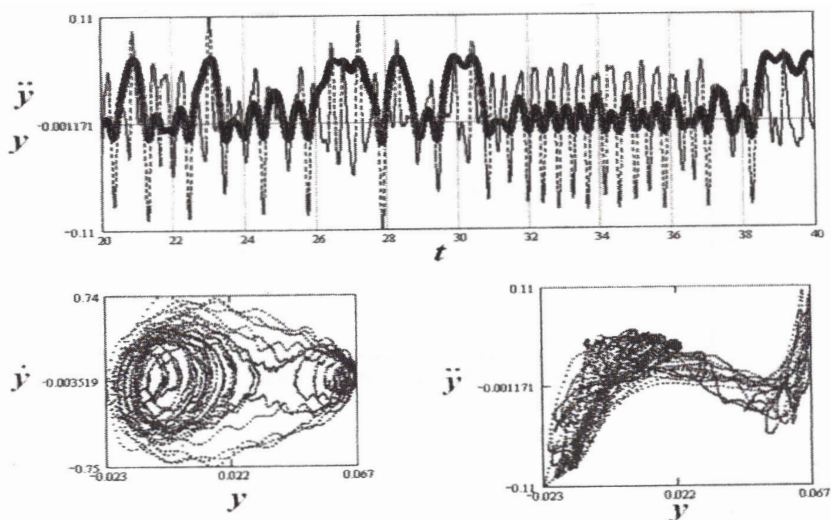
The phase trajectories represented in Fig. 3 are similar to the trajectories obtained for the asymmetrical systems with a double-well potential. They clearly indicate to the presence of cubic non-linearity in elastic force characteristics of the investigated system, and to the availability of two non-adjacent steady regimes of «small» oscillations. That all permits to classify the system as that with a double-well potential.



**Figure 3. Experimental time processes and phase trajectories of oscillations in the rod: a) free oscillations; b) subharmonic oscillations of  $\omega/3$  order; c) combined oscillations; d) «small» oscillations**

#### 4.1. Phase trajectories mappings of chaotic oscillations.

When the flexible rod was subjected to dynamic testing under periodic actions of the outer excitations, it was revealed that there are both frequency ranges [2], which envelop several stable regimes of oscillations, and time processes of chaotic oscillations [1]. The chaotic oscillations constitute cascades of bifurcations of a period doubling (see Fig. 4).



*Figure 4. Chaotic oscillations of a model*

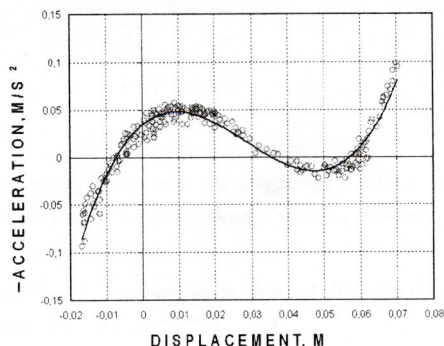
The main peculiarity of the chaotic systems is unpredictability of their behavior for a prolonged period of time: even the slightest error in specified initial conditions shortly results in the process transaction onto another trajectory. The evolution of processes in such systems occurs due to the dissipation of energy in them. In recent years, two principal approaches toward the identification of the chaotic processes have been noted. The first approach is based on studying the behavior of a physical model of a rather simple object, which is represented with nonlinear differential equations. It is worth to note that in most cases to find a description with differential equations for a real system is frequently an extremely difficult task. Another approach toward the identification of the chaotic systems is based on the observation of the chaotic processes and subsequent construction of an attractor in, as it called, a re-designed phase space, which is reconstructed in accordance with a time series observed: such a series constitute a sequence of discrete values of a certain variable generated by the system.

Let's take a fairly simple method [10] for the nonparametric identification, which is applicable for a wide class of the mechanical systems with one degree of freedom and possesses non-linear properties inherent to real systems. This method makes use of information about displacements and accelerations [2] as well as the outer excitation affecting the system.

Using equation (3) and preliminary ignoring the effects of the energy dissipation, we can assume that the characteristic of the elastic force can be determined from the relationship:

$$R(y_k) = c - m_1 \ddot{y}_k. \quad (6)$$

The time processes of acceleration and displacements having the lengths equal to 252 periods of outer excitations were adequately processed and used in the mapping construction of the phase trajectories. The principle of mapping construction of the phase trajectories on plane  $(y, \ddot{y})$  is much the same as the processing of time processes by peaks. The estimation of the acceleration and displacement values were performed at discrete moments of time meeting condition  $c = F(t_0) = F(t_k)$  [10] (Fig. 5).



**Figure 5. Mappings of the phase trajectories of the chaotic oscillations in the experimental model**

A closer look at the mappings of the phase trajectories presented in Fig.5 shows scattering of points in the range of resonance amplitudes of «small» oscillations [2]. The main reason for this phenomenon is the presence of high-frequency noise having the amplitudes commensurable to the amplitudes of «small» oscillations. By averaging the data obtained in the experiment, a polynomial trend was derived. The trend curve has the shape of an asymmetrical cubic parabola intersecting the axis of the displacements in points  $y_1 = 0,06$  m,  $y_2 = 0,039$  m and  $y_3 = -0,006$  m, agreeing closely with the values of the coordinates  $y_b = 0,058$  m,  $y_a = 0,034$  m and  $y_c = -0,006$  m of the rod equilibrium state. To verify statistical reliability of the polynomial trend obtained, the multiple factor of determination was calculated and found equal to 0,835.

## 5. Conclusions.

A fairly simple method for nonparametric identification described in this article can be applied to a wide class of mechanical systems having one degree of freedom and manifesting nonlinear properties inherent to real systems. This method is based on the use of information on accelerations, displacements as well as outer excitation, which can be determined by the techniques of the qualitative theory and also by the regression methods and approximating expressions of the elastic characteristic as functions derived from generalized coordinates.

The suggested method for analysis of the detrimentally chaotic processes provides fresh approach to data processing. The most significant feature of this method is that, in spite of its simple appearance, it enables to obtain maximum information about an investigated process or a phenomenon. The applicability of the suggested method is limited by noise levels, measuring errors or duration of a process under study. The engineering applications of the suggested method are very promising in identification of parameters in the determined chaotic systems.

## *References*

1. Arnold V.I., Kozlov V.V., Neishtadt A.I. (1985) Mathematical Aspects of Classical and Celestial Mechanics. VINITI: 304.
2. Volkova V.E. (2005) Experimental research of forced oscillations in a flexible rod. Fundamentals of Civil Engineering: 525-530.
3. Grop. (1979) Identification of mechanical systems. Mir: 312.
4. Kazakevitch M. I., Volkova V. E. (2002). Phase Trajectories of Non-linear Dynamic Systems. The Atlas. Nauka i Obrazovaniye Publ. House: 94.
5. Kazakevitch M.I., Volkova V.E. (2000). Dynamic of the systems with double-well potential. Art-Press: 60.
6. Kononenko V.O., Plakhtiyenko M. P. (1976). Methods of Identification of Mechanical Oscillating Systems. Naukova dumka: 114.
7. Plakhtiyenko M.P., Methods of Identification of Mechanical Oscillating Systems (2000), Prikladnaya mekhanika. vol. 36, No. 12 : 38-68.
8. Adams D.E., Allemang R.J. (1998). Survey of nonlinear detection and identification techniques for experimental vibrations. Procc. of ISMA23, 1998: 269-280.
9. Kerschen G., Worden K., Vakakis A.F., Golinval J.-C. (2006.) Past, present and future of nonlinear system identification in structural dynamics. Mechanical Systems. Signal Process.-vol. 20 (3): 505-592.
10. Volkova V.E., Schneider K. (2005) Qualitative theory and identification of dynamic system with one degree of freedom // Prikladnaya mekhanika. vol. 41, No. 6: 134-139.
11. Worden K., Tomlinson G.R. (2001). Nonlinearity in Structural Dynamics: Detection, Identification and Modelling. Institute of Physics Publications: 678.

# APPLICATION OF THE EXTENDED PHASE TRAJECTORIES TO IDENTIFICATION OF CHAOTIC SYSTEMS\*

## Nomenclature.

- $b \times h$  are the width and the height of a rod cross section;  
 $c$  is a constant value;  
 $h(y, \dot{y})$  is dissipative force;  
 $E$  is a Young's modulus value;  
 $k$  is a natural number;  
 $l$  is the length of a rod;  
 $m$  is the mass per meter of a rod;  
 $m_1, m_2$  are masses of eccentrics;  
 $P(t)$  is outer excitation;  
 $R_1, R_2$  are radii of rotation of eccentrics;  
 $r(y)$  is an elastic force value;  
 $T$  is a period of outer excitation;  
 $t$  is a time value;  
 $y, \dot{y}, \ddot{y}$  are displacement, velocity and acceleration values, respectively;  
 $\{\Pi_k\} = \{y_k, \dot{y}_k, \ddot{y}_k\}$  is a set of the measured values of displacement, velocity and acceleration, respectively;  
 $\delta$  is a decrement value;  
 $\omega_p, \omega_u$  are frequency values of free oscillation with relative to the top and lower equilibrium positions.

## 1. Introduction.

Chaotic behaviour is observed in a great number of processes which occur in various natural and technical objects. A specific feature of dynamic systems in the investigated class consists in their large sensitivity to initial conditions.

The concept of dynamic chaos, the fundamentals of which were formulated in 1970–1980 s of the twentieth century, allows us to assume that, at least in few cases, a complicated time behaviour can be represented by a rather simple mathematical model.

---

\*Опубликовано совместно с В.Е. Волковой в ж-ле «Inverse Problems in Science and Engineering», Publisher Taylor and Francis, Vol. 17, № 2, March 2009, 203–212, а также представлено на Конференции «Inverse Problems, Design and Optimization Symposium», Miami, Florida, USA, April 16–18, 2007.

Prediction of dynamic behaviour of mechanical systems is currently a topical issue. It is inextricably linked with the problems of identification of such systems. The subject of this research is principally non-linear dynamic systems. The prime objective of this research is to develop methods for identification of models of essentially non-linear mechanical systems by recording chaotic processes occurring in the systems.

## **2. The current state of the art in the methods of identification of mechanical systems.**

The construction of mathematical model satisfactorily describing or predicting operation of object, process or system is an integral part of any problem of prediction of dynamic behaviour of mechanical systems.

The identification assumes the construction of model in an according to the results of experimental observation over its behaviour. Thus, as a rule, it is necessary to solve, at least, two different problems. First task is determining the structure of model to within accuracy of separate parameters in relation to one or another purpose of interest and second task is evaluating the numerical values of the unknown parameters of a model. A rather broad number of the scientific publications are dedicated to methods of solution of the second type of problems for one way or another chosen structure of a model: the parametric identification.

Detecting, classifying and modeling non-linear dynamic systems are difficult because there is no method that is superior to all other methods for all systems in all instances. It can be explained by highly individualistic nature of non-linear systems. A number of alternative approaches have been proposed for the nonlinear mechanical systems with the number surveys and monograph available [1-4].

In the past two decades, the issues of construction of mathematical models and prediction of dynamic behaviour of structural elements proceeding from recorded experimental data have attracted considerable interest. The challenges in identification vary in both the purpose of identification (e.g. either to determine the values of certain parameters in a dynamic system or to specify a source of dominating excitation) and a volume of available information. The most critical and pressing challenges lay with qualitative identification, i.e. detection of a dynamic model of oscillations for every structural element [4].

In most cases the area of application of the conventional methods of identification is limited to monochromic dynamic processes. Such

methods of identification rely on outer excitation of a special form, e.g. either a rectangular pulse or white noise [4], Feasibility of these types of outer excitation is rather questionable. Due to the fact that the application of these methods requires special types of excitation instead of outer excitation, which is typical of normal operating conditions, it is quite clear that these methods are presumed for identification of mechanical system models outside normal conditions of operation. Thus, these methods are applicable exclusively to linear stationary systems, in which the ratio between outer excitation and a response in the system remains unchanged with all other types of excitation.

Most of the currently used methods of qualitative identification deal in a time domain. So, the subject of their research is time series, in particular, recording the changes in displacement of certain points in the systems under study over time. These methods are focused on the application of wavelet transform or Wiener-and Hammerstein's series. Such approaches are too cumbersome in realization and require computing [3, 5, 6] and storage of a bulk of input data.

Because of the need to numerically differentiate an original noised signal repeatedly, the number of errors of accumulation and truncating unavoidably increases, and that considerably affects the accuracy of a model being constructed.

### **3. Experimental investigations of forced oscillations in a rod.**

#### **3.1. The model.**

With the aim to solve the above-mentioned problems a bench was designed and manufactured and a model constructed. The bench body comprises a rigidly fixed member with all other elements fixed onto it. The bench represents a system of collar beams, supports and struts. The elements of the bench are bolted to one another so that to make it possible to gradually vary the spaces between the struts and the collar beams. In order to avoid development of eccentricities, particular attention while assembling the bench has been given to positioning the centres of gravity of the elements.

The rod was fabricated from a spring steel band measuring  $l_i=2\text{m}$  in length and having the cross section of  $b \times h = 0.05 \times 0.056\text{m}$ . The spacing between support mounting holes was  $l=1.955\text{m}$  (Figure 1).

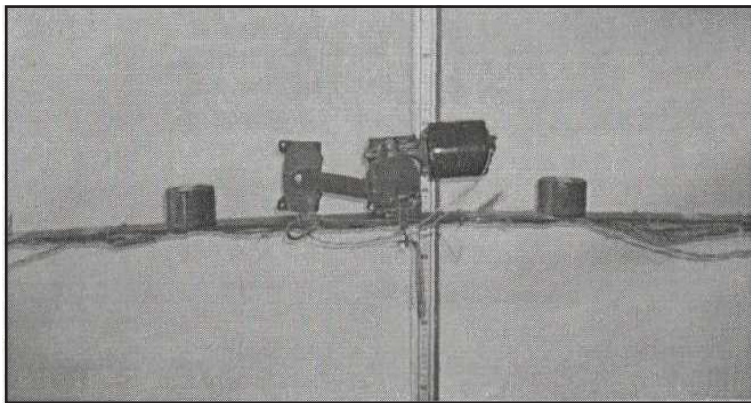
A modulus of elasticity in the material of the rod was determined by repeated static loading of the straight-line portion of the rod in the midpoint on its length. The value of  $E=2.07 \times 10^5 \text{ MPa}$  obtained has a deviation of 1.4%, from the normative value of  $E=2.1 \times 10^5 \text{ MPa}$  which is permissible.

In order to increase its inertia characteristics, the rod was loaded

with additional weights of 1 kg each, which were arranged at an equal space from the midpoint on the rod length. To study forced oscillations in the flexible rod, at the mounting stage of the model the rod was subjected to initial longitudinal compression. The value of the axial compression force was chosen greater than the value of Euler's force. After compression the straight-line shape of the rod centerline portion became unstable. The existence of one from three stable oscillation regimes is possible in system:

- «large» oscillations relative to all three equilibrium positions;
- «small» oscillations relative to the top equilibrium positions;
- «small» oscillations relative to the lower equilibrium positions.

The parameters of an outer excitation have a pronounced effect on oscillatory modes in flexible rod systems. During the experiment, particular attention was given to feasibility of adjustment and recording the parameters of outer excitation.



*Figure 1. The experimental model*

A motor was used as a generator of outer excitation and enabled a gradual variation of rotation frequencies. The engine weight was 2 kg. The generator was attached to the rod by means of a clamp. Taking into account the fact that appearing the sub and ultraharmonic oscillations was quite probable and also with an aim to facilitate the construction of amplitude-frequency characteristics, in the experiment the motor rotational speed was registered, too. Frequency values of external excitation were transmitted into one of the ports in a multi-channel tensomagnifying unit.

The value of amplitude of external monoharmonic excitation depended on the motor rotational speed and was determined by the

equation:

$$P = m_i a = m_i \omega^2 R_i, \quad (1)$$

where  $m_i$  is the weight of an eccentric,  $a$  is centrifugal acceleration,  $\omega$  is a motor rotational speed.  $R_i$  is a radius of eccentric rotation.

Two eccentrics used in the experiment had the following characteristics:  $R_1 = 0.114\text{m}$ ,  $m_1 = 0.358\text{ kg}$  and  $R_2 = 0.107\text{m}$ ,  $m_2 = 0.125\text{kg}$ .

The complete set of measuring and recording instruments utilized in investigation of forced oscillations in the flexible rod included means for registration, transformation and storage of signals, and also a personal computer. The use of the computer ensured automatic numerical data processing and enabled the application of the standard graphic packages for the signal representation.

The oscillation amplitudes of the points on the rod were measured with wire strain gauges. One of the disadvantages of the wire strain gauges consists in their sensitivity to lateral deformations, which affects the accuracy of measurements. To compensate this drawback, the strain gauges were grouped in nodes. The strain gauges were connected as semi-bridge circuits and glued onto the rod. To study oscillation modes in the flexible rod, the gauges were placed at the points spaced at  $1/8$ ;  $3/8$ ;  $1/2$ ;  $3/4$   $l$  from a rigid support. The calibration of strain gauges was performed prior to the application of a compressive force onto the rod. The scheme of arrangement of measuring instruments is shown in Figure 2.

The output signals from the strain gauges were transmitted onto the inputs of the tensoamplifying unit and after amplification they were recorded by a magnetograph, e.g. the one of TEAC XR-71 type with pass band of 0-100 kHz and amplitude of input signal is  $\pm 1.5\text{ V}$ . A recording tape is CT-90 TEAC type by depth 37 microns. A nominal velocity of motion of a magnetic tape is 2.38. The use of the magnetograph provided the continuous records of signals in six channels and made it possible to repeat their subsequent processing.

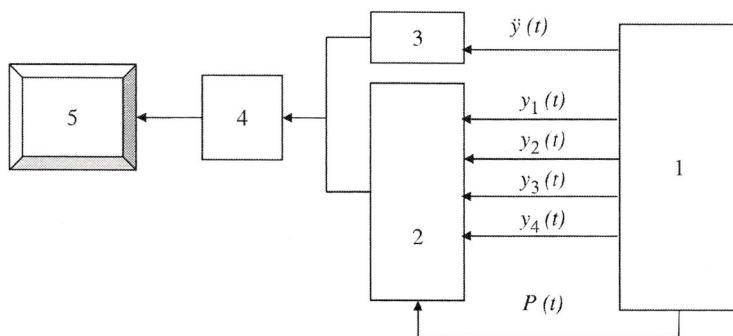
The vertical accelerations in the midpoint on the rod length were measured with vertical acceleration sensors of AC-2 type on base of ADXL105. The ADXL105 is a high performance, high accuracy and complete single-axis acceleration measurement system on a single monolithic TC. It has low bias and sensitivity drift. The ADXL105 measures acceleration with a full-scale range up to  $\pm 5g$  and resolution 2mg and produces an analog voltage output. The vertical acceleration sensors of AC-2 type allows to fix signal in frequency range up to 10 kHz. The signals from the vertical acceleration sensor were transmitted to the scale amplifier of TMA-32 type with the pass band of 0-20kHz.

It has gain coefficients equals 2, 4 and 8.

The amplified signal was recorded in one of the channels of the magnetograph.

An analogue signal recorded by a magnetograph was transduced into its discrete form in an analogue-digital converter.

The frequency of signal sampling was 200 Hz. The signals converted into a digital file were stored on the hard disk of the computer. Special software was used for primary data processing. It included multiplying and division of the sensor data by transfer factors, and deduction of corrections for zero offsets.



**Figure 2. The scheme of arrangement of the measuring instruments:**  
 1 – a model; 2 – tensor amplifying unit; 3 – a scale amplifier;  
 4 – a magnetograph; 5 – a personal computer

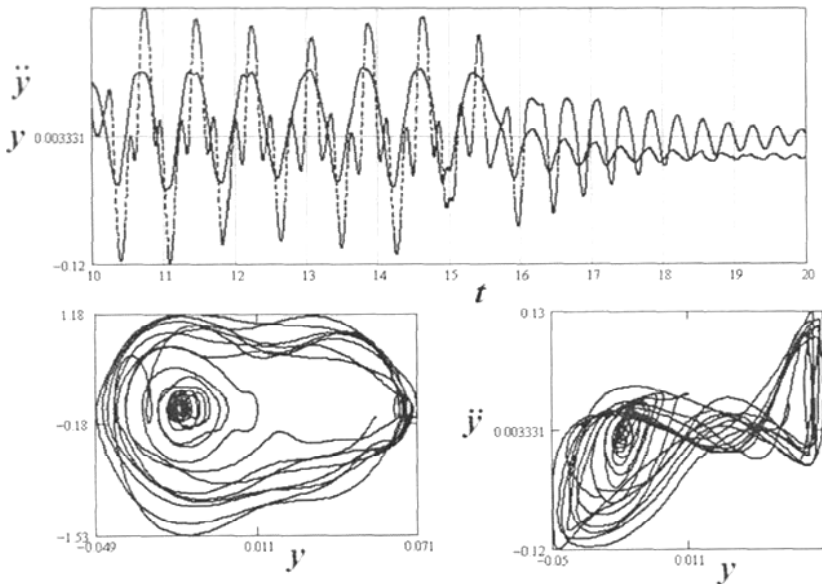
### 3.2. Analysis of free oscillations. Definition of natural frequencies and decrement of oscillations.

The investigated model is essentially a non-linear asymmetrical system. It has two stable non-adjacent equilibrium states. In the experiment, characteristics of free oscillations, natural frequencies in particular, were defined separately for each of these equilibrium states. In the experiment, free oscillations were excited in two ways: either by a sudden shut-off of the generator of the oscillations or by applying an impact load onto the rod in the midpoint of its length.

A number of general methods for definition of decrements of oscillations are recognized. For instance, one of them is intended for the systems having several degrees of freedom and is based on the definition of the width of the resonance curves or so called the

hodograph of frequency. Another is used for the systems with one degree of freedom and analyses transient regimes of oscillations. The latter method is simpler in application.

While defining the dynamic characteristics of free oscillations, we did not take into account the first two periods of oscillations because transient processes have a pronounced effect on them. The rest of an oscillogram presents common regularities. One of the typical records of free oscillations is shown in Figure 3. As evident from the given figure, the large 'free' oscillations, as referred to all three equilibrium states, are unstable; and over time, they are turned into 'small' oscillations relative to one of the two non-adjacent equilibrium states. The natural frequencies of the oscillations referred to each oscillating behaviour comprised  $\omega_1=12.5\text{rad/s}^{-1}$  and  $\omega_u=13.9\text{rad/s}^{-1}$  respectively, and the decrement of oscillations was  $\delta=0.074$ .



**Figure 3.** Time processes and phase trajectories of a free oscillations in a rod

### 3.3. Definition of oscillation modes.

The oscillation modes were measured by recording the signals throughout the experiment. The shapes of bending oscillations were determined by simultaneous recording the signals in all five groups of strain gauges. The analysis of the oscillograms proves that the

oscillation phases are identical in all points on the rod, and the oscillation amplitudes increase from the end sections towards the middle. Therefore, the rod subjected to the oscillations takes the shape of a half-wave of a sine. Thus, for the specified type and parameters of the outer excitation in the investigated mechanical system the oscillations of the first mode are the only possible.

#### **4. Mapping phase trajectories of chaotic oscillations.**

When the flexible rod was subjected to dynamic testing under periodic actions of the outer excitations, it was revealed that there are both frequency ranges, which envelop several stable regimes of oscillations, and time processes of chaotic-oscillations (Figure 4) [7]. The chaotic oscillations constitute cascades of bifurcations of a period doubling.

Provided the oscillatory process is simple and adequately studied, the solution of identification problems does not present any special difficulties. But the situation is reversed when we deal with chaotic processes, which are most frequently described on the basis of statistical regularities, in spite of the fact that their descriptions with differential equations are well known.

The main peculiarity of the chaotic systems is unpredictability of their behaviour for a prolonged period of time; even the slightest error in specified initial conditions shortly results in the process transaction onto another trajectory. The evolution of processes in such systems occurs due to the dissipation of energy in them.

In recent years, two principal approaches toward the identification of the chaotic processes have been noted. The first approach is based on studying the behaviour of a physical model of a rather simple object, which is represented with non-linear differential equations. It is worth to note that in most cases to find a description with differential equations for a real system is frequently an extremely difficult task. Another approach towards the identification of the chaotic systems is based on the observation of the chaotic processes and subsequent construction of an attractor in, as it is called, a re-designed phase space, which is reconstructed in accordance with a time series observed; such a series constitutes a sequence of discrete values of a certain variable generated by the system.

Let us take a fairly simple method [8] for the non-parametric identification, which is applicable for a wide class of the mechanical systems with one degree of freedom and posses non-linear properties inherent to real systems. This method makes use of information about displacements and accelerations [9] as well as

the outer excitation affecting the system.

Let us assume that the physical model under investigation can be described by a second-order differential equation as follows:

$$m\ddot{y} + h(y, \dot{y}) + r(y) = P(t) \quad (2)$$

where  $m$  is the mass per meter of a rod,  $h(y, \dot{y})$  is dissipative force,  $r(y)$  is elastic force.

One of the objectives of the present investigations is to obtain a comprehensive description of  $h$  and  $r$  using an outer periodic excitation and by this strategy to study the system

$$m\ddot{y} + h(y, \dot{y}) + r(y) = P(t), \quad P(t + T) = P(t) = c. \quad (3)$$

Let us denote a sequence of points by  $\{\Pi_k\} = \{y_k, \dot{y}_k, \ddot{y}_k\}$ ,  $k = 1, \dots, n$ , describing the measured displacement, velocity and acceleration in the system (2) at the discrete moments of time  $t = t_k = t_o + kT$ , where  $T$  is a period of the outer excitation. When we represent these points in the extended phase space  $(y, \dot{y}, \ddot{y})$  we obtain a set of points parameterized by time  $t_k$ .

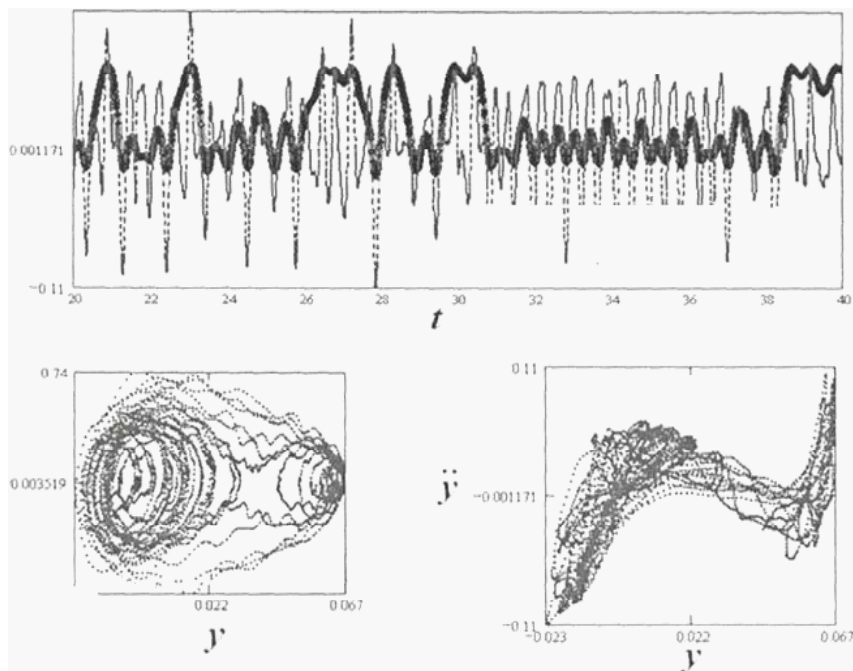
First, by ignoring the effects of the energy dissipation, we can assume that the characteristic of the elastic force can be determined from the relationship:

$$r(y_k) = c - m\ddot{y}_k. \quad (4)$$

The time processes of acceleration and displacements having the lengths equal to 252 periods of outer excitations were adequately processed and used in the mapping construction of the phase trajectories. The principle of mapping construction of the phase trajectories on plane  $(y, \dot{y})$  is much the same as the processing of time processes by peaks. The estimation of the acceleration and displacement values were performed at discrete moments of time meeting condition  $c = F(t_o) = F(t_k)$  [8] (Figure 5).

A closer look at the mappings of the phase trajectories presented in Figure 5 shows cattering of points in the range of resonance amplitudes of «small» oscillations [9]. The main reason for this phenomenon is the presence of high-frequency noise having the amplitudes commensurable to the amplitudes of «small» oscillations. By averaging the data obtained in the experiment, a polynomial trend was derived. The trend curve has the shape of an asymmetrical cubic parabola intersecting the axis of the displacements in points  $y_1 = 0.06\text{m}$ ,  $y_2 = 0.039\text{m}$  and  $y_3 = -0.006\text{m}$ , agreeing closely with the values of the coordinates  $y_b = 0.058\text{ m}$ ,  $y_a = 0.034\text{ m}$  and  $y_c = -0.006\text{ m}$

of the rod state. To verify statistical reliability of the polynomial trend obtained, the multiple factor of determination was calculated and found equal to  $R^2 = 0.835$ .



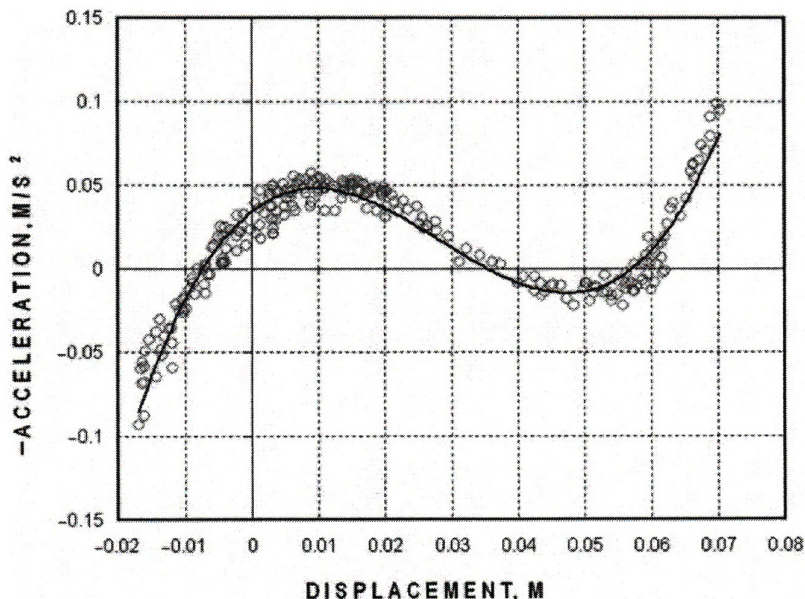
*Figure 4. Chaotic oscillations of a model*

## 5. Conclusions.

A fairly simple method for non-parametric identification described in this article can be applied to a wide class of mechanical systems having one degree of freedom and manifesting non-linear properties inherent to real systems. This method is based on the use of information on accelerations, displacements as well as outer excitation, which can be determined by the techniques of the qualitative theory and also by the regression methods and approximating expressions of the elastic characteristic as functions derived from generalized coordinates.

The suggested method for analysis of the determinately chaotic processes provides fresh approach to data processing. The most significant feature of this method is that, in spite of its simple appearance, it enables to obtain maximum information about an investigated process or a phenomenon. The applicability of the suggested method is limited by

noise levels, measuring errors or duration of a process under study. The engineering applications of the suggested method are very promising in identification of parameters in the determined chaotic systems.



*Figure 5. Mappings of the phase trajectories of the chaotic oscillations in the experimental model*

### *References*

1. D.E. Adams and R.J. Allemang, Survey of nonlinear detection and identification techniques for experimental vibrations, *Procc. ISMA23 1* (1998), p. 269-280.
2. G. Kerschen et al. Past present and future of nonlinear system identification in structural dynamics, *Mech. Syst. Signal Process.* 20 (2006), p. 505-592.
3. M. Kulisiewics, *Modelling and Identification of Non-linear Mechanical Systems under Complex Load*, Oficyna wydawnicza Politechniki Wroclawickiej, Wroclaw, Poland. (2005), p. 190.
4. M.P. Plakhtiyenko, Methods of identification of mechanical oscillating systems, *Int. Appl. Mech.* 36 (2000). pp. 38-68.
5. S.F. Masri and T.K. Caughey, A nonparametric identification technique or non-linear dynamic problems, *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* 46 (1979), p. 433-447.

6. T. Tjahjowido, F. Al-Bender, and H. Von Brussel. Identification of backlash in mechanical system, Proc. ISMA (2004), p. 2195-2209.
7. V.E. Volkova, Experimental research of forced oscillations in a flexible rod, Fundamentals Civil Eng. Dnepropetrovsk (2005), p. 525-530.
8. V.E. Volkova and K. Schneider, Qualitative theory and identification of dynamic system with one degree of freedom, Inter. Appl. Mech. 41 (2005), p. 134-139.
9. M.I. Kazakevitch and V.E. Volkova, Phase Trajectories of Non-linear Dynamic Systems. The Atlas, Nauka i Obrazovaniye Publ. House, Dnepropetrovsk. 2002, p. 94 (in Russian).

**РАЗДЕЛ 2**  
**ГИДРОАЭРОДИНАМИКА.**  
**ТЕОРИЯ. ЭКСПЕРИМЕНТ. ПРАКТИКА**

*«Если человек не понимает проблемы,  
он пишет много формул,  
а когда поймет, в чем дело,  
их остается в лучшем случае две»*

*Нильс Бор*

## **АЭРОУПРУГИЕ КОЛЕБАНИЯ ТЕЛА КРУГЛОЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ В ПОТОКЕ ВОЗДУХА\***

Состояние теории обтекания тел круглоцилиндрической формы является неудовлетворительным как с точки зрения построения математической модели и определения аэродинамических сил, так и с точки зрения анализа возможных режимов колебаний. В настоящей работе уточняются аэродинамические силы, действующие на свободно колеблющееся круглоцилиндрическое тело в потоке воздуха. Предлагается методика, позволяющая проанализировать поведение цилиндра в потоке, исследовать возможные режимы колебаний в зависимости от физических и геометрических факторов.

Исследования выполнены в следующих предположениях. Колебания цилиндра происходят в равномерном воздушном потоке малой скорости при нормальных атмосферных условиях. Поток воздуха рассматривается как вязкая несжимаемая жидкость.

### **1. Действующие силы.**

Как известно, горизонтальный воздушный поток скорости  $v$  вызывает вертикальные колебания упругого цилиндрического тела. Определим силы, действующие при этом на цилиндр.

---

\* Опубликовано в Трудах ДГУ «Гидроаэромеханика и теория упругости», Вып. 16, Днепропетровск, 1973.

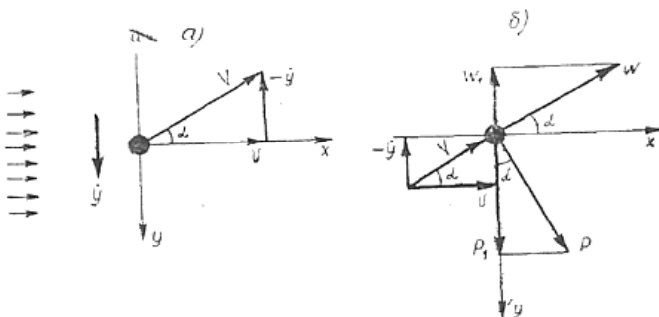


Рис. 1

Пусть цилиндр движется вниз со скоростью  $y$  (рис. 1,а). Если  $v$  – скорость набегающего потока на бесконечности относительно неподвижного цилиндра, а  $y$  – скорость движения цилиндра относительно неподвижного потока, то скорость потока относительно движущегося цилиндра

$$\vec{V} = \vec{v} + (-\vec{y}); \quad V = \sqrt{v^2 + y^2} = v \sqrt{1 + \left(\frac{y}{v}\right)^2}. \quad (1)$$

Диаграмма действующих на колеблющийся цилиндр аэродинамических сил изображена на рисунке 1,б. Сила лобового сопротивления  $W$ , приходящаяся на единицу длины тела, определяется по известной в аэродинамике формуле

$$W = \frac{1}{2} c_x \rho d V^2, \quad (2)$$

где  $\rho$  – массовая плотность воздуха, равная  $0,125 \text{ кг} \cdot \text{сек}^2/\text{м}^4$ ;

$c_x$  – коэффициент лобового сопротивления круглоцилиндрического тела;

$d$  – диаметр цилиндра.

Поперечная (подъемная) сила при обтекании неподвижного цилиндра равна нулю. В процессе колебаний цилиндра в плоскости, перпендикулярной направлению тока, точки срыва вихрей, или точки отрыва пограничного слоя, перемещаются, чем обуславливают возникновение дополнительной аэродинамической силы.

Аналогичное явление наблюдается при вращении цилиндра в воздушном потоке (эффект Магнуса [4]). Теория присоединенных вихрей, разработанная Н.Е. Жуковским, объясняет механизм возникновения подъемной силы у вращающегося цилиндра. Если скорость

вращения цилиндра постоянна, то постоянна и величина подъемной силы. Колебания цилиндра в вертикальной плоскости (рис. 1,б) вызывают угловые колебания следа за телом, и возникающая при этом дополнительная аэродинамическая сила  $P$  – подъемная сила – периодически меняет свой знак и величину:

$$P = \frac{1}{2} c_y \rho d V^2, \quad (3)$$

Коэффициент подъемной силы  $C_y$  зависит от скорости поперечного движения  $y$  и устанавливается, как правило, экспериментальным путем. Согласно аэрогидродинамической теории

$$c_y = \frac{\partial c_y}{\partial \alpha} \alpha, \quad (4)$$

где  $\alpha$  – кажущийся угол отклонения потока за счет поперечного движения цилиндра (рис. 1,а);

$\frac{\partial c_y}{\partial \alpha}$  – коэффициент, характеризующий крутизну кривой зависимости  $C_y = C_y(\alpha)$ .

В свою очередь, угол  $\alpha$  является функцией скорости поперечного движения цилиндра  $y$ :

$$|\alpha| = \arctg \frac{\dot{y}}{v} \cong \frac{\dot{y}}{v} - \frac{1}{3} \left( \frac{\dot{y}}{v} \right)^3 + \frac{1}{5} \left( \frac{\dot{y}}{v} \right)^5 - \dots \quad (5)$$

Величина коэффициента  $\partial c_y / \partial \alpha$  зависит от геометрии тела.

Для колеблющегося в потоке круглоцилиндрического тела данные о значении коэффициента  $\partial c_y / \partial \alpha$  отсутствуют.

Из условия получения лучшего совпадения с экспериментальными результатами для вращающегося круглоцилиндрического тела в потоке жидкости Свенсон предложил [4] следующую формулу для коэффициента подъемной силы

$$c_y \cong 2,71 \frac{\dot{y}}{v} - 0,33 \left( \frac{\dot{y}}{v} \right)^3. \quad (6)$$

Структурно она соответствует формуле (4) при сохранении двух членов в разложении (5). При обтекании круглого цилиндра воздушным потоком в следу образуются вихри, попеременно срывающиеся то с верхней, то с нижней его'кромки. В результате вихреобразования возникает периодическая аэродинамическая сила – сила Кармана, период которой совпадает с периодом срыва вихрей, вызванная неравномерной циркуляцией потока вокруг цилиндра [2]:

$$F(t) = \frac{1}{2} c_k \rho d v^2 \operatorname{sign} v, \quad (7)$$

где  $c_k$  – коэффициент Кармана.

## 2. Дифференциальное уравнение колебаний.

Рассматривая круглоцилиндрическое тело как систему с одной степенью свободы и предполагая известными упругие и демпфирующие свойства исследуемого тела, дифференциальное уравнение аэроупругих колебаний в вертикальной плоскости можно записать в форме

$$m\ddot{y} + n\dot{y} + W \frac{\dot{y}}{V} - P \frac{v}{V} + m\omega_0^2 y = F(t) \quad (8)$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$m$  – погонная масса цилиндра;

$y$  – направление поперечных колебаний (см. рис. 1);

$n$  – коэффициент внутреннего трения тела;

$\omega_0$  – собственная частота тела.

Все силы, входящие в состав дифференциального уравнения (8), приходятся на единицу длины цилиндра.

В выражении (1) относительной скорости  $V$  радикал  $\sqrt{1 + (\dot{y}/v)^2}$  можно разложить в ряд Тейлора по степеням  $(\dot{y}/v)$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\dot{y}}{v}\right)^2} \cong 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{y}}{v}\right)^2 - \frac{1}{8} \left(\frac{\dot{y}}{v}\right)^4 + \dots \quad (9)$$

Подставим выражения (1) – (5) в уравнение (8), сохраняя по два члена в разложениях (5) и (9):

$$\begin{aligned} & \ddot{y} + \frac{\delta \omega_0}{I} \dot{y} - \frac{\rho d v^2}{2m} \times \\ & \times \left[ (k - c_x) \frac{\dot{y}}{v} + \left( \frac{k}{6} - \frac{c_x}{2} \right) \left( \frac{\dot{y}}{v} \right)^3 - \frac{k}{6} \left( \frac{\dot{y}}{v} \right)^5 \right] + \\ & + \omega_0^2 y = \frac{F(t)}{m} \end{aligned} \quad (10)$$

где  $\delta$  – логарифмический декремент колебаний, характеризующий демпфирующие свойства цилиндрического тела,  $\delta = \pi/\omega_0$ ;  $k = dc/d\alpha$ .

Как уже выше отмечалось, экспериментальные и теоретические данные о значении коэффициента  $k$  для свободно колеблющегося цилиндра отсутствуют. Косвенным путем можно прийти к заключению о том, что  $2,5 < k < 3$ .

### 3. Анализ колебаний круглоцилиндрического тела в потоке воздуха.

Исследуемая колебательная система (рис. 1,б), описываемая нелинейным дифференциальным уравнением (10), относится к потенциально-автоколебательным системам (по терминологии К. Ф. Теодорчика [5]), в которых автоколебательные режимы могут возникать только при определенных условиях.

С целью исследования динамических свойств аэроупругой системы (10) будем вначале полагать  $F(t)=0$ . Для решения нелинейного уравнения (10) без учета правой части воспользуемся энергетическим методом Теодорчика [5].

Представим исходное уравнение (10) в виде

$$\ddot{y} + \omega^2 y = (\omega^2 - \omega_0^2) \dot{y} - \frac{\delta \omega_0}{\pi} \dot{y} + \frac{\rho d v^2}{2m} \left[ (k - c_x) \frac{\dot{y}}{v} + \left( \frac{k}{6} - \frac{c_x}{2} \right) \left( \frac{\dot{y}}{v} \right)^3 - \frac{k}{6} \left( \frac{\dot{y}}{v} \right)^5 \right], \quad (11)$$

рассматривая правую часть как сумму всех внутренних сил системы, действующих на консервативную колебательную систему, уравнение которой  $\ddot{y} + \omega^2 y = 0$ , имеет решением

$$y = a \sin \omega t. \quad (12)$$

Подстановка (12) в правую часть позволяет получить для определения амплитуды и частоты автоколебаний систему алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} (\omega^2 - \omega_0^2) a = 0; \\ -\frac{\delta \omega_0}{\pi} a \omega + \rho \frac{d v_{kp}^2}{2m} \left[ (k - c_x) \frac{a \omega}{v_{kp}} + \left( \frac{k}{6} - \frac{c_x}{2} \right) \frac{3}{4} \frac{a^3 \omega^3}{v_{kp}^3} - \right. \\ \left. - \frac{10}{96} k \frac{a^5 \omega^5}{v_{kp}^5} \right] = 0, \end{cases} \quad (13)$$

решая которую, находим:

$$\begin{cases} \omega = \omega_0; \\ a_1 = 0; \\ a_{2,3} = \left[ \frac{6}{10} \left( 1 - 3 \frac{c_x}{k} \right) \frac{v_{кр}^2}{\omega_0^2} \pm \sqrt{\frac{36}{100} \left( 1 - 3 \frac{c_x}{k} \right)^2 \frac{v_{кр}^4}{\omega_0^4} - \frac{96}{10} \cdot \frac{2m}{\pi \rho d k} \cdot \frac{v_{кр}^3}{\omega_0^3} + \frac{96}{10} \left( 1 - \frac{c_x}{k} \right) \frac{v_{кр}^4}{\omega_0^4}} \right]^{1/2} \end{cases} \quad (14)$$

Скорость потока  $v = v_{кр}$ , соответствующая автоколебательному режиму, называется критической скоростью.

Как показывает анализ полученных решений, условием существования устойчивых автоколебательных режимов является соблюдение неравенства

$$\delta < \frac{\pi \rho d}{2m} \cdot \frac{v_{кр}}{\omega_0} \left[ \frac{3}{80} \left( 1 - 3 \frac{c_x}{k} \right)^2 k + (k - c_x) \right] = \delta_2. \quad (15)$$

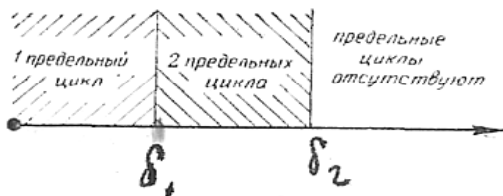
В этом случае второе из уравнений (13) имеет, по крайней мере, один действительный ненулевой корень, соответствующий автоколебательному режиму.

Неравенство

$$\delta > \frac{\pi \rho d}{2m} (k - c_x) \frac{v_{кр}}{\omega_0} = \delta_1 \quad (16)$$

является условием существования двух действительных корней уравнения (13), не равных нулю.

Рассмотрим три возможных случая [5] поведения исследуемой системы (рис. 2):



А. Если  $\delta < \delta_1$ , колебательная система самовозбуждающаяся. В этом случае равновесное состояние ( $a = 0$ ) неустойчиво и единственное значение амплитуды автоколебаний  $a_2$  соответствует устойчивому предельному циклу.

Б. Если  $\delta_1 < \delta < \delta_2$ , уравнение (13) имеет два действительных ненулевых корня, соответствующих двум значениям амплитуд автоколебательных режимов. При этом несамоподдерживающаяся потенциально

автоколебательная система (11) имеет два предельных цикла: первый с меньшим значением амплитуды  $a_3$  является неустойчивым, а второй с большим значением амплитуды  $a_2$  – устойчивым.

В системе возможны самоподдерживающиеся автоколебания, если начальное отклонение превосходит значение амплитуды неустойчивых автоколебаний.

При любых значениях  $\delta > \delta_1$  положение равновесия устойчиво.

В. Если  $\delta > \delta_2$ , невозбужденная система (11) не имеет устойчивых гармонических колебаний и, следовательно, предельных циклов. Колебания носят затухающий характер.

Вернемся к нелинейному дифференциальному уравнению (10) и рассмотрим возбуждение поперечных колебаний цилиндра, находящегося в потоке воздуха, силой Кармана (7).

Разложим периодическую силу  $F(t)$  (7) в пределах одного периода срыва вихрей в ряд Фурье и сохраним основную гармонику

$$F(t) \cong \frac{2}{\pi} c_k \rho d v^2 \cos \omega t. \quad (17)$$

где  $\omega$  – частота срыва вихрей,

$$\omega = 2\pi S h \frac{v}{d}. \quad (18)$$

Число Струхала  $Sh$  для колеблющегося цилиндра равно 0,2.

При колебаниях цилиндра наблюдается явление, связанное с захватом частот срыва вихрей: в определенном диапазоне скоростей потока частота срыва вихрей перестает быть пропорциональной скорости потока (18) и определяется исключительно частотой колебаний цилиндра. Как показали исследования [1] явления захвата частот срыва вихрей частотами вынужденноколеблющегося цилиндра, зона захвата весьма велика. Синхронизация частоты срыва вихрей с частотой вынужденных колебаний обуславливается взаимодействием потока с колеблющимся телом. Если колебания цилиндра вызваны самим потоком, то синхронизация частоты срыва вихрей с частотой свободноколеблющегося цилиндра будет наблюдаться в более узком интервале скоростей потока.

Будем полагать, что для свободноколеблющегося цилиндра явление захвата качественно не отличается от описанного в работе [1], но зона захвата ограничена интервалом изменения кинематических чисел Струхала  $0,18 < Sh < 0,22$ .

Правдоподобность принятого предположения о сужении зоны захвата частот срыва вихрей для свободноколеблющегося в потоке цилиндра подтверждается наблюдениями [3], [7–9] над колеблющимися

ся в ветровом потоке высокими или протяженными в плане гибкими сооружениями цилиндрической формы. Эти наблюдения, однако, не только не исключают, но и подчеркивают необходимость постановки широких экспериментальных исследований явления захвата для свободно колеблющегося цилиндра.

Интервал кинематических чисел Струхала  $0,18 < Sh < 0,22$ , характеризующий интенсивным колебательным процессом с частотой собственных колебаний цилиндра, соответствует диапазону скоростей потока с нижней границей  $v_n = 0,9 v_{кр}$  и верхней границей  $v_B = 1,1 v_{кр}$ . Критическая скорость потока  $v_{кр}$  определяется выражением

$$v_{кр} = \frac{\omega_0 d}{2\pi Sh}; \quad Sh = 0,2. \quad (19)$$

Предполагаемый график изменения частоты срыва вихрей в зависимости от скорости потока изображен на рис. 3. Нижней границе  $v_n$  соответствует число Струхала  $Sh = 0,22$ , а верхней границе  $v_B$  —  $Sh = 0,18$ .

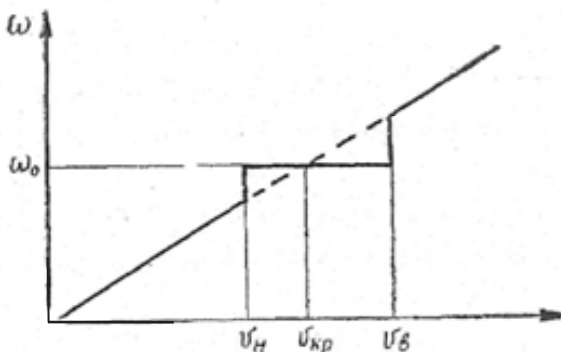


Рис. 3

Таким образом, для частоты со силы Кармана  $F(t)$  (17), равной частоте срыва вихрей, предлагается закон изменения в зависимости от скорости потока  $v$ :

$$\omega = \begin{cases} 2\pi Sh \frac{v}{d}; & Sh = 0,2, \quad \text{если} \quad v < v_n \text{ и } v > v_B \\ \omega_0, & \text{если} \quad v_n < v < v_B. \end{cases} \quad (20)$$

Поскольку исследуемая система диссипативна, внешняя сила  $F(t)$  и колебательное движение сдвинуты по фазе. При исследовании колебаний удобно задаваться внешней силой со сдвигом фаз, кото-

рый в дальнейшем подлежит определению.

Примем решение уравнения колебаний цилиндра в потоке (10) с правой частью

$$F(t) = \frac{2}{\pi} c_k \rho d v^2 \cos(\omega t - \varphi)$$

в форме

$$y = a \sin \omega t.$$

Тогда для сдвига фаз  $\varphi$  и амплитуд установившихся колебаний  $a$  получим выражения

$$\varphi = \arctg \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\frac{\delta \omega_0}{\pi} \omega - \rho \frac{dv^2}{2m} \left[ (k - c_x) \frac{\omega}{v} + \left( \frac{k}{6} - \frac{c_x}{2} \right) \frac{3}{4} \frac{a^2 \omega^3}{v^3} - \frac{10}{96} k \frac{a^4 \omega^5}{v^5} \right]}; \quad (21)$$

$$a = \frac{\frac{2}{\pi m} c_k \rho d \frac{v^2}{\omega_0^2}}{\sqrt{\left[ \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 - 1 \right]^2 + \left\{ \frac{\delta}{\pi} \cdot \frac{\omega}{\omega_0} - \rho \frac{dv^2}{2m \omega_0^2} \left[ (k - c_x) \frac{\omega}{v} + \left( \frac{k}{6} - \frac{c_x}{2} \right) \frac{3}{4} \frac{a^2 \omega^3}{v^3} - \frac{10}{96} k \frac{a^4 \omega^5}{v^5} \right] \right\}^2}}. \quad (22)$$

а) Внерезонансная зона

Рассмотрим случай, когда  $v < v_n$  или  $v > v_b$ . Амплитуду колебаний можно определить приближенно по формуле

$$a \cong \frac{c_1 \frac{v^2}{\omega_0^2}}{\sqrt{\left( c_2 \frac{v^2}{\omega_0^2} - 1 \right)^2 + \left( c_3 \frac{v}{\omega_0} - \rho \frac{d}{2m} c_4 \frac{v^2}{\omega_0^2} \right)^2}}. \quad (23)$$

в предположении малости амплитуд. Здесь обозначено:

$$\begin{cases} c_1 = \frac{2}{\pi m} c_k \rho d; \\ c_2 = \frac{5\pi^2 S h^2}{d^2}; \end{cases} \quad \begin{cases} c_3 = \frac{2\delta S h}{d} \\ c_4 = \frac{2\pi S h}{d} (k - c_x). \end{cases} \quad (24)$$

б) Резонансная зона

Для определения амплитуд колебаний в резонансной зоне  $v_n < v < v_b$  необходимо решить алгебраическое уравнение

$$a^5 - \left[ \frac{12}{10} \left( 1 - 3 \frac{c_x}{k} \right) \frac{v^2}{\omega_0^2} \right] a^3 + \frac{96}{10} \left[ \frac{2m}{\pi \rho d} \cdot \frac{\delta}{k} - \left( 1 - \frac{c_x}{k} \right) \frac{v}{\omega_0} \right] \frac{v^3}{\omega_0^3} a =$$

$$= \frac{384}{10\pi} \cdot \frac{c_\kappa}{k} \frac{v^5}{\omega_0^5}. \quad (25)$$

#### 4. Характер развития колебаний.

Анализ полученных решений (23) и (25) позволяет проследить за ходом развития колебаний цилиндра в зависимости от приведенной скорости потока  $v/\omega_0$  [6].

В интервалах изменения скорости потока  $v < v_n$  и  $v > v_b$  колебания цилиндра можно трактовать как вынужденные, имеющие весьма малую амплитуду. Их трудно наблюдать в связи с тем, что в реальных условиях ветровой поток имеет неравномерный характер и порывы ветра являются причиной случайных колебаний цилиндра в направлении потока, взаимодействующих с поперечными колебаниями, вызванными периодическим срывом вихрей. В результате, такого взаимодействия поперечные колебания сбиваются.

В интервале изменения скорости потока  $v_n < v < v_b$  колебания цилиндра аналогичны колебаниям потенциально-автоколебательных систем. При значениях параметров, удовлетворяющих условию (15), движения носят автоколебательный характер и являются самоподдерживающимися, если выполняется условие (16), или самовозбуждающимися, если условие (16) не выполнено.

Режим вынужденных колебаний цилиндра в этом же диапазоне скоростей потока имеет место при  $\delta > \delta_2^*$ . При значении скорости потока  $v = v_n$  амплитуды вынужденных колебаний цилиндра резко нарастают и продолжают увеличиваться с ростом скорости потока от  $v_n$  до  $v_b$ , когда происходит также резкое уменьшение амплитуд. В дальнейшем, при  $v > v_b$  поведение цилиндра в потоке определяется уравнением амплитудной кривой (23).

Автор выражает глубокую благодарность проф. К.К. Федяевскому за полезное обсуждение работы.

#### Литература

1. Блюмина Л.Х., Федяевский К.К. Исследование влияния вынужденных колебаний цилиндра в воздушном потоке на механизм срыва вихрей. Изд. АН СССР, «Механика жидкости и газа», № 1, 1969.

2. Болотин В.В. и др. О вибрациях проводов воздушных линии электропередачи и о борьбе с ними. Труды МЭИ, вып. 32, 1959.
3. Савицкий Г.А. Основы расчета радиомачт. Связьиздат, 1953.
4. Свенсон (Swanson W.M.). Эффект Магнуса: обзор результатов исследования. «Техническая механика», Труды Американского общества инженеров-механиков, серия Д, т. 83, № 3, 1961.
5. Теодорчик К.Ф. Автоколебательные системы. ГИТТЛ, 1952.
6. Фын Я.Ц. Введение в теорию аэроупругости. Физматгиз, 1959.
7. Iampalo S. Self-controlled vibration of cylinder in fluid stream: «J. Eng. Mech. Div. Proc. ASCE», vol. 95, № 2, 1969.
8. Honji H., Taneda S. Vortex wakes of oscillating circular cylinders. «Repts. Res. Inst. Appl. Mech.», v. 16, № 54, 1968.
9. Селезнева Е.Н. Строительство телевизионных опор за рубежом. ЦИНИС. Серия «Обзоры по вопросам проектирования металлических конструкций», № 1, 1969.

## ГАШЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ НАДЗЕМНЫХ ТРУБОПРОВОДОВ В ВЕТРОВОМ ПОТОКЕ\*

Вряде случаев трубопроводы большого диаметра прокладываются надземным способом. Длина пролетов между опорами достигает иногда 30–40 м. Такие пролеты способствуют возникновению колебаний больших амплитуд, которые могут привести к аварии даже при незначительных скоростях ветрового потока. Гашение колебаний является важной задачей.

Возникновение периодической ветровой силы, раскачивающей трубопровод, вызывается попеременным сходом вихрей Кармана с боковых поверхностей трубы.

Надземный трубопровод колеблется в вертикальной плоскости, перпендикулярной к его оси, с частотой, примерно равной собственной частоте колебаний  $n_1$ . При совпадении частоты срыва вихрей  $n$  с собственной частотой колебания трубопровода  $n_1$  происходит «ветровой резонанс», при котором раскачивающая поперечная (подъемная) сила и амплитуда колебаний достигают максимальных величин. Для изолированного круглого цилиндра частота срыва вихрей с его поверхности удовлетворяет аэродинамическому числу Струхала

$$Sh = \frac{nd}{v} \approx 0,2, \quad \text{где } d - \text{диаметр цилиндра, } v - \text{скорость потока [1].}$$

Опыты на модели трубопровода, располагаемой на различных расстояниях от экрана, имитирующего поверхность земли, показали, что при приближении трубопровода к экрану пик амплитудной кривой несколько снижается и перемещается на большие кинематические числа Струхала.

Близость земли практически перестает влиять на аэродинамические характеристики трубопровода при удалении его на расстояние больше . величины диаметра. На рис. 1 показана зависимость аэродинамических характеристик (коэффициентов  $C_x$  и  $C_y$ ) модели трубопровода от его относительного расстояния  $H$  до экрана ( $H=H/D$ , где  $H$  – расстояние от экрана до нижней образующей трубы;  $D$  – диаметр трубы).

Коэффициенты  $C_x$  и  $C_y$  равны

$$C_x = \frac{2X}{\rho v^2 S}, \quad C_y = \frac{2Y}{\rho v^2 S}.$$

---

\*Опубликовано совместно с Л.Х. Блюминой и В.Н. Гребенниковым в ж-ле «Строительство трубопроводов», № 3, Москва, 1974.

Здесь  $X$ ,  $Y$  – аэродинамические силы;  $\rho$  – массовая плотность воздуха;  $S$  – миделева площадь отсека трубопровода.

При приближении модели к экрану ( $H \rightarrow 0$ ) увеличиваются коэффициент лобового сопротивления и возникающая от асимметрично го обтекания подъемная сила.

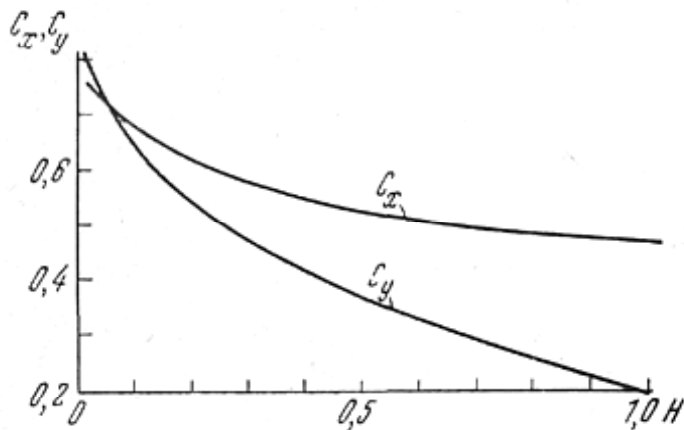


Рис. 1. Зависимость аэродинамических характеристик  $C_x$  и  $C_y$  от относительного расстояния  $H$  цилиндра до экрана

Одним из эффективных и простых аэродинамических способов гашения колебаний является навивка на трубопровод проволоки круглого или квадратного сечения. При этом способе создается сдвиг фаз в периодическом срыве вихрей по длине трубопровода, что существенно уменьшает периодическую аэродинамическую раскачивающую силу

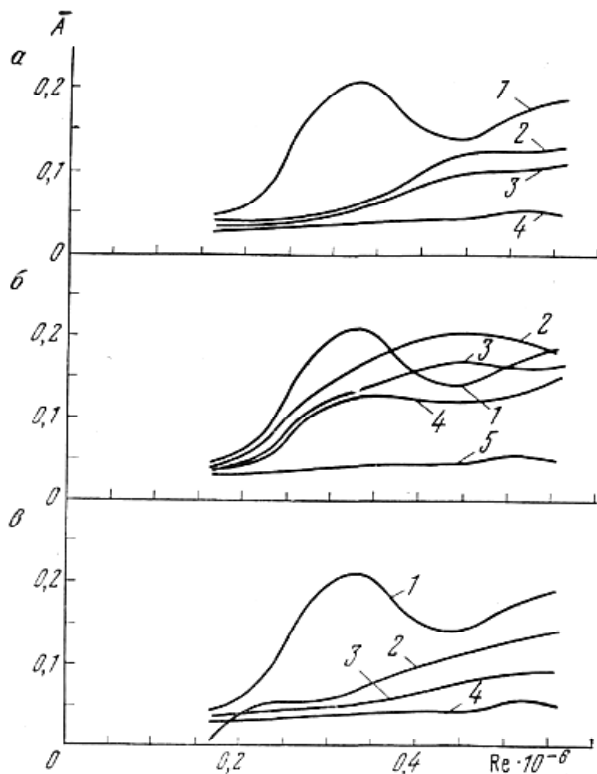
$$P = P_0 \cos(\omega t + \beta),$$

где  $P_0$  – амплитуда аэродинамической силы;  $\omega = 2\pi n$  – круговая частота срыва вихрей с поверхности трубопровода;  $\beta$  – сдвиг по фазе срыва вихрей, переменный по длине трубопровода. Указанный способ эффективен при любом направлении ветра.

Число проволоочных гасителей, их относительный диаметр и угол намотки существенно влияют на характер обтекания и эффективность гашения колебаний.

Были выполнены исследования оптимальных параметров проволоочных гасителей на упруго закрепленной цилиндрической модели круглого сечения. Исследования проводились в аэродинамиче-

ской трубе с закрытой рабочей частью восьмигранного поперечного сечения. Варьировались число проволочных гасителей, их относительный диаметр и угол намотки.



2. Зависимость относительной амплитуды колебаний  $\bar{A}$  от числа Рейнольдса при различных параметрах навивки проволочных гасителей:

а — число проволок  $m$  (1 — без гасителей; 2 —  $m = 8$ ; 3 —  $m = 3$ ; 4 —  $m = 4$ ); б — относительный диаметр  $\frac{d_{нр}}{d_{ц}}$  (1 — без гасителей; 2 —  $\frac{d_{нр}}{d_{ц}} = 3\%$ ; 3 —  $\frac{d_{нр}}{d_{ц}} = 1\%$ ; 4 —  $\frac{d_{нр}}{d_{ц}} = 0,2\%$ ; 5 —  $\frac{d_{нр}}{d_{ц}} = 0,5\%$ ); в — угол навивки  $\phi$  (1 — без гасителей; 2 —  $\phi = 6^\circ$ ; 3 —  $\phi = 17^\circ$ ; 4 —  $\phi = 11^\circ$ ).

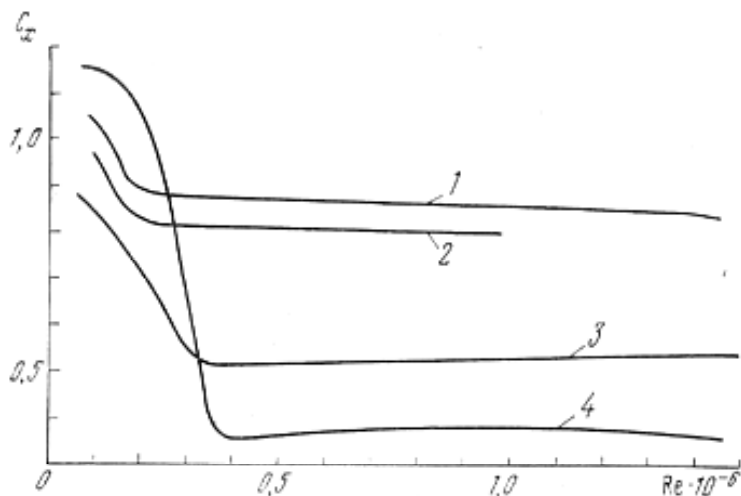
На рис. 2, а приведена зависимость относительной амплитуды колебаний цилиндра  $\bar{A}$  от числа Рейнольдса при различном количестве гасителей и без них. Угол намотки проволоки  $\phi = 11^\circ$ ; ее диаметр составляет 0,5% диаметра цилиндра. Из рис. 2, а видно, что наиболее

эффективно использовать четыре гасителя: колебания гасятся на всем диапазоне чисел Рейнольдса, в три–четыре раза уменьшается амплитуда колебаний в закризисном режиме.

На рис. 2, б показано влияние относительного диаметра проволочных гасителей на относительную амплитуду колебаний модели. Четыре проволочных гасителя различного диаметра (0,2; 0,5; 1 и 3% диаметра цилиндра) наматывались под углом  $\varphi = 11^\circ$ . Наилучшие результаты получены для четырех гасителей, диаметр которых составлял 0,5% диаметра цилиндра.

На эффективность гашения колебаний также влияет угол намотки гасителей. Наиболее рациональна намотка проволоки под углом  $\varphi = 11^\circ$  к образующей цилиндра.

При указанных условиях коэффициент  $C_x$  в закризисном режиме обтекания возрастает на 35% (рис. 3).



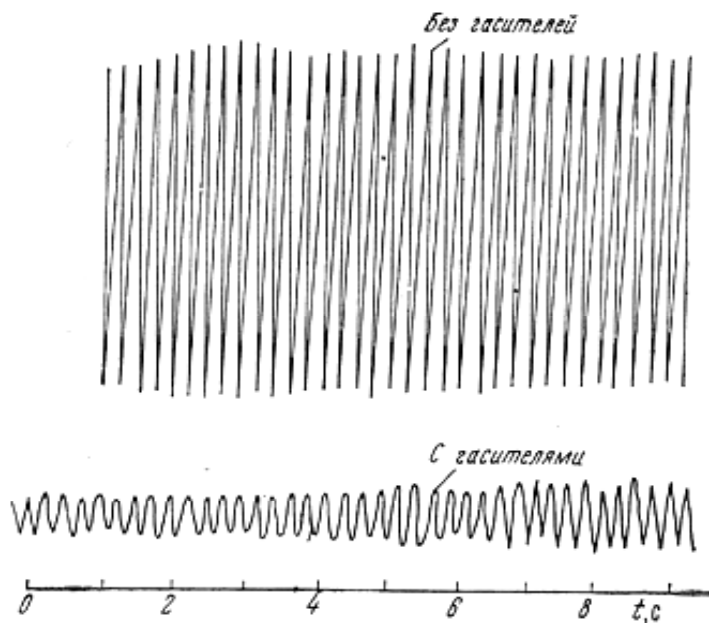
3. Зависимость коэффициента лобового сопротивления  $C_x$  от числа Рейнольдса для модели цилиндра:

1 —  $\frac{d_{\text{пр}}}{d_{\text{ц}}} = 3\%$ ; 2 —  $\frac{d_{\text{пр}}}{d_{\text{ц}}} = 1\%$ ; 3 —  $\frac{d_{\text{пр}}}{d_{\text{ц}}} = 0,5\%$ ; 4 — без гасителей.

При режиме «ветрового резонанса» амплитуда колебания уменьшается в два раза. Вблизи режима «ветрового резонанса», когда происходит захват частоты срыва вихрей частотой колебаний цилиндра [2], амплитуда колебания уменьшается более чем в пять раз. Кроме того, при наличии проволочных гасителей область чисел Струхала,

при которых модель раскачивается с большими амплитудами, существенно сужается.

На рис. 4 даны осциллограммы амплитуд колебаний цилиндра с проволочными гасителями и без них на режиме, близком к «ветровому резонансу» ( $Sh = 0,17$ ). Из рис. 4 видно, что при использовании гасителей амплитуда колебаний на этом режиме уменьшается более чем в пять раз.



4. Осциллограммы амплитуд колебаний цилиндра вблизи «ветрового резонанса» без гасителей и с проволочными гасителями

Таким образом, для гашения колебаний надземных трубопроводов в ветровом потоке с целью создания сдвига фаз в срыве вихрей рекомендуется намотка под углом  $\varphi = 9-12^\circ$  четырех проволок диаметром, равным  $0,4 \div 0,6\%$  диаметра трубопровода.

### Литература

1. Фын Я.Ц. Введение в теорию аэроупругости. М., Физматгиз, 1959, 523 с. с ил.
2. Блюмина Л.Х., Федяевский К.К. Исследование влияния вынужденных колебаний цилиндра в воздушном потоке на механизм срыва вихрей. Изв. АН СССР. МЖГ, М 1, 1969, с. 118–119.

## АЭРОДИНАМИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ МОДЕЛИ ОТСЕКА ВАНТОВОГО ПЕРЕХОДА ГАЗОПРОВОДА ЧЕРЕЗ АМУДАРЬЮ\*

Висячий переход газопровода Келиф – Мубарек через Амударью представляет собой балку жесткости, подвешенную посредством вантов к основным двум тросам, натянутым на пилонах (рис. 1). Балка жесткости является трубчатой формой прямоугольного поперечного сечения с настилом (эксплуатационным мостиком). Внутри расположен газопровод, четыре нитки других трубопроводов и четыре нитки кабелей связи.

Ввиду малой жесткости висячие переходы под действием ветра восприимчивы к колебаниям, которые могут быть интенсивными и опасными. Аэродинамическая устойчивость висячих переходов связана с проблемой сложного срывного обтекания и пока не поддается чисто теоретическому решению. Поэтому для обеспечения надежности эксплуатации такого уникального сооружения потребовалось экспериментальное исследование модели отсека балки жесткости висячего перехода. Правомерность проведения аэродинамических исследований на сравнительно короткой секции модели моста или перехода достаточно подтверждена работами ряда авторов.

Двухсекционная модель балки жесткости перехода была изготовлена из дюралевого труб в масштабе 1:3 (рис. 2). Для имитации плоского обтекания по торцам модели установили тонкие шайбы.

Испытания проводились в аэродинамической трубе с закрытой рабочей частью, представляющей собой в поперечном сечении правильный восьмиугольник высотой 3 м.

Аэродинамические коэффициенты лобового сопротивления  $C_x$  и подъемной силы  $C_y$  определялись по известным формулам

$$C_x = \frac{2X}{\rho v^2 S},$$

$$C_y = \frac{2Y}{\rho v^2 S},$$

где  $X$ ,  $Y$  – аэродинамические силы;  $\rho$  – массовая плотность воздуха;  $v$  – скорость потока;  $S = bl$  – площадь настила.

---

\*Опубликовано совместно с М.Я. Гембаржевским, В.Н. Гребенниковым и Э.Я. Слономом в ж-ле «Строительство трубопроводов», № 9, Москва, 1974.

Как показано на рис. 3, а, значения коэффициента  $C_x$  модели в исследованном диапазоне скорости потока ( $v = 10 \div 35$  м/с) практически не меняются, поскольку обтекание трубы большого диаметра происходит в **закризисной зоне**, а **трубы меньшего диаметра** – в докризисной, т. е. в первом случае

$$Re = \frac{VD}{\nu} < 0,2 \cdot 10^6$$

а во втором –

$$Re = \frac{VD}{\nu} < 0,2 \cdot 10^6$$

(здесь  $D, d$  – диаметры большой и малой труб;  $V$  – кинематический коэффициент вязкости воздуха).

Испытания проводились в диапазоне углов атаки  $-16^\circ \leq \alpha \leq 16^\circ$ , тем самым учитывалась возможность появления восходящих, а также нисходящих потоков, типичных для гористой местности.

На рис. 3, б приведены значения коэффициентов сил  $C_x$  и  $C_y$  в зависимости от угла атаки  $\alpha$  полной модели отсека перехода со сплошным и перфорированным настилами. Полученный экспериментально коэффициент  $C_x = 0,8$  (при нулевом угле атаки) практически совпадает с  $C_{xp} = 0,825$ , подсчитанным по СНиПу II–А.11–62. С изменением угла атаки коэффициент лобового сопротивления несколько увеличивается.

В случае когда в модели, кроме трубопровода, в нижнем положении установлены только четыре трубы для кабелей связи, сопротивление модели уменьшается примерно на 12% во всем исследованном диапазоне углов атаки (см. рис. 3, б).

Характер изменения коэффициента подъемной силы от угла атаки модели зависит главным образом от вида настила. Труба газопровода, находящаяся вблизи настила, создает некоторую отрицательную подъемную силу. При отсутствии же четырех труб на модели практически не меняется характер кривой  $C_y = f(\alpha)$ .

По критерию Ден-Гартога определена область потери аэродинамической устойчивости. Она получена только для модели со сплошным настилом при углах  $-12^\circ \leq \alpha \leq -8^\circ$ , когда комбинация коэффициентов  $C_y + C_x < 0$ .

Чтобы изучить поведение модели отсека в ветровом потоке, ее упруго закрепили в рабочей части аэродинамической трубы восемью пружинами в вертикальной плоскости и четырьмя пружинами в горизонтальной плоскости. Испытания проводились при скоростях потока  $v = 10 \div 35$  м/с и частоте собственных колебаний  $n = 5$  Гц.

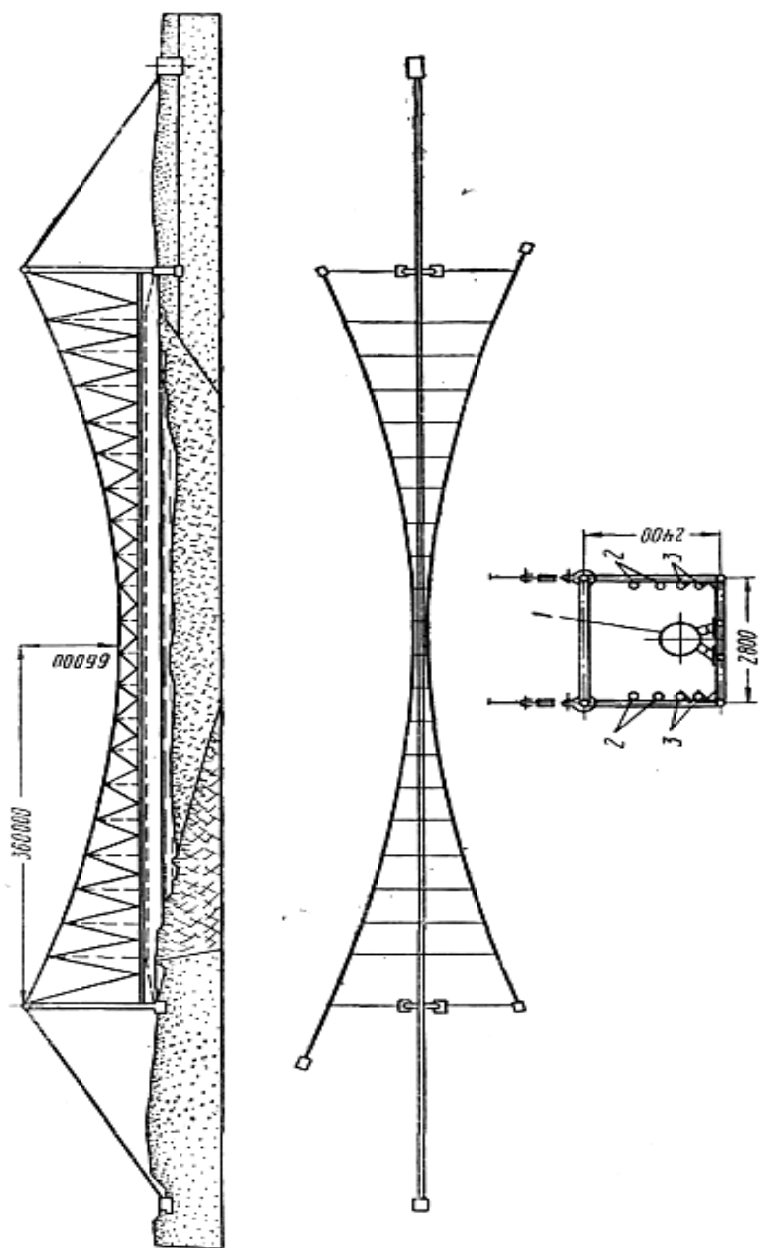
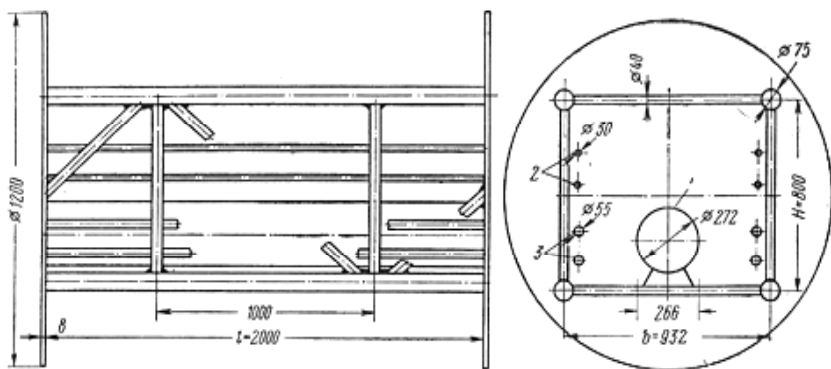


Рис. 1. Схема висячего перехода газопровода через Амударью: 1 - газопровод; 2 - кабели связи; 3 - прочие трубопроводы

Числа Струхала изменялись в диапазоне

$$Sh = \frac{nD}{v} = 0,039 \div 0,136.$$

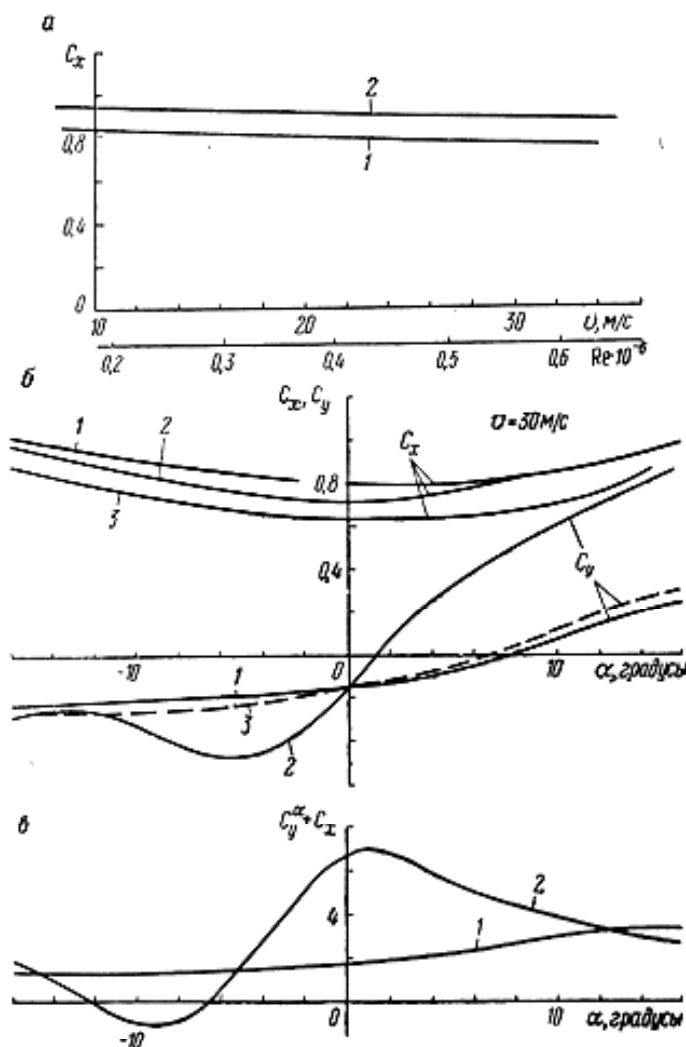
По осциллограммам затухающих колебаний модели, амплитуда которых изменялась по закону  $A = A_0 e^{-\epsilon t} \cos \omega t$ , были получены значения логарифмического декремента колебаний  $\delta = \epsilon / n$ , где  $\epsilon$  – коэффициент затухания. Логарифмический коэффициент колебаний модели в ветровом потоке  $\delta_v$  есть сумма декремента колебаний без потока  $\delta_0$  и декремента колебаний от аэродинамических сил  $\delta_{\text{аэр}}$ , т. е.  $\delta_v = \delta_0 + \delta_{\text{аэр}}$ .



**Рис. 2. Модель отсека балки жесткости перехода: 1, 2, 3 – то же, что и на рис. 1**

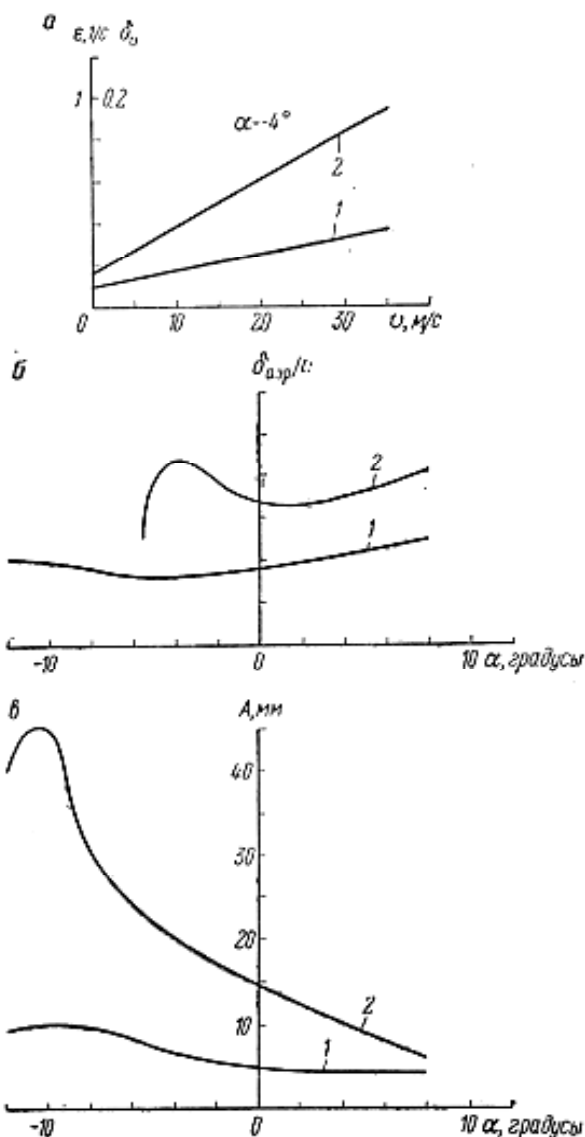
Экспериментальные исследования показали, что декремент колебаний модели в диапазоне углов  $-4^\circ \leq \alpha \leq 12^\circ$  положителен и возрастает пропорционально увеличению скорости потока. Причем декремент затухания во время испытания модели со сплошным настилом был примерно в два раза больше, чем в период испытаний модели с перфорированным настилом (рис. 4, а). При отрицательных углах  $-12^\circ \leq \alpha \leq 8^\circ$  модель со сплошным настилом интенсивно колебалась. Коэффициент пропорциональности  $\delta_{\text{аэр}}/v$  зависел от угла атаки, типа настила и в указанном интервале является положительной величиной (рис. 4, б).

Амплитуды колебаний  $A$ , измеренные при помощи тензоколец и электронной аппаратуры, для модели со сплошным настилом на наиболее опасных углах  $\alpha = -10^\circ$  в 2–4 раза больше, чем для модели с перфорированным настилом (рис. 4, в).



3. Зависимость коэффициентов  $C_x$  и  $C_y$  от скорости потока  $v$  и угла атаки  $\alpha$ :

$a$  — значения  $C_x$  при  $v = 10 \div 30$  м/с; 1 —  $\alpha = 0$ ; 2 —  $\alpha = -10^\circ$ ; б — значения  $C_x$ ,  $C_y$  при  $\alpha = 10 \div -10^\circ$ ; 1 — перфорированный настил; 2 — сплошной настил; 3 — модель без прочих трубопроводов; в —  $C_y^\alpha + C_x$ ; 1 — перфорированный настил; 2 — сплошной настил.



4. Зависимость коэффициента затухания  $\epsilon$  от скорости потока  $v$  (а), зависимость коэффициента пропорциональности  $\delta_{\text{зр}}/v$  и амплитуды колебаний  $A$  от угла атаки  $\alpha$  (соответственно б и в):

1 — с перфорированным настилом; 2 — со сплошным настилом.

Результаты этих исследований подтвердили определенную расчетом возможность потери аэродинамической устойчивости модели со сплошным настилом. Замена сплошного настила перфорированным исключила потерю аэродинамической устойчивости и снизила интенсивность колебаний модели.

Испытания модели со сплошным настилом, проведенные при меньших числах Струхала и меньшей частоте собственных колебаний ( $n = 2,5$  Гц), качественно подтвердили результаты предыдущих исследований: модель демпфировала на всех исследованных режимах, кроме углов  $-12^\circ \leq \alpha \leq 8^\circ$ .

Таким образом, применение перфорированного или просечного настила с относительной проницаемостью  $S_{\text{отв}}/S_{\text{наст}} = 0,4 \div 0,6$  исключает потерю аэродинамической устойчивости в изученном диапазоне углов атаки.

Результаты проведенных экспериментальных исследований позволили сделать вывод о целесообразности применения на надземных переходах перфорированных или просечных настилов вместо сплошных. По рекомендации ЦАГИ при сооружении вантового перехода газопровода Келиф – Мубарек через Амударью был использован просечный настил.

## К МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ СИНХРОНИЗАЦИИ АЭРОУПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ КРУГЛОЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ТЕЛ В ВЕТРОВОМ ПОТОКЕ\*

В теории нелинейных колебаний изучение автоколебательных систем имеет большое значение вследствие широкого распространения автоколебаний в природе.

Как показали многочисленные теоретические и экспериментальные исследования, стационарные режимы колебаний, возникающие в автоколебательных системах, под действием внешней гармонической силы могут существенно изменяться. Так, действие на механическую систему внешней периодической силы, частота которой близка к частоте автоколебаний, вызывает процесс синхронизации.

Сущность автоколебаний круглоцилиндрических тел в ветровом потоке заключается в наличии обратной связи между аэродинамическим демпфированием и колебаниями тел в потоке. Внешняя периодическая сила – сила Кармана при отрывном обтекании цилиндра – обуславливает возникновение процесса захвата. Но в аэроупругих системах последний принципиально отличается от процесса захвата в механических системах, когда вынужденные колебания с частотой внешней силы подавляют автоколебания [1]. В аэроупругих системах в зоне синхронизации вынужденные колебания захватываются автоколебаниями, подавляются ими, в то время как вне зоны синхронизации существуют автоколебания с частотой свободных колебаний и вынужденные колебания с частотой внешнего воздействия.

Частота периодической силы Кармана (частота срыва вихрей) в общем случае пропорциональна скорости потока:

$$\omega = 2\pi \frac{Sh}{d} v, \quad (1)$$

где  $Sh$  – число Струхала;  $d$  – диаметр цилиндра;  $v$  – скорость потока. Однако, как свидетельствуют наблюдения над колеблющимися в ветровом потоке круглоцилиндрическими упругими телами, при значениях скорости потока, достаточно близких к критической скорости автоколебаний  $v_{кр} = \omega_0 d / 2\pi Sh$ , частота срыва вихрей захватывается частотой автоколебаний, т. е. собственной частотой колебаний упругого тела [2].

---

\*Опубликовано в Сборнике «Динамика и прочность машин», Вып. 26, Харьков, 1977.

Прослеживается эффект обратной связи аэроупругих колебаний с внешним воздействием, который вызывает синхронизацию внешнего воздействия с устойчивым стационарным режимом колебаний, т. е. наблюдается некоторая аналогия с явлением, рассмотренным в работах В.О. Кононенко [3].

Природа обратной связи автоколебаний цилиндра с внешним воздействием (природа захвата частоты срыва вихрей собственной частотой цилиндра) еще не изучена. Она связана с характером обтекания, условиями отрыва пограничного слоя с поверхности упругого тела, числом Рейнольдса, корреляцией отрыва вихрей по длине цилиндра. Только исследование процессов, происходящих в следе под воздействием колебаний цилиндра, дает правильное математическое описание механизма обратной связи.

Н. Фергюсон и Г. Паркисон доказали [4], что колебания цилиндра увеличивают расстояние между вихрями вдоль вихревого следа, а поперечное расстояние между вихревыми цепочками в вихревом следе резко уменьшается, так что вихри образуются по осевой линии следа или поблизости от нее. Интенсивность вихрей в следе колеблющегося цилиндра значительно больше, чем в следе неподвижного цилиндра. При этом частота срыва вихрей уже синхронизирована с частотой автоколебаний.

В работах [5, 6] приведены результаты экспериментальных исследований аэроупругих колебаний круглоцилиндрических тел в потоке, описывающих гистерезисный эффект синхронизированных колебаний. Его сущность заключается в различном характере развития синхронизированных колебаний в зоне захвата в зависимости от того, как изменяется скорость потока при прохождении этой зоны: от меньших значений скорости к большим или наоборот. Так, сростом скорости потока кривая амплитудных значений синхронизированных колебаний выше, чем при убывании скорости потока в пределах одного и того же диапазона скоростей. Объяснение следует искать в запаздывании срыва вихрей по отношению к аэродинамическому демпфированию.

Рассматривая круглоцилиндрическое тело как систему с одной степенью свободы, предполагая известными его упругие и демпфирующие свойства, запишем дифференциальное уравнение аэроупругих колебаний в направлении, перпендикулярном к потоку [2]:

$$\ddot{y} + \frac{\delta\omega_0}{\pi}\dot{y} - \frac{\rho dv^2}{2m} \left[ (k - c_x) \frac{\dot{y}}{v} + \left( \frac{k}{6} - \frac{c_x}{2} \right) \left( \frac{\dot{y}}{v} \right)^3 - \frac{k}{6} \left( \frac{\dot{y}}{v} \right)^5 \right] + \quad (2) \\ + \omega_0^2 y = \frac{F(t)}{m},$$

где  $\omega_0$  – собственная частота упругого тела по  $n$ -й форме колеба-

ний;  $\delta$  – логарифмический декремент колебаний;  $c_x$  – коэффициент лобового сопротивления;  $k = \partial c_y / \partial \varphi$  – коэффициент, характеризующий крутизну кривой зависимости  $c_y = c_y(\varphi)$ ;  $\varphi$  – угол атаки;  $d$  – диаметр цилиндра;  $m$  – погонная масса тела;  $F(t)$  – поперечная аэродинамическая сила вихревой природы (сила Кармана). Колебательная система, описываемая нелинейным дифференциальным уравнением (2), относится к потенциально-автоколебательным системам, в которых автоколебательные режимы возникают только в случае определенных условий.

Приближенно периодическая сила  $F(t)$  имеет вид

$$F(t) = F_0 \sin \omega t; \quad F_0 \cong \frac{2}{\pi} c_k \rho d v^2. \quad (3)$$

Здесь  $c_k$  – аэродинамический коэффициент, определяемый экспериментальным путем. В некотором диапазоне скоростей потока частота срыва вихрей  $\omega$  перестает быть пропорциональной скорости потока  $v$ , т. е. соотношение (1) не соблюдается.

Как показали исследования [7], захват частот срыва вихрей частотами вынужденно колеблющегося цилиндра и зона захвата весьма велики. Синхронизация частоты срыва вихрей с частотой вынужденных колебаний обусловлена взаимодействием потока с колеблющимся телом.

Если колебания цилиндра вызваны самим потоком, синхронизация частоты срыва вихрей с частотой свободно колеблющегося цилиндра будет наблюдаться в более узком интервале скоростей потока.

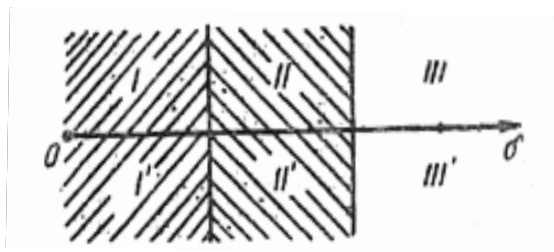
Будем полагать, что для свободно колеблющегося цилиндра явление захвата качественно не отличается от описанного в работе [7], но зона захвата ограничена интервалом изменения кинематических чисел Струхала  $0,18 < Sh < 0,22$ .

Правдоподобность предположения о сужении зоны захвата частот срыва вихрей для свободно колеблющегося в потоке цилиндра подтверждается наблюдениями над колеблющимися в ветровом потоке высокими или протяженными в плане гибкими сооружениями цилиндрической формы. Интервал кинематических чисел Струхала  $0,18 < Sh < 0,22$  который характеризуется интенсивным колебательным процессом с частотой собственных колебаний цилиндра, соответствует диапазону скоростей потока с нижней  $v_- = 0,9 v_{кр}$  и верхней границами  $v_+ = 1,1 v_{кр}$ . Критическую скорость потока  $v_{кр}$  определяем по выражению

$$v_{кр} = \frac{\omega_0 d}{2\pi Sh}; \quad Sh = 0,2. \quad (4)$$

Таким образом, не располагая данными о природе обратной связи автоколебаний цилиндра с внешним воздействием, можно, тем не менее, предложить закон изменения частоты  $\omega$  в зависимости от скорости потока  $v$ :

$$\omega = \begin{cases} 2\pi \text{Sh} \frac{v}{d}; & \text{Sh} = 0,2, \text{ если } v < v_- \text{ и } v > v_+; \\ \omega_0, & \text{« } v_- < v < v_+. \end{cases} \quad (5)$$



*Условия существования предельных циклов автоколебаний:*

- I – один предельный цикл  $\delta_1$ ; II – два предельных цикла  $\delta_2$ ;  
 III – предельные циклы отсутствуют; I' – самовозбуждающиеся автоколебания; II' – самоподдерживающиеся автоколебания;  
 III' – затухающие  $\delta$  или вынужденные, колебания*

Анализ решений уравнения (2) показывает [2], что возможны три принципиально разных случая поведения колебательной системы (рисунок): самовозбуждающиеся автоколебания с одним устойчивым предельным циклом, самоподдерживающиеся автоколебания с устойчивым и неустойчивым предельными циклами, затухающие (если  $F(t) = 0$ ), или вынужденные, стационарные (если  $F(t) \neq 0$ ) колебания. Амплитуды автоколебаний цилиндра приведены в работе [2].

Рассмотрим периодическую аэродинамическую силу  $F(t)$ , вызванную срывом вихрей с поверхности цилиндра при обтекании его ветровым потоком, как стационарный случайный процесс:

$$q(t) = \frac{F(t)}{m} = q_1(t) + q_2(t), \quad (6)$$

где  $q_1(t)$  – регулярная составляющая с постоянной амплитудой  $q = F_0 / m$  и частотой  $\omega = \text{const}$ ;  $q_2(t)$  – флуктуационная составляющая, которую считаем центрированной случайной функцией времени,

$$q_2(t) = q_* \sin \Omega t, \quad \Omega \gg \omega. \quad (7)$$

Исследование случайных процессов в нелинейных системах и, в частности, в автоколебательной системе (2) требует применения специальных приемов. Изучая влияние флуктуационной составляющей внешнего воздействия на автоколебательный режим, будем следовать работе В.В. Болотина [8].

Отметим, что гармоническая линеаризация нелинейности в исходной системе (2) (нелинейное неупругое сопротивление) неприменима, так как в линеаризованной подобным образом системе не может быть автоколебательных режимов. Тогда необходимо применять метод статистической линеаризации.

Примем выходной процесс, аналогично внешнему воздействию (6), состоящим из регулярной и случайной функций времени:

$$y = \langle y \rangle + \tilde{y}, \quad \dot{y} = \langle \dot{y} \rangle + \dot{\tilde{y}}. \quad (8)$$

Нелинейную функцию

$$f(\dot{y}) = \alpha_1 \dot{y} - \alpha_2 \dot{y}^3 + \alpha_3 \dot{y}^5; \quad \alpha_1 = \frac{\partial \omega_0}{\pi} - \rho \frac{dv}{2m} (k - c_x);$$

$$\alpha_2 = \frac{\rho d}{2mv^2} \left( \frac{k}{6} - \frac{c_x}{2} \right), \quad \alpha_3 = \frac{\rho d}{2mv^4} \frac{k}{6}, \quad (9)$$

будем линеаризовать в окрестности функции

$$f(\dot{y}) \cong f(\langle \dot{y} \rangle) + k \dot{\tilde{y}}. \quad (10)$$

Применяя статическую линеаризацию (10), подставляя внешнюю силу в форме (6), а выходной процесс – в форме (8) в исходную систему (2), получаем уравнения

$$\langle \ddot{y} \rangle + f(\langle \dot{y} \rangle) + \omega_0^2 \langle y \rangle = q_{\omega}(t); \quad (11)$$

$$\ddot{\tilde{y}} + k \dot{\tilde{y}} + \omega_0^2 \tilde{y} = q_{\text{сл}}(t) \quad (12)$$

соответственно для регулярных (математических ожиданий) и случайных составляющих.

Решение первого из уравнений (11), приведенное в [2], дает математическое ожидание амплитуды автоколебаний. Линейное стохастическое дифференциальное уравнение (12) решают с помощью методов линейной теории случайных процессов [1].

Эквивалентный коэффициент  $k$  – неслучайная постоянная, которую определяют либо из условия равенства дисперсий левой и

правой частей соотношения (10), либо следуя критерию минимума среднего квадратического отклонения действительной функции  $f(\dot{y})$  от аппроксимирующей (правая часть соотношения (10)). Воспользуемся вторым критерием и из условия

$$\langle [f(\dot{y}) - f(\langle \dot{y} \rangle) - k\dot{y}]^2 \rangle = \min \quad (13)$$

после соответствующих преобразований и дифференцирования по параметру  $k$  получим

$$k = \frac{\langle [f(\dot{y}) - f(\langle \dot{y} \rangle)] \dot{y} \rangle}{\langle \dot{y}^2 \rangle}. \quad (14)$$

Решение стохастического уравнения (12) в предположении высокочастотного случайного процесса (7), основанном [7] на реальном характере изменения воздействия  $F(t)$  (6), сводится к отысканию связи между нормированными спектральными плотностями флуктуационной составляющей внешнего воздействия  $q_2(t)$  и случайной выходной функцией времени  $\tilde{y}$ . Эту связь устанавливают так:

$$S_g(\omega) = F(i\omega) F(-i\omega) S_q(\omega), \quad (15)$$

где

$$F(i\omega) = \frac{1}{\omega_0^2 - \Omega^2 + ik\Omega} \quad (16)$$

передаточная функция линеаризованной системы (12).

Для рассматриваемого внешнего воздействия можно принять спектральную плотность типа [9]

$$S_q(\omega) = 2 \frac{(\alpha - \mu\beta) \Omega^2 + (\alpha + \mu\beta) m^2}{\Omega^4 + 2\alpha\Omega^2 + m^2}. \quad (17)$$

Здесь

$$m^2 = \alpha^2 + \beta^2; \quad \alpha^2 = \alpha^2 - \beta^2; \quad \mu \leq \frac{\alpha}{\beta}.$$

Значения параметров  $\alpha$ ,  $\mu$  можно найти обработкой экспериментального представления корреляционной функции соответствующего реального процесса  $F(f)$  в форме

$$R(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} (\cos \beta\tau + \mu \sin \beta|\tau|). \quad (18)$$

Возвращаясь к формуле (14) и заменяя ее приближенным вы-

ражением

$$k \cong \frac{f(\dot{\tilde{y}}) \tilde{y}}{(\dot{\tilde{y}}^2)}, \quad (19)$$

в соответствии с принятым типом нелинейной функции (9) будем иметь

$$k = \frac{\lambda}{2\sigma_y^2} - \frac{1}{\sqrt{2\pi e}} \left[ \frac{\lambda}{\sigma_y} - \left( \alpha_2 - \frac{5}{2} \alpha_3 \right) \sigma_y + \alpha_3 \sigma_y^3 \right]; \quad (20)$$

$$\lambda = \alpha_1 - \frac{3}{2} \alpha_2 + \frac{15}{4} \alpha_3.$$

Здесь использована гипотеза о нормальной плотности вероятности процессов  $\tilde{y}(t)$ ,  $\dot{\tilde{y}}(t)$ :

$$p(\dot{\tilde{y}}) = \frac{1}{\sigma_{\dot{y}} \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\dot{\tilde{y}}^2}{2\sigma_{\dot{y}}^2}\right); \quad (\sigma_{\dot{y}}^2 = \sigma_y^2). \quad (21)$$

Соотношение (15) представим в виде

$$\sigma_y^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S_q(\omega) d\omega}{\Omega^4 - \Omega^2 k^2(\sigma_y)}; \quad (\Omega \gg \omega). \quad (22)$$

Отсюда методом последовательных приближений или графически вычисляем дисперсию автоколебаний круглоцилиндрического тела в ветровом потоке.

Ограничиваясь в первом приближении первым, членом выражения (20) и случаям  $\beta = 0$ , после интегрирования (22) находим

$$\sigma_y^2 \cong \frac{\alpha \lambda^2}{8\Omega^3}. \quad (23)$$

### Литература

1. Каннинхэм В. Введение в теорию нелинейных систем. М., Гостэнгоиздат, 1962. 456 с.
2. Казакевич М.И. Аэроупругие колебания тела круглоцилиндрической формы в потоке воздуха. — В кн. «Гидроаэромеханика и теория упругости». Вып. 16. Днепропетровск, 1973. с. 53–60.

3. Кононенко В.О. Колебательные системы с ограниченным возбуждением. М., «Наука», 1964. – 256 с.

4. Фергюсон Н., Паркинсон Г.В. Явления на поверхности кругового цилиндра и в вихревом следе при колебаниях цилиндра, возбуждаемых вихрями. Конструирование и технология машиностроения. – «Тр. Американ. об-ва инженеров-механиков. Сер. В». М., 1967, т. 89, № 4. с. 260–269.

5. Hartlen R.T., Currie I.G. Lift-oscillator model of vortex-induced vibration. – «J. Engng. Mech, Div. Proc ASCE», 1970, vol. 96, N 5, p. 577-591.

6. Parkinson G.V. Wind-induced instability of structures. – «Phil. Trans. Roy. Soc. Lond», 1971, N A. 269, p. 395–409.

7. Блюмина Л.Х., Федяевский К.К. Исследование влияния вынужденных колебаний цилиндра в воздушном потоке на механизм срыва вихрей. – «Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа», 1969, №1, с. 118–119.

8. Болотин В.В. Применение методов теории вероятностей и теории надежности в расчетах сооружений. М., Стройиздат, 1971. – 256 с.

9. Гольденблат И.И., Николаенко Н.А. Расчет конструкций на действие сейсмических и импульсных сил. М., Госстройиздат, 1961. 320 с.

## ОБЕСПЕЧЕНИЕ АЭРОДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ И МОСТОВ\*

Современные тенденции строительной индустрии связаны с развитием конструктивных форм, применением новых марок сталей и других высокопрочных материалов, совершенствованием методов расчета, улучшением эксплуатационных свойств, повышением надежности и долговечности, обеспечением безопасности человека на всех стадиях существования сооружения. Этому способствует широкое внедрение в строительную практику гибких сооружений различного назначения, таких как мачты, башни, антенные системы и другие высотные конструкции, или висячие и вантовые мосты, переходы, трубопроводы, галереи и другие линейно-протяженные сооружения, или пространственные системы типа градирен, гибких покрытий, радиотелескопов. Большие размеры, повышенная гибкость, неблагоприятные динамические свойства (низкие значения частот и логарифмических декрементов колебаний) и плохообтекаемые формы поперечного сечения перечисленных сооружений делают их весьма чувствительными к действию ветра. Способность сооружений в целом и отдельных элементов конструкции противостоять воздействиям ветра характеризует их аэродинамическую устойчивость.

Последняя четверть века отмечена систематическими и интенсивными теоретическими и экспериментальными исследованиями в области аэродинамики строительных конструкций. К настоящему времени накоплен большой опыт в практике проектирования отдельных классов конструкций, но почти полностью исключается возможность использования его для расчета других видов конструкций. Исторически в проектировании и создании конструкций, чувствительных к действию ветра, четко обозначились три этапа. На первом этапе первостепенным считалось обеспечение статической прочности конструкций путем повышения изгибной или крутильной жесткости. Аэродинамическая устойчивость при этом обеспечивалась совершенно случайно. После крушения висячего моста Такома-Нэрроуз (США) наступил второй этап в проектировании и строительстве сооружений. Вопросу аэродинамической устойчивости стали уделять особое внимание. На этом этапе стали широко применять испытания моделей в аэродинамических трубах с целью повышения аэродинамической устойчивости сооружений. Третий этап в проектировании современных конструкций, когда аэродинамика инженерных

---

\*Опубликовано в трудах IABSE SYMPOSIUM, Москва, 1978.

сооружений сформировалась в самостоятельное научное направление, характеризуется научно обоснованным подходом к выбору конструктивных форм и расчетных схем конструкций с точки зрения безусловного обеспечения их аэродинамической устойчивости. Необходимые аэродинамические расчеты и исследования предшествуют строительству конструкций.

Проблемы обеспечения аэродинамической устойчивости стальных конструкций и мостов в современном понимании получили более широкое толкование как по форме, так и по содержанию.

Более глубоким стало изучение действия ветра на конструкции, реакции сооружений на однородный и турбулентный поток. Разнообразились методы исследований: наряду с дальнейшим развитием теоретических методов и экспериментальных лабораторных исследований должное внимание стали уделять натурным испытаниям и наблюдениям. Комплексное экспериментальное изучение проблемы совместно с теоретическими исследованиями позволяет создать надежные основы расчета конструкций на ветровую нагрузку.

Отечественный опыт расчета конструкций на ветровую нагрузку с учетом действия пульсаций ветра и динамических свойств конструкций получает все более широкое признание за рубежом. Однако в настоящее время он ограничен относительно узким классом сооружений и не распространяется на многие типы современных конструкций, имеющих большое развитие. В этих случаях приходится искусственно переходить на расчет с внедрением условного динамического коэффициента или принимать в расчете значение скорости ветра в порыве, а не осредненное при двухминутном интервале времени. Анализ поведения конструкций в ветровом потоке обнаруживает наряду со статическими деформациями изгиба в плоскости действия ветра и бокового выпучивания из плоскости действия ветра большое разнообразие явлений аэроупругой статической (дивергенция) и динамической устойчивости. К последним относятся изгибно-крутильный флаттер, галопирование, срывной флаттер, параметрический резонанс, колебания ветрового резонанса, бафтинг. Перечисленные аэроупругие явления обусловлены формой поперечного сечения, конфигурацией сооружения и его ориентацией относительно направления ветрового потока, упругими и демпфирующими свойствами конструкций, структурой ветра и другими обстоятельствами. Эти явления связаны (кроме дивергенции) с определенным типом, колебаний и представляют исключительный интерес с точки зрения механизма их возникновения.

В то же время они представляют серьезную опасность для надежности и долговечности конструкций, а также для пребывания чело-

века на этих конструкциях.

Причины аэроупругих колебаний конструкций следующие: отрицательное аэродинамическое демпфирование; неустойчивость по углу атаки в смысле Ден-Гартога; изгибно-крутильная (флаттерная) неустойчивость; параметрические связи в системе; угловые колебания точек отрыва пограничного слоя с поверхности конструкции; наличие обратной связи между колеблющейся конструкцией и режимом отрыва вихрей Кармана; порыву ветра. Не все виды аэроупругих колебаний изучены в достаточной степени; не полностью изучен механизм их возникновения и условия существования. Среди них наибольшую известность получили колебания ветрового резонанса и галопирования. Математические модели этих явлений, наиболее достоверно описывающие характер колебаний, критерии возникновения и условия их существования, позволяют не только оценить уровни колебаний, т.е. их амплитуды и частоты, но и управлять ими с помощью механического демпфирования конструкций. Наиболее опасными видами аэроупругих колебаний являются бафтинг и изгибно-крутильный флаттер. Возникающие при этих явлениях колебания в течение малого промежутка времени неограниченно нарастают и напряжения в элементах конструкций достигают таких значений, которые приводят конструкцию к разрушению.

Среди аэроупругих колебаний наименее изученными являются бафтинг и срывной флаттер. Механизм возникновения этих явлений в строительных конструкциях и мостах еще не выяснен в достаточной мере.

Методологическая основа аэродинамического расчета стальных конструкций и мостов состоит в проверке возможности возникновения одного из типов аэроупругой неустойчивости с помощью приближенных критериев, позволяющих определить соответствующее значение критической скорости ветра. Условием обеспечения аэродинамической устойчивости конструкций является соблюдение неравенства  $V_{кр} > V_p$ , где  $V_p$  — **расчетная скорость ветра для заданного района строительства**. В тех случаях, когда невозможно установить таким путем аэродинамическую устойчивость сооружения, прибегают к экспериментальным исследованиям в аэродинамических трубах. Это оказывается целесообразным также при разработке серии типовых проектов, предназначенных для широкого применения, при создании особо ответственных и уникальных сооружений. Кроме того, экспериментальные исследования необходимы при определении аэродинамических характеристик обтекания таких конструкций, для которых подобная информация отсутствует.

Аэродинамическому расчету сооружений предшествует определе-

ние их динамических характеристик, т.е. собственных частот, форм и логарифмических декрементов колебаний. Значительный прогресс в этой области достигнут благодаря большим возможностям современных вычислительных средств. Несмотря на это, только натурные экспериментальные исследования могут служить надежной основой при оценке достоверности определения динамических характеристик сложных пространственных конструкций. В то же время натурные наблюдения за поведением сооружений и отдельных элементов в условиях реальных метеорологических воздействий способствуют уточнению метеорологических, в том числе ветровых, нагрузок, аэродинамических расчетов и призваны обеспечивать аэродинамическую устойчивость конструкции. При проектировании стальных конструкций необходимо предусматривать обеспечение их прочности и устойчивости как в процессе эксплуатации, так и при транспортировании и монтаже. С сожалением следует отметить, что при достаточно большом внимании к общей проблеме аэродинамической устойчивости стальных конструкций и мостов незаслуженно малое значение уделяется исследованиям их аэродинамической устойчивости в период монтажа. Имеются исследования, в которых обращается внимание на всю серьезность и важность вопроса обеспечения аэродинамической устойчивости при монтаже. Необходимо учесть, что период монтажа вплоть до образования совершенной конструкции длится несколько лет, в течение которых сооружение неоднократно оказывается в весьма неблагоприятных метеорологических условиях. Пониженная изгибная и крутильная жесткость, очень низкие демпфирующие свойства сооружений в монтажном состоянии в значительной мере благоприятствуют проявлению аэродинамической неустойчивости. Эти соображения подтверждаются экспериментальными исследованиями в аэродинамической трубе, выполненными с помощью моделей висячих сооружений на различных стадиях монтажа. Характер изменения частот и декрементов колебаний в процессе монтажа свидетельствует о возможности снижения критической скорости ветра, при которой возникает аэродинамическая неустойчивость, по сравнению с расчетным значением скорости в эксплуатационной стадии. Снижение критической скорости ветра ниже расчетного значения означает, что на некоторых этапах монтажа не обеспечена надежность сооружения и безопасность монтажных работ. Поэтому всегда возникает необходимость в соответствующей проверке, разработке мероприятий и усовершенствовании способов монтажа, обеспечивающих аэродинамическую устойчивость стальных конструкций на всех стадиях монтажа независимо от способа производства работ.

Одной из важных и современных проблем, связанных с повышением, надежности и аэродинамической устойчивости конструкций, является проблема виброзащиты, т.е. гашения колебаний. Защита конструкций от чрезмерных вибраций в зависимости от назначения и конструктивных форм осуществляется различными способами, которые условно можно разделить на два типа – пассивный и активный. При пассивном способе путем изменения основных параметров сооружений изменяют его собственную частоту. Однако добиться таким образом эффективных результатов невозможно, так как само явление не устраняется, а происходит лишь смещение критического значения скорости ветра, соответствующего развитию интенсивных колебаний» Активные способы, уменьшающие амплитуду колебаний, заключаются в устройстве механических или аэродинамических гасителей колебаний. Из большого многообразия известных механических способов некоторые приводят к весьма эффективным результатам, несмотря на то, что они не устраняют саму причину возникновения интенсивных аэроупругих колебаний. Эффективность аэродинамических способов гашения колебаний определяется, в первую очередь, степенью устранения причины возникновения колебаний. При этом различные способы в зависимости от типа аэроупругих колебаний опираются на ряд аэродинамических эффектов: изменение циркуляции потока, создание сдвига фаз в отрыве вихрей по длине конструкций и др. Изменение циркуляции потока вокруг тела может быть осуществлено по двум направлениям: путем изменения внешней конфигурации тела и путем пропуска потоков воздуха сквозь конструкцию (сдвиг пограничного слоя). Если причиной возникновения интенсивных колебаний конструкций, помимо ветровой, являются другие виды нагрузок (сейсмическая, подвижная, вибрационная и др.), следует ожидать перспективных результатов при сочетании (при надлежащем выборе) механических и аэродинамических способов гашения.

К новым аспектам в проблеме обеспечения аэродинамической устойчивости стальных конструкций и мостов следует отнести изучение вредного влияния аэроупругих колебаний на организм человека и связанная с этим проблема виброзащиты. Допустимый уровень аэроупругих колебаний необходимо оценивать, исходя из двух равнозначных критериев:

- колебания, опасные для конструкции;
- колебания, вызывающие неприятные ощущения у человека.

В самом деле, с одной стороны, интенсивные колебания могут привести сооружение к разрушению тотчас же при наступлении аэроупругой неустойчивости типа изгибно-крутильного флаттера,

бафтинга, а также по мере накопления повреждений или пластических деформаций при аэроупругой неустойчивости типа ветрового резонанса, галопирования, срывного флаттера или параметрического резонанса. С другой стороны, колебания гораздо меньшей интенсивности, которые вовсе не угрожают сооружению или отдельным его элементам, могут оказаться неприемлемыми с точки зрения возникновения неприятных, а иногда болезненных ощущений у человека, находящегося на конструкции. При этом необходимо учитывать не только физиологическое, но и психологическое воздействие на человека.

Следовательно, помимо выполнения традиционных расчетов, в том числе расчетов элементов конструкций на выносливость, необходимо оценивать возможный уровень аэроупругих колебаний по существующим санитарным нормам, регламентирующим степень опасности его на организм человека. Кроме того, для висячих мостов уровень колебаний должен оцениваться с точки зрения восприятий человека, находящегося на движущемся поддрессоренном экипаже. В этом случае, как показали исследования, допустимые с точки зрения безопасности движения перегрузки составляют всего  $0,2 \div -0,5 g$  и зависят от величины критической скорости возникновения одного из типов аэроупругой неустойчивости. В заключение отметим, что создание аэродинамических лабораторий, оснащенных современным комплексом оборудования для нужд строительной индустрии, будет способствовать дальнейшему развитию новых конструктивных форм стальных конструкций.

### *Резюме*

Современные стальные конструкции и мосты весьма чувствительны к действию ветра. Их реакция на ветровое воздействие отличается большим разнообразием и зависит от структуры ветрового потока и свойств самих конструкций. Рассмотрены различные аспекты проверки и обеспечения аэродинамической устойчивости сооружений в монтажной и эксплуатационной стадии. Отмечено влияние аэроупругих колебаний на организм человека.

## АЭРОДИНАМИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ОДНОСТОЕЧНОГО ПИЛОНА В РАВНОМЕРНОМ ПОТОКЕ\*

В практике создания висячих и вантовых мостовых конструкций встречается вариант одностоечных пилонов в виде тонкостенного замкнутого коробчатого бруса. Конфигурация формы поперечного сечения такого бруса определяет не только ветровую нагрузку на него в зависимости от направления потока, но и характер обтекания и общую аэродинамическую устойчивость. Повышенная чувствительность одностоечного пилон к ветровому воздействию вследствие большой гибкости и его важное функциональное назначение (обеспечивать несущую способность сооружения) требуют исследования аэродинамической устойчивости и, в необходимых случаях, разработки мероприятий, обеспечивающих повышение аэродинамической устойчивости.

С целью решения перечисленных выше задач были выполнены испытания модели секции пилон в аэродинамической трубе Т-5 замкнутого типа с открытой рабочей частью. Степень начальной турбулентности потока в рабочей части трубы составляла  $\varepsilon = 0,5\%$ . Для экспериментальных исследований была изготовлена модель из многослойной авиационной фанеры длиной  $L = 450$  мм в масштабе 1:20, так что поперечное сечение имело размеры 180х295 мм. Поскольку цель исследований состояла не только в определении аэродинамических характеристик, но и в решении вопросов стабилизации пилон в ветровом потоке, в модели были устроены сквозные каналы в шести сечениях с шагом  $0,07b$  и длиной  $0,17b$  **каждый, которые в необходимых случаях могли быть заглушены.** Двухмерное обтекание модели обеспечивалось установкой двух тонких торцевых шайб.

Для проведения весовых испытаний при определении аэродинамических характеристик модель крепилась с помощью специальных державок к аэродинамическим трехкомпонентным тензометрическим весам, разработанным и сконструированным для измерения аэродинамических сил лобового сопротивления, подъемной силы и момента относительно продольной оси модели.

Аэродинамические силы лобового сопротивления  $X$ , подъемной силы  $Y$  и продольный момент  $M_z$  определялись в поточной (скоростной) системе координат  $oxyz$  (рис. 1).

---

\*Опубликовано совместно с И.Ю. Графским в Трудах ЦНИИПСК, Москва, 1980.

Соответствующие значения аэродинамических коэффициентов вычислялись по формулам:

$$c_x = \frac{X}{qS}; \quad c_y = \frac{Y}{qS}; \quad m_z = \frac{M_z}{q b S}, \quad (1)$$

где  $q = 0,5\rho V^2$  – скоростной напор;  $b$  – ширина поперечного сечения модели;  $S = bL$  – площадь основания модели. Для вычисления аэродинамических коэффициентов в связанной системе координат  $ox_1y_1z_1$  (рис. 1) пользуются следующими соотношениями (в случае совпадения начала координат в обеих системах):

$$\left. \begin{aligned} c_{x1} &= c_x \cos \alpha + c_y \sin \alpha; \\ c_{y1} &= -c_x \sin \alpha + c_y \cos \alpha; \\ m_{z1} &= m_z, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где  $\alpha$  – угол атаки.

Начальная турбулентность потока при исследовании вопросов стабилизации модели пилона изменялась путем установки в плоскости выходного сечения сопла аэродинамической трубы специальных турбулизирующих сеток. Турбулентность измерялась в рабочей части аэродинамической трубы с помощью термоанемометра системы «Турбулентность» в зоне расположения модели.

Диапазон изменения угла атаки при экспериментальных исследованиях  $0 \leq \alpha \leq 90^\circ$  был обусловлен, с одной стороны, произвольной ориентацией пилона по отношению к ветровому потоку, с другой стороны, двоякосимметричной формой поперечного сечения пилона.

Результаты экспериментальных исследований представлены на рис. 1, 2, 3. Первый рисунок содержит данные об аэродинамических характеристиках лобового сопротивления ( $c_x$ ), поперечной силы ( $c_y$ ) и продольного (относительно продольной оси пилона) момента ( $m_z$ ) одностоечного пилона с характерным соотношением его сторон 3:5. Зависимости аэродинамических коэффициентов от направления потока по отношению к контуру поперечного сечения имеют немонотонный характер. Лобовое сопротивление немонотонно нарастает с увеличением угла атаки  $\alpha$  в выбранной для модели системе координат, в то время как поперечная сила и продольный момент изменяют не только величину, но и свой знак. Как видно из рис. 1, перемена знаков аэродинамических коэффициентов поперечной силы  $c_y$  и продольного момента,  $m_z$  происходит приблизительно в одной точке, которая находится в интервале  $25 < \alpha < 30^\circ$ . Угол атаки, при ко-

тором аэродинамический момент относительно центра масс поперечного сечения равен нулю, в аэродинамике летательных аппаратов носит название балансировочного угла, поскольку связан с балансировкой аппарата в процессе его движения.

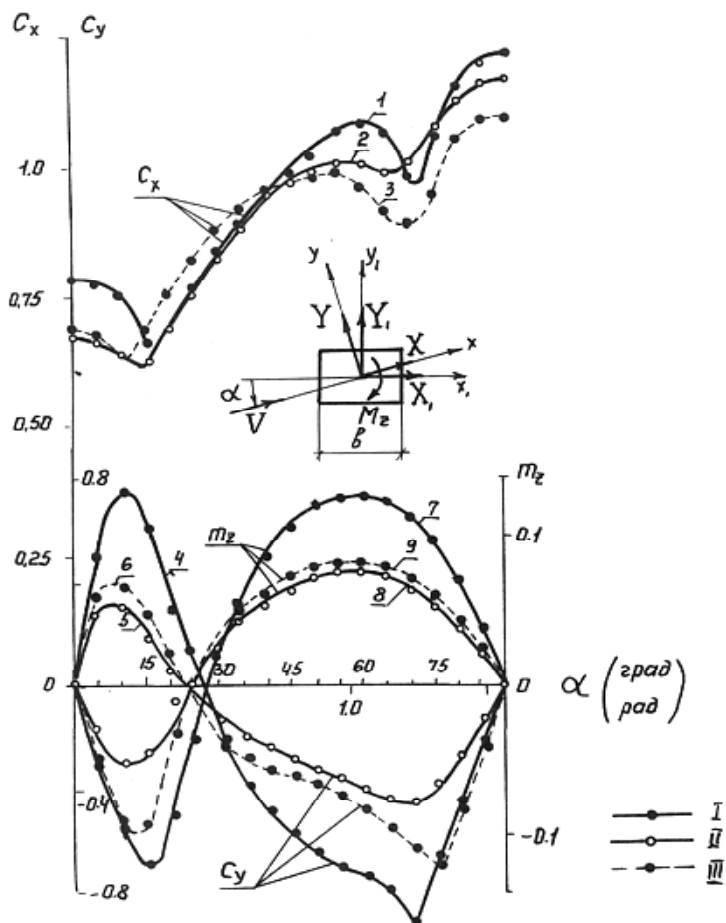


Рис. 1. Графики зависимости аэродинамических коэффициентов  $c_x$  (кривые 1, 2, 3),  $c_y$  (кривые 4, 5, 6),  $m_z$  (кривые 7, 8, 9), от угла атаки  $\alpha$  для модели призматического пилона: I – при начальной турбулентности в аэродинамической трубе  $\varepsilon = 0,5\%$ ; II – влияние каналов; III – влияние турбуликации потока  $\varepsilon = 8\%$ ;  $x, y, X, Y$  – связанная система координат и соответствующие ей аэродинамические силы

Характер изменения поперечной силы в зависимости от угла атаки свидетельствует, что в окрестности некоторых углов атаки  $\alpha$  ( $20^\circ < \alpha < 45^\circ$ ) градиент  $\partial c_y / \partial \alpha$  имеет отрицательное значение. Если при этом удовлетворяется неравенство

$$\frac{\partial c_y}{\partial \alpha} + c_x < 0, \quad (3)$$

то согласно Ден-Гартогу [1] возможно возникновение аэроупругой динамической неустойчивости типа галопирования, при котором призматическое тело (пилон) совершает поперечные относительно потока аэроупругие изгибные колебания на одной из собственных частот.

Исследование устойчивости автоколебаний галопирующего типа позволило получить [2] критическую скорость их возникновения.

$$v_{кр} = \frac{2 \delta m \omega_0}{|c_y^\alpha| \pi \rho b}; \quad c_y^\alpha = \frac{\partial c_y}{\partial \alpha}, \quad (4)$$

где  $m$  — погонная масса тела;  $\omega_0$  — одна из его собственных частот изгибных колебаний;  $\delta$  — логарифмический декремент колебаний;  $b$  — характерный размер поперечного сечения тела;  $\rho$  — плотность воздуха.

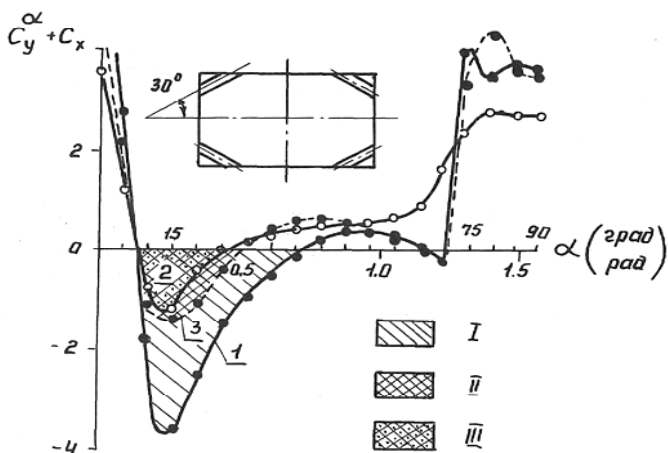


Рис. 2. Проверка аэродинамической неустойчивости по критерию Ден-Гартога. Затрихованы области неустойчивости: I — при начальной турбулентности  $\varepsilon=0,5\%$  (кривая 1); II — при турбулизации потока  $\varepsilon=8\%$  (кривая 3); III — при устройстве каналов (кривая 2)

Сопоставление графиков  $c_y(\alpha)$  и  $m_z(\alpha)$  обнаруживает одно интересное свойство призматических тел, не получившее в литературе отражения: отрицательному градиенту  $C_y^a$  соответствует положительный градиент  $m_z^a$  ( $m_z = \partial m_z / \partial \alpha$ ). Поскольку отрицательный градиент  $c_y^a$  и положительный градиент  $m_z^a$  имеют место в окрестности балансировочного угла атаки  $\alpha^*$ , следует полагать, что положительный градиент  $m_z^a$  характеризует не только неустойчивое положение равновесия призматического тела при  $\alpha = \alpha^*$  [3], но и возможность возникновения аэродинамической неустойчивости. Соответствующие графики  $(c_y^a + c_x^a)$  и  $m_z^a$  приведены на рис. 2 и 3.

Условие существования (3) и критерий возникновения (4) аэроупругих колебаний галопирующего типа получены (4) на основе рассмотрения математической модели тела с одной степенью свободы в направлении, перпендикулярном вектору скорости потока. Модель учитывает изменения эффективного угла атаки, вызванные этими колебаниями в окрестности угла атаки  $\alpha^*$  с отрицательным градиентом  $c_y^a$ . Возникновение колебаний галопирования связано с потерей аэродинамического демпфирования, когда суммарное демпфирование в системе меняет знак на противоположный.

Неравенство

$$m_z^a > 0 \quad (5)$$

является еще одним условием аэродинамической неустойчивости призматического тела, которая приводит к крутильным колебаниям на одной из его собственных частот относительно продольной оси  $z$ . В этом случае возникновение крутильных колебаний по аналогии с галопированием обусловлено переменной знака суммарного демпфирующего момента. Эти колебания можно в первом приближении описать математической моделью тела с одной степенью свободы, соответствующей угловым перемещениям поперечного сечения относительно продольной оси тела  $z$  и учитывающей изменения эффективного угла атаки при угловых перемещениях:

$$EI_\omega = \frac{d^4 \alpha}{dz^4} + mr^2 \frac{d^2 \alpha}{dt^2} - GI \frac{d^2 \alpha}{dz^2} + \frac{d\alpha}{dt} = \quad (6)$$

$$= \frac{1}{2} \rho v^2 b^2 m_z^a \alpha + \frac{1}{8} \rho v^2 b^2 [c_y^a (\alpha^* + \alpha) - \frac{1}{2} \pi \frac{ba}{v}] - \frac{\pi \rho b^4}{128} \ddot{\alpha}$$

при следующих допущениях, не отражающихся на общности полученных результатов:

- призматическое тело рассматривается как тонкостенный замкнутый прямолинейный брус;
- поперечное сечение тела двоякосимметричное;
- влияние инерционных сил, обусловленных продольными (вдоль

оси  $z$ ) секториальными перемещениями, настолько мало, что им можно пренебречь.

Здесь приняты следующие обозначения:  $m$  – погонная масса тела;  $EI_\omega$ ,  $GI_d$  – секториальная и крутильная жесткости поперечного сечения тела;  $b$ ,  $r$  – характерный размер и радиус инерции (относительно центра инерции) поперечного сечения;  $\alpha^*$  – балансирующий угол атаки, соответствующий неустойчивому положению равновесия;  $\alpha$  – угол поворота поперечного сечения относительно угла атаки  $\alpha^*$ ,  $n$  – коэффициент затухания крутильных колебаний. Простые преобразования уравнения свободных крутильных колебаний призматического тела в форме (6) дают

$$\begin{aligned} & \left(m_r^2 + \frac{\pi \rho b^4}{128}\right) \ddot{\alpha} + \left(\frac{1}{\pi} \delta_\alpha \omega_\alpha + \frac{1}{16} \pi \rho b^3 v\right) \dot{\alpha} + \\ & + [m r^2 \omega_\alpha^2 + \frac{1}{2} \rho v^2 b^2 (m_z^\alpha + \frac{1}{4} c_y^\alpha)] \alpha = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $\delta_\alpha$ ;  $\omega_\alpha$  – логарифмический декремент и собственная частота крутильных колебаний:

$$\omega^2 = \frac{EI_\omega}{m r^2} \cdot \frac{n^4 \pi^4}{l^4} + \frac{GI_\alpha}{m r^2} \cdot \frac{n^2 \pi^2}{l^2}. \quad (8)$$

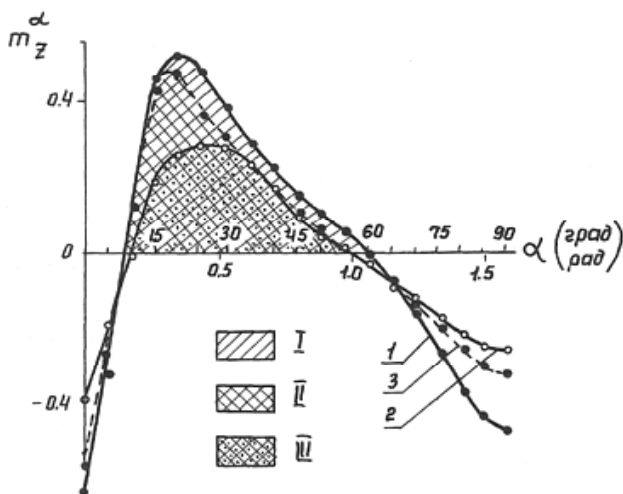
Анализ уравнения (7) показывает, что в окрестности балансирующего угла  $\alpha^*$  аэродинамический момент оказывает дестабилизирующее влияние ( $m_z^\alpha > 0$ ) на крутильные колебания тела, понижая динамическую крутильную жесткость, в то время как подъемная сила – стабилизирующее влияние ( $c_y^\alpha < 0$ ), повышая динамическую крутильную жесткость. Полная потеря аэродинамического демпфирования, определяющая неустойчивость колебательной системы, характеризуется выражением критической скорости

$$v_{кр} = \omega_\alpha \sqrt{\frac{m r^2}{\frac{1}{2} \rho b^2 (m_z^\alpha + \frac{1}{4} c_y^\alpha)}} \quad (9)$$

при соблюдении условия

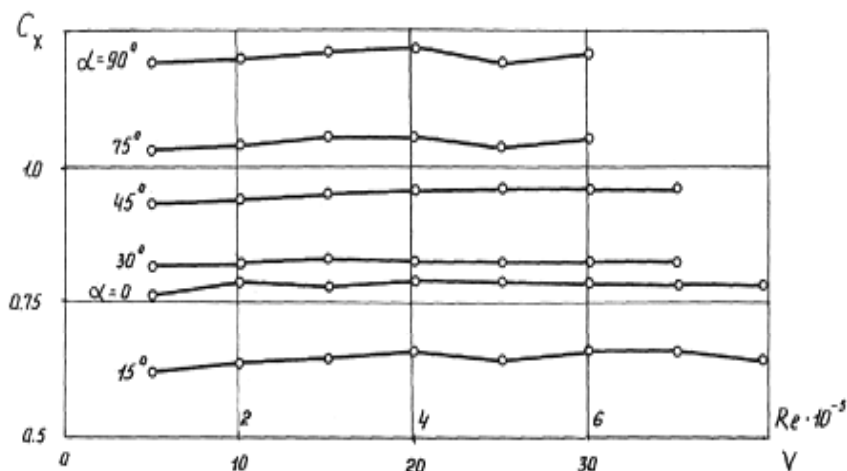
$$m_z^\alpha > \frac{1}{4} |c_y^\alpha|, \text{ или } \frac{m_z^\alpha}{|c_y^\alpha|} > \frac{1}{4} \quad (10)$$

в окрестности угла атаки  $\alpha^*$ . Если условие (10) не выполняется, то положение равновесия при  $\alpha^*$  устойчивое, и призматическое тело совершает устойчивые крутильные колебания относительно этого положения в поле внешних возмущающих моментов.



**Рис. 3. Проверка крутильной аэродинамической неустойчивости. Заштрихованы области неустойчивости: I – при начальной турбулентности  $\varepsilon=0,5\%$  (кривая 1); II – при турбулизации потока  $\varepsilon=8\%$  (кривая 2); III – при устройстве каналов (кривая 3)**

Важной инженерной проблемой является стабилизация тела в потоке воздуха. Как показывают экспериментальные исследования, существенные результаты по предотвращению потери аэродинамического демпфирования могут быть достигнуты путем создания турбулизации потока или путем изменения обтекания потоком тела с помощью сквозных каналов [4]. Второй способ известен как эффективное средство гашения колебаний. На рис. 2 и 3 приведены результаты исследования влияния турбулизации потока и сквозных каналов (под углом  $30^\circ$  к большей стороне поперечного сечения – рис.2) на области аэродинамической неустойчивости. Как видно из этих рисунков, устройство каналов повышает критическую скорость аэроупругих колебаний галопирования в 3 раза, а турбулизация потока – в 2,5 раза. В случае крутильных колебаний устройство каналов эффективнее турбулизации потока в 1,7 раза. При этом в обоих случаях значительно суживается область неустойчивости. Однако, если устройство каналов в призматических телах, используемых в качестве инженерных сооружений или их отдельных элементов, требует конструктивного вмешательства, то турбулизация потока является реальным свойством ветрового потока в нижнем приземном слое атмосферы.



**Рис. 4.** Графики зависимости аэродинамического коэффициента лобового сопротивления модели отсека пилона  $C_x$  от скорости потока  $v$  (числа Рейнольдса  $Re$ ) при различных углах атаки

Характер изменения аэродинамического коэффициента лобового сопротивления  $C_x$  от скорости потока  $v$  (числа Рейнольдса  $Re$ ), свидетельствует (рис. 4) об автомодельном режиме обтекания, т. е. об отсутствии явления кризиса обтекания, что позволяет с полной достоверностью использовать результаты модельных испытаний в аэродинамической трубе при расчетах реальных сооружений.

### *Литература*

1. Ден-Гартог. Механические колебания. — М.: Физматгиз, 1960.
2. Казакевич М.И. Аэродинамическая устойчивость надземных и висячих трубопроводов. — М.: «Недра», 1977.
3. Краснов Н.Ф., Кошевой В.Н. Управление и стабилизация в аэродинамике. — М.: «Высшая школа», 1978.
4. Федяевский К.К., Блюмина Л.Х. Гидроаэродинамика отрывного обтекания тел. — М.: «Машиностроение», 1977.

## **ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИИ СОВРЕМЕННЫХ ВАНТОВЫХ МОСТОВ\***

Характерными чертами конструкций современных вантово-балочных мостов являются их обтекаемая или близкая к обтекаемой форма поперечного сечения и тонкостенная коробчатая балка жесткости. Обтекаемая форма поперечного сечения тонкостенной балки жесткости создается наклоном главных балок относительно вертикали, т. е. трапецевидностью коробчатой балки, а также устройством трапецевидной или криволинейной с плавным очертанием обшивки. Такие конструктивные формы обладают улучшенными аэродинамическими качествами, лучше сопротивляются ветровому воздействию и менее чувствительны к флуктуациям угла атаки ветрового потока в приземном слое атмосферы.

В общем случае ветрового воздействия на сооружения типа висячих и вантовых мостов направление ветра может составлять с горизонтальной плоскостью некоторый угол атаки  $\alpha$ . При этом восходящему потоку принято приписывать положительное значение угла атаки, а нисходящему потоку – отрицательное значение. При определении ветровой нагрузки на конструкции мостов, чувствительных к ветровому воздействию, необходимо учитывать возможное отклонение направления ветра от горизонтали. Очевидно, угол атаки является функцией скорости ветра и зависит также от рельефа местности. Количественная зависимость угла атаки от скорости ветра была установлена при прохождении урагана «Дора» через пролив Наргансет вблизи Ньюпорта, где сооружен висячий мост Род-Айленд, на котором в тот момент были установлены метеорологические приборы, а также при наблюдениях на висячих мостах Северн в Англии, Акаси Нэрроуз и Тойосато в Японии. Полученная зависимость свидетельствует об увеличении угла атаки с уменьшением скорости потока. Следовательно, чем ниже расчетная скорость ветра, тем больший угол атаки должен быть учтен при расчете на ветровую нагрузку. Поскольку рельеф местности Нью-Йоркского висячего моста весьма характерен для подобного типа сооружений, эти экспериментальные данные могут служить основой в практике проектирования висячих и вантовых мостов. Еще более важен учет влияния угла атаки при исследовании явлений аэродинамической неустойчивости,

---

\*Опубликовано совместно с И.Ю. Графским в Известиях АН Латв. ССР, Рига, 1982.

значения критических скоростей которых могут быть существенно ниже расчетной скорости ветра.

Для проведения аэродинамических исследований были изготовлены модели балки жесткости коробчатой формы с вертикальными боковыми стенками в масштабе М 1:50 таким образом, чтобы можно было крепить боковую обшивку для образования трапецевидной формы поперечного сечения. Длина секционных моделей 400 мм. В качестве прототипа была выбрана балка жесткости вантового моста пролетом 312 м через р. Даугаву в г. Риге, ширина проезжей части которой составляет 30 м, высота балки жесткости – 3 м, ширина нижнего пояса коробчатой балки – 16 м. Проезжая часть имеет консоли с вылетом по 7 м каждая. Чтобы исключить при обтекании моделей концевой эффект, к их торцам крепятся тонкие шайбы, что эквивалентно использованию модели «бесконечного» удлинения.

Экспериментальные исследования осуществлялись в аэродинамической трубе ДГУ Т-5 замкнутого типа с открытой рабочей частью. Начальная турбулентность потока в рабочей части трубы  $\varepsilon=0,5\%$ . Аэродинамические силы (лобовое сопротивление, подъемная сила и продольный момент) определялись с помощью трехкомпонентных тензометрических весов в поточной (скоростной) системе координат, в которой ось  $x$  направлена вдоль вектора скорости  $V$ . По измеренным значениям аэродинамических сил  $X$ ,  $Y$  и  $M_z$  с помощью формул

$$c_x = \frac{2Y}{\rho V^2 b l}; \quad c_y = \frac{2X}{\rho V^2 b l}; \quad m_z = \frac{2M_z}{\rho V^2 b^2 l} \quad (1)$$

определяются соответствующие значения аэродинамических коэффициентов, где  $b$  – хорда (ширина) модели,  $l$  – длина модели. Графики зависимостей аэродинамических коэффициентов от угла атаки модели отсека балки жесткости приведены на рис. 1. Как видно из рис. 1, в поточной системе координат коэффициент  $c_x$  с увеличением абсолютного значения угла атаки  $|\alpha|$  **резко возрастает, достигая** при  $|\alpha|=15^\circ$  вдвое большего значения, а при  $|\alpha|=30^\circ$  – вчетверо большего значения, чем при  $\alpha=0$ . **Заметно также нарастание** подъемной силы с увеличением угла атаки  $|\alpha|$ . **Введение в расчеты** продольного момента позволяет учесть истинное положение центра давления, в общем случае не совпадающего с центром изгиба поперечного сечения балки жесткости вантового моста.

Результаты исследования влияния обшивки (трапецевидной формы поперечного сечения) на аэродинамические характеристики модели отражены на тех же рисунках. При нулевом угле атаки наличие обшивки способствует снижению сил лобового сопротивления

на 23%. Подъемная сила при наличии обшивки несколько снижается (пропорционально углу атаки  $|\alpha|$ ). На величину продольного момента обшивка практически не влияет.

Результаты исследования влияния чисел Рейнольдса (скорость потока) на лобовое сопротивление модели указывают на постоянство коэффициента лобового сопротивления как при  $\alpha = 0$ , так и при  $\alpha \neq 0$  ( $\alpha = 15^\circ$ ), что свидетельствует об отсутствии кризиса обтекания модели, т. е. автомодельном режиме ее обтекания. Этот вывод имеет важное практическое значение, так как позволяет переносить результаты модельных испытаний в аэродинамической трубе на натуру.

В практике создания висячих и вантовых мостовых конструкций часто встречается вариант одностоечного пилона в виде тонкостенного замкнутого коробчатого бруса. Конфигурация формы поперечного сечения такого бруса определяет не только ветровую нагрузку на него в зависимости от направления потока, но и характер обтекания и его общую аэродинамическую устойчивость.

Повышенная чувствительность одностоечного пилона к ветровому воздействию вследствие большой гибкости и его важное функциональное назначение, обеспечивающее несущую способность сооружения, требуют тщательного подхода к назначению аэродинамических характеристик, обуславливающих ветровую нагрузку, исследования его аэродинамической устойчивости и, в необходимых случаях, разработки мероприятий, обеспечивающих повышение аэродинамической устойчивости.

С целью решения перечисленных выше задач были выполнены также испытания модели секции пилона. Для экспериментальных исследований была изготовлена модель из многослойной авиационной фанеры длиной  $L = 450$  мм в масштабе  $M 1:20$ , так что ее поперечное сечение имело размеры  $180 \times 295$  мм. Поскольку цель исследования состояла не только в определении аэродинамических характеристик, но и в решении вопросов стабилизации пилона в ветровом потоке, в модели были устроены сквозные каналы в шести сечениях модели с шагом  $0,07 b$  и длиной  $0,17 b$  каждый, которые в необходимых случаях могли быть заглушены. Двухмерное обтекание модели обеспечивалось установкой двух тонких торцевых шайб.

Начальная турбулентность потока при исследовании вопросов стабилизации модели пилона изменялась путем установки в плоскости выходного сечения сопла аэродинамической трубы специальных турбулизирующих сеток. Турбулентность измерялась в рабочей части аэродинамической трубы с помощью термоанемометра системы «Турбулентность» в зоне расположения модели.

Диапазон изменения угла атаки  $\alpha$  при экспериментальных

исследованиях  $0 < \alpha < 90^\circ$  был обусловлен, с одной стороны, произвольной ориентацией пилона по отношению к ветровому потоку, с другой стороны, двоякосимметричной формой поперечного сечения пилона.

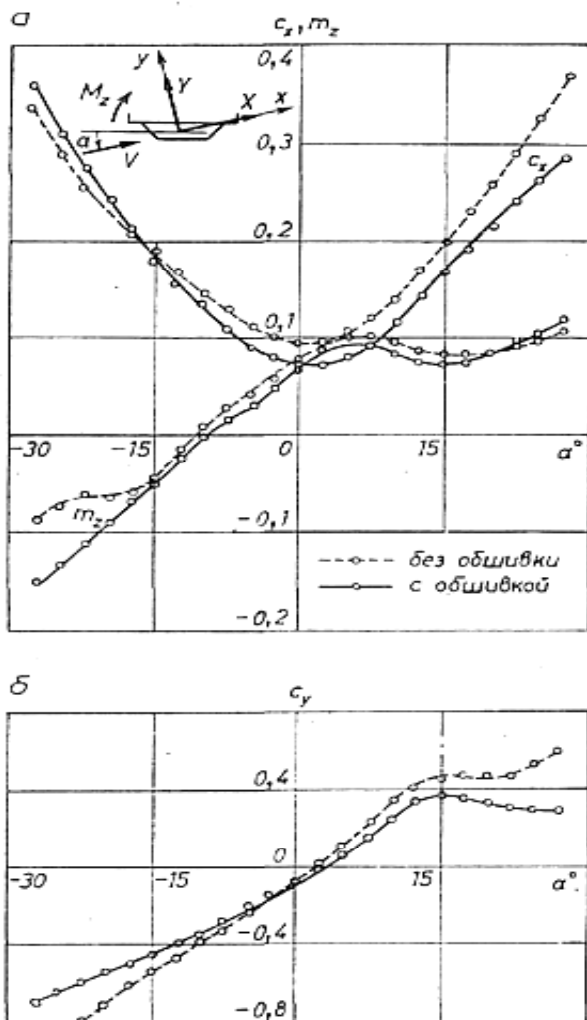


Рис. 1. Графики зависимости аэродинамических коэффициентов лобового сопротивления  $c_x$ , продольного момента  $m_z$  (а) и подъемной силы  $C_y$  (б) от угла атаки  $\alpha$  для модели балки жесткости

Результаты экспериментальных исследований представлены на рис. 2, 3. Первый рисунок содержит данные об аэродинамических характеристиках лобового сопротивления  $c_x$ , поперечной силы  $c_y$  и продольного (относительно продольной оси пилона) момента  $m_z$  одностоечного пилона с наиболее характерным соотношением его сторон 3:5. Зависимости аэродинамических коэффициентов от направления потока по отношению к контуру поперечного сечения имеют немонотонный характер. Лобовое сопротивление немонотонно нарастает с увеличением угла атаки  $\alpha$  в выбранной для модели системе координат, в то время как поперечная сила и продольный момент изменяют не только величину, но и свой знак. Как видно из рис. 2, перемена знака аэродинамических коэффициентов поперечной силы  $c_y$  и продольного момента  $m_z$  происходит приблизительно в одной точке, которая находится в интервале  $25^\circ < \alpha < 30^\circ$ . Характер изменения поперечной силы в зависимости от угла атаки свидетельствует, что в окрестности некоторых углов атаки  $\alpha$  ( $7^\circ < \alpha < 65^\circ$ ) градиент  $\partial c_y / \partial \alpha$  имеет отрицательное значение. Поскольку в диапазоне углов атаки  $10^\circ < \alpha < 45^\circ$  (рис. 3) удовлетворяется неравенство

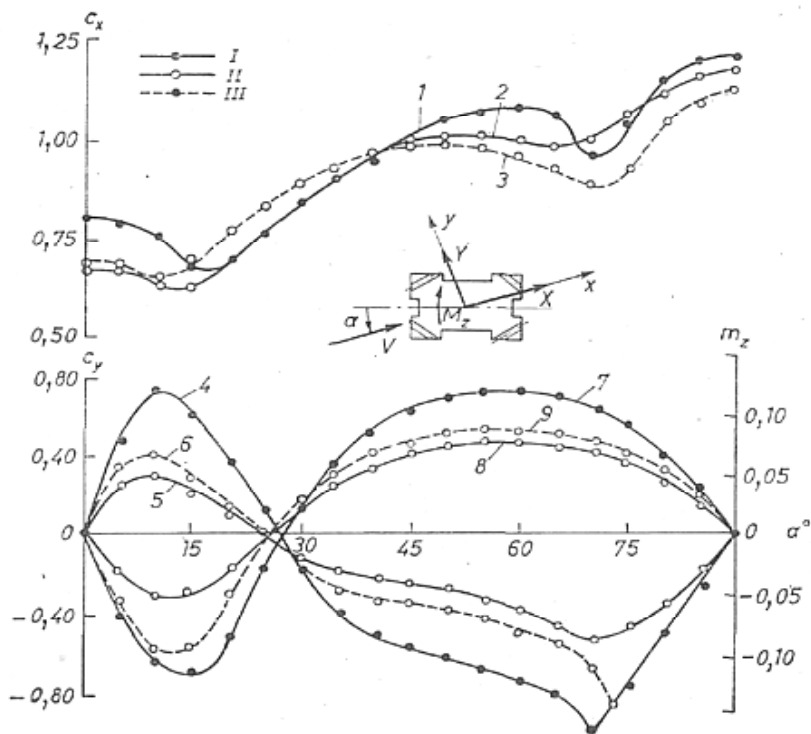
$$\frac{\partial c_y}{\partial c_x} + c_x < 0, \quad (2)$$

то согласно Ден-Гартогу [1] возможно возникновение аэроупругой динамической неустойчивости типа галопирования, при котором призматическое тело (пилон) совершает поперечные относительно потока аэроупругие изгибные колебания на одной из собственных частот. Исследование устойчивости автоколебаний галопирующего типа позволило получить [2] критическую скорость их возникновения

$$V_{кр} = \frac{2\delta m \omega_0}{|c_y^\alpha| \pi r b}; \quad c_y^\alpha = \frac{\partial c_y}{\partial \alpha}, \quad (3)$$

где  $m$  – погонная масса тела;  $\omega_0$  – одна из его собственных частот изгибных колебаний;  $\delta$  – логарифмический декремент колебаний;  $b$  – характерный размер поперечного сечения тела;  $\rho$  – плотность воздуха.

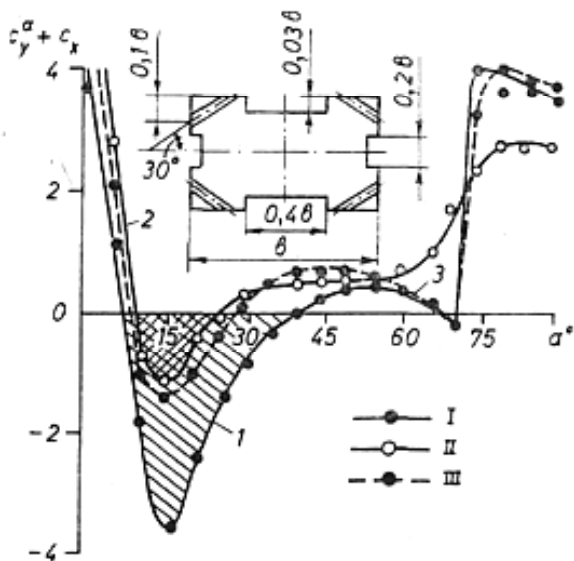
Анализ графиков на рис. 3 показывает, что устройство каналов повышает критическую скорость аэроупругих колебаний галопирования в 3 раза (см. формулу (3)), а турбулизация потока – в 2,5 раза. При этом в обоих случаях значительно суживается область неустойчивости. Однако если устройство каналов в призматических конструкциях требует конструктивного вмешательства, то турбулизация потока является реальным свойством ветрового потока в нижнем приземном слое атмосферы.



**Рис. 2.** Графики зависимости аэродинамических коэффициентов  $c_x$  (1, 2, 3),  $c_y$  (4, 5, 6) и  $m_z$  (7, 8, 9) от угла атаки  $\alpha$  для модели призматического пилона: I – при начальной турбулентности в аэродинамической трубе  $\varepsilon = 0,5\%$ ; II – влияние каналов; III – влияние турбулизации потока,  $\varepsilon = 8\%$ ;  $x, y, X, Y$  – поточная система и соответствующие ей аэродинамические силы;  $x_p, y_p, X_p, Y_p$  – связанная система координат и соответствующие ей аэродинамические силы

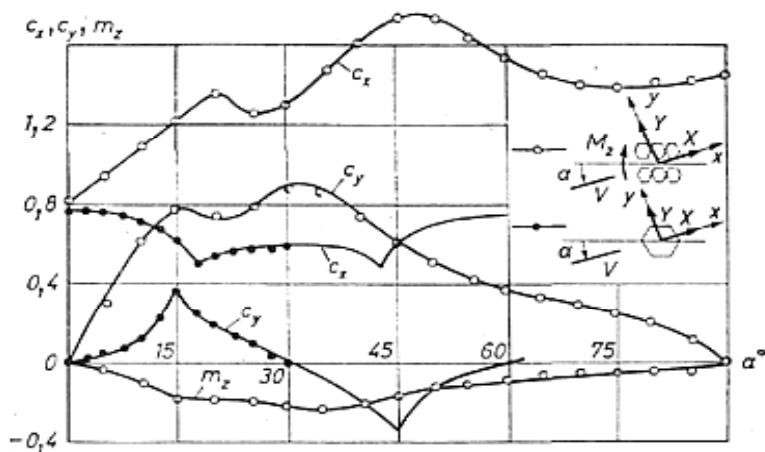
В последние годы в нашей стране и за рубежом все большее распространение получает применение вант для вантово-балочных мостов из параллельных проволок. В зависимости от длин пролетов таких мостов ванты состоят из одного или нескольких канатов шестигранной формы поперечного сечения, образованных из достаточно большого количества параллельных проволок. В качестве примера можно указать на использование таких канатов при сооружении вантового моста через р. Днепр в г. Киеве главным пролетом 300 м и вантового моста через р. Даугаву в г. Риге пролетом 312 м. Аэроди-

наимические испытания моделей вант для последнего из них выполнялись в той же аэродинамической трубе, что и балки жесткости и призматического пилона. Модель ванта, состоящей из шести канатов шестигранной формы, изготовлена в масштабе М 1:4 натуральной величины из тонколистовой нержавеющей стали  $\Delta = 0,15\text{мм}$ . Пакет канатов, образующих ванту, снабжен по торцам тонкими квадратными шайбами. Модель элемента одиночного шестигранного каната изготовлена в натуральную величину.



**Рис. 3. Проверка аэродинамической неустойчивости по критерию Ден-Гартога. Заштрихованы области неустойчивости: I – при начальной турбулентности  $\varepsilon = 0,5\%$  (1); II – при турбулизации потока,  $\varepsilon = 8\%$  (3); III – при устройстве каналов (2)**

При испытаниях в аэродинамической трубе были определены аэродинамические силы, действующие на модель одиночного шестигранного каната и на одну ванту, образованную шестью такими канатами. Для определения воздействия ветрового потока на ванты получены графики зависимости коэффициентов лобового сопротивления  $c_x$  и подъемной силы  $c_y$  в поточной системе координат в зависимости от угла атаки  $\alpha$ . Угол атаки изменялся от нуля до  $90^\circ$  (рис. 4).



**Рис. 4. Графики зависимости аэродинамических коэффициентов лобового сопротивления  $c_x$  и подъемной силы  $c_y$  от угла атаки  $\alpha$  для одиночного шестигранного каната и ванты, образованной шестью такими канатами**

Как видно из рис. 4, коэффициент лобового сопротивления существенно зависит от угла атаки  $\alpha$ , при этом характер изменения  $c_x(\alpha)$  для одиночного каната и ванты различен. Так, с увеличением угла атаки коэффициент  $c_x$  для ванты возрастает, а для одиночного каната снижается. Учет угла атаки при определении ветровой нагрузки на ванту в отличие от балки жесткости осуществляется более сложным образом, что вызвано наклонным положением вант.

Изменение подъемной силы, равно как и лобового сопротивления ванты, определяется его конструктивной формой, т. е. характером компоновки канатов в ванту. Отрицательный градиент изменения подъемной силы одиночного каната по углу атаки в диапазоне  $15^\circ < \alpha < 45^\circ$  свидетельствует о возможности появления аэродинамической неустойчивости по Ден-Гартогу [1], что необходимо, по видимому, учитывать при выборе схемы монтажа вант.

### *Литература*

1. Ден-Гартог Дж. Механические колебания. М.: Физматгиз, 1960. — 580 с.
2. Казакевич М.И. Аэродинамическая устойчивость надземных и висячих трубопроводов. М.: Недра, 1977. — 200 с.

## АЭРОДИНАМИЧЕСКАЯ ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ ДВУХ КРУГОВЫХ ЦИЛИНДРОВ\*

Широкое распространение в строительных и машиностроительных конструкциях различного назначения получили элементы круговой цилиндрической формы. В этих конструкциях часто встречаются элементы, расположенные таким образом, что один находится в аэродинамическом следе другого. Аэродинамический след характеризуется крупномасштабными пульсациями давления, которые обуславливают переменное аэродинамическое воздействие как на элемент, находящийся в следе, так и на элемент, создающий этот след. В результате имеет место аэродинамическое взаимодействие – аэродинамическая интерференция – двух элементов круговой цилиндрической формы.

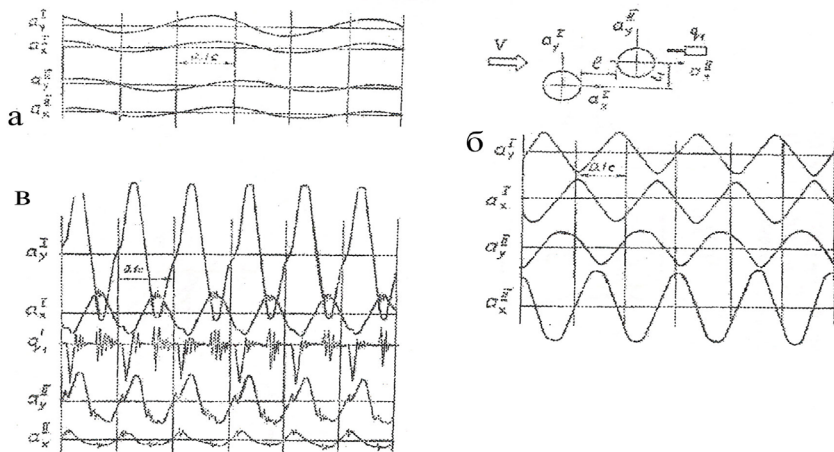
С целью изучения характера обтекания, механизма возникновения и возможных режимов аэроупругих колебаний двух круговых цилиндров, расположенных один в следе другого, в зависимости от скорости потока, взаимного их расположения (расстояние между ними, скос потока), собственной частоты элементов была изготовлена установка. На массивном координатнике в рабочей части аэродинамической трубы с помощью упругих спиц крепились два жестких цилиндра диаметром 0,03 м и длиной 0,4 м, изготовленных из тонкой (толщиной 0,1 мм) нагартованной нержавеющей стали. Частота собственных колебаний цилиндров регулировалась длиной упругих спиц, при этом обеспечивалось одинаковое их значение для обоих цилиндров. Аэроупругие колебания цилиндров регистрировались с помощью малогабаритных пьезокерамических датчиков ускорений. Упругое консольное закрепление цилиндров с помощью спиц обеспечивало низкие диссипативные свойства моделей: логарифмический декремент колебаний изменялся в пределах  $\delta=0,08 \dots 0,11$ . Для измерения мгновенного давления в ближнем аэродинамическом следе за вторым по потоку цилиндром неподвижно устанавливался акустический датчик давления ЛХ-610.

Образцы осциллограмм пространственных колебаний обоих цилиндров при трех значениях скорости потока, собственной частоты и взаимного их расположения представлены на рис. 1. На одной из

---

\*Опубликовано совместно с И.Ю. Графским в Трудах ДГУ «Гидроаэромеханика и теория упругости», Вып. 31, 1983, Днепропетровск и доложено на V Всесоюзном съезде по теоретической и прикладной механике, 1981, Алма-Ата.

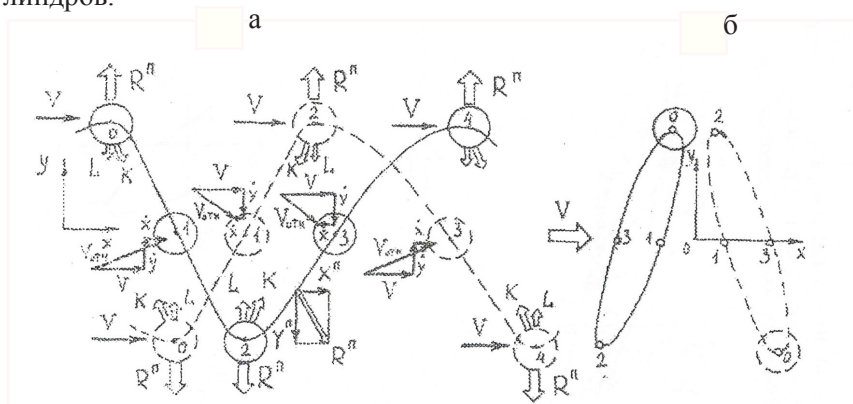
осциллограмм показаны пульсации мгновенного давления в следе, прослеживается отрыв крупномасштабного вихря. Исследования частоты отрыва, вихрей по пульсациям скорости в следе за двумя жестко закрепленными цилиндрами при наличии скоса потока [1] осуществлялось с помощью термоанемометров.



**Рис. 1. Осциллограммы перемещений цилиндров и пульсационного давления в следе ( $\delta_{np}=0,6\dots0,8$ ): а)  $V=1,4$  м/с;  $f_{03}=3,61$  Гц;  $\delta=0,08$ ;  $\bar{l}=l/d=0,67$ ;  $l=0$ ; б)  $V=11$  м/с;  $f_{01}=6,5$  Гц;  $\delta=0,12$ ;  $\bar{l}=1$ ;  $\bar{l}_1=0,9$ ; в)  $V=10,7$  м/с;  $f_{01}=9,6$  Гц;  $\delta=0,11$ ;  $\bar{l}=\bar{l}_1=0$**

Было обнаружено пять областей чисел Струхала ( $Sh = 0,05\dots0,38$ ), которые характеризуют частоту отрыва вихрей в следе за двумя цилиндрами. Доминирующими факторами, определяющими степень этого влияния, являются кинематика движения цилиндров, частоты отрыва вихрей, синхронность срыва их по длине цилиндра, флуктуации точек отрыва, взаимное расположение цилиндров и др. Возникают интенсивные поперечные потоку перемещения цилиндров под действием периодической силы  $R^{\Pi}$  (рис. 2). Максимальное значение переносной скорости  $(\vec{y} + \vec{x})$  цилиндры имеют в положениях 1 и 3 в моменты времени  $\tau = T/4$  и соответственно  $\tau = 3T/4$ , когда  $R^{\Pi} = 0$ . Далее из положения 1 первый цилиндр движется вниз, а второй – вверх. В этот момент между ними образуется разрежение. Эту картину можно наблюдать визуально с помощью струйки дыма, которая подается в пространство между колеблющимися цилиндрами. В крайних положениях 0, 2, 4 в моменты времени  $\tau = 0$ ,  $\tau = T/2$

и  $\tau = T$ , когда  $y = 0$ , поперечное движение цилиндров замедляется и интенсивность разрежения снижается. Этот момент совпадает со сходом сформировавшихся крупномасштабных вихрей с цилиндров. По мере сближения цилиндров давление между ними нарастает и в момент  $\tau = 3T/4$  (положение 3) происходит отход паразитного вихря. Дымовой след за колеблющимися цилиндрами при виде сверху представляет собой чередующуюся пилообразную дорожку крупномасштабных вихрей, а сбоку – дымовые вихревые столбы по всей длине цилиндров. В процессе колебаний на цилиндры действует кроме периодической силы (реакции упруго закрепленной модели)  $\vec{R}'' = \vec{X}'' + \vec{Y}''$  сила  $K$  вследствие разрежения между цилиндрами, и сила  $L$ , вызванная упругими свойствами опорных элементов цилиндров.



**Рис. 2. Кинематика цилиндров при аэродинамической интерференции в относительном (а) и абсолютном (б) значениях**

Представленные на рис. 3 траектории движения ( $\bar{\alpha}_i^j = \alpha_i^j/d$ ;  $i=x, y$ ;  $j=I, II$ ) свободных концов консольных цилиндров дают наглядную картину влияния взаимного расположения цилиндров. На рис. 3, г, д пунктирной линией изображены огибающие мгновенных значений периодических сил  $X''$  и  $Y''$ , действующих на первый и соответственно второй по потоку цилиндры. При анализе легко прослеживается эволюция траекторий при изменении только одного фактора – скоса потока  $\varphi$ , равного  $\varphi = \arctg l_1/l$ .

Обработка результатов экспериментальных исследований позволяет установить зависимость амплитуд и частот колебаний, периодических сил  $X_j''$  и  $Y_j''$  ( $j = I, II$ ), действующих на оба цилиндра в процессе колебаний, от скорости набегающего потока, приведенной скорости, собственной частоты колебаний цилиндра, взаимного расположения их относительно направления потока. Их анализ позво-

ляет сделать следующие выводы:

- максимальные колебания первого цилиндра поперек потока наблюдаются при зазоре между цилиндрами  $\bar{l} = 0,1 \dots 0,5$ . Большим значениям приведенной скорости соответствуют меньшие значения зазора. С увеличением собственной частоты колебаний цилиндров амплитуда этих колебаний снижается. Максимальные колебания имеют место при обтекании со скосом потока, характеризующим величиной  $\bar{l} = 0,3 \dots 0,4$ , которая может смещаться до значений  $\bar{l} = 0,9 \dots 1,0$  при увеличении собственной частоты колебаний цилиндров. Этот вывод распространяется на колебания обоих цилиндров как поперек, так и вдоль потока;

- амплитуды вертикальных колебаний второго цилиндра возрастают по мере увеличения скорости потока;

- частоты колебаний обоих цилиндров выше значений собственных частот и увеличиваются с ростом скорости потока, причем, тем больше, чем ниже значение собственной частоты колебаний цилиндровой (или) чем ближе величина зазора между цилиндрами к значению  $\bar{l}_{кр} = 2 \dots 3$ ;

- захват частоты  $f_0$  частотой  $f_{0l}$  происходит при  $Sh = Sh_l = 0,1$  ( $V_{пр} = 10$ ) по основной форме. При касании цилиндров ( $\bar{l} = 0$ ) колебания начинаются с  $V_{пр} = 20$  ( $Sh = Sh_l = 0,5$ );

- максимальные колебания второго цилиндра при неподвижном первом наблюдаются, когда зазор между цилиндрами составляет  $\bar{l} = 0,2 \dots 0,4$  – для колебаний вдоль потока и  $\bar{l} \leq 0,2$  – для колебаний поперек потока, при этом амплитуды возрастают с увеличением скорости потока.

Характер обтекания двух цилиндров исследовался визуализацией течения и процесса отрыва вихрей, а также движения вихревого следа за двумя цилиндрами. Эта визуализация осуществлялась с помощью струй дыма, истекающих из специальной гребенки размером 200x80 мм через трубки диаметром 2 мм. Шаг трубок – 20 мм. Для выравнивания расхода дыма к гребенке присоединено распределительное устройство, а очистка дыма производилась фильтром.

Частота срыва вихрей определяется из соотношения  $f_0 = V/B$ , где  $B$  – расстояние между двумя смежными сходными вихревыми столбами. Траектории движения двух цилиндров при фиксированных значениях параметров потока и цилиндров и определенном взаимном их расположении за один период изображены на рис. 4. Различным фазам колебаний цилиндров соответствуют различные картины вихреобразования, зафиксированные на киноплёнку и представленные на этом же рисунке.

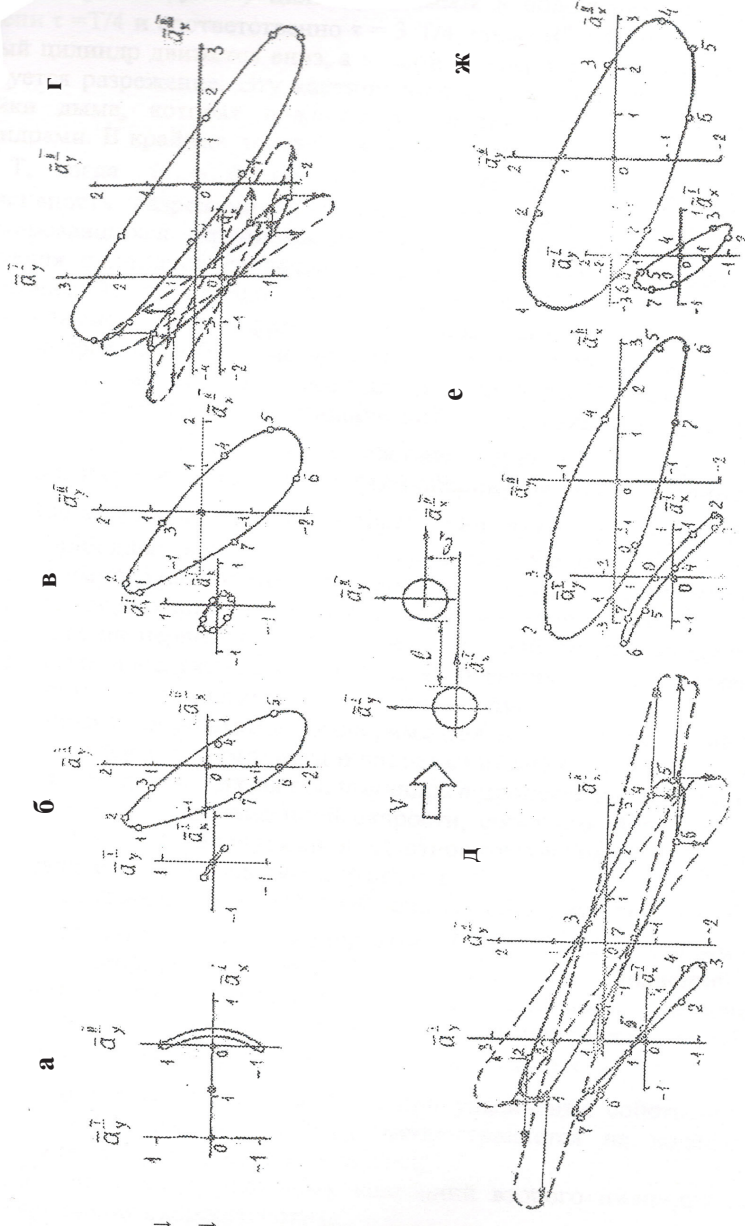


Рис. 3. Траектории движения свободных концов цилиндров при различном их расположении:  $V=11$  м/с;  $f_{оп}=6,3$  Гц;  $\delta=0,12$ ;  $l=1,0$ ;  $\delta_{np}=1,8$ ; а)  $l_1=0$ ;  $f_1=6,8$  Гц; б)  $l_1=0,15$ ;  $f_1=6,7$  Гц; в)  $l_1=0,3$ ;  $f_1=6,7$  Гц; г)  $l_1=0,6$ ;  $f_1=6,6$  Гц; д)  $l_1=0,9$ ;  $f_1=6,5$  Гц; е)  $l_1=1,2$ ;  $f_1=6,5$  Гц; ж)  $l_1=1,35$ ;  $f_1=6,6$  Гц

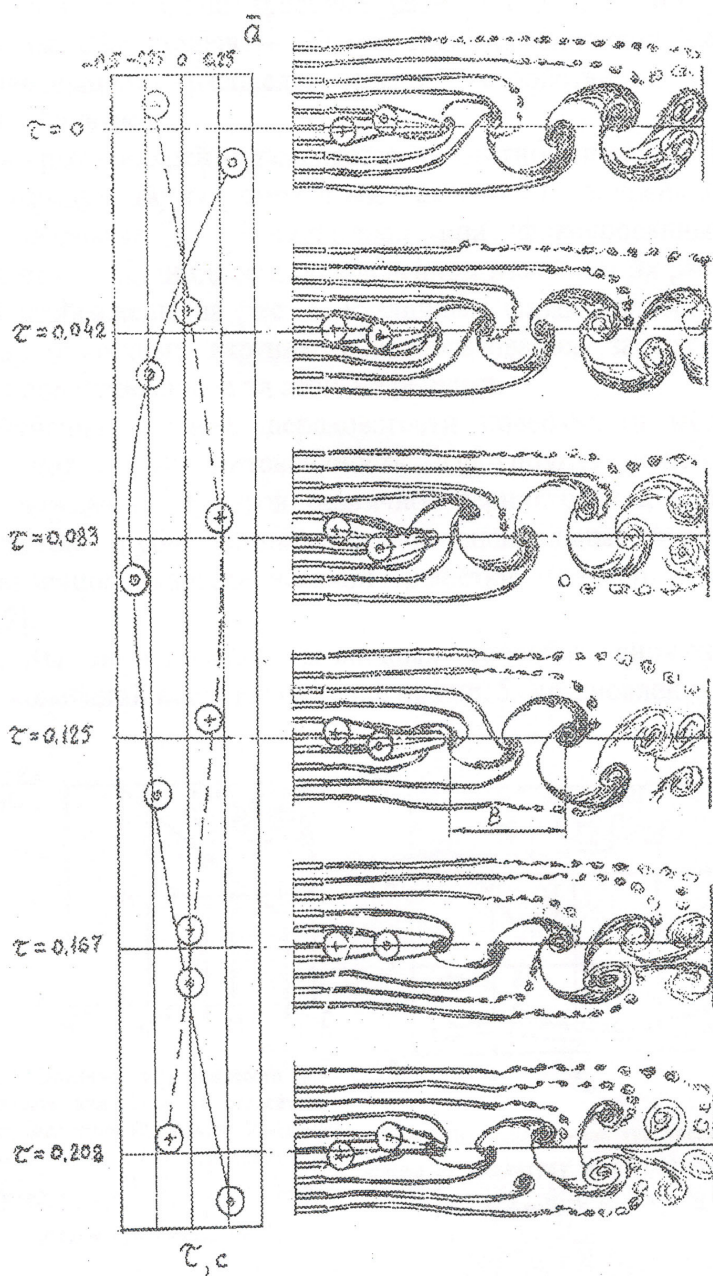
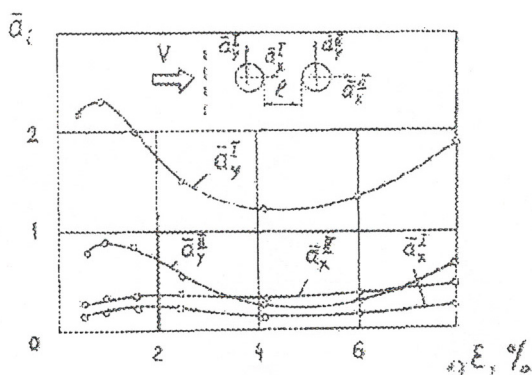
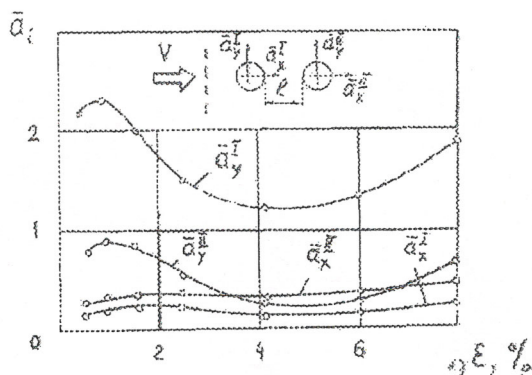


Рис. 4. Траектории движения и аэродинамический след при визуализации течения дымом:  $V=1,1$  м/с;  $f_0 = f_{01} = 3,6$  Гц;  $Sh = Sh_1 = 0,1$ ;  $V_{np} = 10$



**Рис. 5. Влияние шероховатости поверхности цилиндров на относительную амплитуду колебаний:**  $V=4$  м/с;  $l=0,3$ ;  $l_1=0$ ;  $\alpha_i^3$  – амплитуды колебаний  $\alpha_{lx}^{-I}$ ,  $\alpha_x^{-II}$ ,  $\alpha_v^{-I}$ ,  $\alpha_y^{-II}$ ,  $\alpha_{oi}$  – амплитуды при  $h=4,5 \cdot 10^{-4}$

Для изучения влияния шероховатости поверхности моделей и турбулентности потока на интенсивность аэроупругих колебаний модель покрывалась наждачной бумагой различной зернистости и в рабочей части аэродинамической трубы устанавливались специальные турбулизирующие сетки с различной характеристикой решетки (размер ячеек, диаметр проволоки) [2].



**Рис. 6. Влияние степени турбулентности потока на амплитуду колебаний:**  $V=3$  м/с;  $l=0,3$ ;  $\delta=0,08$ ;  $f_{o1}=3,6$  Гц

Результаты исследования различных способов снижения амплитуд аэроупругих колебаний нашли отражение на рис. 5. Установлено, что повышение коэффициента шероховатости поверхности моделей цилиндров снижает амплитуды колебаний. Эксперименты проводились при  $\delta_{\text{пр}}=1,4$  для трех значений шероховатости. Как видно из рис. 5, повышенная шероховатость оказывает стабилизирующее влияние. Турбулизация потока не оказывает (см. рис. 6) существенного или сколько-нибудь заметного стабилизирующего влияния на амплитуду колебаний.

### *Литература*

1. Кия, Ари, Тамура, Мари. Отрыв вихрей при ступенчатом расположении двух круговых цилиндров. – В кн.: Теоретические основы инженерных расчетов. – М.: Мир, 1980, № 2.
2. Гладенко В.П., Графский И.Ю., Казакевич М.И. Определение аэродинамических характеристик всячего покрытия типа гипар на овальном плане. – В сб.: Гидроаэромеханика и теория упругости. Днепропетровск: ДГУ, 1979, вып. 25, с. 53–67.

## СУБГАРМОНИЧЕСКИЙ ЗАХВАТ АЭРОУПРУГИХ АВТОКОЛЕБАНИЙ КРУГОВОГО ЦИЛИНДРА \*

Взаимодействие кругового цилиндра с набегающим потоком жидкости или газа сопровождается явлением захвата частоты срыва вихрей Кармана частотой аэроупругих автоколебаний цилиндра, совпадающей с одной из собственных частот кругового цилиндра. Это явление, как отмечается в работе [1], составляет ключевой момент в механизме вихревого возбуждения аэроупругих автоколебаний. Исследования явления захвата частоты срыва вихрей частотой вынужденных колебаний цилиндра при их принудительном возбуждении показали [2], что область захвата по скорости потока достаточно велика. В случае свободно колеблющегося цилиндра явление захвата наблюдается [3, 4] в более узком диапазоне скоростей потока. Область основного захвата, его роль в механизме вихревого возбуждения аэроупругих автоколебаний обстоятельно изучены [1–5].

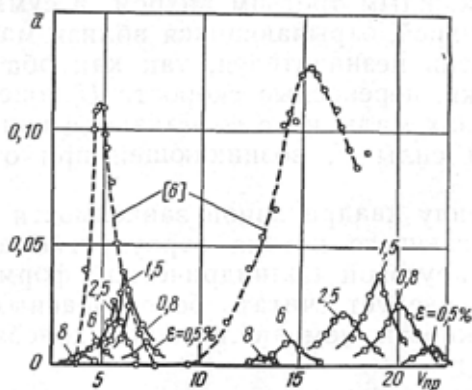
В данном сообщении экспериментально установлено существование области субгармонического захвата порядка  $1/3$  на скоростях потока, превышающих критическую скорость основного захвата в три раза. Экспериментальные исследования проведены в аэродинамической трубе с открытой рабочей частью. С целью изучения влияния степени турбулентности потока на изменения области основного и субгармонического захвата, а также соответствующих им амплитуд аэроупругих автоколебаний были применены специальные турбулизирующие сетки, установленные на срез сопла аэродинамической трубы. Упругое закрепление модели кругового цилиндра диаметром  $0,1$  м и длиной  $0,4$  м с торцевыми шайбами осуществлено с помощью шаровых шарниров с тремя степенями свободы на продольной оси модели к весовым элементам « $X$ » и « $Y$ » тензовесов, регистрирующим аэродинамические силы лобового сопротивления и подъемные силы соответственно. Весовые элементы выполнены в виде плоских упругих пластин во взаимно перпендикулярных плоскостях с наклеенными на них тензорезисторными датчиками.

Зависимость относительных амплитуд аэроупругих автоколебаний  $\bar{a}=a/d$  от приведенной скорости потока  $V_{np}=V/f_0 d$  при различной степени турбулентности потока представлена на рис. 1. Область субгармонического захвата порядка  $1/3$  существенно больше (по скорости потока) области основного захвата, а соответствующие ам-

---

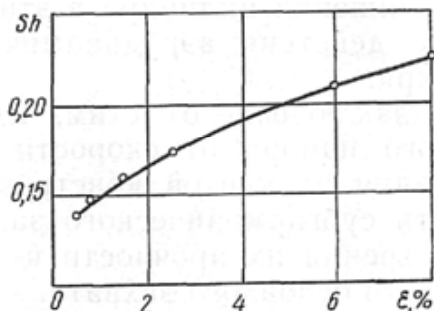
\*Опубликовано совместно с И.Ю. Графским в Докл. АН УССР, Сер. А, № 4, Киев, 1983.

плитуды автоколебаний имеют близкие значения. При этом частоты автоколебаний в обеих областях совпадают с собственной частотой  $f_0$ . Как видно из рис. 1, увеличение степени турбулентности потока смещает значения критической скорости аэроупругих автоколебаний в сторону меньших значений. Максимальные значения амплитуд автоколебаний наблюдаются при турбулентности потока  $\varepsilon \cong 1,5\%$ .



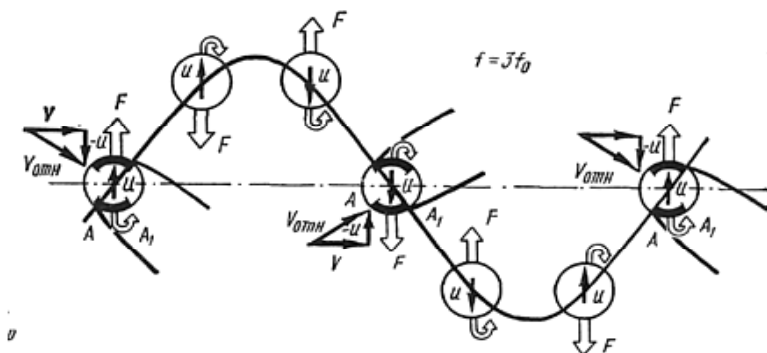
**Рис. 1.** Амплитуды колебаний кругового цилиндра в области основного и субгармонического захвата при различной турбулентности потока; пунктиром отмечены экспериментальные данные из работы [6]

Анализ результатов экспериментальных исследований показывает, что аэродинамическое число Струхала как в области основного, так и в области субгармонического порядка  $1/3$  захвата при степени турбулентности потока  $\varepsilon = 5\%$  близко к значению  $Sh = 0,2$ , что указывает на чрезвычайно упорядоченный отрыв вихрей Кармана в обеих областях. Влияние степени турбулентности потока на число Струхала в обеих областях захвата отражено на рис. 2.



**Рис. 2.** Влияние турбулентности потока на аэродинамическое число Струхала

Механизм возникновения и поддержания устойчивого режима аэроупругих автоколебаний в области субгармонического захвата порядка  $1/3$  обусловлен нелинейными нестационарными аэродинамическими силами. Он характеризуется соотношением вида  $f_0/f = 1/3$ , связывающим частоту автоколебаний в области субгармонического захвата  $f_0$ , совпадающую с собственной частотой модели, и частоту внешнего воздействия  $f$ , равную частоте отрыва вихрей Кармана:  $f = \text{Sh } V/d$ . Схематически области основного и субгармонического захвата по скорости потока изображены на рис. 3. Как видно из этого рисунка, область основного захвата сопровождается захватом частоты срыва вихрей  $f$  частотой автоколебаний модели  $f_0$ , а область субгармонического захвата – утроенной частотой  $3f_0$ .



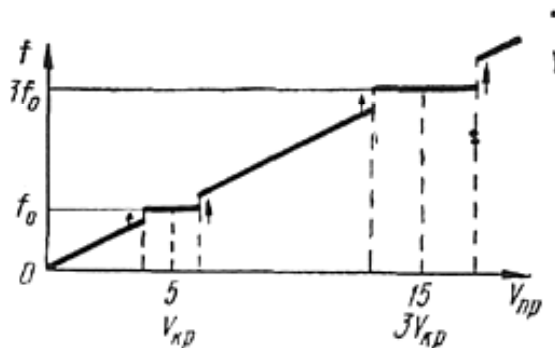
**Рис. 3. Захват частоты срыва вихрей Кармана в области основного и субгармонического захвата**

При субгармонических колебаниях порядка  $1/3$  в течение одного периода поперечных потоку колебаний возмущающая сила создается отрывающимися с поверхности цилиндра вихрями (рис. 4), эффект которых неадекватен.

Возмущающая сила создается каждым третьим вихрем, а суммарный эффект двух промежуточных вихрей, отрывающихся вблизи максимального отклонения цилиндра, очень незначителен, так как оба эти вихря имеют противоположные знаки, переносные скорости  $U$  поперечного движения цилиндра в этих фазах малы и не совпадают с направлением действия аэродинамической силы  $F$ , возникающей при отрыве вихря.

В заключение отметим, что в силу квадратичной зависимости скоростного напора от скорости набегающего потока аэроупругие автоколебания элементов конструкций круговой цилиндрической формы

в области субгармонического захвата следует считать более опасными с точки зрения их прочности и надежности, чем аналогичные колебания в области основного захвата.



**Рис. 4.** Диаграмма возмущающих сил в различных фазах поперечных колебаний цилиндра в области субгармонического захвата

### Литература

1. Беспрозванная И.М., Соколов А.Г., Фомин Г.М. Воздействие ветра на высокие сплошностенчатые сооружения. – М.: Стройиздат, 1976.–185 с.
2. Федяевский К.К., Блюмина Л.Х. Гидроаэромеханика отрывного обтекания тел. – М.: Машиностроение, 1977. – 120 с.
3. Казакевич М.И. Аэроупругие колебания тела круглоцилиндрической формы в потоке воздуха, – В кн.: Гидроаэромеханика и теория упругости. – Днепропетровск, 1973, вып. 16, с. 53–61.
4. Hartlen R.T., Carrie G. Lift-oscillator model of vortex-induced vibration.– I. Eng. Mech. Div. ASCE, 96, N EM 5, Proc. Paper 7606, oct, 1970, p. 577–591.
5. Казакевич М.И. К математической теории синхронизации аэроупругих колебаний круглоцилиндрических тел в ветровом потоке. – В кн.: Динамика и прочность машин. – Харьков, 1977, вып. 26, с. 115–121.
6. Дорджин, Марч, Лефевр. Колебания цилиндров по низшей собственной форме в поперечном потоке жидкости. – Теор. основы инж. расчетов, 1980, № 12, с. 123–126.

# ИДЕНТИФИКАЦИЯ УЛЬТРАГАРМОНИЧЕСКИХ АВТОКОЛЕБАНИЙ ПРИ АЭРОДИНАМИЧЕСКОЙ ИНТЕРФЕРЕНЦИИ ТАНДЕМА КРУГОВЫХ ЦИЛИНДРОВ В СКОШЕННОМ ПОТОКЕ\*

Для изучения механизма возникновения аэроупругих колебаний при аэродинамической интерференции двух круговых цилиндров были выполнены экспериментальные исследования в аэродинамической трубе. Характеристики трубы, метод исследований подробно описаны в работе [1]. Модели цилиндров диаметром по 75 и 100 мм и длиной 400 мм, снабженные торцевыми шайбами изготовлены из папье-маше, загрунтованы, отшлифованы и покрыты эмалью в три слоя.

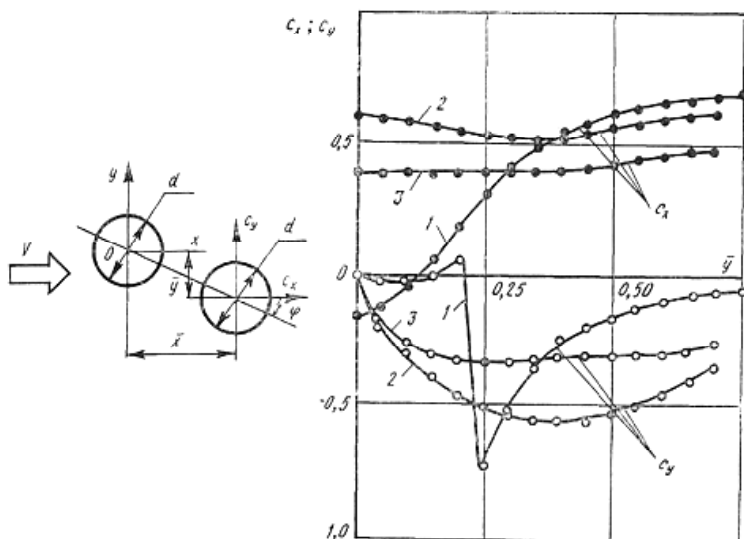


Рис. 1. Аэродинамические коэффициенты лобового сопротивления  $c_x$  и поперечной силы  $c_y$  второго по потоку цилиндра при  $\bar{x} = 1,5$ : 1 –  $\varepsilon = 0,5\%$  ( $V = 25$  м/с,  $Re = 1,3 \cdot 10^5$ ); 2 –  $\varepsilon = 2,5\%$  ( $V = 20$  м/с,  $Re = 1,07 \cdot 10^5$ ); 3 –  $\varepsilon = 8\%$  ( $V = 20$  м/с,  $Re = 1,07 \cdot 10^5$ );  $\bar{x} = x/d$ ,  $\bar{y} = y/d$

\* Опубликовано совместно с И.Ю. Графским и С.Ф. Редько в Докл. АН УССР, Сер. А, № 4, Киев, 1985.

Характерной особенностью данных исследований является жесткое закрепление первого по потоку цилиндра, что позволяет более строго оценить его влияние на параметры обтекания второго по потоку цилиндра, действующие при этом аэродинамические силы и аэроупругую реакцию второго цилиндра. Они позволили установить зависимости аэродинамических сил (коэффициентов) лобового сопротивления и подъемной силы от величины скоса потока при фиксированном расстоянии между осями цилиндров вдоль потока в выбранной системе координат и различной степени турбулентности  $\varepsilon$  потока, которые представлены на рис. 1. На графике  $c_y(\bar{y})$  прослеживается важное свойство обтекания тандема цилиндров, связанное с резким падением аэродинамического демпфирования ( $dc_y/d\bar{y} < 0$ ) в достаточно малом интервале изменений величины скоса потока. Анализ семейства изображенных на рис. 1 зависимостей  $c_y(\bar{y})$  при различных значениях  $\bar{x}$  позволил получить область параметров  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$  (взаимное расположение двух цилиндров) с отрицательным градиентом поперечной силы  $dc_y/d\bar{y}$ , которая характеризуется интенсивными, поперечными потоку колебаниями второго цилиндра (рис. 2).

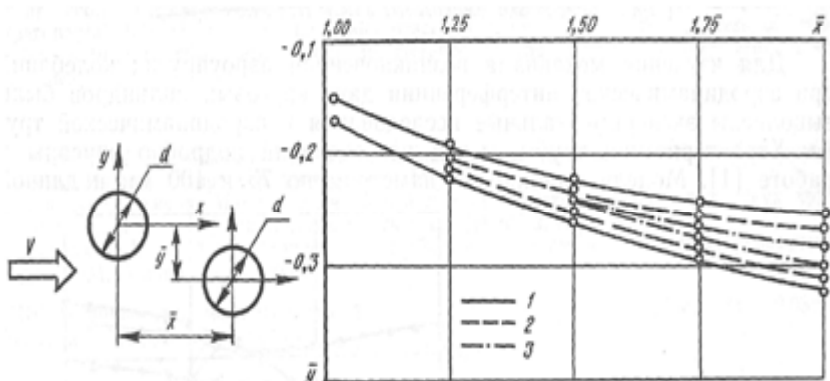
Кризисный эффект обтекания, связанный с наличием отрицательного градиента  $dc_y/dy$  (ему адекватен градиент  $c_y^0 = dc_y/d\varphi$  в силу соотношения  $\varphi = \arctg \bar{y}/\bar{x}$ , обусловлен интерференцией нестационарных аэродинамических сил, воздействующих на оба цилиндра и одновременно взаимодействующих между собой, что находит отражение и в картинах интерференции аэродинамических чисел Струхала [2].

При исследовании аэроупругих колебаний тандема цилиндров первый по потоку цилиндр был упруго закреплен. При этом собственные частоты цилиндров (при  $V = 0$ ) различались не более чем на 10 %.

Частоты аэроупругих колебаний цилиндра в потоке, как отмечалось ранее [3], несколько ниже собственной частоты за счет силового воздействия скоростного напора. Анализ осциллограмм аэроупругих колебаний второго по потоку цилиндра позволил установить следующие закономерности: перемещения носят ярко выраженный автоколебательный характер; в бигармоническом режиме аэроупругих автоколебаний с частотами  $\omega$  и  $2\omega_0$  доминирует ультрагармоническая составляющая с частотой  $2\omega_0$  (ультрагармоника порядка 2), где  $\omega_0$  – собственная частота второго по потоку цилиндра (при  $V = 0$ ); автоколебательный процесс с достаточной степенью достоверности можно аппроксимировать с помощью бигармонической функции

$$y(a_0 + a_1 \cos \omega_0 t - a_2 \sin \omega_0 t) \cos 2\omega_0 t, \quad (1)$$

где  $a_0 = 28$ ,  $a_1 = 4$ ,  $a_2 = 7$  мм,  $\omega_0 = 52$  рад/с.



**Рис. 2.** Области возникновения интенсивных аэроупругих колебаний в поле параметров  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$  при  $Re=1,07...1,3 \cdot 10^5$ : 1 –  $\varepsilon=0,5\%$ ; 2 –  $\varepsilon=0,8\%$ ; 3 –  $\varepsilon=1,5\%$

В качестве математической модели взаимодействия второго по потоку цилиндра с возмущенным потоком, отражающей перечисленные выше закономерности, примем нелинейное дифференциальное уравнение вида

$$\ddot{y} + \alpha \dot{y} + \beta \dot{y}^3 + 2n\dot{y} + \omega_0^2 y = f_{01} \cos(\omega_0 t + \psi_1) + f_{02} \cos(2\omega_0 t + \psi_2). \quad (2)$$

Оценки неизвестных коэффициентов  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $f_{01}$  и  $f_{02}$  нестационарных аэродинамических сил, представленных в последнем уравнении (2), определим на основе теории идентификации нелинейных систем по реализации процесса  $y(t)$  (1), полученной в результате экспериментальных исследований в аэродинамической трубе, на конечном интервале времени наблюдения  $t \in [0, \tau]$ ,  $\tau = 2\pi k / \omega_0$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$

Уравнение (2) запишем следующим образом:

$$r(t)p = b(t). \quad (3)$$

Здесь  $r(t) = [\dot{y}, \dot{y}^3, -\cos(\omega_0 t + \psi_1), -\cos(2\omega_0 t + \psi_2)]$  – вектор-строка процессов, входящих в уравнение (2) при неизвестных коэффициентах;  $p = (\alpha, \beta, f_{01}, f_{02})^T$  – вектор неизвестных коэффициентов (индекс «T» означает матричную операцию транспонирования);  $b(t) = -\ddot{y} - 2n\dot{y} - \omega_0^2 y$ . Умножая выражение (3) слева на  $r^T(t)$  и интегрируя по  $t$  в пределах от 0 до  $\tau$ , получаем систему алгебраических

уравнений вида

$$Rp = d,$$

где

$$R = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} r^T(t) r(t) dt; \quad d = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} r^T(t) b(t) dt, \quad (4)$$

$R$  – матрица размера  $4 \times 4$ ,  $d$  – вектор правых частей. Если матрица  $R$  является невырожденной

$$\det R \neq 0, \quad (5)$$

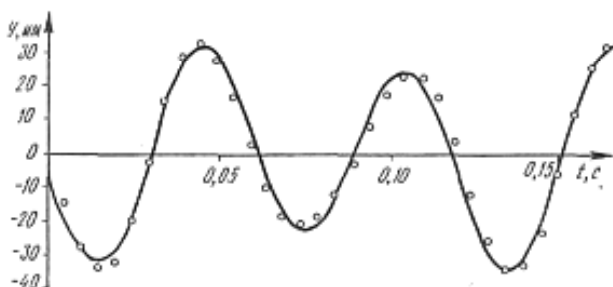
то  $p = R^{-1}d$ , где  $R^{-1}$  – матрица, обратная  $R$ , что соответствует оценке по методу наименьших квадратов. При реализации данного алгоритма на ЦВМ интегралы (4) заменяют суммами

$$R = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N r_i^T r_i; \quad d = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N r_i^T b_i,$$

где  $r_i = r(i\Delta t)$ ;  $b_i = b(i\Delta t)$ ;  $\Delta t$  – шаг квантования.

Условие идентифицируемости (5) неизвестных коэффициентов уравнения (2) сводится к условию линейной независимости элементов вектора  $r(t)$ ; т. е. функций  $\dot{y}$ ,  $\ddot{y}$ ,  $-\cos(\omega_0 t + \psi_1)$ ,  $-\cos(2\omega_0 t + \psi_2)$ , которое в данном случае выполняется.

Результаты решения данной задачи идентификации, полученные путем решения системы алгебраических уравнений  $Rp = d$  при четырех различных значениях фазы  $\psi_1$  ( $\psi_2 = 0$ ) и при  $n = 2,29 \text{ с}^{-1}$ ,  $N = 600$ ,  $\Delta t = 0,002 \text{ с}$ , приведены в таблице. Процессы  $\dot{y}$  и  $\ddot{y}$ , входящие в  $r(t)$  и  $b(t)$ , получены путем дифференцирования выражения (1).



**Рис. 3. Сравнение результатов решения задачи идентификации аэроупругих ультрагармонических автоколебаний (сплошная линия) и эксперимента в аэродинамической трубе (точки)**

На рис. 3 представлены результаты сопоставления построенной математической модели ультрагармонических порядка 2 аэроупругих автоколебаний с экспериментальными данными, которое показывает, что уравнение (2) достаточно хорошо описывает реальный процесс автоколебаний при аэродинамической интерференции тандема круговых цилиндров в скошенном потоке при идентифицированных значениях параметров  $\psi_1$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $f_{01}$ ,  $f_{02}$  (таблица).

### *Параметры уравнения (2)*

$\psi_1$	$\alpha$ ,	$\beta$ , с/мм <sup>3</sup>	$f_{01}$ , мм/с <sup>2</sup>	$f_{02}$ , мм/с <sup>2</sup>
0	-5,36	$9,34 \cdot 10^{-8}$	1370	$-2,26 \cdot 10^5$
$\pi/2$	-5,03	$4,74 \cdot 10^{-8}$	297	$-2,26 \cdot 10^5$
$\pi$	-5,36	$9,34 \cdot 10^{-8}$	-1370	$-2,26 \cdot 10^5$
$3\pi/2$	-5,03	$4,74 \cdot 10^{-8}$	-297	$-2,26 \cdot 10^5$

Полученные результаты позволяют, с одной стороны, с достаточной степенью достоверности изучить механизм взаимодействия кругового цилиндра с возмущенным потоком, с другой, обоснованно планировать дальнейший научный эксперимент с целью уточнения нестационарных аэродинамических сил, возникающих при взаимодействии тандема круговых цилиндров с потоком и между собой.

### *Литература*

1. Графский И.Ю., Казакевич М.И. Аэродинамика плохообтекаемых тел. – Днепропетровск: Изд-во Днепропетр. ун-та, 1983. – 116 с.
2. Кия Ари, Тамура Мари. Отрыв вихрей при ступенчатом расположении двух круговых цилиндров. – Теорет. основы расчетов, 1980, № 2. – С. 181–189.
3. Казакевич М.И. Аэродинамическая устойчивость надземных и висячих трубопроводов. – М.: Недра, 1977. – 200 с.

## АЭРОУПРУГИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЭЛЕМЕНТОВ МОСТОВЫХ КОНСТРУКЦИЙ\*

Известна роль аэродинамических свойств плохобтекаемых элементов конструкций в механизме возникновения аэроупругой неустойчивости типа вихревого возбуждения автоколебаний. Исследования [1] позволили получить достаточно универсальную зависимость нормализованных амплитуд аэроупругих автоколебаний элементов конструкций с произвольной формой поперечного сечения

$$\bar{a} = \frac{a}{d} = \frac{C_y^*}{\pi^2 Sh^2 \delta_{np} - 1,35(1 - 0,37 C_x) \pi^2 Sh} \quad (1)$$

в зависимости от таких аэроупругих характеристик, как число Струхала  $Sh$  и коэффициент поперечной силы при колебаниях  $C_y^*$ . В приведенной формуле приняты следующие обозначения:  $a$  – амплитуда аэроупругих автоколебаний вихревого возбуждения;  $d$  – характерный размер;  $C_x$  – аэродинамический коэффициент лобового сопротивления;  $\delta_{np}$  – приведенное демпфирование,  $\delta_{np} = 2m\delta/\rho d^2$ , где  $m$  – погонная масса упругого элемента,  $\rho$  – плотность воздуха,  $\delta$  – логарифмический декремент колебаний. Критическая скорость возникновения аэроупругих автоколебаний рассматриваемого типа определяется по известной формуле [2]

$$V_{kp} = \frac{d}{T \cdot Sh} \quad (2)$$

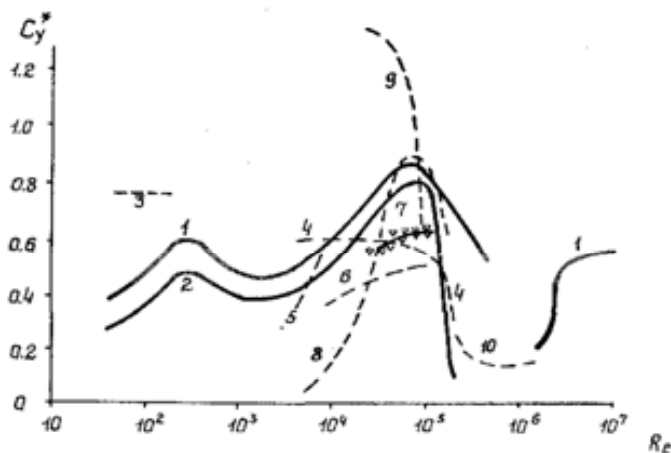
где  $T$  – период свободных колебаний элемента поперек потока.

Обоснованное назначение аэроупругих характеристик  $Sh$  и  $C_y^*$  опирается, как правило, на экспериментальные исследования в аэродинамических трубах. В то же время оно обеспечивает достоверность расчетов на прочность и служит гарантией надежности и долговечности сооружений. Существующий произвол в назначении величины характеристик  $Sh$  и  $C_y^*$  особенно нагляден для одной из наиболее распространенных форм поперечного сечения как строительных, так и машиностроительных конструкций – круговой. На это обстоятельство обращалось внимание в работах [3, 4]. В частности, в СНиПе [2] принято  $C_y^* = 0,25$ , в то время как во многих международных нормах это значение в несколько раз выше:  $C_y^* = 1,0$  [5, 6, 7, 8, 9]. Соответствующий обзор был выполнен в [4], где приводятся

---

\*Опубликовано в Трудах ЦНИИПСК «Исследование металлических конструкций мостовых сооружений», Москва, 1985.

значения  $C_y^* = 1,0-1,5$ . В некоторых исследованиях обращено внимание на различие значений коэффициента  $C_y^*$  при докризисном и закризисном режимах обтекания. Обзор многих из этих исследований содержится в работе [10] и приведен на рис.1.



**Рис. 1.** Зависимость аэродинамического коэффициента поперечной силы при колебании от числа Рейнольдса: 1 – идеальные условия течения (теория Чженя); 2 – реальные условия течения; 3 – Ковачны, Филипс; 4, 8 – Джеррард; 5 – Бишоп и Хасан; 6, 7 – Киф; 9 – Маковски; 10 – Фын

Сопоставление результатов других исследований дано в табл.1. Вместе с тем, многочисленные натурные измерения на дымовых трубах большого диаметра при преимущественно закризисных режимах обтекания показали [13], что  $C_y^* = 0,66 \div 1,0$ .

*Таблица 1*

Значение коэффициента $C_y^*$ при режиме обтекания		Источник
докризисном	закризисном	
0,5÷0,75 0,8	- 0,2	[12] [12]

Характер изменения коэффициента  $C_y^*$  с ростом скорости потока показан [14, 15] на рис. 2. Он отражает изменение нестационарной аэродинамической силы, вызванной поперечными потоку вибрациями, в зоне синхронизации и объясняет механизм возникновения аэ-

роупругой неустойчивости рассматриваемого типа.

Число Струхала  $Sh$  для элементов круговой цилиндрической формы по данным многочисленных исследований [16] как при докризисном, так и при закризисном режимах обтекания (кроме кризисной зоны) равно 0,2. Аэроупругие характеристики  $Sh$  и  $C_y^*$  для элементов мостовых конструкций, имеющих поперечное сечение с угловыми точками (квадратное, прямоугольное, шестигранное, треугольное), существенно зависят от их ориентации относительно потока. Если для горизонтально расположенных элементов конструкций – балок жесткости (пролетные строения), ветровых оттяжек, горизонтальных элементов пилонов решетчатой конструкции и др. – диапазон изменения углов атаки невелик ( $\pm 10^\circ$ ), то для вертикально расположенных элементов – пилонов, вертикальных элементов решетчатых пролетных строений, наклонных канатов и вант и др. – равновероятна произвольная ориентация относительно направления потока. На рис. 3 представлены графики зависимости аэроупругих характеристик  $Sh$  и  $C_y^*$  от угла атаки [17, 18] для элементов конструкций с различной формой поперечного сечения. Влияние турбулентности потока на значения этих характеристик приведено на графиках рис. 4 [19], а зависимость числа Струхала от соотношения сторон прямоугольного призматического элемента – на графике рис.5. Анализ графиков на рис.3,4 показывает связь между изменениями числа Струхала  $Sh$  и аэроупругого коэффициента  $C_y^*$  с увеличением угла атаки  $\alpha$ : положительному градиенту  $d(Sh)/d\alpha$  соответствует отрицательный градиент  $dC_y^*/d\alpha$  и, наоборот, отрицательному градиенту  $d(Sh)/d\alpha$  – положительный градиент  $dC_y^*/d\alpha$ .

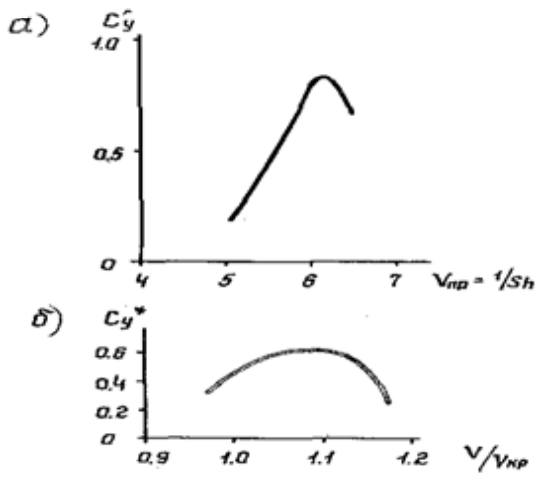


Рис. 2. Зависимость аэродинамического коэффициента поперечной силы при колебаниях от приведенной скорости потока  $V_{пр}$  (а) и относительной скорости потока  $V/V_{кр}$  (б)

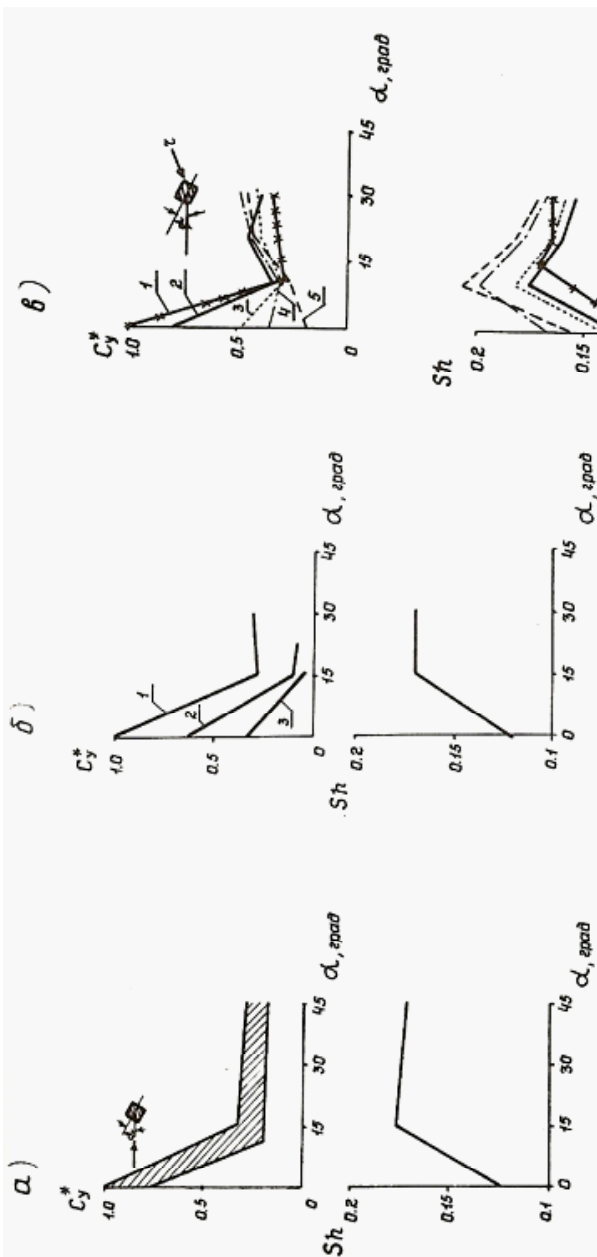
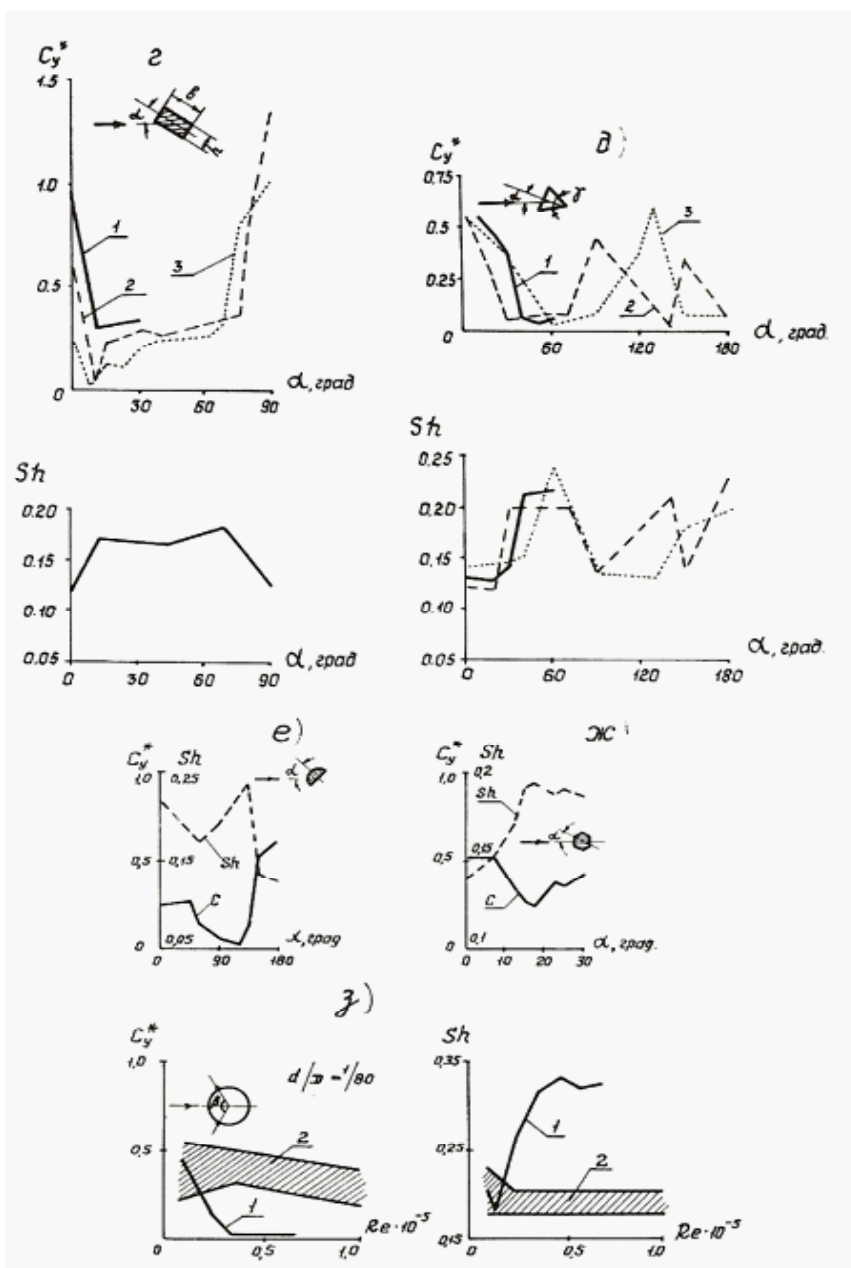


Рис.3. Зависимости аэродинамических характеристик  $C_y^*$  и  $Sh$  от угла атаки  $\alpha$  :  
а) — квадратная пирамида; б) — усеченная четырехгранная пирамида с уклоном  
0(1), 1/50(2) и 1/25(3); в) — квадратная пирамида со скругленными крошками,  
 $z = 0(1)$ ,  $z = 5(2)$ ,  $z = 10(3)$ ,  $z = 15(4)$ ,  $z = 20(5)$ ; г) — прямоугольная  
пирамида,  $b/h = 1,0(1)$ ,  $b/h = 1,33(2)$ ,  $b/h = 2,0(3)$ ; д) — трехгранная приз-  
мая,  $\gamma = 60^\circ(1)$ ,  $\gamma = 40^\circ(2)$ ,  $\gamma = 80^\circ(3)$ ; е) — полуцилиндр, ж) — шестигран-  
ная пирамида, з — круговой цилиндр с импектаторами.  $B = 60^\circ(1)$ ,  
 $B = 70 + 120^\circ(2)$  (з, д, е, ж, з-см. на стр.144).



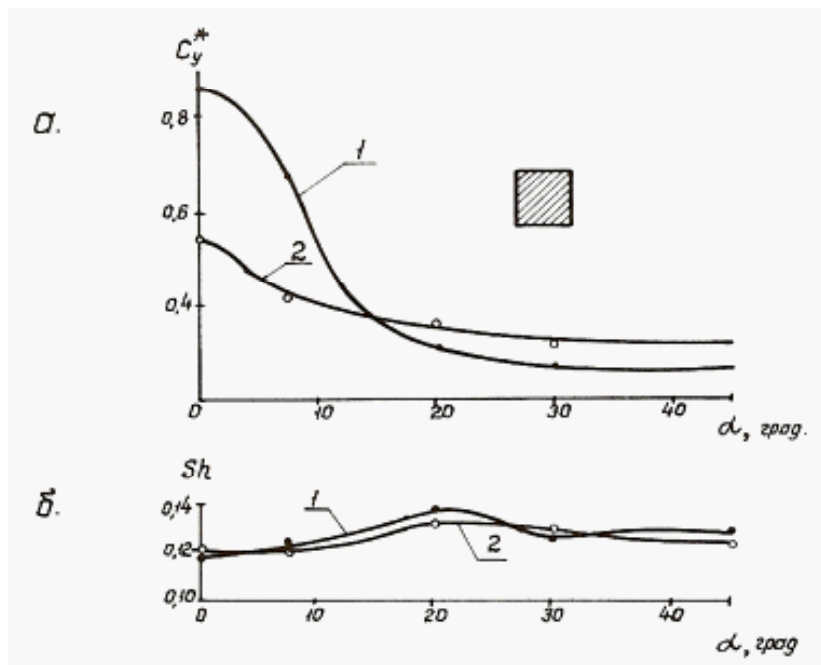


Рис. 4. Влияние турбулентности потока на аэроупругие характеристики  $C_y^*(a)$  и  $Sh(b)$ : 1 – равномерный поток; 2 – турбулентный поток

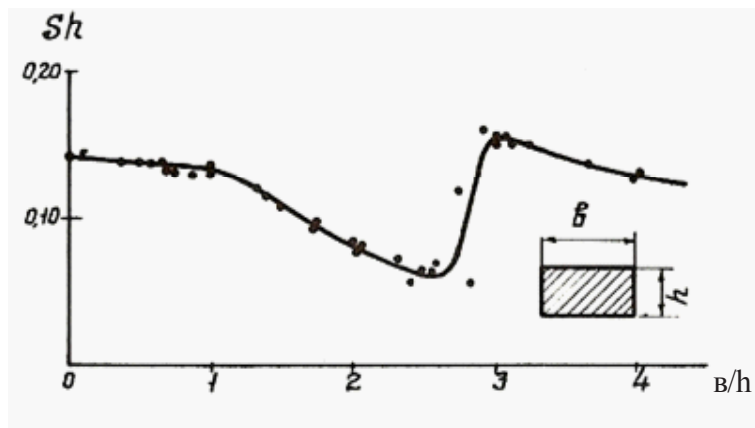


Рис. 5. Число Струхали для прямоугольной призмы

Таблица 2

форма поперечного сечения	$Sh$
	0,12
	0,13
	0,05 0,08 0,11 0,14 0,15 0,17 0,18

Таблица 3

$\alpha$	Профиль	$Sh$	$\alpha$	Профиль	$Sh$
		0,12			0,147
		0,137			0,150
		0,144			0,145
		0,145			0,142
		0,145			0,147
		0,153			0,121
		0,14			0,143
		0,158			0,135
		0,156			0,114
		0,145			0,147

Многообразие форм поперечных сечений пролетных строений мостовых конструкций не позволяет дать исчерпывающие и достоверные рекомендации по назначению аэроупругих характеристик. Для некоторых из них в табл. 2 приведены значения числа Струхаля  $Sh$ , заимствованные из работы [20]. Некоторые данные по числам Струхаля содержатся в работах [21–25] применительно, преимущественно, к балкам жесткости висячих и вантово-балочных мостов. Соответствующие значения находятся в пределах величин, приведенных в табл. 2. В работе [21] обращено внимание на изменение числа Струхаля с изменением угла атаки: при положительных значениях угла атаки (восходящий поток) число Струхаля уменьшается, а при отрицательных (нисходящий поток) – возрастает. Числа Струхаля для наиболее распространенных в строительных конструкциях элементов представлены в табл. 3. Влияние балюстрады и дефлекторов на число Струхаля для коробчатых пролетных строений показано в работе [23]. Так, устройство балюстрады снижает значение числа Струхаля, в то время как установка дефлекторов, стабилизирующих аэроупругую неустойчивость, повышает значение числа Струхаля.

### *Литература*

1. Казакевич М.И. Влияние конструктивного демпфирования на интенсивность аэроупругих колебаний кругового цилиндра в потоке. В сб. Аэроупругость турбомашин. – Киев, Наукова думка, 1980, с. 205–209.
2. Строительные нормы и правила. Нормы проектирования. Нагрузки и воздействия. М., Стройиздат, 1976. – 60 с.
3. Казакевич М.И. Анализ методов аэродинамического расчета висячих переходов цилиндрической формы. Труды ДИИТ, вып. 126, 1972, с. 138–148.
4. Попов С.Г., Савицкий Г.А. Об аэрогидродинамических силах, действующих на круговой цилиндр при его колебаниях в потоке. Ученые записки МГУ, вып. 193, Механика, т. У1, Изд-во МГУ, 1961, с. 72–92.
5. Новак М. Поперечные колебания высоких конструкций с круговым сечением. Русский перевод из *Inzenyrske stavby*, №11, 1965.
6. Delage C., Labbe Ph. Comportement dynamique des cheminees en acier. Essais et mesure, у. 116, №251, p 1585–1597.
7. Ден-Гартог. Механические колебания, Физматгиз, 1960, 580 с.
8. Фергюсон Н., Паркинсон Г. Явления на поверхности кругового цилиндра и в вихревом следе при колебаниях цилиндра, возбуждаемых вихрями. Констр. и техн. машиностроения, серия В, т. 89, №4, 1967, с. 260–269.

9. Angrilli F., Zanardo A. Forze adenti su un cilinzo flessibile solleccitato do moto ondoso. Indagine sperimentale.

Ind. mecc., y. 24, №6, 1975, p. 43–50.

10. Чжень. Колебания подъемной силы, обусловленные вихревыми дорожками. Кармана за одиночными круговыми цилиндрами и в пучках труб. Часть 2. Подъемная сила одиночного цилиндра. Конструирование и технология машиностроения, №2, 1972, с. 122–133.

11. Iwan W. D., Bleonis R. D. A model for vortex induced oscillation of structures. J. Appl. mech., E 41, №3, 1974, p. 581–586/

12. Hirsch G. Critical comparison between active and passive control of wind induced vibrations of structures by means of mechanical devices. Struct. contr., Iutam, 1980, p. 313–339.

13. Сумио К. Вибрация больших башенных конструкций под влиянием ветра. Караму, Quart. Column, №63, 1977, p. 44–47

14. Hartlen R. T. Currie I. G. Lift-oscillator model of vortex-induced vibration. j. Eng. mech. Div. Proc ASGE, №5, 1970, p. 577/

15. Parkinson G. V. Wind-induced instability of structures Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. A., 269, 1971, p. 395–409.

16. Ruscheweyh H. Statische und dynamische windkrafte an kreiszylindrischen bauwerken. Forschungsber Landes Nordrhein – Westfalen, №2685, 1977.

17. Wyatt T. A. Oscillation due to vortex shedding of reinforced concrete chimneys of rectangular cross-section Symp. Pract. Exper. Flow-Induced Vibr., Karlsruhe, 1979, Prepr. 3. Sess E. F. G. Karlsruhe, 1979, p. 34–39.

18. Huthloff E. Windkanaluntersuchungen zur bestimmung der periodischen krafte bei der umstromung schlanker scharfkantiger korper Stahlbau, 44, №4, 1975, s. 97–103.

19. Vickery B. J. Fluctuating lift and drag and longitudinal cylinder of square cross-section in a smooth and in a turbulent stream. j. Fluid mech., v.25, №3, 1966, p. 481–494.

20. Kloppel K., Thiele F. Modellversuche im windkanal zur bemessung von bracken gegen die gefahr wider regter schwingungen. Der Stahlbau, v.36, №12, 1967, p. 353–365.

21. Shiraishi N., Matsumoto M., Jakeushi T. Aerodynamic instability of box girder bridge deck sections. Jech. Rev., v.29, №85, 1981, p. 50–57.

22. Van hunen J. W. G., Persoon A. J. Investigation of the vibrational behaviour of a cable-stayed bridge under wind loads. End. Struct. v.4, №2, 1982, p. 99–105.

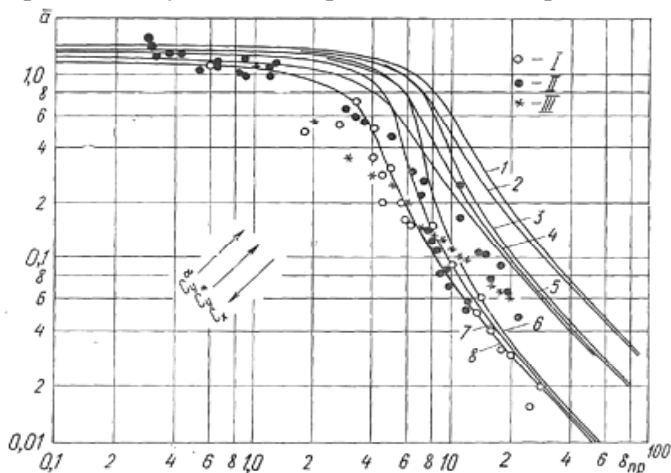
23. Sofronie R., Bortnawschi M., Rusu C. Raspunsul la vint al podului ancorat de la agiea. Rev. Transp. si Jelec., №3, 1981, p. 140–149/

24. Herzog M. Vereinfachte beurteilung der aerodynamischen stabilitat von hangebrucken bouingenieur v.57, 1982, s. 393–399.

25. Sacha P. Wind forced in engineering. v.3, 1972, p. 392.

# **АЭРОДИНАМИЧЕСКОЕ ДЕМПФИРОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ ПЛОХООБТЕКАЕМЫХ ТЕЛ, ОБУСЛОВЛЕННЫХ ВИХРЕВЫМ ВОЗБУЖДЕНИЕМ\***

Взаимодействие плохообтекаемых элементов конструкций с потоком жидкости или газа отличается большим разнообразием. За последнее десятилетие достигнут значительный прогресс как в понимании механизма возникновения многих аэроупругих явлений, так и в построении соответствующих им достоверных физических моделей. Одним из наиболее известных аэроупругих явлений можно считать автоколебания, обусловленные вихревым возбуждением, возникающим при взаимодействии с плохообтекаемыми телами круговой или иной произвольной формы поперечного сечения. Вихревая дорожка Кармана, образующаяся при этом, обуславливает процесс синхронизации частоты срыва вихрей Кармана с одной из собственных частот упругой системы. Режимы захвата как основного, так и субгармонического в зоне синхронизации аэроупругих автоколебаний вихревого возбуждения подробно описаны в работе [1].



**Рис. 1. Зависимость приведенной амплитуды колебаний вихревого возбуждения кругового цилиндра от приведенного демпфирования. Точками отмечены экспериментальные значения: I – жесткий цилиндр на упругих опорах [5]; II – упругий цилиндрический стержень на шарнирных опорах [5]; III – упругий цилиндрический стержень консольного типа [4]**

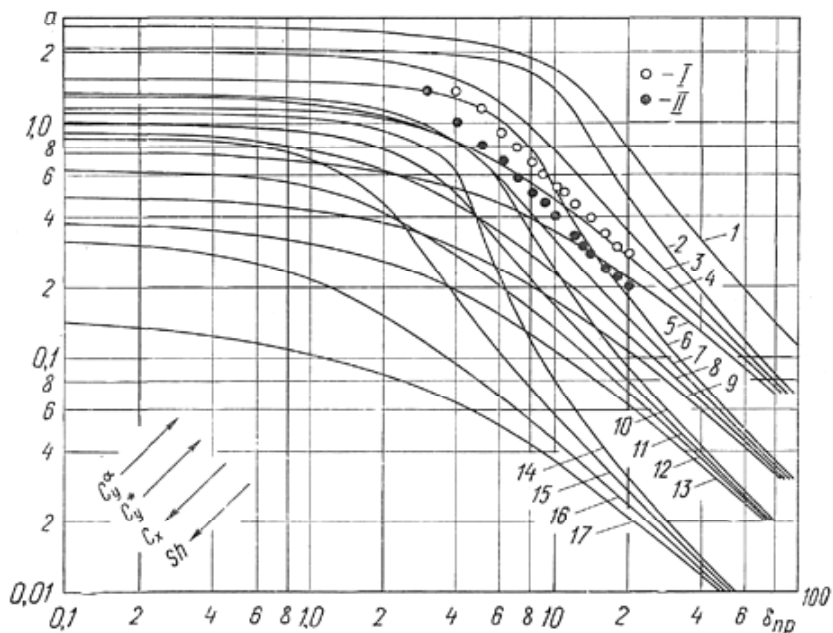
\* Опубликовано в Докл. Ан УССР, Сер. А, № 9, Киев, 1987.

В основу анализа режимов аэроупругих автоколебаний гибких элементов конструкций, обусловленных вихревым возбуждением при их взаимодействии с равномерным ветровым потоком, положено нелинейное дифференциальное уравнение [2, 3], решение которого для амплитуд установившихся колебаний в алгебраической форме имеет вид

$$a^5 - \left[ 1,2 \left( 1 - 3 \frac{c_x}{c_y^\alpha} \right) \frac{V^2}{\omega_0^2} \right] a^3 + 9,6 \left[ \frac{2m\delta}{\pi \rho D c_y^\alpha} - \left( 1 - \frac{c_x}{c_u^\alpha} \right) \right] \frac{V^3}{\omega_0^3} a = \\ = 38,4 \frac{c_y^*}{\pi c_y^\alpha} \frac{V^5}{\omega_0^5}. \quad (1)$$

Здесь  $a$  – амплитуда автоколебаний;  $V$  – скорость потока;  $c_x$  – коэффициент лобового сопротивления;  $c_y^\alpha$  – градиент коэффициента поперечной силы по углу атаки  $\alpha$ ;  $c_y^*$  – амплитудное значение аэродинамического коэффициента поперечной силы в автоколебательном режиме;  $D$  – характерный размер поперечного сечения элемента (хорда–диаметр, ширина и т. п.);  $m$  – масса 1 пог. м элемента;  $\delta$ ,  $\omega_0$  – логарифмический декремент (при  $V = 0$  – **рассеяние энергии в материале** и конструкционное демпфирование системы) и собственная частота изгибных поперечных колебаний элемента соответственно;  $\rho$  – плотность потока.

Анализ полученного решения (1) позволяет, с одной стороны, проследить за ходом развития колебаний плохобтекаемого тела в зависимости от скорости потока  $V$ , с другой стороны, прогнозировать интенсивность автоколебательного режима в зависимости от диссипативных свойств системы. Исследование первой зависимости приведено в работе [3]. Вторая зависимость представлена на графиках (рис. 1 и 2). Соотношения приведенных амплитуд автоколебаний вихревого возбуждения  $\bar{a} = a/D$  и приведенного демпфирования  $\delta_{\text{пр}} = 2m\delta/\pi\rho D^2$  (числа Скротона) позволяют с достаточной степенью точности прогнозировать процесс аэроупругой неустойчивости при  $V = V_{\text{кр}}$  и управлять им путем повышения диссипативных свойств системы. На этих графиках для сопоставления показаны экспериментальные значения амплитуд, заимствованные из работ [4–6]. Значения аэродинамических параметров, принятые при построении графиков на рис. 1 (для элементов с круговой формой поперечного сечения) и на рис. 2 (для элементов с произвольной формой поперечного сечения), приведены в таблице.



**Рис. 2.** Зависимость приведенной амплитуды колебаний вихревого возбуждения упругого элемента с произвольной формой поперечного сечения. Точками отмечены экспериментальные значения: I – квадратный профиль [5]; II – прямоугольный профиль с отношением сторон 1:2 [4]

Как видно из этой таблицы, на рис. 1 верхняя граница соответствует закризисному обтеканию кругового цилиндра при максимальном значении аэродинамического параметра  $c_y^* = 1,0$ , а нижняя граница – докризисному при минимальном значении параметра  $c_y^* = 0,2$ . Аналогично на рис. 2 верхняя граница соответствует минимальному значению числа Струхала  $Sh = 0,10$  и максимальному значению аэродинамического параметра  $c_y^* = 3,0$ , а нижняя граница – максимальному значению числа Струхала  $Sh = 0,20$  и минимальному значению параметра  $c_y^a = 0$ . Для промежуточных значений аэродинамических параметров допустимо применять интерполяцию.

### Значения аэродинамических параметров

Номер кривой	Sh		$c_x$		$c_y^a$		$c_y^*$	
	рис. 1	рис. 2	рис. 1	рис. 2	рис. 1	рис. 2	рис. 1	рис. 2
1	0,2	0,1	0,7	1,5	3,0	3,0	1,0	1,0
2	0,2	0,1	0,7	1,5	2,5	3,0	1,0	0,6
3	0,2	0,1	0,7	1,5	3,0	2,0	0,6	0,6
4	0,2	0,1	0,7	1,5	2,5	1,0	0,6	0,6
5	0,2	0,1	1,2	1,5	2,5	0	0,6	0,6
6	0,2	0,15	0,7	1,5	3,0	3,0	0,2	0,6
7	0,2	0,15	0,7	1,5	2,5	2,0	0,2	0,6
8	0,2	0,15	1,2	1,5	2,5	1,0	0,2	0,6
9	—	0,15	—	1,5	—	0	—	0,6
10	—	0,20	—	2,5	—	3,0	—	0,6
11	—	0,20	—	1,5	—	2,0	—	0,6
12	—	0,20	—	1,5	—	1,0	—	0,6
13	—	0,20	—	1,5	—	0	—	0,6
14	—	0,20	—	1,5	—	3,0	—	0,2
15	—	0,20	—	1,5	—	2,0	—	0,2
16	—	0,20	—	1,5	—	1,0	—	0,2
17	—	0,20	—	1,5	—	0	—	0,2

Из всех аэродинамических параметров  $c_x$ ,  $c_y$ ,  $c_y^*$ ,  $c_y^a$  и Sh (число Струхала), входящих в решение (1), наименее изучены  $c_y^*$  и Sh для упругих тел с произвольной формой поперечного сечения. Работа [7] содержит обзор данных об этих параметрах для различных тел, встречающихся в качестве элементов машиностроительных и строительных конструкций.

Тенденция изменения значений приведенных амплитуд колебаний при возрастании аэродинамических параметров в интервале значений  $Sh = 0,10 \div 0,2$  (рис. 2);  $c_x = 0,7 \div 1,2$  (рис. 1);  $c_y^a = 2,5 \div 3,0$  (рис. 1) и  $c_y^a = 0 \div 3,0$  (рис. 2);  $c_y^* = 0,2 \div 1,0$  указана на обоих рисунках стрелками.

Анализ решения (1) показывает, что при  $\delta_{пр} > 7$  приведенные амплитуды колебаний существенно снижаются  $\bar{a} \ll 1$ .

Условие  $\delta_{пр} > 7$  позволяет получить приближенные формулы амплитуд колебаний плохообтекаемых тел произвольного поперечного сечения

$$\bar{a} \cong \frac{c_y^*}{\pi^3 Sh^2 \left( \delta_{пр} + \frac{c_x - c_y^a}{2\pi Sh} \right)}, \quad (2)$$

а для кругового цилиндра ( $c_y^a = 2,7$ ;  $Sh \cong 0,2$ ) при докритическом

( $c_x=1,2$ ) и закризисном ( $c_x = 0,7$ ) режимах обтекания соответственно

$$\bar{a} \cong \frac{c_y^*}{0,4 \delta_{\text{пр}} - 1,5} ; \quad \bar{a} \cong \frac{c_y^*}{0,4 \delta_{\text{пр}} - 2,0} . \quad (3)$$

При слабой диссипации в системе ( $\delta_{\text{пр}} < 5$ ) с достаточной степенью точности для кругового цилиндра можно принимать

$$\bar{a} = 0,2/\text{Sh}. \quad (4)$$

Отметим, что область значений приведенного демпфирования  $\delta_{\text{пр}} < 5$  характеризует преимущественно взаимодействие упругих элементов с потоком жидкости ( $\rho \geq 1000 \text{ кг/м}^3$ ), а область  $\delta_{\text{пр}} > 7$  – с потоком воздуха ( $\rho \cong 1,225 \text{ кг/м}^3$ ).

### Литература

1. Казакевич М.И., Графский И.Ю. Субгармонический захват аэроупругих автоколебаний кругового цилиндра // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1983. – № 4. – С. 46–48.
2. Казакевич М.И. Аэродинамическая устойчивость надземных и висячих трубопроводов. – М.: Недра, 1977. – 200 с.
3. Казакевич М.И. Аэроупругие колебания плохообтекаемых тел в ветровом потоке // Nonlinear Vibration Problems. – 1981. – 20. – С. 17–45.
4. Natke H.G., Gerasch W. Practical examples of pylon stability // Engineering Structures. – 1984. – 6, № 4. – P. 357–362.
5. Iwan W.D. The vortex induced oscillation of elastic structural elements // Engineering for Industry. Ser. B. – 1975 – 97, N 4. – P. 240–245.
6. Griffin O.M., Ramberg S.E. Some recent studies of vortex shedding with application to marine tubulars and risers // Offshore Mechanics and Arctic Engineering Symposium. – Houston, 1983. – P. 33–43.
7. Казакевич М.И. Аэроупругие характеристики элементов мостовых конструкций // Исследования металлических конструкций мостовых сооружений. – М.: ЦНИИПСК им. Н.П. Мельникова, 1985. – С. 47–56.

# **THE AERODYNAMIC PROBLEMS OF CABLE-STAYED BRIDGES UNDER ERECTION\***

## **1. THE BRIEF DESCRIPTION OF THE OBJECT**

The bridge passage across the Volga in Ulyanovsk is intended for the motor – vehicle transport in four lanes and high-speed tram. The design of the construction is done by the Giprotransmost Institute due to the order of Ulyanovsk Civil Engineering Department.

The scheme of the bridge passage double-deck structure takes into consideration the influence of the geomorphological, hydrological and geological conditions:

- the water area of the water storage basin in the river bed navigable part is more than 30m deep;
- the right bank rises over the water storage basin level for more than 100 m;
- the season changes of the water storage basin level achieve 8m;
- the wave height achieves 3m;
- the thickness of ice covering is more than 1m, the dimensions of ice fields achieve 700x700m;
- the right bank slope is subjected to the landslide processes.

The bridge under construction includes four major parts (see Fig. 1):

- the river bed part with one-pylon double-deck cable-stayed steel span structure of 220+2x407+220m scheme;

- the scaffold bridge on the water area of the water storage basin with the double–deck metal binary continuous span structures 9x(2x220)m;
- the right bank and left bank reinforced concrete platforms.

The cable system consists of two planes with the dispersed arrangement of the cables. The reinforced concrete pylon of the frame structure is of 212m height.

The construction of the bridge passage started in 1986 and in 1995 it was planned to be finished. But the serious problems connected with the financial difficulties due to the inflation in Russia make this date of the beginning of bridge exploitation impossible.

## **2. THE FIXING OF THE METEOROLOGICAL LOADS**

The meteorological loads (wind, snow and glaze ice) are fixed in accordance with the existing in Russia standards. Usually it's quite possible for the plain structures. But for the unique structures, especially flexible and long, very sensitive to the wind effects, such approach is absolutely

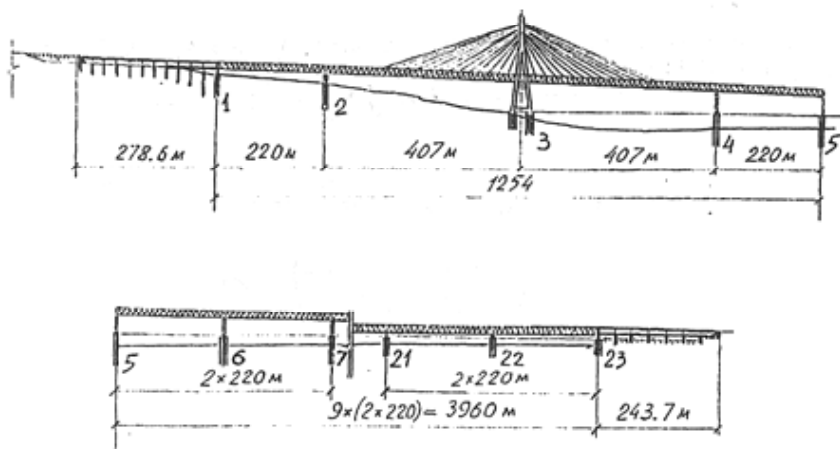
---

\*Опубликовано в Трудях Конференции EECWE'94, Варшава, 1994.

wrong. It concerns the Volga Bridge passage (Ulyanovsk).

To define exactly the meteorological loads the analysis of the long-term meteorological data was done on the basis of the observations in the period of 1955–1985 at the meteorological stations of the Volga Hydro-meteorological Service Department. The following meteorological elements were analysed at that:

- the average monthly and annual wind velocities;
- the repetition of the wind directions;
- maximum monthly wind velocities and corresponding directions with the indication of the wind sensor – type and the interval of the averaging;
- maximum monthly heights of the snow covering;
- glaze ice and frost accretion on the glaze ice machine wire;
- maximum monthly ice accretions.



*Fig. 1. The scheme of the bridge passage across the river Volga in Ulyanovsk*

## 2.1. Wind loads

As during 10 years of constant observations (1975–1985) the wind velocity  $V \geq 23$  m/sec at the 10 minutes interval of averaging repeated 5 times,  $V \geq 24$  m/sec –  $d$  times and  $V \geq 25$  m/sec – 3 times, the following was recommended for the span structure element calculations:

- the 5th wind region according to the Standard with the normative value of the pressure  $W_0 = 0.6 \text{ kPa}$  ( $60 \text{ kg/m}^2$ );
- the coefficient of safety of the wind load  $\gamma_f = 1.5$  corresponding to the design durability of 50 years.

The recommended parameters of the wind load take into consideration

the relief of the terrain (the existence of the right steep bank of more than 100m height over the water storage basin level) and the corresponding domination of the wind rose along the river bed and the large areas of the water storage basin mirror along the bridge range.

## 2.2 Snow loads

The largest height of the snow covering according to the snowstake at the Ulyanovsk meteorological station for the whole period of meteorological observations (1978–1979, winter ) is fixed  $h=76\text{sm}$ . This value of the snow covering height corresponds to the normative value of the snow load

$$p_0 = \rho_s h = 213 \text{ kg/m}^2$$

where  $\rho_s$  is the snow covering density,  $\rho_s = 0.23 \text{ g/sm}^3$ .

On the basis of these data the following was recommended: – the 5th snow region according to the Standard with the normative value of the snow covering weight on the horizontal surface of the ground  $S_0=2\text{kPa}(200 \text{ kg/m}^2)$ ;  $\gamma_f = 1.4$ .

The coefficient of conversion  $\mu$  from the ground snow covering weight to the snow load on the horizontal projection of element covering in the formula

$$S = S_0 \mu$$

is fixed according to the tables of the Standard depending on the element covering cross-section type.

## 2.3. Glaze ice loads

Glaze ice and frost accretions on the cables and other flexible elements of the span structure are formed:

- at the settling and freezing of the supercooled water drops, i.e. at the existence of the fog, moisture, rain, mist, when the temperature is below  $0^\circ\text{C}$ ;
- at the freezing of the settling wet snow;
- at the sublimation of the water steam.

The type of the glaze ice and frost accretions depends on the dimensions of the dro'ps and their freezing speed at the moment of their contact with the structure elements and also depends on the structure spatial orientation and the closeness of water storage basins.

Maximum thickness of glaze ice wall for Ulyanovsk for the whole period of observation is  $b=12.4 \text{ mm}$  and maximum fixed value of wet snow accretion is  $h = 30\text{mm}$ . The equivalent thickness of glaze ice wall corresponding to the height of wet snow accretion  $h=30\text{mm}$  is calculated

according to the existing formula

$$b_{\text{equ}} = h \rho_s / \rho_g$$

where  $\rho_s$  – is the density of wet snow accretion;  $\rho_g$  – is the density of glaze ice.

According to the reference information  $\rho_s = 0.1\text{--}0.7 \text{ g/sm}^3$ ,  $\rho_g = 0.9 \text{ g/sm}^3$ . Consequently,  $b_{\text{max}} = 23.33 \text{ mm}$  and it is almost twice more the observed value  $b = 12.4 \text{ mm}$ . Therefore, for the bridge passage considering its arrangement over the water area of the water storage basin that promotes the glaze ice and frost accretions, the following was recommended:

- the 5<sup>th</sup> glaze ice region according to the Standard with the normative value of glaze ice wall thickness  $b = 23.33 \text{ mm}$ ;
- the coefficient of safety of the glaze ice load  $\gamma_f = 1.3$ .

## 2.4. The necessary measures

It was decided necessary to settle down two meteorological stations along the range of the bridge passage on both banks of the Volga in order to store and then to define exactly the meteorological effects, especially the wind mechanical structure. These stations must be equipped with the modern meteorological devices to provide the eight-time meteorological observations in every 4 hours. The long term observations allow to define exactly the correlation of the meteorological effects along all the 5736m length of the bridge passage and also allow to provide the security of erection operations at the pylon, span structure and cable construction.

## 3. AERODYNAMIC INVESTIGATIONS

Aerodynamic experiments of the span structure, pylon and cable models were carried out in Dnepropetrovsk and Moscow Universities and in Joukovski-Institute. In particular, span structure models were investigated simultaneously in the wind tunnels of Joukovsky-Institute and Dnepropetrovsk University, pylon models in the wind tunnel of Moscow University to make the results more reliable.

### 3.1. Span structure aerodynamics

Choosing the forms of the cross section for the span structure truss due to the Giprottransmost Institute order two variants were discussed: vertical planes of the trusses making the span structure and inclined planes of the trusses making the trapezoid form of the span structure cross-section. At first the small models of both variants on the scale 1:50 were tested in Dnepropetrovsk University wind tunnel of the closed type with the open test section of 0.75m diameter. The model length was 0.44m. The incipient turbulence of the flow in this wind tunnel was  $\varepsilon = 0.5\%$  and with the turbulent nets of two types – 2.5% and 8%. The models were supplied

with the round washers at their end planes for providing the plane-parallel flow round. The models were fastened on the three-component tensometric balance. It helped to obtain the integral aerodynamic characteristics in the coordinate flow system.

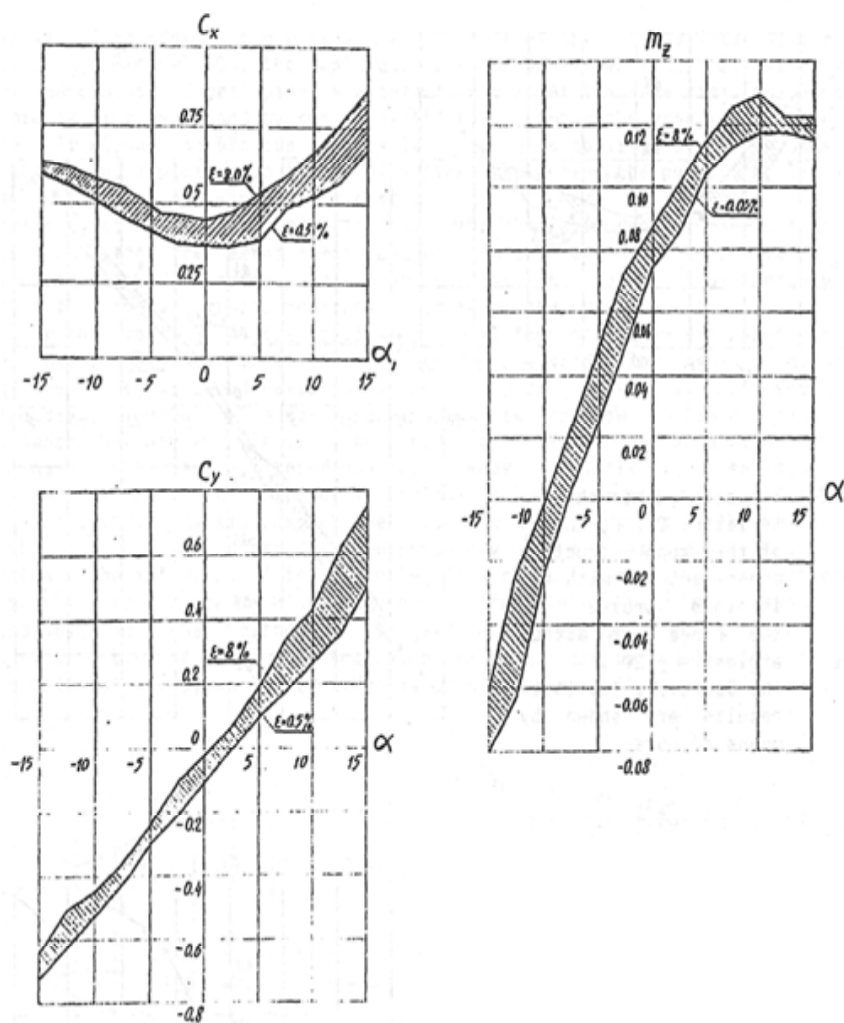


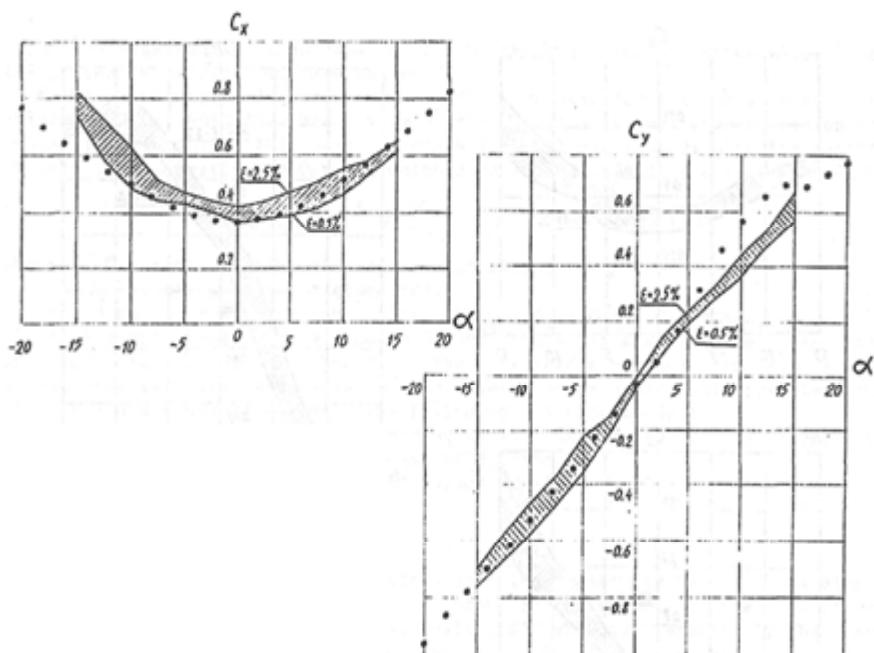
Fig.2. The aerodynamic characteristics  $c_x$ ,  $c_y$  and  $m_z$  of the span structure cross-section with vertical trusses in the range of attack angles  $\alpha = \pm 15$

The results of the experiments are given in Fig.2 for the first variant of the span structure cross section form, and in Fig.3 – for the second variant.

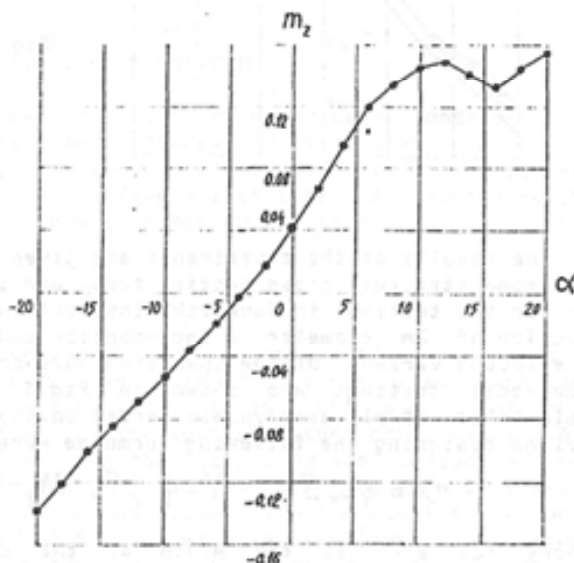
For the testing in Joukovski–Institute wind tunnel with the closed test section of 3m diameter a four–section model on scale 1: 27.5 was made due to the second variant of the span structure cross section form. The results of the model testings are shown in Fig.3 by means of the points. For the calculation of all aerodynamic forces on the length unit in the period of the bridge designing the following formulae were used:

$$X=qc_xS; Y=qc_yS; M_z = qm_zSB,$$

where  $S=B$ ;  $B$  – is the width of the deck of the upper deck of the span structure. The aerodynamic fulcrum coincides with the centre of mass of the span structure cross section.



*Fig. 3. The aerodynamic characteristics  $C_x$ ,  $C_y$  and  $m_z$  of the span structure cross-section with the inclined trusses in the range of attack angles  $\alpha = \pm 20$*



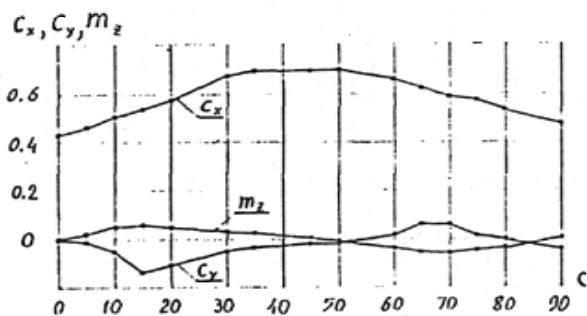
In spite of the better aerodynamic properties of the second variant with the trapezoid form of the cross section the preference was given to the first variant with the vertical planes of the trusses as the more technological in the process of manufacturing and erection.

### 3.2. Pylon aerodynamics

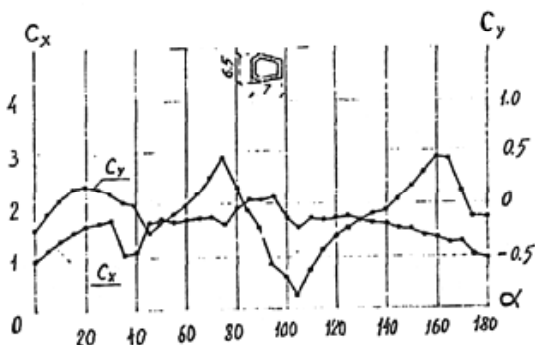
The reinforced concrete pylon is formed by two vertical  $\lambda$ -type frames, which are parallel to the bridge longitudinal axis and are joined by the lateral cross-bars in three decks in a single space system. Due to the high dissipative properties of reinforced concrete and as a result of the a large value of Scruton number  $\delta_{red} = 2m\delta/\rho B^2 = 590$ , the amplitude of aerodynamic self-oscillations of vortex inducement and galloping is extremely small. At the same time, the aerodynamic testing is caused by the necessity to determine the wind load on the pylon. It allows to provide the reliability and stability of the pylon under erection and exploitation in the wind flow considering the pulsation, i.e. dynamic effect of the wind in the gusts.

The major parameters which condition the reliability of the calculated wind load are the aerodynamic characteristics of drag, cross force and pitching moment. The corresponding forces effect the pylon simultaneously and cause the complex strained-deformed state of the pylon.

For the testing in the small wind tunnel four models on different scales were made. The first model on scale 1:450 was intended for the determination of the integral aerodynamic forces on the pylon generally at different wind directions (rhumbs). The corresponding results are shown in Fig.4: here the distance between two planes of the frames ( $B=35\text{m}$ ) is considered as a typical dimension. The second, third and fourth models on scale 1:100 represent the sections of the isolated leg of the pylon; pylon frame and pylon fragment at two different marks (lower – at the pylon leg base, upper—at the joint of both legs  $\lambda$  – type frame), correspondently. The two last models allowed to evaluate the influence of the pylon leg flow round interference at different distances; it is particularly important for the calculation of the pylon wind load at the different stages of erection. The aerodynamic characteristics of the isolated pylon leg are shown in Fig.5. The largest dimension of the pylon leg ( $B=6.5\text{m}$ ) is considered to be the typical dimension.



*Fig.4. The aerodynamic characteristics of the pylon full-scale model*



*Fig.5. The aerodynamic characteristics of the pylon isolated leg*

### 3.3. Cable Aerodynamics

One of the most important elements, providing the safety, stability and durability of the river bed cable-stayed span structure, are the cables. While choosing the constructive form of the cables at least five aspects were discussed:

- the dissipative properties of new bimetal (steel-aluminium covering) wire and cable as a whole;
- aerodynamic properties of the isolated cable with the cross section of hexahedron or circular form; cable tandem considering their wind flow round interference;
- aeroelastic properties of the cables from the view of the possibility of the appearance of aeroelastic instability phenomena of the type of vortex-inducement, galloping, parametric resonance;
- cable fatigue properties, caused by bimetal wires considering diffusion and galvanic processes inside the wires and between them;
- cable stabilization in the wind flow and at the parametric pylon oscillations at the different stages of erection and exploitation.

Here the results of the aerodynamic experiments of the interaction of isolated cable and cable tandem with the wind flow are given. The sectional full-scale models were blown in the large wind tunnel of Moscow University with the open test section of elliptical cross-section 4x2.34m in the flow velocity range  $V=0-50$  m/sec at different angles of attack. The length of the model sections is 1.1m; the diameters of the model of the hexahedron (circumscribed circle) cable and of the circular section are, correspondently,  $D=0.17$ m and  $D=0.155$ m. The experimental values of aerodynamic characteristics of drag coefficient  $C_x$ , cross force  $C_y$ , pitching moment  $m_z$ , Strouhal number  $Sh$ , Den-Gartog gradient ( $C_y^a + C_x$ ) and also derivative  $m_z^a$  are given in Table 1.

Table 1

*Cable Aerodynamic Characteristics*

Aerodynamic Parameters	Isolated Cable		Cable Tandem	
	Circular Cross-section	Hexahedron Cross-section	Circular Cross-section	Hexahedron Cross-section
$c_x$	0.8	1.025 (18°)	1.75 (46°)	2.15 (49°)
$c_y$	0	0.35 (-20°)	-0.179 (52°)	-0.83 (21°)
$m_z$	0	0	-4.32 (90°)	-3.82 (84°)
$C_y^a + C_x$	0	-2.1 (±14°)	-2.5 (45°)	-5.1 (9°)
$m_z^a$	0	0	2 (+24°)	1.7 (30°)
$Sh$	0.2	0.16	—	—

At the same time the possibility of the appearance of the aeroelastic instability phenomena was investigated on the basis of the obtained experimental values of the aerodynamic characteristics (see Table 1).

The dynamic properties of the cable are given in Table 2.

Table 2

*The Dynamic Properties of the Cable*

Cable	Cable Numbers			
	1–7	8–11	12–13	14–15*)
L, m	86–190	211–275	296–318	340–361
$N_T$	400–650	200–600	100–450	700
$f_{\min}$ , Hz	0.53–0.67	0.25–0.45	0.16–0.33	0.37
$f_{\max}$ , Hz	1.16–1.48	0.33–0.57	0.17–0.37	0.38

The evaluation of the possibility of the aeroelastic self-oscillation appearance can be done on the basis of the well-known [1] formulae:

– for the vortex-inducement

$$V_{cr}^{v.i.} = fD/Sh;$$

– for galloping

$$V_{cr}^{gal} = 4m\delta f / (|C_y^\alpha + C_x| \rho D);$$

where  $m$  – is the cable running mass,  $m = 10 \text{ kgc}^2/\text{m}^2$ ;  $\delta$  – logarithmic decrement of the oscillations,  $\delta = 0.03$ .

The calculations on the basis of these formulae show that for the isolated cable  $V_{cr}^{v.i.} = (0.12–1.53) \times m/\text{sec}$  for the  $i$ -form of the oscillations, and  $V_{cr}^{gal} = 4.3–44.2 \text{ m/sec}$  for the first form of the oscillations. For the cable tandem the critical velocity of vortex-inducement is close to the value for the isolated cable, and at the galloping  $V_{cr}^{gal} = 1.8–36 \text{ m/sec}$ .

Thus as it is seen in Table 2, the range of the changes of the natural frequency of the cross bending oscillations of the cables is so large ( $f=0.16–1.48 \text{ Hz}$ ), that practically at any wind flow velocity at least one of the cables may appear in the conditions of intensive aeroelastic oscillations. This fact shows that it is necessary to work out the measures to stabilize the cables in the process of erection and for the period of the long exploitation.

#### 4. STRUCTURE STABILIZATION

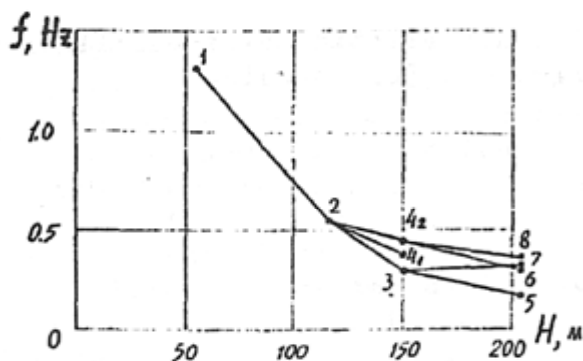
The necessity of the stabilization of the bridge passage structures – pylon, split span structures, river bed cable-stayed span structure and cables – is called forth by their interaction with the wind flow. First, the appearance of aeroelastic instability is possible. Second, the oscillations

caused by the low natural frequencies of the space oscillations and pulsation character of the real wind flow, appear at the interaction and may bring down the labour productivity and the quality of the erection work. Third, as the structures are being erected, their deformation and strained state may exceed the standard values.

#### 4.1. Pylon stabilization

As the pylon is being erected, the analysis of its dynamic parameters shows that at the unfavourable technology of the erection the lowering of the natural frequency in the oscillation first form in the minimum rigidity plane may become from the value  $f=1,31$  Hz to the value  $f=0,17$  Hz (see Fig.6). This circumstance will extremely hamper the erection work from the view of vibroecology. The period of the erection team work on the oscillating structure is regulated and limited by the Standard ISO 6897–84(E) due to the criterion of the labour productivity drop. That's why it was recommended to install the temporary erection cross-bar between two planes of  $\lambda$ -type pylon frames at the height mark 150 m.

The accepted method of the pylon stabilization in the process of erection allows to increase the pylon dynamic rigidity from the bridge plane and to improve the sanitary conditions at the erection work.



*Fig.6. The evolutions of the natural frequency of the pylon oscillations in the process of erection*

#### 4.2. Continuous span structure stabilization

There are two kinds of technology assumed as a basis of the erection work of 2x220 m continuous span structures:

- the setting with the help of floating piers in spans of 10–23 split span structures with 220 m span each with the further binary joining (Fig. 1);

– the semimounted erection in 5–10 spans (Fig. 1).

It is due to the fact that in these spans the height of the bridge design situation is larger (Fig. 1).

The providing of the stability at the setting of span structures in 10–23 spans by means of the floating piers is connected only with the observance of the definite meteorological conditions. During the semimounted erection in 5–10 spans, which is considerably long, the additional technological measures are required. Here all span structure elements under the erection must answer the demands of durability, strength, deformation and stability at all the stages of erection. The Standards introduce the limits of the natural space oscillation period values for the cantilever erection. They are caused by the demands to limit the rigidity and aeroelastic stability. In particular, for the periods in vertical and horizontal planes it is  $T=2$  sec and for the periods of torsional oscillations it is  $T = 1.5$  sec.

On the basis of some investigations [2] 15 bridges out of 143 analysed cases were damaged under erection because of the wind. This is really a large figure, as in each case we see heavy sacrifice and material losses.

In reference [3] the analysis of the maximum permissible spans for the cantilever erection is given for the large-span railway bridges.

The evolution of the dynamic rigidity of the continuous span structures depending on the erected cantilever length was investigated at the working out of “Special Technical Conditions of the Bridge Construction across the Volga in Ulyanovsk”. The results are for three variants of erection

– without intermediate temporary supports;

– with one intermediate temporary support according to 110+110 m scheme;

– with two intermediate temporary supports according to 66+88+66 m scheme are shown in Fig.7. The frequencies of bending vertical and horizontal oscillations are so close that they practically coincide on the diagram.

For the torsional oscillations the approximate formula

$$f_{\text{tor.}} = 833 / l \text{ Hz,}$$

is quite reliable, where  $l$  – is the length of cantilever.

The influence of intermediate supports may be also observed on the evolution of the erected cantilever end static deflection, which is shown in Fig.8 for the same three variants of erection. At the same time the preference may be given only considering the financial reasons.

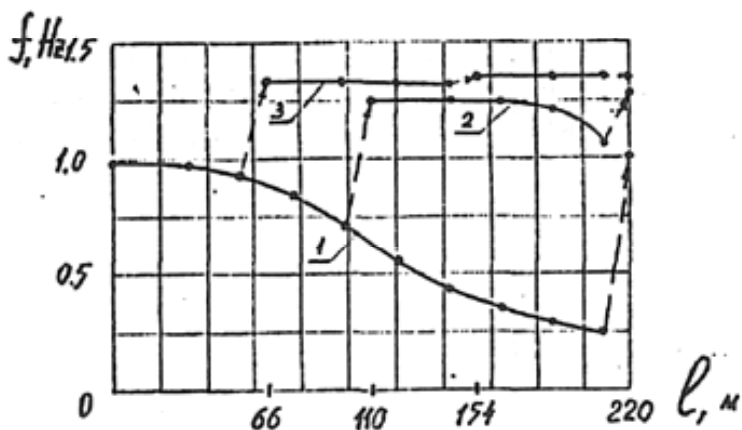


Fig. 7. The evolutions of the natural frequency of the continuous span structure in the process of linged erection: 1 – without intermediate supports; 2 – with one intermediate support; 3 with two intermediate supports

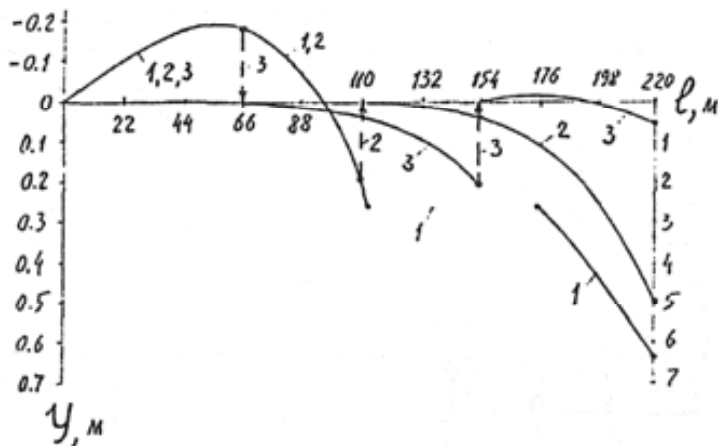


Fig. 8. The cantilever end static deflection in the process of hinged erection; 1 – without intermediate supports; 2 – with one intermediate support; 3 – with two intermediate supports. The right scale concerns only curve 1

### 4.3 The stabilization of the river bed cable–stayed span structure

The choice of the optimum variant of the river bed span erection is based on two major criteria:

- the absolute providing of the structure aerodynamic stability under erection independently of its duration, season of the year and meteorological conditions;
- the erection work cost.

The given investigation is based only on the first criterion. At the beginning of the design period (1987–1989) three ways of stabilization were discussed, shown in Fig.9. The first represents the usage of four anchors laid on the river bottom. As the cantilever lengths are enlarged at the semimounted erection the additional erection guys are set. Owing to it the space system with the structure increased rigidity in horizontal and vertical planes and also of the torsion is formed. The similar decision was accepted for the stabilization of cable–stayed bridge “NORMANDIE” in France [4] with 856m main span.

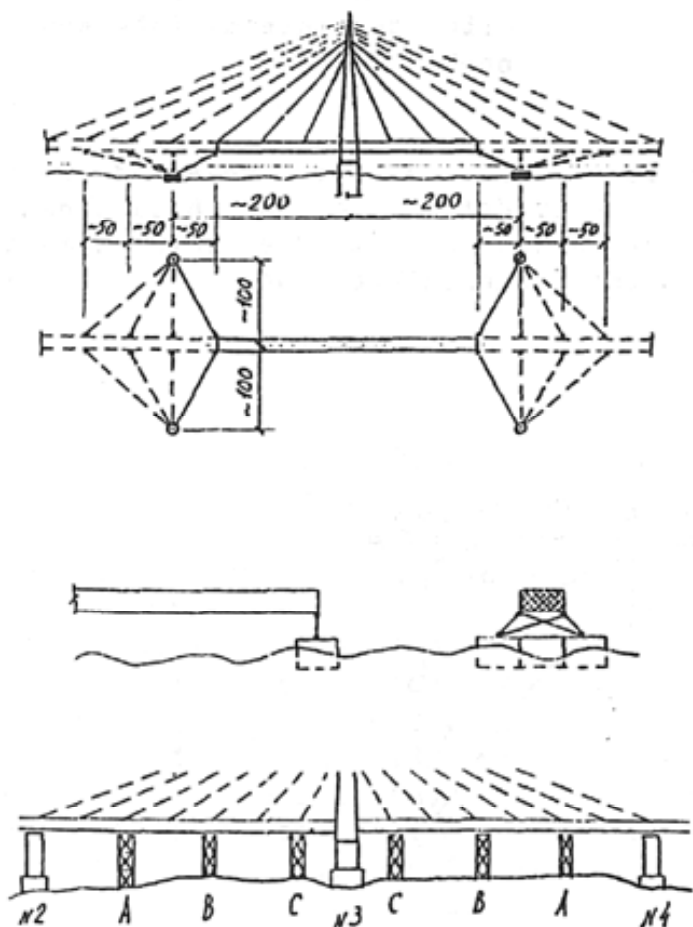
The second way (Fig.9) is connected with the arrangement of the additional one–sided flexible coupling at the cantilever end; this way changes the calculation scheme of the structure. It is achieved by the suspension to the outerend of each span structure border section some floating facilities (for ex. a group of pontoons) in the half–dipped state. The technology of this stabilization way is provided by means of inventory cross–piece, which is gradually transposed while the cantilever erection at the favourable meteorological conditions.

The third way (Fig.9) predicts the arrangement of the intermediate temporary supports, semimounted erection of the whole river bed span and the further setting of the cables.

At the optimization of the erection span length on the temporary supports due to the agreement between the contractor and the planning organization two variants were discussed:

- I variant: the whole erection of the river bed span structure 1–5 with the further cable setting and temporary support dismantling;
- II variant: the erection of the half river bed span 1–3 with the further semimounted erection of the second half river bed span 3–5, counterbalanced by the cables. The I variant has the following advantages:

1. The speed of the river bed span structure erection isn’t connected with the terms of cable delivery and their preparation to the setting;
2. The possibility of the cable setting without further stress regulation in them;
3. The designed geometry of span structure is guaranteed by the exact observation of manufacturing technology and preliminary cable stretching.



**Fig.9. The variants of the river bed span structure stabilisation in the process of erection**

Its disadvantage is the arrangement of twice more number of the temporary supports in comparison with the second variant. The disadvantages of the II variant are:

1. Asymmetry of both halves of the river bed span structure in the process of erection;
2. The necessity of calculation high accuracy for the erection of each

cable, which demands the consideration of the changes of the parameters in the process of erection:

- the geometry of the pylon and adjoining sections of span structure depending on the level of the constant loads and meteorological effects (wind, snow, glaze ice);

- the elongation of the previously arranged cables;

- the temperature extension of the cables.

3. The possibility of the appearance of the extreme stresses in the pylon elements with the unpredicted consequences at the local wind effects in gusts.

Both variants may be impartially assessed excluding the financial aspects on the basis of the analysis of the dynamic parameter evolution and cantilever end static displacements. In particular, the investigations show that the optimum is the technology of the oncoming erection from anchor tower 3 to towers 2 and 4 according to the scheme  $220+110+110+170.5+33+170.5+110+110+220$  m. Here  $l=33$  m span is situated in the boundary of the pylon with the support on collar beams at 55 m mark. Such technology allows to use only two temporary supports on both sides of the pylon.

The evolution of the natural frequencies of vertical (and horizontal) oscillations in the process of erection is shown in Fig. 10 and the evolutions of the end static deflection of the cantilever erection repeat those, shown in Fig. 8 in the previous chapter. The elastic lines of the span structure at the oncoming erection before and after the joint are shown in Fig. 11.

#### **4.4. Cable stabilization**

The stabilization of cables presents a number of constructive and practical measures to avoid the appearance of resonance oscillations of any of the cables under cable erection and bridge exploitation.

The cable system stabilization doesn't prevent the appearance of the space oscillations of the river bed span structure and pylon because of the wind effects and moving load.

While discussing the problem of the cable stabilization of the cable-stayed bridges it's necessary to consider cable oscillations having various origins:

- aeroelastic instability, caused directly by the wind flow;

- oscillations, caused by the pylon dynamic behaviour at its interaction with the wind flow;

- oscillations, caused by the span structure dynamic behaviour in the wind and moving load field;

- rain oscillations, caused by the wind flow at the shower rains.

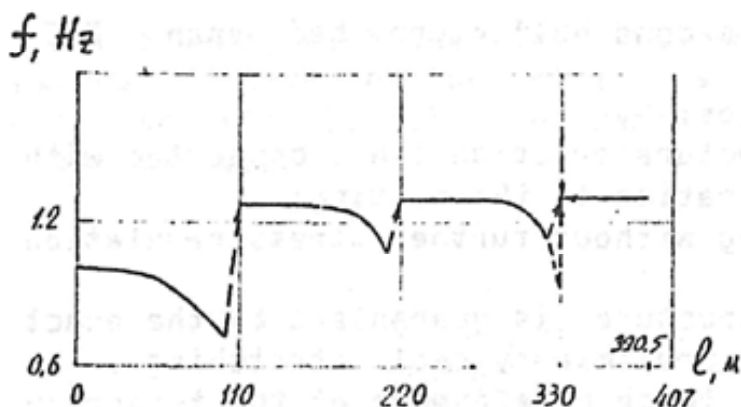


Fig.10. The evolutions of the natural frequency of the river-bed span structure oscillations in the process of the oncoming hinged erection with two intermediate supports according to the scheme 220+110+110+170.5+...m

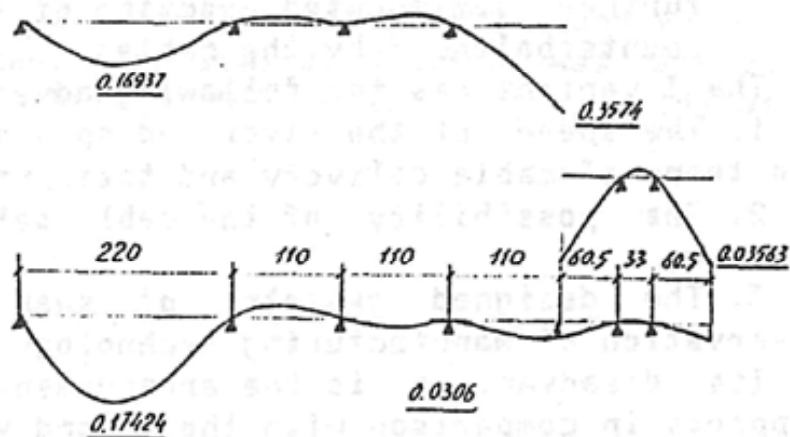


Fig.11. The elastic lines of the river bed span structure in the process of the oncoming hinged erection with two intermediate supports according to the schemes 220+110+110+110 m and 60.5+33+60.5 m before and after the joint according to the scheme 220+110+110+170.5+... m

The last were observed at the large lengths of the cables and described in [5,6]. The cable oscillation amplitudes may be so large that they can destroy the casings at the places of the fastening of cables to the girder and also destroy separate cable protective envelope. That's why the problem appeared – to work out the measures to reduce the cable oscillation amplitudes under erection and exploitation. We divide the different ways of cable stabilization into four types: the dynamic damping of the oscillations, constructive damping, constructive ways, aerodynamic ways [7].

The dynamic damping of the oscillations is based on the joining of additional mass to the oscillating structure (cable). Together with the coupling elements it is called dynamic damper of the oscillations.

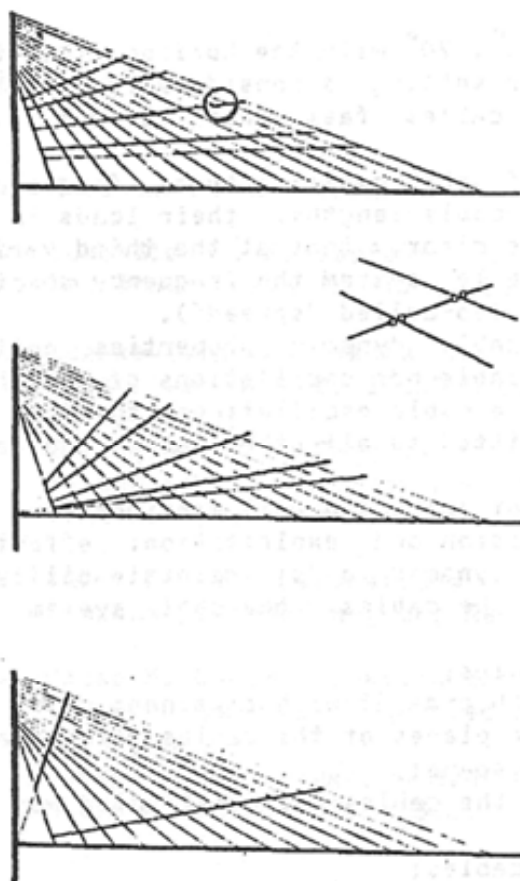
The constructive damping presents the energetic losses, which appear due to the effects of the dry friction forces on the contact surfaces in different joints, units, supporting and other elements of bridge structures at their oscillations. The constructive ways of oscillation damping provide for the changes in the calculations, the increase of the bending and torsional rigidity, etc.

The aerodynamic ways present the changes of the character of the structure and its separate elements flow round by the wind. They differ from the above-mentioned ways by the removing of the causes of the aeroelastic instability appearance.

The analysis of the different ways of cable oscillation damping and their usage under erection and exploitation considering a wide range of cable natural frequencies (for the first form of oscillations  $f=0.16\text{--}1.48\text{ Hz}$ ) showed that the most resultative measure was the reduction of the cable free length. In particular, the setting of the additional strainers between the cables was suggested in accordance with the aesthetic norms, stabilization effectiveness, erection and manufacturing technology simplicity, maintainability, vehicle and pedestrian safety.

For the cable stabilization of the cable-stayed span structure Volga-Ulyanovsk the system of strainers was accepted, which forms the common cable system together with the whole group of cables. To find out the optimum geometry of this system, considering the possibility of the usage simultaneously under erection and exploitation, three variants were discussed (Fig.12). The peculiarity of all three variants is the hinged fastening of the strainers to all the cables. The fragment of the fastening is shown in Fig.12.

According to the first variant the strainers form the beams – the geometrical places of the points which coincide with the quarters, thirds and halves of all the cables. This variant has a considerable disadvantage: the synchronous group oscillations of all the cables in the system are possible and consequently the pylon and span structure oscillation excitement.



***Fig.12. The variants of cable stabilization and the fragment of the hinged fastening of the strainers to the cables***

According to the second variant the beams where the strainers are settled come from the point of intercept of pylon and span structure axes and go through the quarters, thirds and half of the longest cable. At such disposition of the strainers the effectiveness of cable stabilization increases. At the same time this variant has the following disadvantages:

- the complicated calculation of the geometry of the joints of the strainers to the cables;
- the given geometry is more sensitive to the natural sagging of the cables;

– the regulation of the strainer lengths during the preparation of the bridge to the long exploitation is necessary to provide the cable calculated geometry.

The third variant, accepted to the final realization, is identical to the second one but the beams make the angles  $10^\circ$ ,  $70^\circ$  with the horizon. At that the labour-intensiveness of the strainer setting is considerably decreased and the number of angles of strainers to cables fastenings is 2.5 times decreased.

The original discontinuous spectrum of the cable natural frequencies ( $f=0.16\text{--}1.48$  Hz) reflects the variety of cable lengths, their loads in the process of erection and exploitation. It's clear, that at the third variant due to the formation of the common cable system the frequency spectrum transforms from discontinuous to continuous (so-called «spread»).

At such qualitative changes of the cable dynamic properties neither resonance oscillations of any separate cable nor oscillations of the whole cable system are possible. The energy of one cable oscillations through the system of strainers is immediately transmitted to all other cables and damps quickly.

For the providing of the technology of joint and unit manufacturing and erection; regulation in the process of erection and exploitation; effective work of cable system in the conditions of dynamic loads; maintainability of strainers and joints of their fastening to the cables, the cable system has the following peculiarities:

1. Hinged junction of strainers with cables;
2. The presence of the turnbuckle on both ends of each strainer;
3. The strainers are settled in all four planes of the cables (two planes of binary cables) in the bank and river bed spans;
4. The angles of strainer fastening to the cables are constructed on the following conditions:
  - the banning of their slip along the cables;
  - the technology of the settling accessible in the conditions of erection and maintenance at the exploitation;
  - maintainability;
5. The upper edge and junctions of each joint are stuffed with waterproofing mass (mastic) to avoid the moisture;
6. All the elements of the joint must be protected from corrosion (zinc plating, aluminium plating, cadmium plating and so on).

The diameter of the strainers made of double-twisted ropes may be accepted 30–32 mm; it is quite enough to perceive the inertial loads caused by the swaying of one of the cables. At the same time such diameter proved to be aesthetic enough and doesn't contradict the cable bridge architecture.

The presence of the fastening joints on the cables avoids the formation on their surfaces long streams at the shower rains and consequently rain oscillations.

To avoid the collisions of binary cables the spacers with vibrodamping elements are settled between them at the pitch of 15–20 m. These spacers are settled on all binary cables in the bank and river bed spans of cable-stayed span bridge.

At the same time it is expedient to settle the cross-shaped coupling of twisted ropes between two planes of the binary cables in two–three places of each span to increase the space rigidity of the cable system.

The lugs for the strainer fastening are situated along the axis making angle  $\gamma_{ij}$  with the normal to the longitudinal axis of the cable

$$\gamma_{ij} = \alpha_i + \beta_j - 90^\circ,$$

where  $\alpha_i$  – is the angle between i-cable and horizontal;  $\beta_j$  – is the angle between j-strainer and horizontal. According to the joint geometry the casing length is  $l_{\text{cas}} \cong (3 \div 5) D_{\text{cab}}$ .

### *References*

1. Казакевич М.И. Аэродинамика мостов. М.: Транспорт. 1937. – 240 с.
2. Scheidler J. Banverfahren und ihre Kritischer Montagerustande bei Grobbrucken // Tifbau-Ber-uffgenoss, 1990, v.102, № 5.
3. Kazakevitch M., Zakora A. Long-Span Bridge Stabilization Balanced Cantiliver Method. IABSE Symposium, Leningrad. – 1991, p. 69–73.
4. Virlogeux M., Deroubaix B. Conception et construction d pont de Normandie. Association Francaise pour la Construction. Communications Francoises, 1991. – p. 235–236.
5. Juiti X. Rain vibrations of cable in cable-stayed bridges // Ishikawa-jima-Harima. Eng.Rev., 1988, 28, № 6, p. 416–421.
6. Masao M. Cable vibration control method of cable-stayed bridges // Сумитомо дзюкикай Гихо = Techn. Rev., 1989, 37, № 110, p. 1–7.
7. Загора А.Л., Казакевич М.И. Гашение колебаний мостовых конструкций. М.: Транспорт, 1983. –134 с.

# ANALYTICAL SOLUTION FOR GALLOPING OSCILLATIONS\*

## INTRODUCTION

Self-excited oscillations of bluff bodies have been treated extensively in technical literature by Försching (1974), Kazakevych (1981), Simiu and Scanlan (1986), and others. Oscillations of flexible prismatic structural elements caused by air flow are generally of three types: vortex induced oscillations, galloping, and flutter. Each type has distinct characteristics.

The phenomenon of galloping was first explored in connection with stability studies of ice-covered power transmission lines subject to wind by Den Hartog (1956). Galloping may be modeled analytically through the use of steady-state aerodynamic force information. A two-dimensional treatment of the problems with galloping is justified by the fact that the cross-sectional dimensions of objects under consideration (e.g., cables) are small compared with their length.

The mechanism of the origin and sustenance of oscillations is determined by the flow velocity, damping and elastic properties, as well as by geometric proportions of the cross section. Aerodynamic properties of members with rectangular cross sections are depicted as functions of the angle of attack in Fig. 1 (Kazakevych and Grafskiy 1986). This data was obtained from a series of extensive tests with parameters  $a$  and  $b/h$  conducted in 1985 in the wind tunnel of the Dnipropetrovsk State University of Railway Transport. Analysis of the aerodynamic properties of such members (Den Hartog 1956) shows a number of the following important phenomena:

- As the width-to-depth ratio,  $b/h$ , increases, the lift force gradient,  $C_y^\alpha = dC_y/d\alpha$ , that is associated with galloping shifts toward a lower angle of attack (Den Hartog 1956).
- There is a threshold (critical) value of the  $b/h$  ratio in the range  $3 < b/h < 4$ , above which neither a positive gradient,  $C_y^\alpha > 0$ , nor oscillations of this kind occur.
- Instability is possible -only within the interval,  $0 < b/h < 20^\circ$ , of the angle of attack.

---

\*Опубликовано совместно с А.Г. Василенко в ж-ле «JOURNAL OF ENGINEERING MECHANICS», ASME, June 1996, CIIA, а также в Докл. АН УССР, Сер. А, № 3, Киев, 1986 и в ж-ле «Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics», т. 65, 1996, ELSEVIER, Нидерланды.

• The critical velocity of galloping, according to Den Hartog (1956) is minimal within the range  $2.0 < b/h < 3.0$ .

Existence of the threshold value of  $b/h$  is demonstrated in Fig. 2 (Kazakevych and Grafskiy, 1986).

## THEORETICAL ANALYSIS

### Equation of Motion.

Analytical investigation of Kazakevych and Vasylenko (1986) is based on the well known equation

$$\ddot{y} + \frac{\delta\omega_0}{\pi} \dot{y} + \omega_0^2 + C_{Fy} \frac{\rho V^2 b}{2m} = 0. \quad (1)$$

This nonlinear differential equation belongs to the class of potentially self-exciting oscillating equations and may be solved by an energy method.

For this purpose, (1) is presented as

$$\ddot{y} + \omega^2 y = (\omega^2 - \omega_0^2) y - \frac{\delta\omega_0}{\pi} \dot{y} - \frac{\rho V^2 b}{2m} C_{Fy}^\varphi \arctg \frac{\dot{y}}{v} = 0, \quad (2)$$

where  $\omega_0$  = frequency of in-vacuo oscillations. The aerodynamic coefficient of the lifting force,  $C_{Fy}$  is approximated by the first term of its representation by a McLaurin series

$$C_{Fy} \cong C_{Fy}^\varphi \cdot \varphi = C_{Fy}^\varphi \arctg \frac{\dot{y}}{v}. \quad (3)$$

The vectorial relationship between the relative and absolute velocity of air flow and the velocity of the cross-flow oscillations is given by the expressions

$$V = v + (-\dot{y}); \quad V = v \sqrt{1 + \left( \frac{\dot{y}}{v} \right)^2}. \quad (4)$$

### Analytical Solution (First Variant).

The «apparent» angle of attack,  $\varphi$ , is presented as an infinite series (Prudnikov et al., 1981)

$$\varphi = \arctg \frac{\dot{y}}{v} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \left( \frac{\dot{y}}{v} \right)^{2k+1}, \quad (5)$$

which is absolutely convergent for  $|\dot{y}/v| \leq 1$ .

If the right side of (2) is regarded as the sum of the inner forces acting on the conservative system

$$\ddot{y} + \omega^2 y = 0 \quad (6)$$

the solution of (6) may be given in the form

$$y = a \cdot \sin \omega t \quad (7)$$

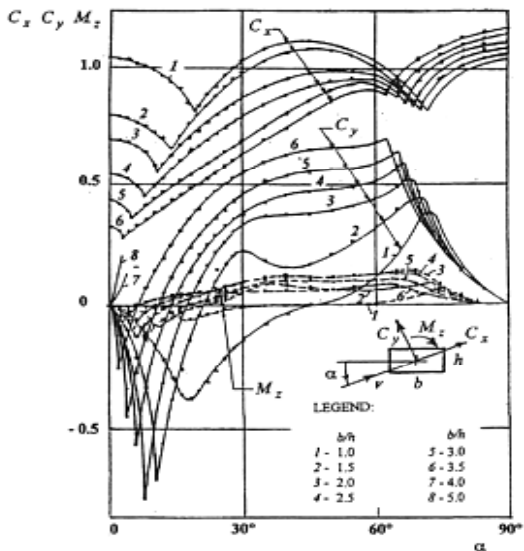


Fig. 1. Aerodynamic properties of members with rectangular cross sections as function of angle of attack

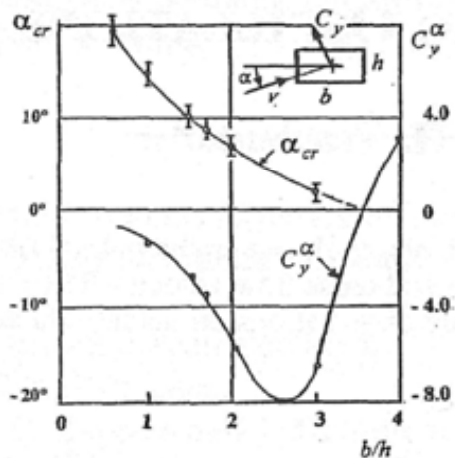


Fig. 2. Lift force gradient,  $C_y^{\alpha}$ , and critical angle of attack,  $\alpha_{cr}$ , as functions of ratio  $b/h$

Substitution of solution (7) into (2), with consideration of (3), (4), and (5), results in a system of algebraic equations for the determination of amplitude  $a$  and frequency  $\omega$  of galloping oscillations

$$(\omega^2 - \omega_0^2)a = 0;$$

$$\frac{\delta\omega_0}{\pi}a\omega + \frac{\rho v b}{2m} C_{F_Y}^\Phi \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{2k+1}{k} \left( \frac{a\omega}{2v} \right)^{2k} a\omega = 0. \quad (8)$$

The previous equality terms with higher frequencies are neglected, based on the approximation taken from the compendium of mathematical solutions of the theory of series (Prudnikov, 1981)

$$\cos^{2k+1} \omega t \cong 2^{-2k} \binom{2k+1}{k} \cos \omega t, \quad (9)$$

where

$$\binom{2k+1}{k}$$

are binomial coefficients designating the number of combinations of  $(2k - 1)$  elements by  $k$ .

In solving the first equation of system (8), the frequency  $\omega = \omega_0$  is found by assuming the existence of the self-exciting system ( $a \neq 0$ ). The second equation of system (8) yields one of the nonzero values of the amplitude that may be obtained from the solution of

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{2k+1}{k} \left( \frac{A}{U} \right)^{2k} = \frac{1}{U}. \quad (10)$$

In the preceding equation, the following notations are used (with  $v = v_{cr}$ )

$$A = \frac{a\omega_0}{2v_{cr}}; \quad U = \frac{v}{v_{cr}}; \quad v_{cr} = -\frac{2m\delta\omega_0}{C_{F_Y}^\Phi \pi \rho b}. \quad (11)$$

Regarding series (10), its value may be determined after some transformation of the following terms:

$$\frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{2k+1}{k} \left( \frac{A}{U} \right)^{2k} = \frac{(2k)!}{k!(k+1)!} \left( -\frac{A^2}{U^2} \right)^k = \frac{1}{p} \cdot \frac{(2k)!}{k!(k+1)!} p^{k+1}, \quad (12)$$

where

$$p = -\frac{A^2}{U^2}. \quad (13)$$

It is also known (Prudnikov 1981) that the sum of the series,  $|p| < 1/4$  or  $|A/U| < 1/2$ , is given by

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{k!(k+1)!} p^{k+1} = \frac{1 - \sqrt{1-4p}}{2}. \quad (14)$$

By substituting (12) into (14) and then into (10), it is found that

$$\frac{1 - \sqrt{1-4p}}{2p} = \frac{1}{U} \quad (15)$$

or, with designations (13)

$$A = U^2 \sqrt{1 - \frac{1}{U}}. \quad (16)$$

### Analytical Solution (Second Variant).

The result analogous to (16) may also be obtained in another way. Instead of transformation (12), another transformation is used that is more complex, but free from the limitations of (14) (Prudnikov, 1981)

$$\frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{2k+1}{k} \left( \frac{A}{U} \right)^{2k} = (-1)^k \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right)}{k!(k+1)!} q^k \quad (17)$$

where  $q = 4A^2/U^2$  and the gamma function

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-\tau} \tau^{z-1} d\tau. \quad (18)$$

It is possible to show (Prudnikov, 1981) that

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right)}{k!(k+1)} q^k = \frac{2\sqrt{\pi}}{q} (\sqrt{1+q} - 1) \quad (19)$$

In this manner, by substituting (17) into (19), and further into (10), an expression is obtained

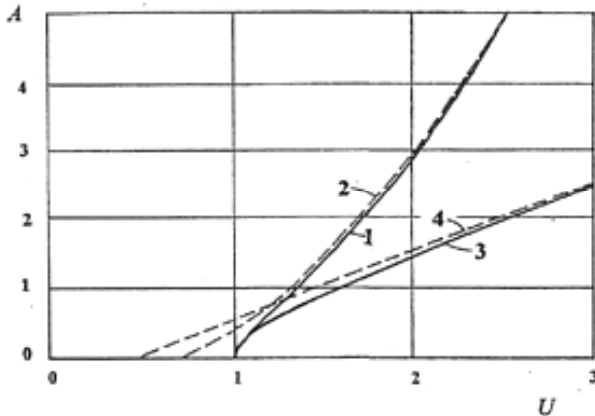
$$\frac{2}{q} (\sqrt{1+q} - 1) = \frac{1}{U} \quad (20)$$

from which, with designations (18), (16) results.

For comparison with the known approximate solutions, giving the relationship between the amplitude of aeroelastic self-oscillations and the flow velocity (Parkinson and Brooks 1961; Novak 1969), two terms of series (10) are used. In this case, the approximate solution is obtained as

$$A = U \sqrt{1 - \frac{1}{U}}. \quad (21)$$

Comparison of rigorous analytical solution (16) and approximate solution (21) is shown in Fig. 3.



**Fig. 3.** Relationship between normalized-oscillation amplitude,  $A$ , and normalized flow velocity,  $U$  [1 – rigorous solution (14); 2 – asymptotic approximation of rigorous solution (19); 3 – approximate solution (18); and 4 – asymptotic approximation of approximate solution]

### Asymptotic Approximations.

The increase in self-excited oscillation amplitudes of galloping, with increasing velocity in air flow obtained by the rigorous (16) and approximate (21) solutions, is illustrated by means of their asymptotic approximations at  $U \rightarrow \infty$ .

The polynomial

$$P_n(x) = \sum_{m=0}^n a_m x^m \quad (22)$$

may be regarded as an asymptotic approximation of function  $y = f(x)$  at  $x \rightarrow \infty$  if

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - P_n(x)] = 0. \quad (23)$$

According to the theory of approximation functions, coefficients  $a_m$  of polynomial  $P_n(x)$  are obtained by formulas

$$a_n = \lim_{x \rightarrow \infty} [x^{-n} f(x)]; \quad a_m = \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ x^{-m} \left[ f(x) - \sum_{i=m+1}^n a_i x^i \right] \right\}, \quad (24)$$

$$m = 0, 1, \dots, n-1.$$

Thus, rigorous solution (16) is written as

$$\begin{aligned} a_2 &= \lim_{U \rightarrow \infty} \frac{A}{U^2} = 1; \quad a_1 = \lim_{U \rightarrow \infty} \frac{(A - U^2)}{U} = -\frac{1}{2}; \\ a_0 &= \lim_{U \rightarrow \infty} \left( A - U^2 + \frac{U}{2} \right) = -\frac{1}{8} \end{aligned} \quad (25)$$

and the asymptotic approximation is

$$A = U^2 - \frac{U}{2} - \frac{1}{8}. \quad (26)$$

Analogically, the approximate solution (21) is written as

$$a_1 = \lim_{U \rightarrow \infty} \frac{A}{U} = 1; \quad a_0 = \lim_{U \rightarrow \infty} (A - U) = -\frac{1}{2} \quad (27)$$

and the asymptotic approximation is

$$A = U - \frac{1}{2}. \quad (28)$$

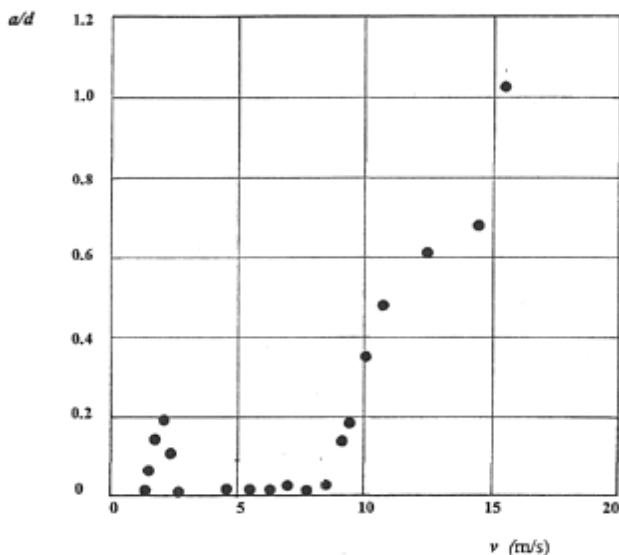
Graphs of asymptotic approximations (26) and (28) are shown in Fig. 3.

## COMPARISON WITH RESULTS BY OTHER RESEARCHERS

The relationship between oscillating amplitude and flow velocity has been studied theoretically and experimentally by several researchers. Findings of more recent studies tend to confirm the results presented by the writers.

For example, aeroelastic response tests of cables by Miyazaki (1989) show the relationship between the oscillating amplitude and flow velocity (Fig. 4) qualitatively similar to that given in Fig. 3. At a critical flow velocity, the amplitudes of galloping oscillations begin to increase catastrophically. Quantitative comparisons of the experimental values in Fig. 4 with the analytical results in Fig. 3 require the use of normalized parameters,  $A$  and  $U$ , defined by (11) instead of parameters  $v$  (m/s) and  $a/d$  used by Miyazaki. However, this is not possible because in Miyazaki's numerical values of parameters  $\omega_0$ ,  $m$ ,  $b$ , and  $\delta$  are not given.

Findings of other researchers (Blevins, 1977; Yokoyama et al. 1977; Blackmore, 1985; and Mikami, 1989) also agree with the amplitude/velocity relationship in (16), characterized by sudden increases of oscillation amplitudes beginning at the critical velocity. This type of relationship is qualitatively different from presentations of these phenomena in earlier studies by Parkinson (1961), Novak (1969), and others.



**Fig. 4. Relationship between oscillation amplitude,  $a$ , of cable and flow velocity,  $v$  [ $d$  = cable diameter from tests on aeroelastic response of cables (Miyazaki 1989)]**

## CONCLUSIONS

A closed analytical solution has been formulated that defines the relationship between the amplitude of galloping oscillations and the velocity of the air flow. This solution agrees well with the results of various wind tunnel tests on models.

The solution given by (16) permits determination of the critical velocity,  $v_{cr}$ , from only one known experimental point in the aggregate of parameters ( $a$ ,  $\omega_0$ , and  $v$ ). The analytical solution (16), using the notation given in (11), may be presented as

$$a = \frac{2v^2}{\omega_0 v_{cr}} \sqrt{1 - \frac{v_{cr}}{v}} \quad (29)$$

from which the critical velocity, corresponding to the onset of the aeroelastic galloping instability, is obtained as

$$v_{cr} = \frac{2v^3}{a^2 \omega_0^2} \left( \sqrt{1 + \frac{a^2 \omega_0^2}{v^2}} - 1 \right). \quad (30)$$

The presented solutions and formulas permit better assessment of phys-

ical phenomena of galloping self-oscillations than the available methods and may be used for more precise determination of stresses and deformations of flexible prismatic structures and their components under the effects of air flow. Structures in this category include pylons of suspension and cable-stayed bridges, box-type bridge superstructures, prismatic towers, and transmission line supports. Solutions also apply to closely spaced cables in tandem arrangement and to structural elements of any cross section in the air flow wake.

### References

1. Blackmore P.A. (1985). «A comparison of experimental methods of estimating dynamic response of buildings» *J. Wind Engrg. and Industrial Aerodynamics*, 18, 197-212.
2. Blevins R.D. (1977). «Flow-induced vibration.» 363.
3. Den Hartog J.P. (1956). *Mechanical vibrations*, 4th Ed., McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, N.Y.
4. Försching H. W. (1974). *Grundlagen der aeroelastik*. Springer-Verlag KG, Berlin, Germany.
5. Hikami Y. (1988). «Rain vibration of cables in cable-stayed bridges.» *Ishikawajima-Harima Engrg. Rev.*, 28(6), 416-421.
6. Kazakevytch I.M. (1981). «Aeroelastic vibration of bluff bodies excited by wind.» *Nonlinear Vibration Problems*, Warsaw, Poland, 20, 17-45.
7. Kazakevytch I.M., and Grafskiy, I.J. (1986). «On aeroelastic instability of prismatic elements of structures.» *Proc. of Dnipropetrovsk Inst. of Transp. Engrg.*, Dnipropetrovsk Inst., Dnipropetrovsk, Ukraine, 32-36.
8. Kazakevytch I.M., and Vasylenko O.H. (1986). «Aeroelastic self-oscillations of galloping type of prismatic bodies.» *Proc. of the Acad. of Sci. of Ukraine, Series A*, Acad. of Sci. of Ukraine, Kyiv, Ukraine, 32-34.
9. Miyazaki M. (1989). «Cable vibration control method of cable-stayed bridges.» *Tech. Rev.*, 37(110), 1-7.
10. Novak M. (1969). «Aeroelastic galloping of prismatic bodies.» *J. Engrg. Mech.*, ASCE, 95(1), 115-142.
11. Parkinson G.V., and Brooks N.P. H. (1961). «On the elastic instability of bluff cylinders.» *J. Appl. Mech.*, 83, 252-258.
12. Prudnikov A.P., et al. (1981). *Integrals and series*. Science, Moscow, Russia.
13. Simiu E., and Scanlan R.H. (1986). *Wind effects on structures: an introduction to wind engineering*, 2nd Ed., John Wiley & Sons, Inc., New York, N.Y.
14. Yokoyama K., Yamakawa S., Sakata H., and Suzuki T. (1977). «Wind-induced oscillation of the cables of large cable-stayed bridges and preventive measures.» *Mitsubishi juko giho*, 14(3), 388-397 (in Japanese).

# THE PROBLEMATIC TASKS OF AERODYNAMICS OF STRUCTURES ABSTRACT\*

## INTRODUCTION

In spite of the intensive development of the structure aerodynamics in different directions, both of fundamental and applied character, there are lots of perspective problems waiting for their solution. On one hand it is connected with the comprehension of the peculiarities of the structure interaction with the effects of the meteorological origin and, on the other hand - with the evolution in the sphere of the engineering industry.

In the first case the earlier adopted conceptions, assumptions and simplifications may be treated as unsatisfactory. Besides, with the development of new structural forms, such as membrane roofings, suspension and cable-stayed systems, absolutely new or insufficiently explored phenomena appear.

In the second case the problems appear, connected with the exploration and analysis of the aerodynamic and aeroelastic qualities of the above-mentioned new structural forms. There is also the necessity to solve the problems of the static and dynamic stabilization of the structures at the initial stage of the design and the problems of the aerodynamic and aeroelastic monitoring in the process of exploitation. There is one more aim of the given paper: to draw the attention to the structure aerodynamics. The problematic tasks, enumerated further, do not pretend to give the complete and full range of the theoretical and practical problems. The order of their discussion is not connected with their priority, but reflects to some extent the opinion of the author.

1. The principles of the wind averaging at the structure calculation.
2. The single wind gust effect on the structures.
3. The aerodynamics and aeroelastic interaction of the structure flexible element tandem.
4. The aerodynamics of the structure elements at the icing.
5. The interaction of several phenomena of aeroelastic instability (vortex excitation, galloping and stall flutter) – the interference of the critical velocities.
6. The aerodynamics of the membrane roofings.
7. The aerodynamic stabilization of structures – the lowering of the wind load field.

---

\* Опубликовано в Трудах Международной Конференции 2 EACWE, June 1997, v. 2, Генуя.

8. The aeroelastic stabilization of structures – the lowering or elimination of the structure aeroelastic responses.
9. The chaos in aeroelastic systems.
10. The structure element permissible flexibility at their interaction with the wind flow,
11. The rain aeroelastic self-oscillations.
12. The aerodynamic and aeroelastic monitoring of structures.
13. The influence of the angle of attack and turbulent flow on the aerodynamic parameters of the structure elements and its registration in the design codes.
14. The aerodynamics of the new structural forms.

## THE PRINCIPLES OF THE WIND AVERAGING AT THE STRUCTURE CALCULATION

This problem, in the opinion of the author, is one of the most important and at the same time open to discussion. Therefore it predominates in the given paper.

The existing practice of the structure calculation on the wind flow dynamic effect is based on the fully formed tradition of the wind velocity averaging. This tradition and also the peculiarities of the information about the wind flow velocity values in the ground layer in different countries led to the fact that at the structure calculation either the instantaneous values of the velocity or averaged values during the definite time interval are taken. Mainly,  $[t_{av}] = 10 \text{ min} = 600 \text{ s}$ , or  $[t_{av}] = 1 \text{ h} = 3600 \text{ s}$  is taken as the interval. Therefore, the dynamic properties of the structures are not considered at the choice of the interval.

Meanwhile, exactly the wind pulsation causes the appearance of the dynamic loads and, as a result the dynamic displacements and stresses of the structures at their interaction. But the structure dynamic responses depend mainly on such dynamic properties as the frequencies (periods) and logarithmic decrements of the structure natural oscillations. It seems important to fix the connection between these properties and the choice of the interval of the wind flow velocity averaging.

As the wind flow velocity possesses the property of changeability, the velocity averaged during the definite time interval is taken as the theoretical value. In the real conditions during this time interval the value of averaged velocity is influenced by the wind pulsations with different frequency – amplitude characteristics. The energy spectrum Van der Hoven presents the wind pulsations the most correctly. The modern wind velocity transducers like anemometers or anemorumbometers in

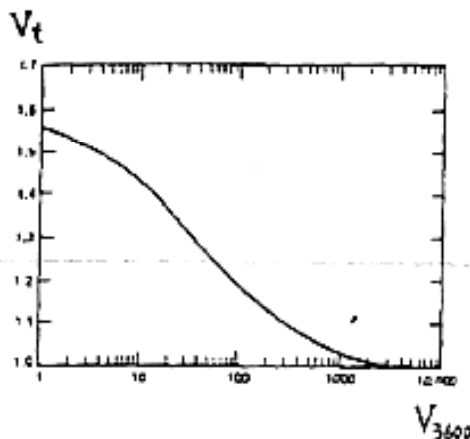
the conditions of meteorological stations permit to receive the averaged wind velocities during 10 min or 1 hour, and also the instantaneous wind velocity values (during 1–3 sec).

Due to the definition, the wind velocity depends on the time of the averaging. Thus, with the reduction of the interval of the averaging, the value of the average velocity increases. The interval of averaging  $[t_{av}] = 600\text{ s}$  suggested by A.G. Davenport is adopted practically in all the countries of the world and is the basis of the structure calculation codes on the wind loads.

At the same time due to H. A. Panofsky  $[t_{av}] = 3600\text{ s}$  should be taken as the basic interval of the averaging. This is grounded by the data of experimental observations of the existence of the “gap” in the energy spectrum Van der Hoven of the longitudinal wind velocity pulsations between the macrometeorological (synoptical) and micrometeorological (turbulent) areas. At the other interval of averaging the value of the average wind velocity may be determined by the relation given in [1] Simiu and Scanlan according to the results of C.S. Durst [2]

$$V_t = V_{3600} \left[ 1 + \frac{\beta^{1/2} c(t)}{2.5 \ln(z/z_0)} \right], \quad (1)$$

where  $V_t$  and  $V_{3600}$  are the values of the average wind velocity at the intervals of averaging  $t_{av} = t$  and  $t_{av} = 3600\text{ s}$ ;  $\beta$  is the constant depending on the interval of averaging  $t_{av}$ . The relation (1) may be expressed graphically (Fig. 1).



**Fig. 1. The dependence of the average velocity on the averaging interval**

The structure dynamic responses on the wind pulsations are characterized by some fixed condition of oscillations. To achieve the stable (qua-

si-stationary) value of the amplitudes of the fixed condition, the definite quantity of the oscillation cycles  $n$  is necessary. The existence of the dependence of the cycle number  $n$  on the structure dissipative qualities may be treated as physically established, in the dynamic calculations the measure of the oscillation energy dissipation of i-tone is logarithmic decrement  $\delta_i$ .

Therefore,

$$n = k / \delta_i, \quad (2)$$

where  $k$  – is the parameter characterizing the process of the structure oscillation stabilization. In particular, the oscillation condition may be treated as the fixed one if the amplitude achieves the value  $a_n = 0,9 a_{max}$  in  $n$  cycles. In this case

$$k = \left| \ln \left( 1 - \frac{\alpha_n}{\alpha_{max}} \right) \right| \cong 23, \quad (3)$$

Taking approximately  $k = 20$ , for the number of cycles of the oscillation establishment we get

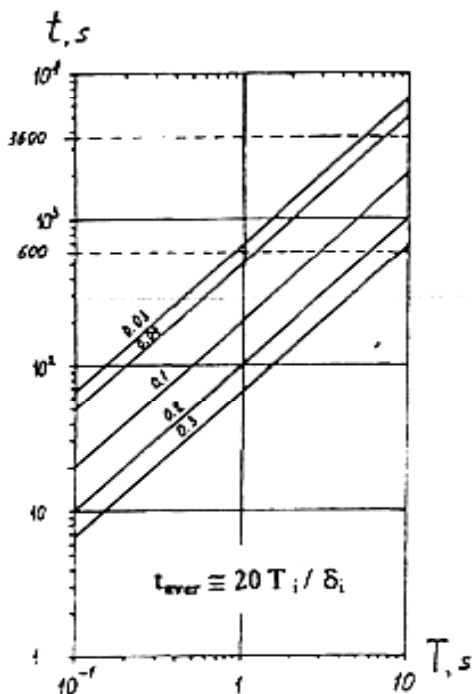
$$n_i = 20 / \delta_i. \quad (4)$$

The structure oscillations of i-tone are characterized by period  $T_i$ . Here, i– tone reflects the most energetically significant mode of oscillations out of the combined spectrum of the structure space natural oscillations. The oscillations of i– tone cause the maximum stressed-deformed condition of the structure. Having the period  $T_i$  and the number of cycles  $n_i$  the formula

$$t_{aver} = n_i T_i \cong 20 \cdot T_i / \delta_i, \quad (5)$$

can be suggested for the interval of the wind flow velocity averaging, which considers the dynamic parameters of the structures. The interval of averaging calculated according to this formula reflects to a great extent the interaction of the structures with the wind pulsations. As it is shown in Fig.2, the higher is the period of the structure oscillations (and the more is its flexibility) the larger is the interval of averaging.

Thus, owing to the graphic (Fig.1) or relation (1) the transition from the interval of averaging  $t_{aver} = 3600s$  or  $t_{aver} = 1s$  to another, arbitrary, determined depending on the dynamic parameters of the structures  $T_i$  and  $\delta_i$  (at  $V = 0$ ), is not difficult. T. Hanxhurst [3] has drawn the attention to the conservatism of the traditional approaches to the choice of the interval of the averaging  $[t_{av}] = 3600s$  as well as  $[t_{av}] = 600s$  in the practice of calculations.



*Fig. 2. The dependence of averaging interval on the structure oscillations period at different levels of the energy dissipation*

## THE AERODYNAMICS AND AEROELASTIC INTERACTION OF THE STRUCTURE FLEXIBLE ELEMENT TANDEM

The structure flexible element tandem is very frequent in different structures. The sphere of their application is various. They are heat exchanger pipes in nuclear reactors, main pipelines, transmission line split phases, cables in cable-stayed bridges. There are lots of research works devoted to the studying of aerodynamic loads and aeroelastic interaction of the flexible element tandem of pipe form. At the same time the variety of neighbouring flexible elements interacting with the wind flow and between each other is not limited by the pipe form. It is also necessary to consider the appearance of new aeroelastic phenomena at the wind flow-around of the pipe flexible element tandem – the galloping in the wake (Fig. 3,4). In this case we may guess which peculiarities of aerodynamics and aeroelastic interaction can be found at the investigation of the tandem response of square, rectangular and other flexible elements of the structures. Thus, we can surely expect chaotic aeroelastic selfoscillations, i.e. the appearance of strange attractors.

The trajectories of the flexible pipe element movement in the tandem, the aerodynamic interference and aeroelastic instability in the wake are described in [4].

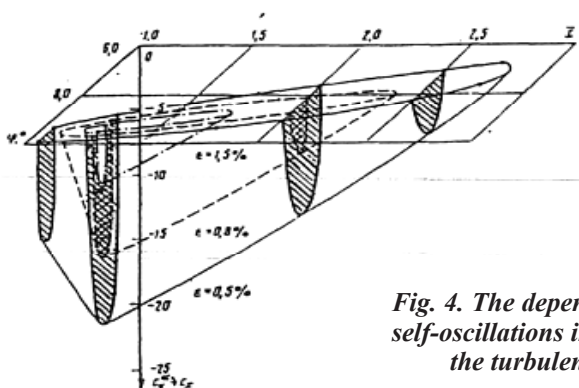
## THE AERODYNAMICS OF THE STRUCTURE ELEMENTS AT ICING

This problem presents an example of unfavourable influence of the interaction of two meteorological phenomena – wind flow and glaze ice-and-sleet accretion – on the durability and reliability of the structures. At all other equal conditions the structure icing deteriorates their wind flow-around:

- the components of wind load increase;
- the critical velocity values of the aeroelastic instability phenomena reduce.



*Fig. 3. The zones of the cylinder instability in the wake at different values of the flow turbulence*



*Fig. 4. The dependence of the galloping self-oscillations intensity in the wake on the turbulence and flow slope*

The main reason for that is connected with the change of the structure element cross-section form.

The formation of the glaze ice-and-sleet accretion on the structure elements of different application, especially on the cables, transmission lines is connected with the settling and freezing of uncooled water drops in the rain medium or in the fog, wet snow, at the water steam sublimation. Depending on the processes of the formation of the accretion, the types of the element icing are divided into groups and subgroups according to the physicogenetic classification of the ground icing, made up by A.D. Zamorsky.

The major factors which influence the formation of the glaze ice-and-sleet accretion are as following:

- the element high level position mark;
- the characteristic dimensions of its cross-section – diameter, height, width;
- the wind velocity and direction;
- the character of the underlying surface – forest, pond, plain, etc.;
- the meteorological conditions – temperature, humidity, precipitation.

The variety of the real forms of the glaze ice-and-sleet accretion based on the long-term observations and the geography of the glaze ice-and-sleet on the territory of the former USSR are presented in the Icing Atlas [5].

The type of the glaze ice-and-sleet accretion depends on the dimensions of the drops and their freezing velocity at the moment of their touch with the structure elements. At the settling of the large drops the freezing runs slowly at the temperature close to  $0^{\circ}\text{C}$ . The large drops are spreading and forming the water film, frozen as the smooth ice settling – glaze ice. As the meteorologists confirm [6], glaze ice appears at temperature  $0^{\circ}\dots-3^{\circ}\text{C}$ . As a rule, this type of accretion is observed on the horizontal and sloping elements. The velocity of the freezing and formation of glaze ice characterizes the form (geometry) of accretion. It found its reflection in the choice of the icing field types at the investigation of the aerodynamics and aeroelasticity of the structure elements at icing [7]. The photos of the models are shown in Fig. 5. The influence of the icing form on the aerodynamic characteristics may be followed on the graphics in Fig. 6. The appearance of the instability of the galloping type may be expected due to the character of the change of the cross aerodynamic force ( $C_y$ ) depending on the angle of attack  $\alpha$  and the existence of the vast zones with the negative gradient  $dC_y/d\alpha$ .



Fig. 5. The general view of the models

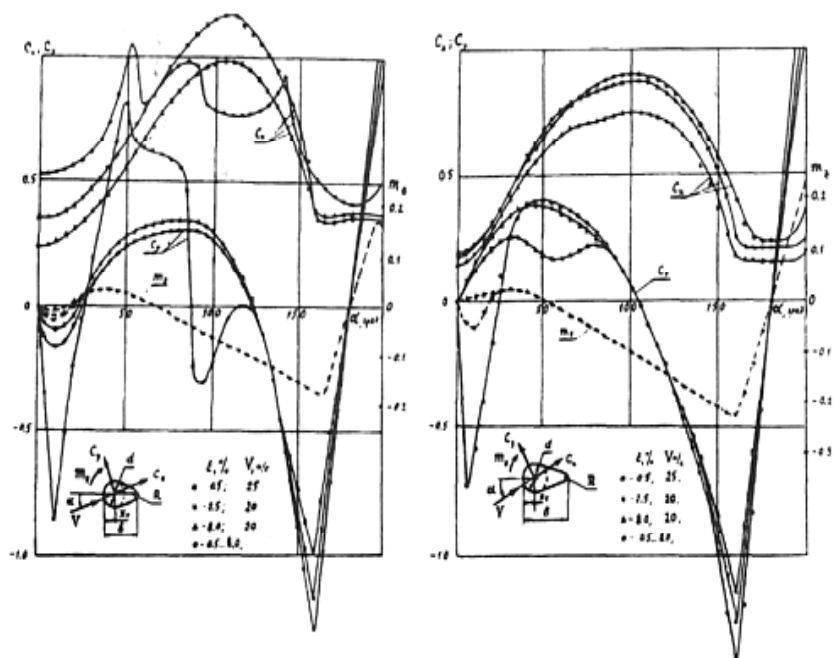


Fig. 6. The aerodynamic characteristics of two models

## THE AERODYNAMICS OF MEMBRANE ROOFINGS

This type of structures may be singled out as a separate group, as their interaction with the wind flow is basically different from all the others. Suspension roofings include proper suspension, cable and membrane roofings. They very successfully entered the system “a human being – nature” and in many cases resemble the natural phenomena. The suspension roofings are very widely spread owing to a number of positive qualities:

- the sharpness of the structure schemes;
- the favourable architectonics of structures;
- the lightness and, as a result, large spans;
- the efficient usage of the durable properties of the structure materials (concrete – for compression, steel – for extension);
- the erection without falsework;
- the insignificant constructive height.

But they are more deformative than the traditional reinforced– concrete and steel structures. As a result they are quite sensitive to the non– uniform distribution of the wind and other meteorological loads. As the interaction with the wind flow the aeroelastic oscillations are excited very easily in them.

The panel flutter of membrane roofings and the multiple increase of the local loads make up the main peculiarity of the interaction of the roofing with the wind flow. Here, the considerable increase of the local wind loads depends on many factors:

- the configuration of the roofing in the plan;
- the type of the index contour;
- the geometrical dimensions;
- the rigidity of the index contour;
- the wind flow direction;
- the existence of the through holes and openings.

The determination of the wind pressure distribution on the upper and lower surface of the suspension roofings (pressure eures) at different angles of attack is connected as a rule with the experimental tests in the wind tunnels. Some of these results are given in [13]. But the types of suspension roofings given in [8] do not cover all the variety of the existing forms. The results of the investigations of the wind pressure eures on the surface of the cylindric membrane roofing of the hangar in Riga Airport (Latvia) with the dimensions 108 x 60 m in the plan are presented as the example. At the angles of flow slipping  $\beta = 45^\circ$  in the zone of maximum vacuum the local value of pressure is  $c = -4,15$  in the case of the closed gates and  $c = -5,0$  in the case of the open gates.

## THE AERODYNAMIC AND AEROELASTIC STRUCTURE MONITORING

In the most generalized meaning the structure monitoring is the observation, analysis and prognostication. Regarding the interaction of the structure with the wind flow monitoring presupposes:

- the meteorological microzoning having the aim to specify the wind loads;

- the meteorological observations during the construction and exploitation of the climate changeability, average and maximum winds, wind rose, average and maximum wind velocity recurrence, atmospheric turbulence;

- the determination of the real dynamic structure characteristics, such as frequencies (periods), modes and corresponding values of the space oscillation logarithmic decrements;

- the studying of the structure response on the real wind effects;

- the evaluation of the effectiveness of the used measures and ways of structure stabilization;

- the evaluation of the structure life in the process of exploitation;

- the elaboration of the recommendations as for the specification of the calculated schemes and the improvement of the calculation methods.

The major aim of monitoring is the diagnostics of the exploitation reliability, durability and safety of the structures. The peculiarities of monitoring reflect the stages of the structure existence: erection, initial period of exploitation, process of long– term exploitation.

*The observation* provides the instrument and visual description of the load parameters and the effects of meteorological character, structure responses generally and their separate elements.

*The analysis* presupposes the comparison of the real parameters of the loads and effects in the real conditions of the structure exploitation with their calculated values. It also concerns the parameters of the structure stress– deformed condition.

*The prognostication* should concern the ecological indications, for example, levels and doses of vibration alongside with the traditional qualities of reliability – effectiveness, safety, calculated durability and maintainability. The experience of aerodynamic and aeroelastic monitoring convincingly shows the high effectiveness of the structure exploitation reliability evaluation by the methods of the dynamic integral diagnostics [4].

At the same time it is necessary to elaborate the common methodology basis of the monitoring of the structures of different types defining the main criteria of diagnostics and the principles of monitoring.

## *References*

1. Simiu, E., Scanlan, KH. (1986). Wind Effects on Structures, 2-nd. John Wiley and Sons.
2. Durst, C.S. (1960). Wind Speeds Over Short Periods of Time. *Meteorol. Mag.*, 89, 181– 186.
3. Hawxhurst, J. (1985). Relationship Between Fastest – Mile and Coincident Extreme Winds Over Larger Durations for Coastal Locations. *NUREG Rep., Nuclear Regulatory Commission*, Washington, D.C.
4. Kazakevitch, M.I. (1977). The Aerodynamics of Bridges. Transport, Moscow.
5. Buchinsky, V.E. (1966). The Atlas of the Transmission Line Icing. Hydrometeoizdat, Leningrad.
6. Zavarina, M.V. (1976). The Structural Climatology. Hydrometeoizdat, Leningrad.
7. Kazakevitch, ML, Graftsky I. (1984). Interaction of Wind with the Ice– Covered Structural Members. *Proc. 12<sup>th</sup> Congress IABSE*. Vancouver, 853– 857.
8. Kazakevitch, M.I., Melashvili, Y.K., Sulaberidze, O.G. (1983). The Aerodynamics of Suspension Roofings. Budfvelnik, Kiev.

## THE ADMISSIBLE FLEXIBILITY OF STRUCTURE ELEMENTS IN THE FLOW\*

The appearance of the aeroelastic instability of the vortex excitation type is possible [1] at the interaction of structure flexible elements with the air (fluid) flow on condition

$$V_{cr} < V_c. \quad (1)$$

This instability is followed by the intensive self-oscillations cross to the flow. Critical velocity  $V_{cr}$ , which causes the vortex excitation aeroelastic self-oscillations, is determined due to the existing formula

$$V_{cr} = \frac{fd}{Sh}, \quad (2)$$

where  $d$  is the diameter or special dimension of the flexible element;  $Sh$  – Strouhal number;  $f$  – natural frequency of element oscillations;  $V_{cr}$  – flow calculated velocity. The inequality

$$V_{cr} > V_c, \quad (3)$$

which is inverse to inequality (1), is adequate to the condition of impossibility of this type of instability appearance. Natural frequencies  $f_j$  of flexible element oscillations of  $j$ -tone are described by means of the expression

$$f_j = \frac{1}{2\pi} \frac{\alpha_j^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m} \left( 1 \pm \frac{N}{N_E} \right)}, \quad (4)$$

where  $m$  – the mass and  $J$  – the element inertia moment are determined by the dependes

$$m = F\rho_0; \quad J = i^2 F; \quad \frac{J}{m} = \frac{i^2}{\rho_0}; \quad (5)$$

$l$ ,  $F$ ,  $i$ ,  $\rho_0$ ,  $E$  – length, cross section area, inertia radius, the element material density and modulus of elasticity, accordingly:  $\alpha_j$  – frequency coefficient, depending on the boundary conditions and serial numbers  $j$  of element oscillations mode;  $N$  – longitudinal force in the bar;  $N_E$  – Euler critical force. The symbol (+) corresponds to the stretching longitudinal forces and symbol (–) – to the compressing one. Now substitute expressions (2), (4) and (5) into inequality (3)

$$V_c < \frac{\alpha_j^2 i d}{2\pi l^2 Sh} \sqrt{\frac{E}{\rho_0} \left( 1 + \frac{N}{N_E} \right)}. \quad (6)$$

---

\* Опубликовано совместно с А.Г. Василенко в Трудах Международной Конференции 2 ЕАСWE, 1998, Прага..

Hence we find the admissible values of the element relative length  $y$ , where the vortex excitation calculation needn't be done:

$$(l/d)^2 < \frac{\alpha_j^2 i}{2\pi d Sh V_c} \sqrt{\frac{E}{\rho_0} \left(1 + \frac{N}{N_E}\right)}. \quad (7)$$

There is the definite connection between the tubular element relative length  $l/d$ , and their flexibility  $\lambda$

$$\lambda = k(l/d), \quad \text{where} \quad k = \mu d/i. \quad (8)$$

as  $\lambda = l_{ef}/i = \mu l/i$ , and  $l_{ef}$  and  $\mu$  – are calculated length and calculated length coefficient, accordingly. Therefore, on the basis (7) and (8) we can also find the maximum admissible values of element flexibility

$$\lambda^2 < \frac{\alpha_j^2 d \mu^2}{2\pi Shi V_c} \sqrt{\frac{E}{\rho_0} \left(1 + \frac{N}{N_E}\right)}. \quad (9)$$

The expressions (7) and (9) for the admissible values of relative length  $l/d$  and structure element flexibility  $\lambda$  can be presented as





$$(l/d) < \frac{A_j}{\sqrt[4]{V_c}} \sqrt[4]{1 \pm \frac{N}{N_E}}; \quad \lambda < \frac{B_j}{\sqrt[4]{V_c}} \sqrt[4]{1 \pm \frac{N}{N_E}}, \quad (10)$$

Provided the following symbols are introduced:

$$A_j = \alpha_j \sqrt{\frac{i}{2\pi d Sh}} \sqrt{\frac{E}{\rho_0}}; \quad B_j = \alpha_j \mu \sqrt{\frac{d}{2\pi Shi}} \sqrt{\frac{E}{\rho_0}} \equiv A_j \mu d/i. \quad (11)$$

The most specific calculated schemes of structure flexible elements and corresponding values of frequency coefficient  $\alpha_j$  for the first tone of oscillations are shown in Table 1.

Table 1: Calculated Schemes of Structure Flexible Elements












Element Calculated Scheme		Frequency coefficient $\alpha_j$	Calculated length coefficient $\mu$
I		1,8751	2,0
II		3,1416	1,0
III		3,9266	0,7
IV		4,7300	0,5

The values of geometrical and aerodynamic parameters  $i/d$ ,  $Sh$ ,  $A_i$ ,  $B_i$  (for structure steel elements  $\sqrt{E/\rho_0}=0,5123475 \cdot 10^4 \text{m/s}$  for the most widely-spread in the engineering types of cross-sections of structure flexible elements are shown in Table 2.

The data in Table 2 allow to draw the family of graphs showing the boundaries of the admissible values of structure element relative length  $l/d$  or flexibility  $\lambda$  in the wide range of calculated scheme types and cross-section forms regarding the really acting longitudinal forces. Here we take only graphs of the admissible value  $l/d$ , boundary dependence on the flow velocity  $v$ , shown in Fig.1. These boundaries are easily transformed into the boundaries of the flexibility  $\lambda$  admissible values by introduction of the factor  $B_i/A_i = \mu d/i$ .

Table 2

**Structure Element Geometrical and Aerodynamic Parameter Values**

Cross-section Form	$i/d$	$Sh$	Calculated scheme Type (Table 1)							
			I		II		III		IV	
			$A_i$	$B_i$	$A_i$	$B_i$	$A_i$	$B_i$	$A_i$	$B_i$
1 	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$	0.2	71	402	119	337	149	295	180	254
2 	0.3	0.145	77	513	129	430	161	376	194	323
3 	0.15	0.105	64	853	108	715	135	626	162	538
4 	0.32	0.12	88	550	148	458	185	400	223	345
5 	0.43	0.145	92	428	154	359	193	314	232	270
6 	0.21	0.145	64	610	108	514	135	450	162	387
7 	$\frac{1}{\sqrt{6}}$	0.15	88	431	148	359	185	314	223	270
8 	0.24	0.12	76	633	127	528	159	462	191	398
9 	0.45	0.137	97	431	162	362	203	316	244	272
10 	0.1	0.13	47	940	79	787	99	688	119	593
11 	0.8	0.15	124	310	207	259	259	227	312	195

If it is impossible to satisfy the conditions (7) and (9) or, correspondingly, (10), it is necessary to supply the vortex excitation calculation with the

fatigue control according to formula

$$\sigma_{max} \leq \alpha R_v \gamma_v, \quad (12)$$

where parameter  $\alpha$  depends on the calculated number of load cycles,  $R_v$  – is the calculated fatigue resistance,  $\gamma_v$  – is the coefficient depending on the type of the stressed condition and parameter of the aerodynamic stress asymmetry. Thus, at the calculated durability 20 years the number of cycles  $n = 3.9 \cdot 10^6$  is recommended. The corresponding value of parameter  $\alpha$  is  $\alpha = 0.77$ . The necessity of the structure flexible element fatigue life calculation (estimation) is not less important both during design reconstruction. This estimation can be done according to formula, suggested by the author in [1]

$$t = nT_j / p; \text{ sec}, \quad (13)$$

where  $n$  – is the load cycle number depending on the element importance ( $n = (2 \dots 4) \cdot 10^6$ );  $T_j = 1/f_j$  – is the element natural oscillation period (it is equal to the vortex excitation aeroelastic self-oscillation period);  $p$  – possibility of the most (favourable flow parameter values:  $p = p_N p_V$ ;  $p_N$  – repetition of the wind directions, normal (perpendicular) to the element longitudinal axis;  $p_V$  – repetition of the vortex excitation critical velocity values (2).

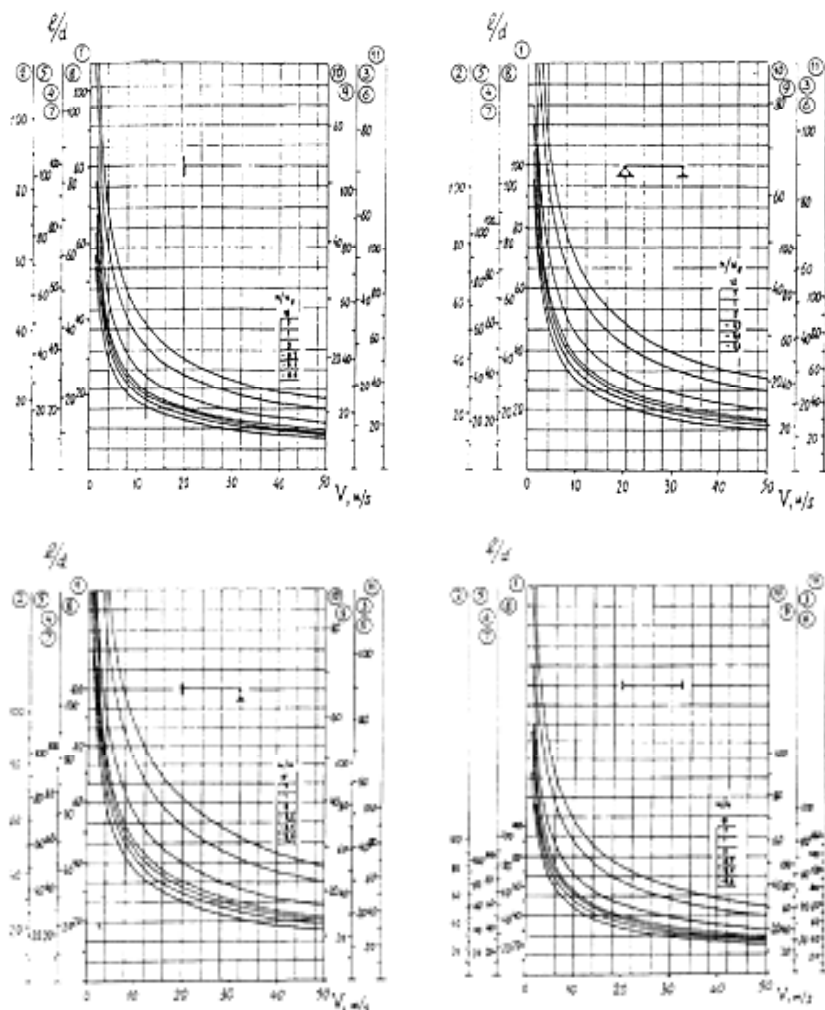
Parameters, entering formula (13), are specified according to the exploitation technological requirements  $n$  and the data of long-term meteorological observations  $p_N$  and  $p_V$ , which characterize the climatic peculiarities of the construction site (microzoning).

### **An Example.**

The tower tubular element has the period of natural oscillations  $T = 0.33$  sec. The vortex excitation critical velocity, calculated according to formula (2) is  $V_{cr} = 3$  m/sec. The area of vortex excitation aeroelastic self-oscillation synchronization (1) is characterized by the interval of the flow velocity change  $V = 2.7 \dots 3.3$  m/sec. The analysis of meteorological data allowed to fix:  $p_N = 0.11$ ;  $p_V = 0.015$ . We take basis cycle number  $n = 2 \cdot 10^6$ . Consequently, due to formula (13), we find

$$t = 2 \cdot 10^6 \times 0.33 / (0.11 \times 0.015) = 12.8 \text{ years.}$$

This estimation is proved by the results of the existing tower structure inspection. After 14 years of exploitation the fatigue cracks in some joints were found out.



**Fig. 1.** The dependence of relative length  $l/d$  on the wind flow velocity  $V$  for the four types of element calculated schemes (table 1) with different types of cross-section. The scales along the ordinate axis are numbered according to cross-section form numeration in table 2

### References

1. Kazakevitch M.I. The Bridge aerodynamics. – Moscow: Transport, 1981.

## 1. Introduction.

The formation of local suction zones on the roofing surface with a very high pressure intensity is a distinguishing peculiarity of the membrane roofing structure wind flow. This peculiarity was paid attention to in Ref. [1]. The sensitivity of large sized membrane roofs to the non-uniformity of the wind pressure distribution over the surface requires special attention in order to ensure structural stability.

The roof for the hangar at Riga Airport in the form of a cylindrical membrane roof of 108 x 60 m (Fig. 1), was chosen due to the following factors:

- (1) low cost;
- (2) low material consumption;
- (3) technological effectiveness;
- (4) the possibility of covering a large area without intermediate supports.

The design of the hangar with a cylindrical membrane roof was worked out at the Melnikov Institute, Moscow. The presence of the three-panel hangar door, suspending an overhead truss of 108 m span, introduced the possibility of wind pressure acting both on the upper and lower surfaces of the membrane roof. The membrane roof erection was realized by means of separate steel bands of 65 m length and 6 m width. These two factors determined the programme of the experimental investigations of the roofing model in the wind tunnel.

## 2. Model description.

The roof models were made on a scale of 1 : 250 and intended for the determination of the wind pressure distribution along the upper and lower roof surfaces in the wind tunnel and also for the visualization of the wind flow over the roof surface (Fig. 2a).

To obtain the local pressure values at different points on the roof surface, each half of every model was instrumented with pressure taps at 62 points (Fig. 2b), and the erection strip model at 31 points. Here, to obtain the pressure distribution along the upper surface, the roof model was pressure tapped from the bottom, and to obtain it along the lower surface it was pressure tapped from the top. The pressure tap holes of

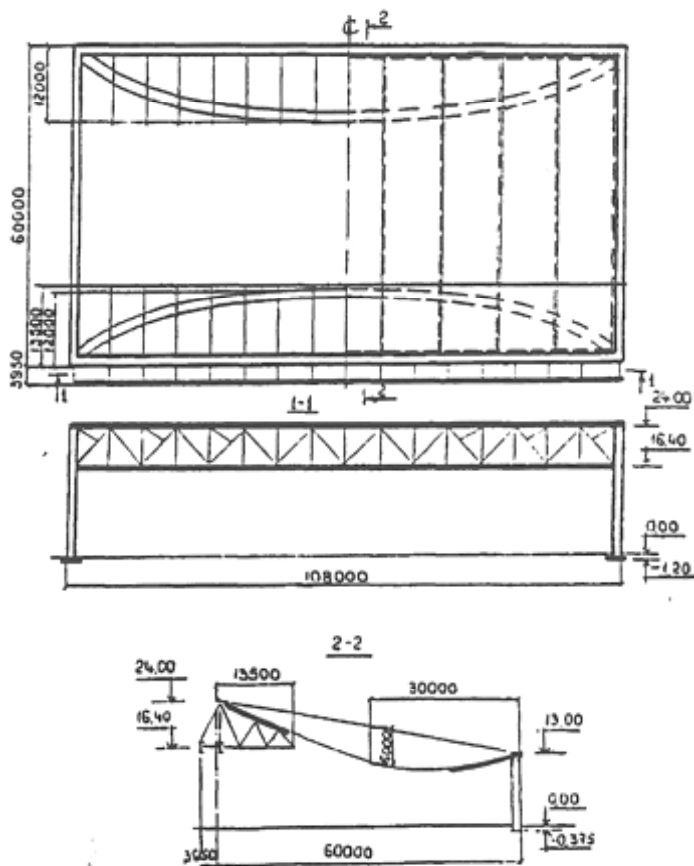
---

\*Опубликовано в ж-ле «Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics», № 77, 78, 1998, ELSEVIER, Нидерланды, а также в ж-ле «Изв. Ан Латв. ССР», № 6, 1987, Рига.

1 mm diameter were situated in such a way that the maximum density of the pressure values should be in the presupposed zones of maximum suction (Fig. 2). Each of the taps was connected by tubing to a multiple manometer. The models were installed on the rotating circular screen. It allowed to model the slip angle of the wind flow in the range  $\beta = 0$  to  $180^\circ$  with the pitch  $\Delta\beta = 22.5^\circ$ . The flow velocity in the wind tunnel was

$$V = 20 - 25 \text{ m/s.}$$

The turbulence of the flow was generated by a grid which was placed at the wind tunnel nozzle section. The grid, made of a 20 mm diameter bar with 90 x 90 mm cells guaranteed a flow turbulence intensity  $\varepsilon = 8\%$ . The methods for carrying out these tests are described in detail in Ref. [2].



*Fig. 1. The hangar structural scheme*

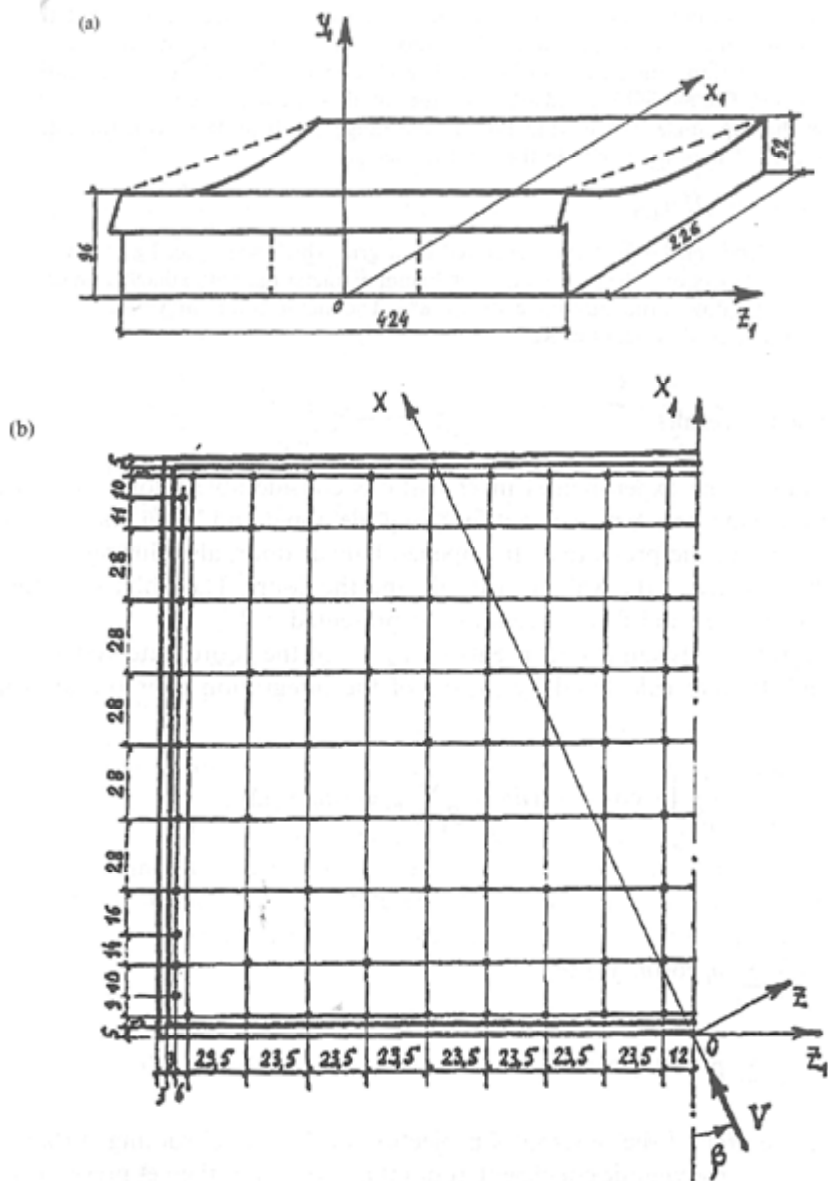


Fig. 2. The hangar model (a) and the pressure tap locations (b) of the membrane surface

### 3. Experimental results.

As a result of the experimental investigations considerable information was obtained on the wind pressure distribution along the upper and lower roofing surfaces, the total values of the pressure at the opened hangar door, also during the erection stage in the absence of the wall «guardrail» and the doors. The isobars-for the three most characteristic wind flow directions are presented in Fig. 3.

The integral aerodynamic coefficients  $c_1, c_2, c_3$ , in the coordinate system  $ox, y, z$  (Figs. 2 and 4) were calculated by means of the integration over the appropriate surfaces:

$$C_1 = \frac{X_1}{qS} = \frac{1}{qS} \int p \cos(n, x_1) d\sigma = \frac{1}{S} \sum_{i=1}^{124} \bar{p}_i \cos(n_i, x_1) \Delta\sigma_i, \quad (1)$$

By analogy

$$C_2 = \frac{1}{S} \sum_{i=1}^{124} \bar{p}_i \cos(n_i, y_1) \Delta\sigma_i, \quad (2)$$

$$C_3 = \frac{1}{S} \sum_{i=1}^{124} \bar{p}_i \cos(n_i, z_1) \Delta\sigma_i, \quad (3)$$

where  $S$  is the area of the horizontal projection of the model roofing surface,  $p_i$  the pressure mean aerodynamic coefficient at point  $i$ :  $\bar{p}_i = p_i/q$ ,  $p_i$  the net pressure at point  $i$ ,  $q$  the reference dynamic wind pressure:  $q = \rho V^2/2$ ,  $\rho$  the air flow density,  $V$  the velocity of the undisturbed flow,  $\Delta\sigma_i$  the area of the roof element around point  $i$ , and  $n_i$  the normal to the surface at point  $i$ .

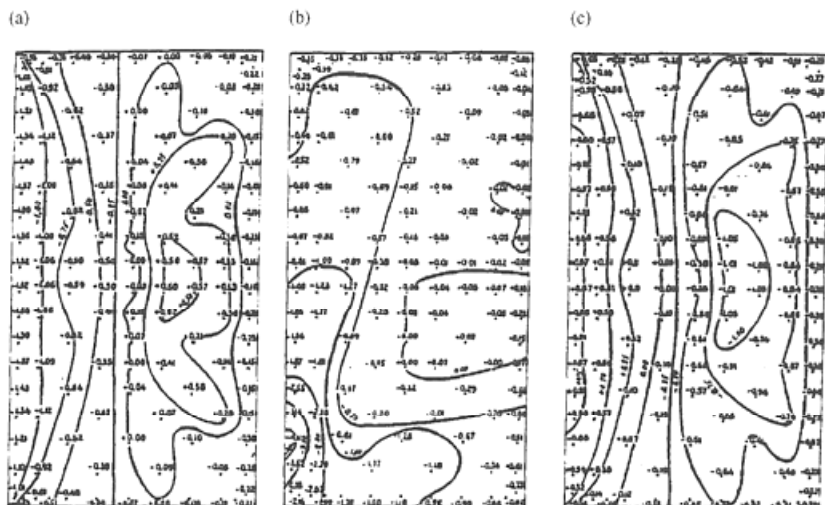
The aerodynamic coefficients in the system of coordinates  $oxyz$  (Figs. 2 and 4) were determined by means of the relations:

$$C_x = C_1 \cos \beta; \quad C_y = C_2; \quad C_z = C_3 \sin \beta. \quad (4)$$

The distributions of the pressure and integral aerodynamic coefficients are shown in Figs. 4 and 5, respectively.

The following rule of signs was taken to represent the local coefficients of pressure  $p_i$  in Figs. 3 and 4: (+) pressure on the upper and lower surfaces; (−) suction.

For the net values the sign is taken as applied to the upper surface. Along with the instrumental measurements of the aerodynamic forces visual investigations of the model upper surface flow, for different flow directions were carried out. The visualization of the flows was realized by means of India ink drops put on the model surface.



**Fig. 3. Isobars on the membrane upper surface for three most characteristic wind flow directions: (a)  $\beta=0^\circ$ ; (b)  $\beta=45^\circ$ ; (c)  $\beta=180^\circ$**

#### 4. The analysis of the experimental results.

The following conclusions were drawn from the experimental results.

1. When the gap under the visor exists, the door position does not influence the aerodynamics, due to the existing flow through the gap. Those are the areas of considerable suction along the surface of the roofing, which are characterized by the integral aerodynamic lift coefficient  $C_y = 1.4$ . The stagnation pressure inside the hangar is characterized by the corresponding coefficient value  $|C_{y^*max}| = 0.85$ .

The pressure distribution along the lower surface is generally uniform and depends only on the flow direction. The dependence of the average pressure coefficient on the surface in the flow direction is given in Table 1.

2. At sufficient pressurization of the hangar, when the excessive pressure inside the hangar is zero, the pressure distribution along the roofing upper surface can be presumed to be calculated.

3. Maximum local pressure is discovered at  $\beta = 45^\circ$  and consists of  $|\bar{p}| = 0.86$  along the lower surface,  $|\bar{p}| = 4.11$  along the upper surface; the total value is  $|\bar{p}| = 4.97$ .

4. The flow turbulence in the wind tunnel reduces the pressure intensity except in the range of slip angles  $-30^\circ \leq \beta \leq 30^\circ$ . In the given slip angle range the turbulence is ineffective due to the flow excitation force during its separation from the front contour beam.

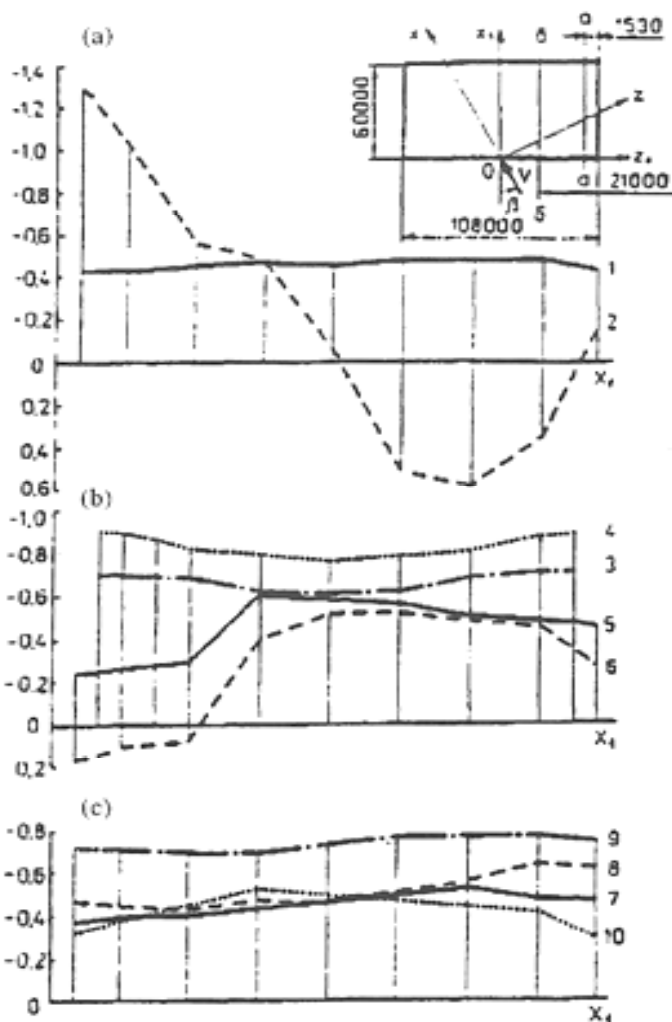


Fig. 4. Pressure distribution on the membrane roofing surface: (a) the stage of erection (in the absence of the wall guardrail and hangar door),  $\beta=0$ ;  $\varepsilon=0.5\%$ ; 1 – on the upper surface, 2 – the net values on the upper and lower surface; (b), (c) the completed stage (on the upper surface); 3, 4 – in section (a); 3 –  $\beta=90$ ,  $\varepsilon=0.5\%$ ; 4 –  $\beta=90$ ,  $\varepsilon=8\%$ ; 5 –  $\beta=180$ ,  $\varepsilon=0.5\%$ ; 6 –  $\beta=180$ ,  $\varepsilon=8\%$ ; 7 –  $\beta=0$ ,  $\varepsilon=0.5\%$ ; 8 –  $\beta=0$ ,  $\varepsilon=8\%$ ; 9, 10 – in section (b); 9 –  $\beta=90$ ,  $\varepsilon=0.5\%$ ; 10 –  $\beta=90$ ,  $\varepsilon=8\%$

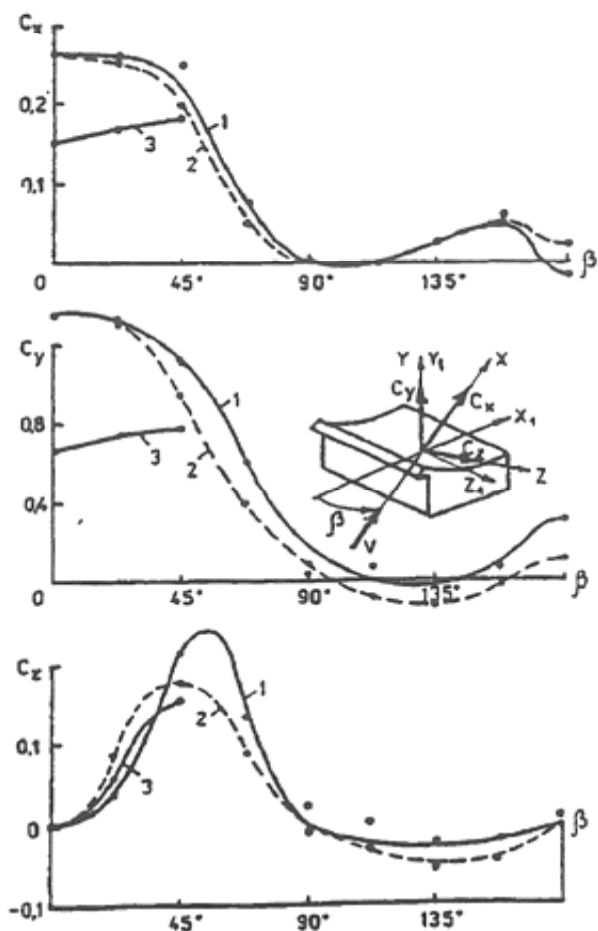


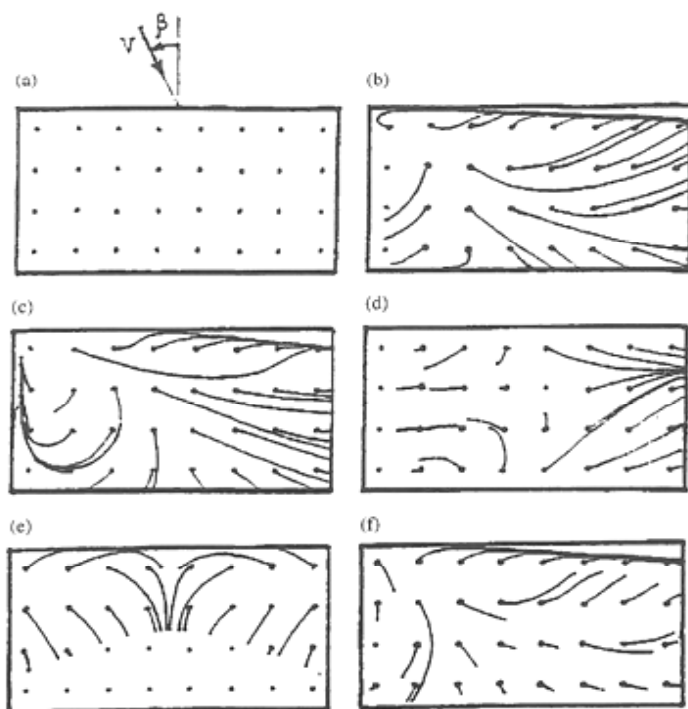
Fig. 5. Integral values of the aerodynamic coefficients ( $V=25$  m/s):  
 1 – the service stage,  $\epsilon=0.5\%$ ; 2 – the service stage,  $\epsilon=8\%$ ;  
 3 – the erection stage,  $\epsilon=0.5\%$

Table 1

Values of the pressure average coefficient

$\epsilon$ (%)	$\beta$ (deg)								
	0	22.5	45	67.5	90	112.5	135	157.5	180
0.5	0.88	0.82	0.53	0.14	-0.28	-0.22	-0.20	-0.19	-0.16
8	0.83	0.85	0.53	0.12	-0.28	-0.28	-0.20	-0.17	-0.18

5. As is known, the turbulence scale, corresponding to the structure height is approximately  $L_{ux} = 50$  m. Therefore, from Ref. [3], using the relation  $L_{ux}/h = 1.8-2.0$ , the membrane roofing flow is self-modelled as far as the turbulence scale is concerned.



**Fig. 6. Visualization of the membrane upper surface flow: (a)  $\beta=0$  and  $\beta=22.5^\circ$ ; (b)  $\beta=45^\circ$ ; (c)  $\beta=67.5^\circ$ ; (d)  $\beta=90^\circ$ ; (e)  $\beta=180^\circ$ ; (f)  $\beta=45^\circ$  ( $\epsilon=8\%$ )**

6. The of the roof flow reflects sufficiently the interaction of the flow in the boundary layer with the roof surface:

- at the slip angle  $\beta = 0^\circ$  and  $\beta = 22.5^\circ$  the flow separates from the roof front edge, without interacting with the roof surface (Fig. 6a);
- at  $\beta = 45^\circ$  the most intense interaction of the flow and roof surface is observed (Fig. 6b). The flow accelerates (except for the areas adjoining the sharp edges) due to the smooth bending of the roofing cylindric surface. The flow is divided into two directions. The shapes of the India ink traces and their spreading show the non-separated character of the flow in the boundary layer. The directions of the flow lines can be determined by

means of trace narrowing;

- at  $\beta = 67.5^\circ$  a rotating flow is formed along the roof near the side edge on its surface (Fig. 6c);
- at  $\beta = 90^\circ$  the spreading character of the ink traces shows the flow re-attachment and the weak flow interaction in the boundary layer with the surface (Fig. 6d);
- at  $\beta = 180^\circ$  there is a local separation area and an adjoining area of flow «reattachment» (Fig. 6e);
- the flow turbulization at  $\beta = 45^\circ$  ( $\varepsilon = 8\%$ ) promotes the formation of the local zones of separation (Fig. 6f).

(7) The character of the roof flow in the erection stage in the flow direction  $\beta = 0^\circ$  is as follows: along the upper surface the pressure is distributed uniformly and changes in the range 0.5-0.55; along the lower surface (on the windward side) - there is an area of the active pressure; on the leeward side - an area of suction. The distribution of net pressure reflects the interaction of the pressures along the upper and lower membrane roofing surfaces in the absence of the wall guardrail.

The areas of the suction at  $\beta = 45^\circ$  were again present, where the intensity of the net pressure reached an extremely large value:

$$|\bar{p}_{\max}| = 5.23.$$

The existence of vast zones of negative pressure (suction) on the membrane roof outer surface in its medium part required the elaboration of some special measures for the membrane roof in the wind flow, preventing the possibility of the membrane «buckling». It can be achieved by means of both traditional, structural methods and original, aerodynamic ones.

The structural methods include such measures as: loading the membrane roof with reinforced-concrete plates or concrete blocks with further control of the membrane supporting power; setting of additional inclined or vertical guys in definite places. Structural method of stabilization was used.

## **5. Methods of calculation of the wind loads.**

The methods of calculation of wind loads include the following:

1. the stressed-deformed condition of the membrane roofing as a result of the wind effect is determined by means of the membrane loading with the wind pressure coefficients;
2. the supporting structures of the membrane roof are calculated with the help of the integral aerodynamic coefficients in the correlated coordinate system, calculated by means of the integration over the membrane surface;
3. the membrane roof fastening to the framework is calculated based

on the maximum local pressure of the wind  $|p_{\max}| \approx 5.0$ ;

4. the hangar wall guardrail is calculated using traditional methods;

5. the control of the membrane roofing local stability is performed on the basis of the local wind pressure coefficients.

## 6. Calculation methods of the membrane system natural dynamic characteristics.

The approximate dynamic calculation of membrane roofs (Fig. 7) can be based on the complete Vlasov equations for the stressed-deformed condition at the space frame [4]. In Ref. [4], the general formula of the natural frequencies is given by

$$m_0 \omega_{mn}^2 = \frac{Eh^3 \pi^4}{12(1-\nu^2)} \left[ \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right]^2 + Eh \frac{[k_2(m/a)^2 + k_1(n/b)^2]^2}{[(m/a)^2 + (n/b)^2]^2} + \frac{C}{[(m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2]^2} + N_1 \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 + N_2 \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2, \quad (5)$$

where  $\omega_{mn}$  is the natural frequency due to  $mn$ -mode of oscillation,  $E$  is the modulus of elasticity of elongation,  $\nu$  is the Poisson ratio,  $m_0$  is the mass of the unit area [ $1 \text{ m}^2$ ] of the membrane,  $m_0 = \rho h$ ,  $\rho$  is the mass density of the membrane material,  $\rho = \gamma/g$ ,  $\gamma$  is the membrane material density,  $h$  is the membrane thickness (m),  $k_1$  is the membrane curvature,  $k_1 = 1/R_1$ ,  $R_1$  is the membrane curvature radius in the non-deformed condition (Fig. 7),  $C$  is the elastic foundation coefficient,  $a$  is the membrane dimension along  $ox$  axis,  $b$  is the membrane dimension along  $oy$  axis,  $N_1$  is the distributed normal force along the  $ox$  axis of the contour, and  $N_2$  is the distributed normal force along the  $oy$  axis of the contour.

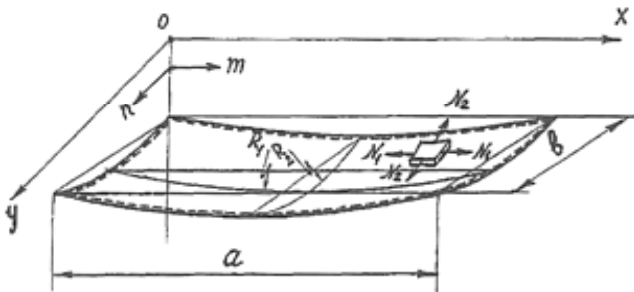


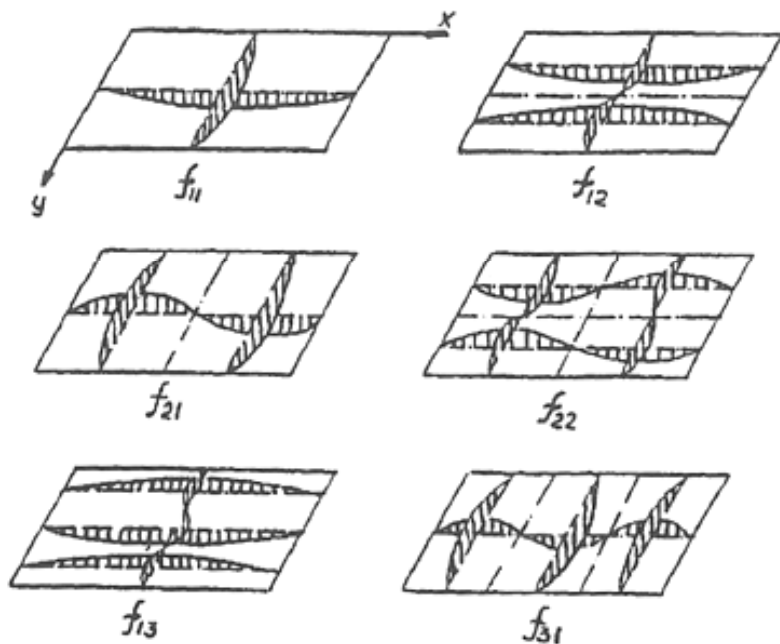
Fig. 7. Scheme for the dynamic calculation of the membrane roofing

Formula (5) takes into consideration the additional masses on the roofing surface, such as additional loads, snow, technological equipment, etc. In this case the equivalent mass  $m_{eq}$  is

$$m_{eq} = m_0 + p/g, \quad (6)$$

where  $p$  is the weight of 1 m<sup>2</sup> of the load, snow, etc. of the additional masses. For sloping flexible membranes formula (5) may be considerably simplified. In particular, the first three terms are far less than the latter two terms and the formula may be reduced to

$$m_0 \omega_{mn}^2 \cong N_1 (m\pi/a)^2 + N_2 (n\pi/b)^2. \quad (7)$$



**Fig. 8. Diagrammatic representation of the first six modes of the cylindrical membrane roof oscillations**

Both formulae given here are correct for a hinged contour, which is appropriate for the real membrane roofings (Fig. 8). Timoshenko gave a formula for the membrane natural frequency determination analogous to Eq. (7).

In spite of the simplicity of formula (7), the determination of the normal forces  $N_i$  for the rectangular plan membrane entails some uncertainty. In this case the distribution of the normal forces along the contour is non-uniform and the operation of the membrane itself is non-uniform also. As is known, zones of increased stresses exist at the roofing corners. These influence the static deformation in the mid-zone and the membrane roof oscillation modes. The non-uniformity of the normal forces along the contour also affects large zones where there are considerably reduced values of stress near the contour. The existing connection between the membrane roofing static deformations and natural frequencies is confirmed at least for the lowest oscillation mode in Ref. [5]. In Ref. [5] methods of frequency determination regarding the membrane configuration are suggested. As the highest estimate of the natural oscillation period due to the first mode the formula

$$T_{11} \leq 2\sqrt{g_{\max}} \quad (8)$$

is given, where  $g_{\max}$  is the maximum value of the flexible deflection due to the force equal to the weight (along the oscillation direction).

*Table 2*

***The membrane oscillation natural frequency values***

Oscillation mode	Oscillation frequency (Hz)			
	Calculated values		Experimental values	
	Model	Real structure	Model	Real structure
$f_{11} (m = 1; n = 1)$	1.77/4.55	0.354/0.91	4.9	0.98
$f_{12} (m = 1; n = 2)$	2.64	0.528	—	—
$f_{22} (m = 2; n = 2)$	3.53	0.706	6.5	1.3
$f_{13} (m = 1; n = 3)$	3.65	0.730	7.35	1.47
$f_{21} (m = 2; n = 1)$	2.93	0.586	9.35	1.87
$f_{31} (m = 3; n = 1)$	4.18	0.836	12.35	2.47

Thus, the approximate estimation of the membrane natural frequency sequence by the analytical method is connected with the analysis of the influence of the diagrams of the normal force on the contour, which change due to the law of «uniform distribution plus the distribution along the square parabola». Such a distribution of the normal forces along the contour has not yet been discussed and requires investigation. The alternative method is connected with the experimental determination of the real structure of the normal force distribution along the contour and the estimation of the

membrane natural frequency for the maximum value  $N_1$  or through use of the data for the membrane roofing static deformations at a given load and their connection with the natural frequency (according to Illenko [5]). Therefore, the local dynamic tests together with the elaboration of the membrane roofing dynamic characteristics give reliable estimation of the natural frequency from results of both static and dynamic operation of the structure.

## **7. Experimental determination of the dynamic characteristics.**

A model with maximum possible similarity to the geometry and load was made on a scale of 1:25 from 0.12 mm steel. It reproduces the rigid and elastic properties of the real membrane roofing and has in-plan dimensions of 4320 x 2400 mm. The structural scheme of the hangar model represents the real structure reliably (Fig. 1). For instance, it contains the curvilinear longitudinal girders, the above-door truss with the portal columns along three sides of the hangar building, joined along the membrane supporting contour with the truss by means of continuous beams. The membrane with gusset plates attached by high-strength bolts is placed on the model supporting contour elements. Two methods of membrane oscillation excitation were used:

- (i) impulsive excitation (dropping a load), and
- (ii) forced vibration.

The experimental investigations were carried out at the Dnepropetrovsk Institute of Steel Constructions in accordance with a program designed and executed by the author, Z.A. Shulman, I.Z. Shulman, V.J. Stoljar and E.A. Neiman. The membrane oscillation frequencies, modes and logarithmic decrements were determined in the process of model dynamic testings. The results of the experiments and the calculated values are given in Table 2 [6]. The calculated frequency values given in the denominator were obtained according to formula (8), and the rest according to formula (7). Therefore, the determination of the membrane oscillation natural frequencies according to the maximum values of the forces in the membrane  $N_1$  and  $N_2$  (7) gives considerably reduced results. This conclusion supports the dynamic calculations based on the membrane roofing displacements.

The membrane natural frequency scale, proceeding from the adopted scales of geometry, load, forces, stresses, displacements of Poisson's ratio, was 5:1.

## *References*

1. M.I. Kazakevitch, Y.K. Melashvili, O.G. Sulaberidze, 1983, Aerodynamics of Suspension Roofings, Budivelnik, Kiev, 104 pp. (Arkady, Warszawa, 1988, 96 pp.).
2. M.I. Kazakevitch, I.Y. Grafsky, A.G. Vasilenko, Wind loads on the hangar cylindric membrane roofing, Proc. Latvia Acad. Sci. 6 (479) (1987) 116-120.
3. J. Courchesne, A. Laneville. An experimental evaluation of drag coefficient for rectangular cylinders exposed to grid turbulence, J. Fluid Eng. (December 1982).
4. V.S. Vlasov, 1949, General Shell Theory and Its Application Technics, GITTL, Moscow, 784 pp.
5. K.N. Illenko, L.N. Pokrovsky, S.S. Sidnev, The determination of the membrane system natural frequency period, Eng. Mech. Struct. Des. 2 (1988), 51-53.
6. M.I. Kazakevitch, V.Y. Malov, V.J. Stoljar et al., The dynamic tests of the membrane roofing model, Melnikov Institute Proc., Moscow, 1990, pp. 97-112.

# THE INTERACTION OF WIND WITH THE ICE-COVERED STRUCTURAL ELEMENTS\*

## 1. Introduction.

This problem presents the most strike example of unfavourable influence of the interaction of two meteorological phenomena – wind flow and glare ice-and-sleet accretion – on the durability and reliability of the structures.

At all other equal conditions the structure icing deteriorates their wind flow-around:

- the components of wind load increase;
- the values of the critical velocity of the aeroelastic instability phenomena reduce. Its major reason is connected with the change of the structure element cross-section form.

–

## 2. The Formation of the Glaze Ice-and-Sleet Accretion.

The formation of the glaze ice-and-sleet accretion on the structure elements of different application, especially on the cable, transmission lines is connected with the setting and freezing of supercooled water drops in the rain medium or in the fog, wet snow at the water stream sublimation [I]. Depending on the processes of the accretion formation, the types of the element icing are divided into groups and subgroups according to the physico-genetic classification of the ground icing made up by A.D. Zamorsky (see Table 1).

The major factors, which influence the formation of the glaze ice-and-sleet accretion, are the following:

- the element high level position mark;
- the characteristic dimensions of its cross-section - diameter, height, width;
- the wind velocity and direction;
- the character of the underlying surface – forest, pond, plain, etc.;
- the meteorological conditions – temperature, humidity, precipitation.

---

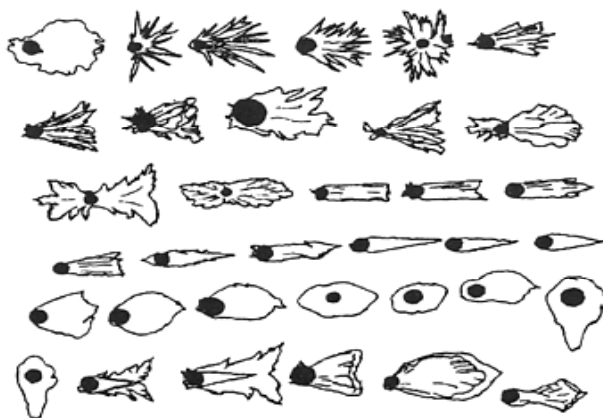
\*Опубликовано совместно с И.Ю. Графским и А.Г. Василенко в Трудах Международной Конференции « Atmospheric Icing of Structures» IWAIS, 1998, Рейкьявик, а также в Трудах 12 Конгресса IABSE, 1984, Ванкувер.

Table 1

*Classification of Ground Icing*

Group	Process of ground icing formation	The conditions of the process	Type of icing
I.a	Water steam sublimation – water steam transforms directly into ice, escaping the stage of water	Steam sublimation into ice	Rime; sometimes also crystal sleet
I.b		The same, at fog	Crystal sleet
II.a	Crystallization of the supercooled water - because of the setting and freezing of the supercooled water drops	Freezing of fog drops	Granulated sleet
II. b		Freezing of drizzle and rain drops	Glaze ice
III.a	Crystallization of the unsuper-cooled water – at the setting and freezing of unsuper-cooled water and wet snow	Freezing of rain or melted water	Frozen water
III.b		Freezing of wet snow	Frozen snow settling (icing fields)

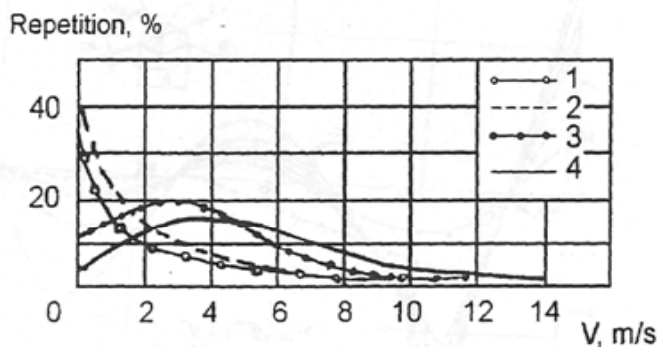
The variety of the real forms of the glaze ice-and-sleet accretion based on the long-term observations and also the geography of the glaze ice and sleet on the territory of the Commonwealth Independent States is fully presented in the Icing Atlas [2]. The most characteristic forms are presented in Fig. 1.



**Fig. 1. The characteristic forms of the glaze ice-and-sleet accretion on the structure round elements**

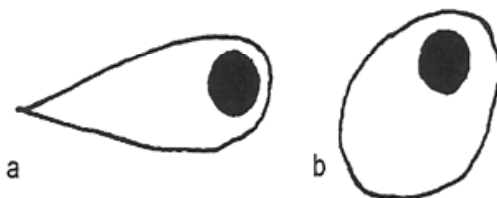
The type of the glaze ice-and-sleet accretion depends on the dimensions of the drops and their freezing velocity at the moment of their touch with the structure elements and also on their space orientation and closeness of the water reservoirs. At the settling of the large drops the freezing runs slowly at the temperature close to  $0^{\circ}\text{C}$ . The large drops are spreading and forming the water film, frozen as smooth ice settling – glaze ice. As the meteorologists confirm [7], glaze ice appears at temperature  $0^{\circ}\dots-3^{\circ}\text{C}$ . As a rule, this type of settling is observed on the horizontal and sloping elements.

The influence of the wind velocity on the repetition of the accretion formation of different types is shown in Fig.2.



**Fig. 2. The repletion of the glaze ice-and-sleet accretion formation of different types (see Table 1): 1 – rime, 2 – crystal sleet, 3 – granulated sleet, 4 – glaze ice**

The investigations shown that the metal on the lines and its surface condition (corrosion) doesn't influence the dimension and weight of the settled ice. The form of the glaze ice-and-sleet accretion at the icing of the lines depends considerably on the oscillation amplitudes in the wind flow, as it is shown in Fig.3.



**Fig. 3. The cross-section of the ice-covered line: a – at the fastening place; b – in the centre of the span**

### 3. The Selection of the Models.

3.1. The analysis of the glaze ice-and-sleet accretion form on the structure elements allowed to choose four the most characteristic types of the icing field models on the basis their generalization [8]. These models differ in geometrical dimensions (the relative elongation of the cross-section form) and in the surface structure. These qualities of the models are conditioned by the physical processes of the glaze ice-and-sleet accretion formation. The form (geometry) of the accretion is characterized by the velocity of the glaze ice freezing and formation. It is reflected in the dimensions of three first models. The fourth model corresponds to the accretion formation of the sleet type at the freezing of small drops without their spreading. The air bubbles remain between the freezing ice-drops, therefore the sleet surface is rough with 'separate bulges and grooves. Also the glaze ice accretion forming at the sticking of wet snow have the same surface texture. These types of accretion are characteristic not only for the horizontal or sloping,

The models are made of foam plastic and covered with nitro-cellulose enamel. Their geometrical parameters are given in Table 2.

Table 2

*The Geometrical Parameters of the Models*

№ of models	Chord $b$ , mm	Cross dimension, $d$ , mm	Centre position, $X_p$ , mm	Characteristic of the section elongation, $\bar{c}=d/b$	Lower edge radius, $R$ , mm
1	62,5	50	25	0,80	16
2	75,0	50	25	0,67	9
3	110,0	52	26	0,47	6
4	120,0	46	30	0,38	2

### 4. The Experimental Investigations.

#### 4.1. The Aerodynamics Loads.

The aerodynamic drag coefficient  $c_x$ , lift coefficient  $C_y$  and longitudinal moment  $m_z$  were received by the weight method by means of the measuring of the corresponding aerodynamic forces  $X$ ,  $Y$ ,  $M$ , on the three-component tensometric balance:

$$c_x = \frac{X}{qS}; \quad c_y = \frac{Y}{qS}; \quad m_z = \frac{M_z}{qSb},$$

where  $q$  - is the velocity head,  $q = \rho V^2/2$ ;  $S$  - characteristic model area,  $S = lb$ ;  $b$  - model chord;  $\rho$  - air tightness. The model wind tunnel tests were

carried out at the flow velocities  $V = 10...40\text{m/sec}$ . The corresponding Reynolds numbers are  $Re = (0,4...2,6)10^6$ . The angle of attack changed in the range  $\alpha = 0... 180^\circ$ , and the turbulence intensity –  $\varepsilon = 0,5...8\%$  .

#### 4.2. The Influence of the Flow Turbulence.

To receive the aerodynamic characteristics maximum close to the real conditions of the structure element flow-around by the atmospheric ground turbulent flow, the air flow in the wind tunnel working section was turbulized by means of special nets with the cells of different dimensions and different diameters of the wire. These nets were set up in the wind tunnel nozzle section. The degree of the flow turbulence is averaged after the measurements by means of the hot-wire anemometer longitudinally and transverse to the flow in the model location area at least in 10... 12 points. The parameters of the turbulating nets are given in Table 3.

Table 3

*The Parameters of Turbulating Nets*

Cell dimensions, mm	60x60	30x30	60x60	50x50	90x90;
Wire (bar) diameter, mm	0,5	0,5	6	10	20
Flow turbulence degree $\varepsilon$ , %	0,8	1,5	2,5	6,0	8,0

#### 4.3. The Experimental Results

The results of the experimental investigations of the models in the wind tunnel are presented in. Fig.4.

These models turned out to be the most sensitive to the, air flow effect; it is confirmed by the character of the lift force change with the increase of the angle of attack.

Three regions of the angles of attack  $0 < \alpha_l < 15^\circ$ ,  $85 < \alpha_s < 95^\circ$  and  $120 < \alpha_j < 160^\circ$  were discovered, where the negative gradient  $\dot{C}_y^y = dc_y / d\alpha$  surpasses by far the drag coefficient.

### 5. Conclusions.

The analysis of the wind tunnel test results of all the models made possible to come to the following conclusions:

– there are three major regions of angles of attack, where the appearance of the aeroelastic instability according to Den-Gartog (self-oscillations of galloping type) is possible;

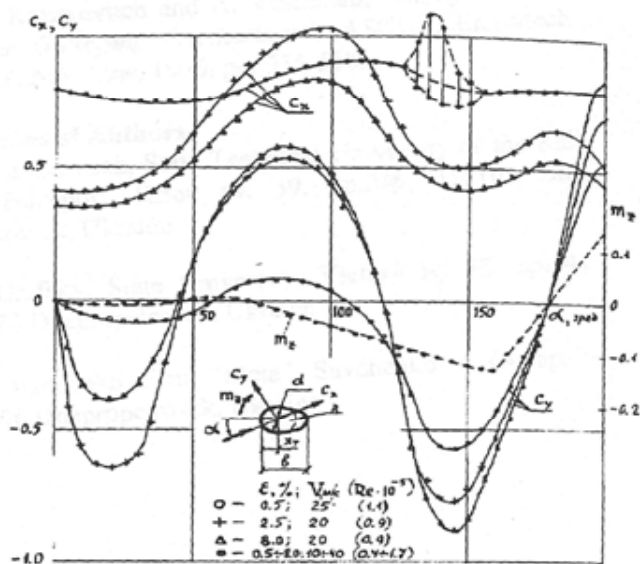
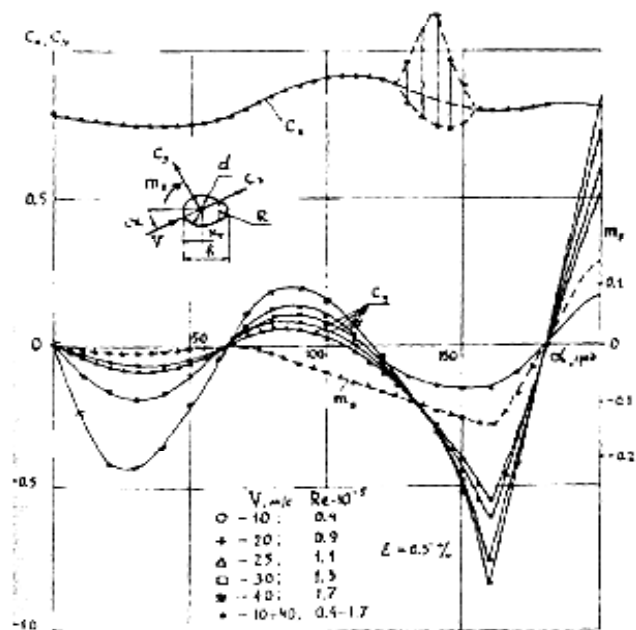


Fig. 4. The aerodynamic characteristics of the models

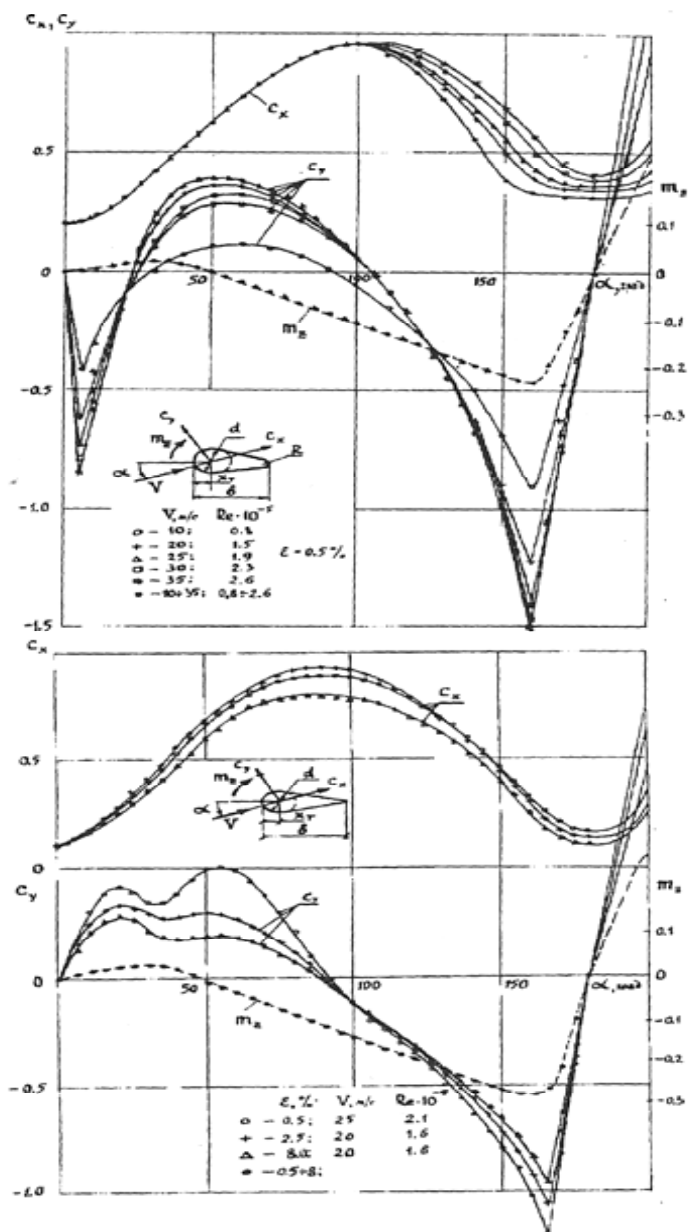


Fig. 4. The aerodynamic characteristics of the models

– the critical velocity of galloping is minimum for model №2 at the angles of attack in the region  $\alpha_1$ , ( $c_y^a + c_x = -7,6$ ), and also for model №3 at the angles of attack in the region  $\alpha_2$  ( $c_y^a + c_x = -8,15$ );

– the flow turbulence stabilizes considerably the aero-elastic instability according to Den-Gartog; thus at  $\varepsilon = 8\%$  the appearance of aeroelastic self-oscillations is possible only at the angle of attack in the region  $\alpha_3$  ( $c_y^a + c_x = -2,5$ ) and the critical velocity is 1,75 times higher than at  $\varepsilon = 0,5\%$  ( $C_y^a + C_x = -1,4$ );

– the prediction of the criteria of the appearance and parameters of aeroelastic self oscillations according to Den-Gartog at the glaze ice-and-wind loads can be realized due to formulae [5]: for the critical velocity

$$V_{cr} = \frac{2 m \delta \omega}{-(c_y^a + c_x) \pi \rho d};$$

and for the amplitudes

$$a = \frac{2V^2}{\omega_0 V_{cr}} \sqrt{1 - \frac{V_{cr}}{V}},$$

where  $\delta$ ,  $m$ ,  $\omega_0$ ,  $d$  are, correspondingly the oscillation logarithmic decrement (at  $V = 0$ ), linear mass, natural circular frequency of oscillations and midship section (at  $\alpha = 0$ ).

## *References*

1. Michael Kazakevitch, "The Problematic Tasks of Aerodynamics of structures". Proceedings 2<sup>nd</sup> European and African Conference On Wind Engineering. Ed. G.Solari. Geneva. Italy, June 22-26, 1997, vol.2, pp. 1213-1220.
2. V.E. Buchinsky, The Atlas of the Transmission Line Icing. Hydrometeoizdat, Leningrad, 1966. [3] M.V. Zavarina, The Structural Climatology. Hydrometeoizdat, Leningrad, 1976.
3. M.V. Zavarina. The Structural Climatology. Hydrometeoizdat, Leningrad, 1976.
4. Michael Kazakevitch and Igor Graftsky, "Interaction of Wind with the Ice-Covered Structural Members". Proceedings 12<sup>th</sup> Congress IABSE. Vancouver, 1984, pp. 853-857.
5. M. Kazakevitch and A. Vasilenko, "Analytical Solution for Galloping Oscillations". ASCE, J.Eng.Mech., Vol.122, №6, June, 1996, pp. 555-558.

## СТАБИЛИЗАЦИЯ ВАНТ ПРИ ДЕЙСТВИИ ВЕТРА И ПОДВИЖНЫХ НАГРУЗОК\*

Динамическая стабилизация вант – это комплекс расчетных конструктивных и организационных мероприятий, обеспечивающих предотвращение возникновения резонансных колебаний любой из вант при монтаже системы или пролетного строения, а также в процессе эксплуатации моста. Причины, вызывающие колебания вант, различны:

- аэроупругая неустойчивость вант в ветровом потоке;
- динамическое поведение пилона при взаимодействии его с ветровым потоком;
- динамическое поведение пролетного строения в поле ветровых и подвижных нагрузок;
- гололедо-изморозевые отложения на вантах;
- взаимодействие вант с ветровым потоком при ливневых дождях.

Авторами разработаны способы стабилизации вант, которые позволяют создавать вантовые системы, обладающие высокой эффективностью, ремонтпригодностью, эстетичные, простые в изготовлении и монтаже, безопасные для пешеходов и транспортных средств, почти не требующие эксплуатационных затрат.

Эти системы были реализованы на двух больших вантово-балочных мостах в Риге через р. Даугаву и в Киеве через р. Днепр.

Общий принцип действия систем стабилизации вант на этих мостах – вовлечение в колебания возмущенной ванты соседних вант. При этом энергия колебания возмущенной ванты перераспределяется на соседние ванты и очень быстро затухает. Жесткие распорки, объединяющие изолированные ванты по определенным законам в единую вантовую систему, в узлах содержат дополнительные источники поглощения энергии колебаний, что повышает эффективность динамической стабилизации вант.

**Классификация способов стабилизации вант.** Для гибких элементов, работающих преимущественно на растяжение (типа кантов и вант), критическая скорость вихревого возбуждения меньше 1 м/с, т.е. такое возбуждение возникнуть не может. В то же время аэроупругая неустойчивость может привести к «пляске» этих элементов,

---

\*Опубликовано совместно с А.Л. Загорой в ж-ле «Вестник мостостроения», № 2, 1998, Москва, а также в ж-ле «Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics», № 74-76, 1998, ELSEVIER, Нидерланды.

аналогичной вибрации проводов ЛЭП в ветровом потоке. Наиболее вероятная траектория колебаний канатов, как показывает анализ многочисленных наблюдений, – эллипсы с вытянутой в вертикальной плоскости осью. Противофазные колебания двух соседних канатов при неустойчивости типа «пляски» равновероятны синфазным. Их амплитуды достигают значений  $\bar{a} = a/d = 2 \div 10$  или  $a = (0,010,001)L$ , где  $d$  – диаметр каната,  $L$  – его длина.

Колебания канатов вызваны не только ветровой нагрузкой, но и подвижной, воздействующей на них через пролетное строение (нижняя точка крепления каната) и через пилон (верхняя точка крепления каната). В связи с этим требуется разработать меры по снижению амплитуд колебаний вант в процессе сооружения и эксплуатации вантовых мостов.

Разнообразные способы гашения колебаний вантовых мостов и их элементов [1–3] на стадии как сооружения, так и эксплуатации, условно можно подразделить на динамические, конструкционные, конструктивные и аэродинамические (рис. 1).

Динамические способы гашения колебаний основаны на присоединении к демпфируемой конструкции (основной массе) с помощью упругой связи дополнительной массы, составляющей незначительную долю основной. Дополнительная масса с элементами связей представляет собой динамический гаситель колебаний [3].

*Конструкционное демпфирование* происходит в результате энергетических потерь, возникающих вследствие действия сил сухого трения на контактных поверхностях в различных узлах, соединениях, швах, опорных частях и других элементах мостовых конструкций при их колебаниях [2].

*Конструктивные способы гашения колебаний* предусматривают изменение расчетной схемы, повышение изгибной и крутильной жесткости и т.п. [2].

*Аэродинамическое гашение колебаний* достигается изменением характера обтекания сооружений или их отдельных элементов ветровым потоком [1,3].

Принципиальное отличие аэродинамического способа от основных заключается в том, что он устраняет причину ветрового резонанса, существенно изменяя характер обтекания сооружения ветровым потоком.

**Физическая модель динамического поведения ванты.** Исходя из реальной работы ванты и учитывая перечисленные основные источники возбуждения колебаний, с достаточной степенью достоверности можно принять в качестве физической модели системы, приведенную на рис. 2. Стрелками показаны возможные колеба-

ния пилона, ванты и пролетного строения моста по главным направлениям: в плоскости моста и из плоскости моста.



Рис. 1. Классификация способов гашения колебаний мостов и их элементов

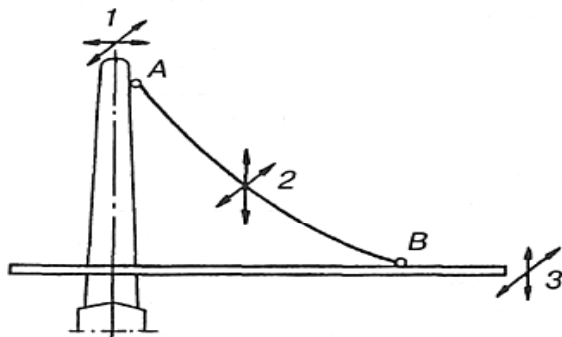


Рис. 2. Физическая модель ванты: 1 – направления колебаний пилона; 2 – то же ванты; 3 – то же пролетного строения

Наибольшую опасность по усталостной прочности ванты представляют колебания, вызванные динамическим поведением пилона и пролетного строения при следующих соотношениях частот:

– параметрические резонансы

$$f_v = \begin{cases} 0,5f_{\text{пил}}; \\ 0,5f_m; \end{cases}$$

обычные резонансы

$$f_v = \begin{cases} f_{\text{пил}}; \\ f_m. \end{cases}$$

где  $f_v$ ;  $f_{\text{пил}}$  и  $f_m$  – частота колебаний соответственно ванты, пилона и пролетного строения моста.

Как показывает анализ [4], максимальные амплитуды колебаний ванты можно приближенно определять по формулам:

– при обычных резонансах

$$a_v \cong \frac{a_{\text{пил}}}{\sqrt{\mu}} \text{ или } a_v \cong \frac{a_m}{\sqrt{\mu}}, \text{ где } \mu = \frac{m_v}{m_{\text{пил}}}$$

– при параметрических резонансах

$$a_v \cong \frac{2}{\pi} \sqrt{2a_{\text{пил}}L} \text{ или } a_v \cong \frac{2}{\pi} \sqrt{2a_mL}$$

Здесь  $m_v$  – масса ванты;  $m_{\text{пил}}$  – масса пилона;  $a_m$  – составляющая амплитуды колебаний соответственно пилона и пролетного строения моста вдоль кривой  $AB$  (см. рис. 2);  $L$  – длина ванты.

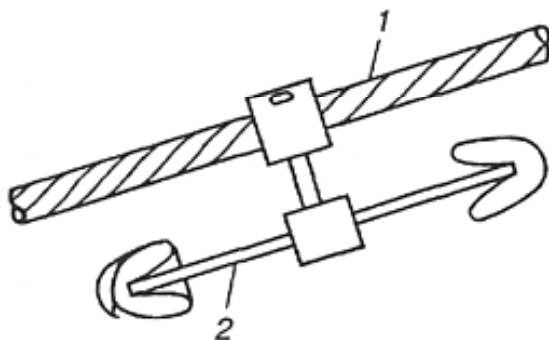
**Динамическое гашение колебаний вант.** Простейший динамический гаситель, который можно использовать для гашения колебаний вант типа Stockbridge damper представляет собой кусок стального троса с грузами на концах (рис. 3). Трос (кабель) выполняет функции упругого элемента (пружины) и одновременно приводит к рассеянию энергии колебаний вследствие трения между отдельными его проволоками.

Эффективным способом гашения колебаний вант может быть применение дискретно расположенных демпфирующих дополнительных масс и амортизаторов (рис. 4).

Эффективность применения динамического способа гашения колебаний ванты теоретически обоснована, разработаны рекомендации по оптимальному размещению гасителей подлине ванты [4]. Вместе с тем динамическим способом свойственны и некоторые

недостатки, а именно:

- применение динамических гасителей колебаний (ДГК) некоторых типов в определенных случаях может привести к появлению дополнительных местных напряжений в местах их крепления к ванте;
- эффективная работа ДГК обеспечивается только на определенной частоте или в узком спектре частот;
- возможны соударения ДГК с соседней колеблющейся вантой.



**Рис. 3. Конструкция простейшего динамического гасителя колебаний ванна Stockbridge damper: 1 – ванта; 2 – трос с грузами на концах**

Места размещения ДГК на каждой из вант в отдельности назначают исходя из следующих соображений: чем дальше точка крепления гасителя от конца ванты, тем выше его эффективность (диссипация энергии колебаний) и тем меньше жесткость связи гасителя с вантами. С этой точки зрения предпочтительно иметь расстояние между ними  $l = (0,20 \div 0,10) L$ , где  $L$  – длина ванты.

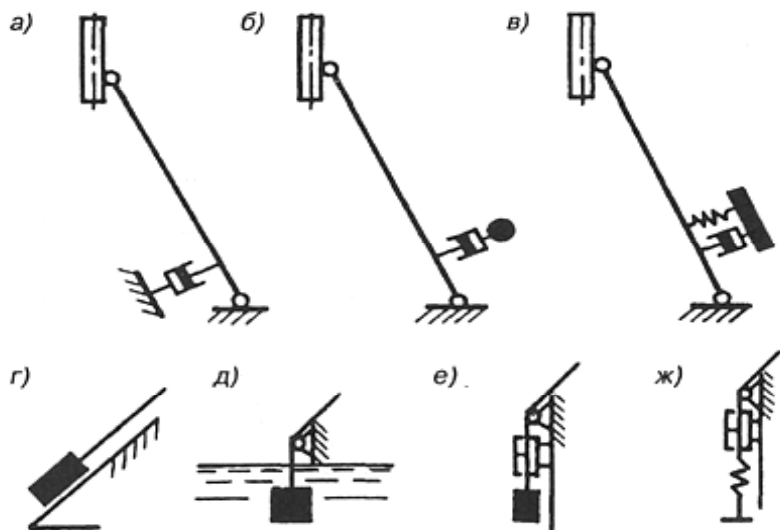
Соответствующие оптимальные значения параметров гасителей приведены в таблице.

**Оптимальные значения параметров гасителей**

Отношение $l/L$	Собственная частота колебаний вант (с гасителем) $\nu^*$ , Гц	Коэффициент усиления колебаний $\kappa$	Логарифмический декремент затухания $\delta$	Жесткость упругой связи гасителя $w$ , кН/м
0,02	1,01	50	0,063	22,5
0,05	1,025	20	0,157	5
0,10	1,05	10	0,314	2,5

В таблице величина  $\nu^* = \nu (1 + l/2L)$ , где  $\nu$  – собственная частота колебаний вант без гасителя.

Параметры динамических гасителей колебаний можно определить только по фактическим значениям параметров вант (длина, диаметр, масса, жесткость, диссипативные свойства). Независимо от способа стабилизации вант в поле действия возмущающих сил, вызванных ветровой или подвижной нагрузкой, необходимо предусмотреть возможность доступа обслуживающего персонала к местам установки сепараторов или гасителей колебаний в процессе эксплуатации.



**Рис. 4. Возможные варианты расположения демпфирующих дополнительных масс и амортизаторов**

**Конструкционное демпфирование.** К этому способу демпфирования колебаний вант относят их бетонирование и защиту всевозможными оболочками. Применяют, например, цилиндрические покрытия, изготавливаемые методом экструзии из алюминия. На внутреннюю поверхность покрытия наклеивается демпфирующая прослойка из полиуретана, плотно взаимодействующая по всей поверхности с кабелями ванты. Конструкция алюминиевых покрытий такова, что кабели вант герметично защищены от атмосферных реагентов, а взаимодействие кабелей с демпфирующей полиуретановой прослойкой обеспечивает гашение колебаний.

Основное достоинство конструкционного демпфирования – сохранение первоначального архитектурного облика моста. К его недостаткам следует отнести возможность электрохимической коррозии материала вант, вызываемой контактом его с другими материалами, а также усложнение технологии изготовления вант при обетонировании, обусловленное необходимостью их предварительного натяжения.

*Конструктивный способ стабилизации вант.* Гашение колебаний вант может быть осуществлено изменением расчетной схемы вантовой системы путем устройства дополнительных опорных точек или установки дополнительных оттяжек. Этой же цели можно достичь изменением соотношения частот собственных колебаний вант, пилона и балки жесткости. Поскольку изменение частотных характеристик пилона и балки жесткости на стадии проектирования влечет за собой, как правило, значительный перерасход материальных ресурсов, а на стадии эксплуатации – практически невозможно, остается только применять конструктивные мероприятия для изменения динамического поведения вант. При этом следует учитывать ограниченные возможности изменений сил натяжения вант. К тому же ванты, имея различные длину, массу, жесткость, силу натяжения, характеризуются разными частотами собственных колебаний. Все это затрудняет использование динамических гасителей колебаний для каждой ванты с точки зрения как настройки и расположения (компоновки) ДГК, так и архитектуры всего сооружения.

Наиболее целесообразно обеспечивать стабилизацию вант путем рассеяния энергии их колебаний в вантовой системе: энергия колебаний вант при резонансе или параметрической неустойчивости перераспределяется в энергию колебаний других форм в смежных вантах. Этого можно достичь с помощью установки элементов, объединяющих ванты. Такие элементы (сепараторы, распорки или иные приспособления) должны обладать высокой эффективностью, хорошей обтекаемостью, ремонтпригодностью всех узлов и элементов, требовать низких эксплуатационных расходов.

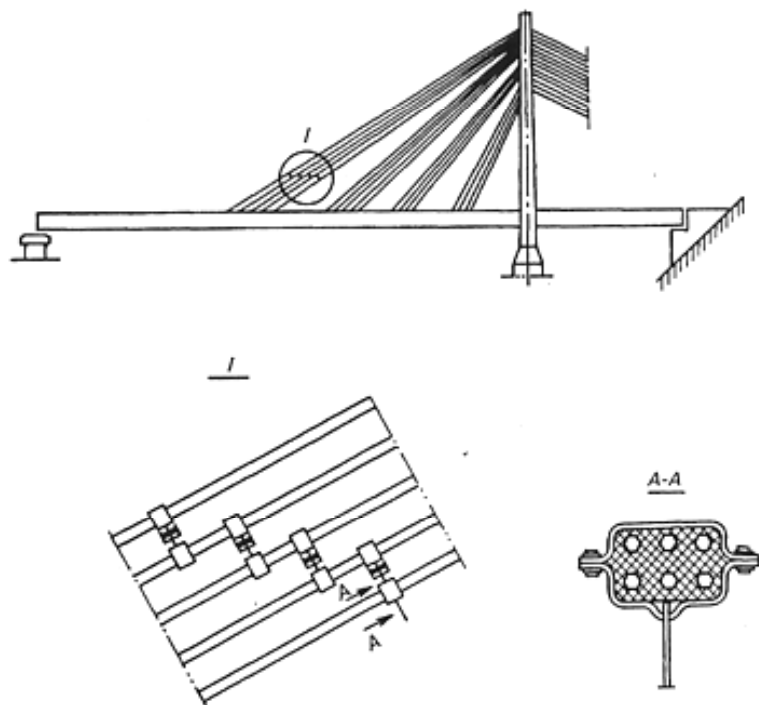
Всем этим требованиям соответствует устройство для гашения колебаний вант через р. Даугаву в Риге. Устройство располагается ступенчато в местах пучности форм колебаний вант (рис. 5).

Высокой эффективностью гашения колебаний вант обладает вантовая система, установленная на мосту через р. Днепр в Киеве (рис. 6). Расположение устройств на одинаковой высоте от уровня проезжей части моста и на одинаковом расстоянии от оси пилона позволяет сместить спектр собственных частот в сторону более высоких значений и «размазать» до практически непрерывного. Это гарантирует

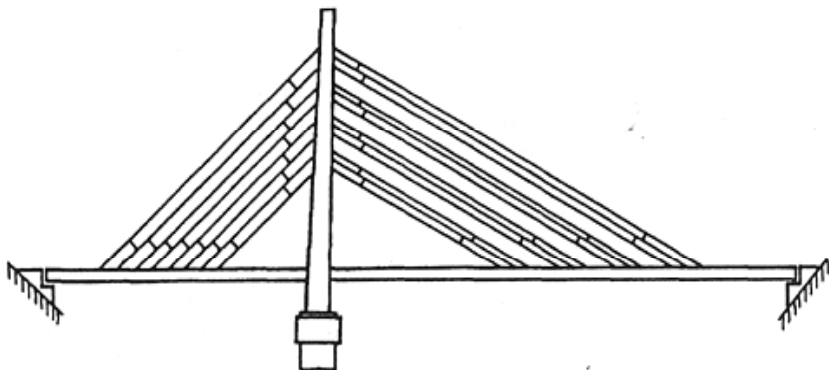
невозможность возникновения регулярных резонансных колебаний вант под действием как ветровых, так и временных подвижных нагрузок. Кроме того, дополнительное гашение колебаний вант обеспечивается непосредственно в узлах их крепления к смежным вантам благодаря использованию демпфирующих приспособлений сухого трения.

Расположенные на обоих мостах устройства позволили эффективно стабилизировать вантовую систему и тем самым гарантируют надежность и долговечность этих сооружений.

Для стабилизации вант, строящегося вантово-балочного моста через р. Волгу в Ульяновске предложена система растяжек, которая в совокупности со всеми вантами образует единую вантовую систему. Для поиска оптимальной геометрии вантовой системы, учитывающей разнообразные факторы, в том числе возможность ее использования одновременно при монтаже и на стадии эксплуатации, рассмотрены следующие варианты.



*Рис. 5. Схема размещения элементов устройства для стабилизации вантовой системы вантово-балочного моста через р. Даугаву в Риге*



*Рис. 6. Вантовая система метромоста через р. Днепр в Киеве*

**Вариант № 1.** Растяжки, шарнирно прикрепленные ко всем вантам, образуют два луча – геометрические места точек, совпадающих с третями длины вант. Данный вариант обладает одним существенным недостатком: возможна синхронная «игра» всей системы (групповые колебания вант) и, как следствие, раскачивание пилона и (или) пролетного строения моста.

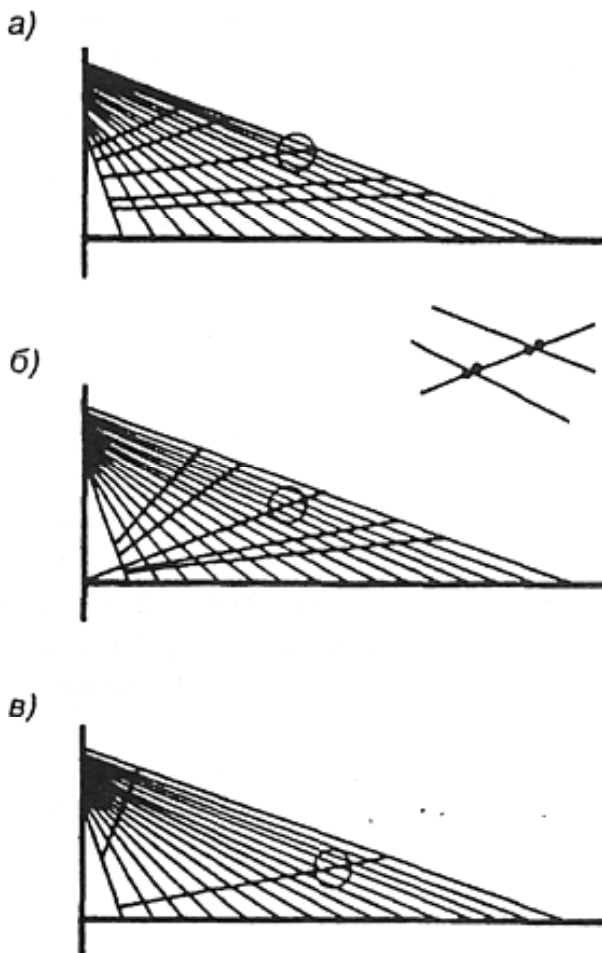
**Вариант № 2.** Растяжки, также шарнирно прикрепленные ко всем вантам, образуют пять лучей (один из них факультативный), совпадающих с четвертями, третями (факультативно), серединами, двумя третями и тремя четвертями длины вант (рис. 7,а). Этот вариант более предпочтителен, однако ему присущ тот же недостаток, что и первому.

**Вариант № 3.** Растяжки, шарнирно прикрепленные ко всем вантам, образуют пять лучей (один из них факультативный), соединяющих точку пересечения осей пилона и пролетного строения с четвертью, третью (факультативно), серединой, двумя третями и тремя четвертями самой длинной ванты (рис. 7,б). При этом значительно возрастает эффективность стабилизации вант. Сама система представляется более эстетичной, чем в первых двух вариантах.

Этому варианту присущи следующие недостатки: усложненный расчет геометрии узлов примыкания растяжек к вантам (кроме самой длинной); большая чувствительность к естественному провисанию вант; необходимость регулировки длин растяжек при подготовке моста к длительной эксплуатации для обеспечения проектной геометрии вант. Несмотря на перечисленные недостатки, которые не представляют непреодолимых препятствий, вариант № 3 пред-

почтительнее двух первых.

**Вариант № 4.** Растяжки, шарнирно прикрепленные ко всем вантам, образуют два луча, выходящих из точки пересечения осей пилона и пролетного строения и образующих с горизонталью углы  $10^\circ$  и  $70^\circ$  (рис. 7, в). При тех же недостатках, что и в варианте № 3, с некоторым уменьшением эффективности значительно снижается трудоемкость установки растяжек.



*Рис. 7. Варианты стабилизации вант вантово-балочного моста через р. Волгу в Ульяновске*

Аналитические исследования и вычислительный эксперимент показали, что достаточно широкий дискретный спектр собственных частот вант ( $f = 0,16 \div 0,48$  Гц), отражающий многообразие их длин, нагружения при монтаже и в эксплуатации благодаря объединению вант с помощью растяжек в единую систему, трансформируется в практически непрерывный (точнее «размазанный»). При таком качественном изменении динамических свойств вант невозможны ни резонанс (или близкий к нему режим) одной отдельно рассматриваемой ванта, ни колебания всей системы. Энергия колебаний одной ванта через систему растяжек передается всем другим вантам и быстро затухает.

Выбор оптимального варианта базируется на расчетах, учитывающих конкретные данные о массовых и геометрических характеристиках элементов пилона, вантового пролетного строения и вант.

В узле крепления растяжек к вантам (рис. 8) для удобства монтажа обоймы выполнены составными, соединение – на высокопрочных болтах. Примыкающие к узлу растяжки снабжены фаркопфами (талрепами). Предпочтительна конструкция фаркопфов ЦНИИПСК. Проушины для крепления растяжек расположены по оси, составляющей с нормалью к продольной оси ванта угол

$$\gamma_i = \alpha_i + \beta_j - 90^\circ,$$

где  $\alpha_i$  – угол между  $i$ -й вантой и горизонталью, а  $\beta_j$  – угол между  $j$ -й растяжкой и горизонталью.

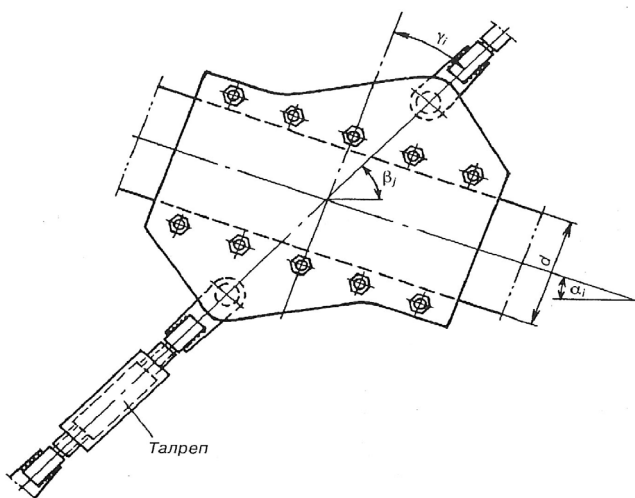


Рис. 8. Узел крепления растяжек к вантам

Длина обоймы может быть равна 3–5 диаметрам ванты.

**Выводы.** Предложенный способ стабилизации вант – создание вантовых систем с помощью распорок – обладает высокой эффективностью. Это подтверждается опытом эксплуатации двух вантово-балочных мостов. Качественные изменения динамических свойств вант в условиях, когда дискретный спектр изолированных вант трансформирован в практически непрерывный, позволили предотвратить их резонансы в поле ветровых и подвижных нагрузок. Энергия колебаний возмущенной ванты через систему распорок передается смежным вантам и быстро затухает.

### *Литература*

1. *Казакевич М.И.* Аэродинамическая устойчивость надземных и висячих трубопроводов. М.: Недра, 1977. – 200 с.
2. *Загора А.Л., Казакевич М.И.* Гашение колебаний мостовых конструкций / Под ред. Н.Г. Бондаря. М.: Транспорт, 1983. – 143 с.
3. *Казакевич М.И.* Аэродинамика мостов. М., Транспорт, 1987. – 240 с.
4. *Kovacs I.* Zur Frage der Seilschwingungen und der Seildämpfung. Die Bau-technic. 1982, № 10, p. 325-332.
5. *Ito M.* Measures against wind-induced vibrations of bridges, Proc. Struct. Congr. 87/St.Div./ASCE. Orlando, Florida, Aug. 1987, p. 129–139.
6. *Kazakevitch M. and Zakora A.* The table stabilization at the wind and moving load effect. 2 EACWE, Genova, Italy, June 22-26, 1997, vol.2, p. 1775–1781.

# THE OFFSHORE STRUCTURES STABILIZATION UNDER THE SURFACE WAVE EFFECTS\*

## 1. Introduction.

The surface waves are one of the major factors of the external influence on the supporting structures of the type of the offshore fixed structures. In this case offshore fixed structures undergo intensive dynamic effect. As a result the supporting structures suffer the considerable dynamic loads decreasing their supporting power. Three types of constructions are presented in the paper, which may be regarded as breakwaters. The first type presents an elastic circular (closed or sectional) plate, freely floating on the water surface and flexibly fastened to the offshore. The width of the elastic plate on the wave beam, i.e. its chord and its thickness depend on the calculated parameters of the surface wave. To increase the effectiveness of such breakwater the flexible connection with the supporting structure is supplied with the additional source of the system oscillation energy absorption. The second type of the suppressing device is mounted in the boundary area of water-wetting elements of sea latticed supporting structure. The considerable part of the surface wave energy is reflected and absorbed by the device itself due to its constructive peculiarities. The remained part of the energy as the wave loads is transferred directly to the joints of the breakwater structure. The third type of the breakwater structure presents an extremely effective device performing the functions of hydrodynamic damper of the floating structure oscillations.

## 2. The Plate Breakwater.

The interaction of the flat plate on the water surface with the travelling surface wave due to the possibility of its usage as a breakwater was investigated by the author. The percentage of the plate effectiveness as a wave suppressing device. The progressive waves, travelling on the plate, were taken as a surface wave model. The calculations due to Stoker-Phillips theory were carried out at different values of the wave elements (length, period, height) as applied to the water areas of the Caspian Sea:

- wave lengths  $\lambda=[41,45,67,87,164]\text{m}$ ;
- wave periods  $T=[5.1, 5.4, 6.3, 8.15]\text{s}$ ;
- wave amplitudes  $A=1.5\text{m}$ .

---

\* Опубликовано в Трудах 6 Международной Конференции Вильнюсского технического Университета «SF 99», v. II, 1999, Вильнюс.

The plate is regarded as absolutely rigid. Its width in the calculations is taken as  $2a = [4, 6, 8, 10, 16, 20, 40, 60]$  m. Three cases of the plate fastening in the vertical plane were investigated:

- i / rigidly fastened plate;
- ii / freely floating plate;
- iii / flexibly fastened plate.

The third case is the most common. The first two cases follow from it as particular cases. The major problems investigated as the result of the experiment are:

- the percentage of the wave reflected energy by the plate;
- the pressure distribution under the plate.

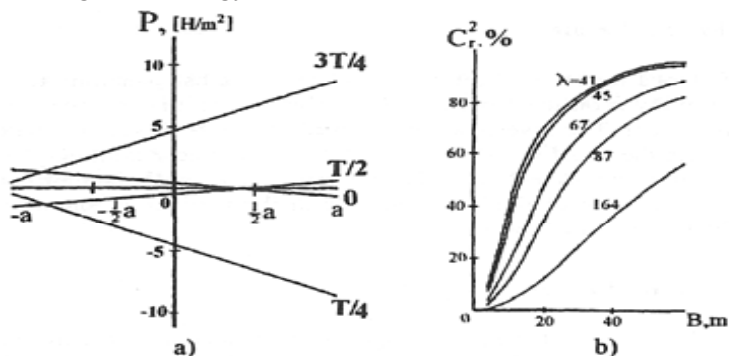
Here the coefficient of reflection  $C_r$  and the coefficient of transmission  $C_\tau$  are introduced and on the basis of the law of the equality of the energy of the travelling wave to the energy of the transmitted wave we have the eq. (1):

$$C_r^2 + C_\tau^2 = 1,$$

where  $C_r^2$  is characterizes the part of the travelling wave energy, which the plate reflects, and  $C_\tau^2$  is the part, which the plate transmits.

## 2.1. Rigidly Fastened Plate.

As it was shown by the calculations, the pressure under the plate is distributed due to the linear law along the plate width (Fig. 1,a). The pressure change amplitude on the plate front edge is considerably large than on the back edge. This physical effect conditions the wave suppressing effect of the plate, which depends on the plate width  $B = 2a$  and travelling wave length  $\lambda$ , (Fig.1,b). As it is seen in Fig.2, the wider the plate is the larger wave suppressing effect it possesses, i.e. it reflects the large part of the travelling wave energy.



**Fig. 1. The pressure distribution (a) and the pressure reflected energy portion (b) for the rigidly fastened plate**

## 2.2. Freely Floating Plate.

The pressure distribution under the freely floating plate follows the law of the square parabola (Fig. 2,a) and the pressure change amplitudes on the front and back edges are considerably different in comparison with the rigidly fastened plate for the same phases (the instants). The difference in pressure change amplitudes on the front and back edges under the rigidly fastened (Fig. 1,a) and freely floating (Fig. 2,a) plates points out the higher effectiveness of the wave reflection by the rigidly fastened plate. The portion of the reflected energy by the freely floating plate is shown in Fig. 2,b. The diagram in Fig. 2,b shows that the plates with the width not exceeding the half-length of the travelling wave possess the maximum effectiveness of the wave energy reflection.

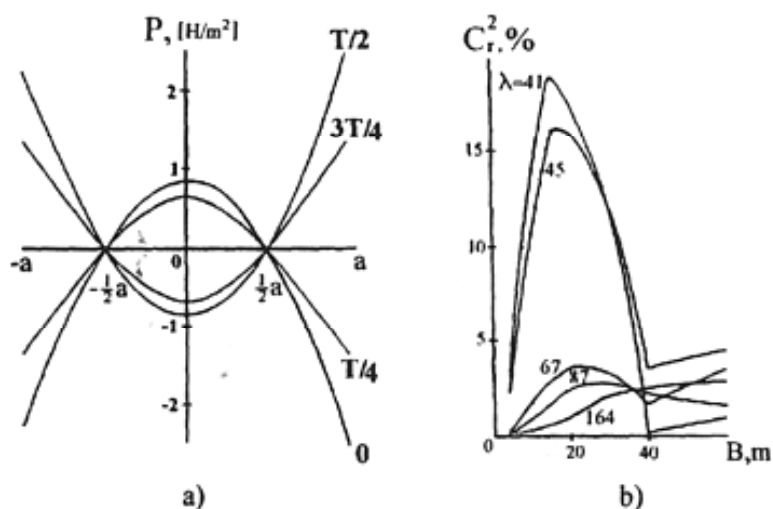


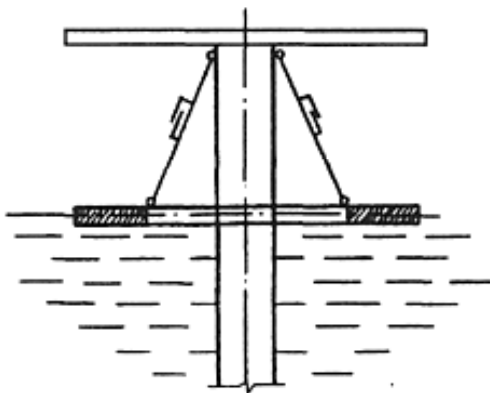
Fig. 2. The pressure distribution (a) and the under reflected energy portion (b) for the freely floating plate

## 2.3. Flexibly Fastened Plate.

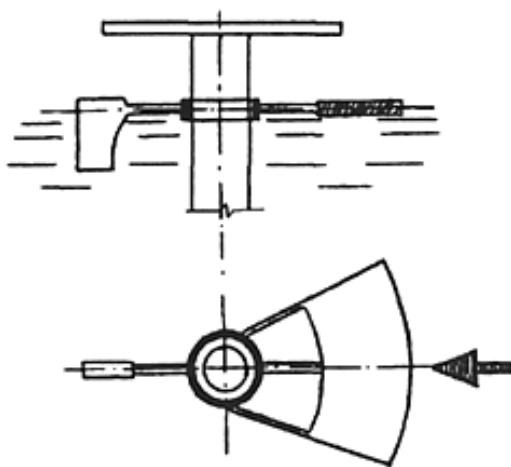
The flexibly fastened for the vertical displacements plate has generally the different coefficient of rigidity  $k$  on the front and back edges. As a first approximation they were considered equal. The investigations showed that at  $k=10^3-10^8$  the flexibly fastened plate reflects the equal wave energy portion as the freely floating plate, and at  $k=10^7-10^8$  as the rigidly fastened plate. The more the plate width the higher the flexible connection coefficient of rigidity should be in the vertical direction to achieve its-largest effectiveness as a breakwater.

## 2.4. The Practical Realization.

The most typical examples of the plate usage for the reduction of the dynamic loads on the offshore platforms are shown in the licences *SU 1015041* and *SU 1033632*. The partly submerged pontoons of the closed circular form (Fig.3) or in the sector form with the central angle 15–40° supplied with the keel-vane to watch the direction of the surface wave movement (Fig. 4) are the highly-effective breakwaters. The constructive variants must be provided for maintainability of the structures, the joints and pick-up points included.



*Fig. 3. The partly submerged pontoons of the closed circular form on the water surface*

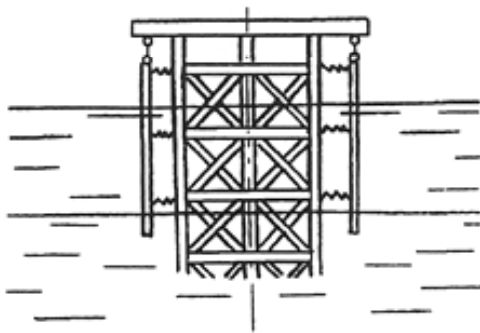


*Fig. 4. The rotating partly submerged pontoon*

### 3. Wave Suppressive Casing.

At the large clearance of the cross section outline of the offshore platform supporting structures the perforated casing appears more effective than the plate breakwater. It is described in the license *SU 1077348*.

The wave suppressing device, worked out by the author, is performed as a casing, settled around the offshore platform supporting structure. The casing is suspended to the platform and is situated in the water-wetting area; its lower edge sinks under the minimum water edge in the water area. The connective elements fasten the casing to the joints of the offshore platform latticed supporting structure (Fig. 5). To increase the effectiveness of the surface wave energy absorption these elements may be supplied with the oscillations absorbers. The casing may have a cylinder or conical form, but also may have a rotation surface with the curved generatrix. From the top view it may be of circular or polygonal outline. The reliability of the protecting casing may be increased by means of the horizontal or vertical slots and holes, i.e. to make it through. The maintainability of the protecting casing is an important condition of its usage, as the casing reliability is considerably lower than that of the offshore platform.

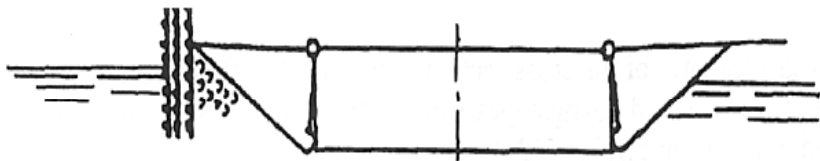


*Fig. 5. The wave suppressing suspended casing*

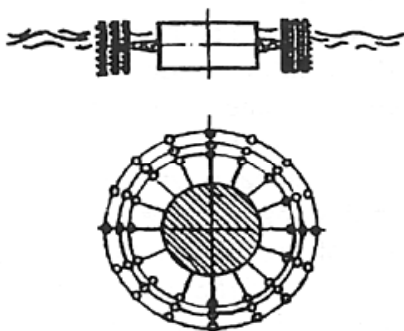
### 4. The Floating Structure Stabilization.

For the floating structure stabilization and surface wave energy reduction an original device has been worked out by the author. It is described in details in the license *SU 1681592*. The main elements of this device are parallelly placed nets with the reduced along the flow dimensions of the cells. The braking and stratification of the flow by means of the nets produce static as well as dynamic stabilizing effect. Here the static stabilization is performed due to the perception of the part of the kinetic energy

of the hydraulic flow by the nets. The dynamic stabilization is performed due to the transmission of the part of the kinetic energy of the surface waves to the energy of the flexible leg and elastic net oscillations.



*Fig. 6. The stabilization of the large-span floating structure at the one-sided (unilateral) flow*



*Fig. 7. The stabilization of the offshore drilling platform*

The nets, depending on the type of the floating structure, f.ex. floating bridge (Fig. 6) or offshore drilling platform (Fig. 7), are placed on the cantilevers on one side, on two opposite sides or in the circular form. To make the repair of the nets and legs in the process of exploitation easier they must be provided for maintainability.

### ***Conclusions***

The new ideas and structures of the offshore fixed structure stabilization under the surface wave effect presented in the paper make it possible to prolong the service life and to increase the flexibility of the offshore fixed structures. At the same time they don't disturb the comfort of the personnel and don't break the environment including the surrounding fauna and flora.

## СТАБІЛІЗАЦІЯ КОНСТРУКЦІЙ У ВІТРОВОМУ ПОТОЦІ\*

### Вступ.

Стабілізація конструкцій у вітровому потоці є однією з найбільше важливих прикладних проблем. Варто розрізняти статичну і динамічну стабілізацію. Під статичною стабілізацією розуміють зниження рівня аеродинамічних (вітрових) навантажень: локального вітрового тиску, лобового опору, поперечної сили, подовжного моменту.

Піддинамічною стабілізацією розуміють зниження нестационарних аеродинамічних сил і, як слідство, зниження динамічних реакцій споруди уздовж і поперек потоку, а в деяких, окремих випадках, запобігання причин виникнення явищ аеродинамічної нестійкості.

### Зниження вітрових навантажень.

Різні заходи міри конструктивного характеру сприяють зниженню вітрових навантажень; ці заходи значно змінюють характер обтікання споруджень вітровим потоком. Одним з таких заходів можна вважати створення турбулентного потоку, тобто турбулізацію потоку при обтіканні поверхні елементів конструкцій. Це досягається за допомогою:

- пропускання потоку через настил пролітної будівлі моста (перфорація настилу);
- улаштування спеціальних каналів (шлюзів) для наскрізного проходження потоку в елементах споруджень;
- створення специфічної особливості навколишнього рельєфу, що викликає природну турбулізацію вітрового потоку в приземному шарі атмосфери.

Пошук заходів і способів статичної стабілізації ґрунтується тільки на експериментальних дослідженнях в аеродинамічних трубах.

Існує цілий ряд прикладів успішного рішення цієї проблеми на мостах, дахах і інших конструкціях. Було знайдено цікаве рішення для дворазового зниження вітрових навантажень на коробчаті конструкції. Розглянемо два приклади для ілюстрації цього. Ефективним способом є зниження інтенсивності негативного тиску (розрідження) на поверхні мембранного покриття поблизу опорного контуру мембрани (рис. 1).

---

\*Опубліковано в ж-ле УАМК «Металеві конструкції», т. 3, № 1, 2000, Макеєвка, а також в Трудах Международной Конференции «2nd EECWE», 1998, Прага.

З цією метою в опорному контурі були виконані наскрізні канали. Завдяки цьому вітровий потік, проходячи через канали, здуває суміжний шар і знижує область розрідження й інтенсивність негативного тиску.

Другий приклад набагато більш вражаючий. На рис. 2 показаний результат дворазового зниження лобового опору коробчатих мостів при дотриманні визначених співвідношень між різними параметрами поперечного перерізу.

Відзначимо, що, при створенні ґратчастих конструкцій великих прольотів перевага віддається застосуванню трубчастих елементів замість прокатних профілів при усіх інших рівних умовах, тому що в цьому випадку можна забезпечити дворазове зниження вітрових навантажень.



*Рис. 1. Наскрізні канали опорного контуру мембрани*

### **Динамічна стабілізація конструкцій.**

Існують два принципово різних способи динамічної стабілізації конструкцій: динамічне демпфірування коливань і аеропружна стабілізація. На рис. 3 подана класифікація методів динамічної стабілізації конструкцій, що дає повне уявлення про це.

Динамічне демпфірування коливань конструкцій має такі основні особливості: використання демпферів додатковою масою до 5% від загальної маси системи, що стабілізується, перетворює конструкцію в механізм, що постійно потребує налаштування в процесі тривалої експлуатації, тому що його ефективність залежить від оптимального налаштування параметрів демпфірування.

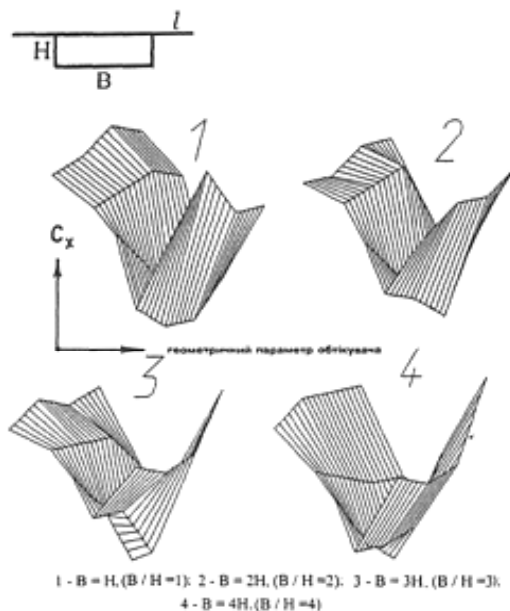
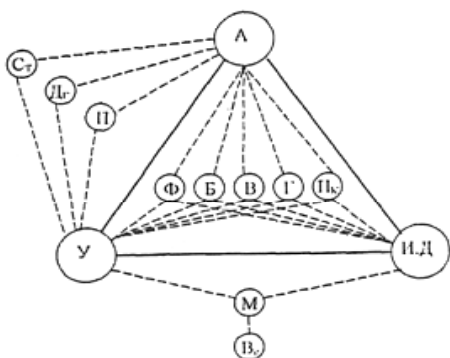


Рис. 2. Зниження лобового опору коробчастих мостів



Рис. 3. Класифікація способів динамічної стабілізації конструкцій



*Рис. 4. Узагальнений трикутник Коллара*

Аеропружна стабілізація пов'язана зі зміною характеру обтікання вітровим потоком конструкцій. При цьому дуже часто запобігається причина виникнення явищ аеропружної нестійкості. Причини аеропружних коливань такі: атмосферна турбулентність вітрового потоку в приземному шарі атмосфери; квазистаціонарна аеродинамічна сила, викликана зливом вихорів Кармана; негативне аеродинамічне демпфірування; аеропружний зв'язок між згинальними і крутильними формами деформацій; періодичне змінення параметрів системи, насамперед, внутрішніх сил. Узагальнено явища аеропружної нестійкості чітко ілюструються трикутником аеродинамічних сил Коллара (рис. 4), а також умовною класифікацією аеродинамічних явищ (рис. 5).

Таким чином, цілком очевидний зв'язок аеропружної стабілізації конструкцій з такими відомими фізичними чинниками, як: змінення циркуляції вітрового потоку навколо елементів конструкцій; створенні зсуву фаз у зриві вихорів Кармана уздовж елементів конструкцій при відривному обтіканні, тобто порушення синхронізації утворення вихорів Кармана уздовж елементу конструкції.

Існуючий досвід аеропружної стабілізації дозволяє виділити найбільш ефективні методи: створення легкообтічної форми поперечного перерізу; улаштування обтікачів різноманітних типів; перфорація конструкцій; улаштування інтерцепторів; спіральне навівання дроту на елементи конструкцій.

В даний час з'явився новий підхід у вирішенні проблеми стабілізації конструкцій у вітровому потоці. Він пов'язаний зі спробами активного контролю аеропружних коливань вантово-балкових мостів і мембранних покриттів. Активний контроль може здійснюватися відповідно до даного рівня переміщень і кутів повороту елементів конструкцій або відповідно до даного рівня нестационарності.

нарних аеродинамічних сил. Слід зазначити, що адекватність обох підходів обумовлена однозначною залежністю між нестандартними аеродинамічними силами і параметрами аеропружних коливань.



*Рис. 5. Класифікація аеропружних явищ*

Розглянемо більш докладно аеропружну стабілізацію конструкцій. Явища аеропружної нестійкості, наведені в класифікації (рис.5), загальновідомі [1]. Але для більш обґрунтованого пошуку ефективних методів аеропружної стабілізації конструкцій у потоці необхідно звернути увагу на особливості характеру змінення амплітуд аеропружних коливань у часі та у залежності від швидкості потоку (рис. 6). Такі явища, як дивергенція, згинально-крутильний флаттер або галоупування, неприпустимі для інженерних конструкцій.

Ці фактори неминуче призводять до руйнування конструкцій, коли швидкість вітрового потоку вище критичної швидкості цих явищ. Вихрове обурення і зривний флаттер уявляють собою інші явища. У цих випадках максимальне значення амплітуди коливань обмежене і залежить від такого узагальненого параметра, як ступінь дисипації енергії коливань елементів конструкцій. Залежності наведеної амплітуди коливань  $\bar{a}=a/d$  від числа Скратона  $S_c=\delta_{np}=2m\delta/\rho d^2$  наведені на рис. 7 для кругового циліндра і для елементів із довільною формою поперечного перерізу.

Розрахунки показують, що для реальних гнучких споруд із круглою формою поперечного перерізу криві (рис.7) можна уявити у

виді наближених формул:

– при докризовому обтіканні

$$\alpha \cong \frac{1,5}{S_c + 1}; \quad (1)$$

– при закризовому обтіканні

$$\alpha \cong \frac{1,5}{S_c - 0,25}. \quad (2)$$

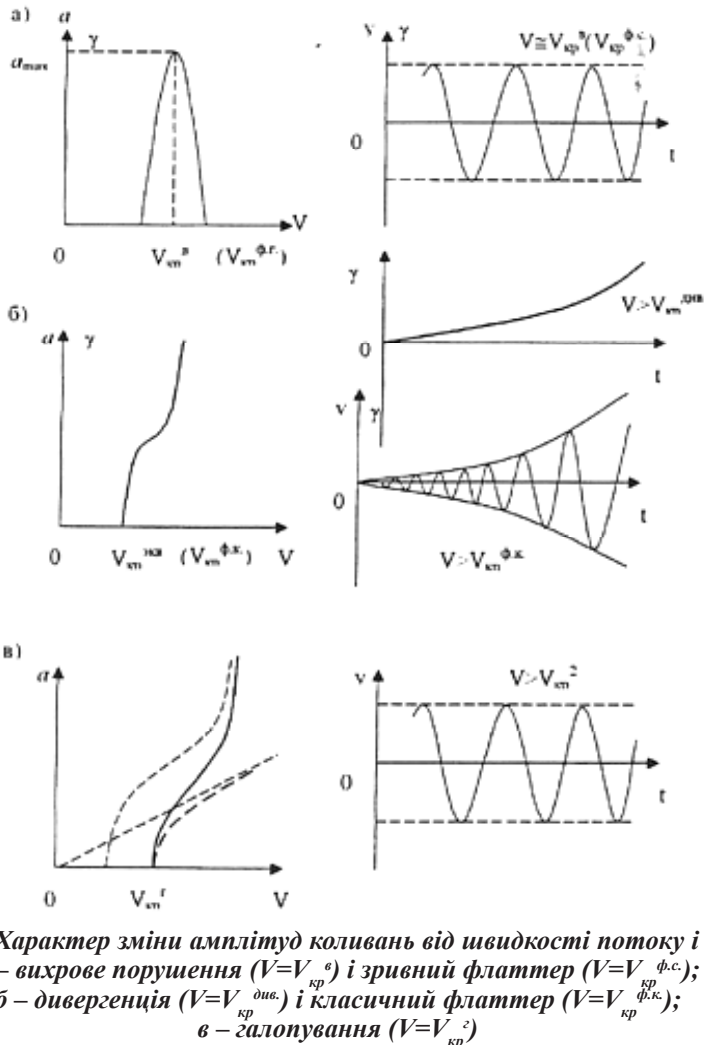


Рис. 6. Характер зміни амплітуд коливань від швидкості потоку і часу:  
 а – вихрове порушення ( $V=V_{cr}^0$ ) і зривний флаттер ( $V=V_{cr}^{\phi.c}$ );  
 б – дивергенція ( $V=V_{cr}^{div}$ ) і класичний флаттер ( $V=V_{cr}^{\phi.k}$ );  
 в – галопування ( $V=V_{cr}^2$ )

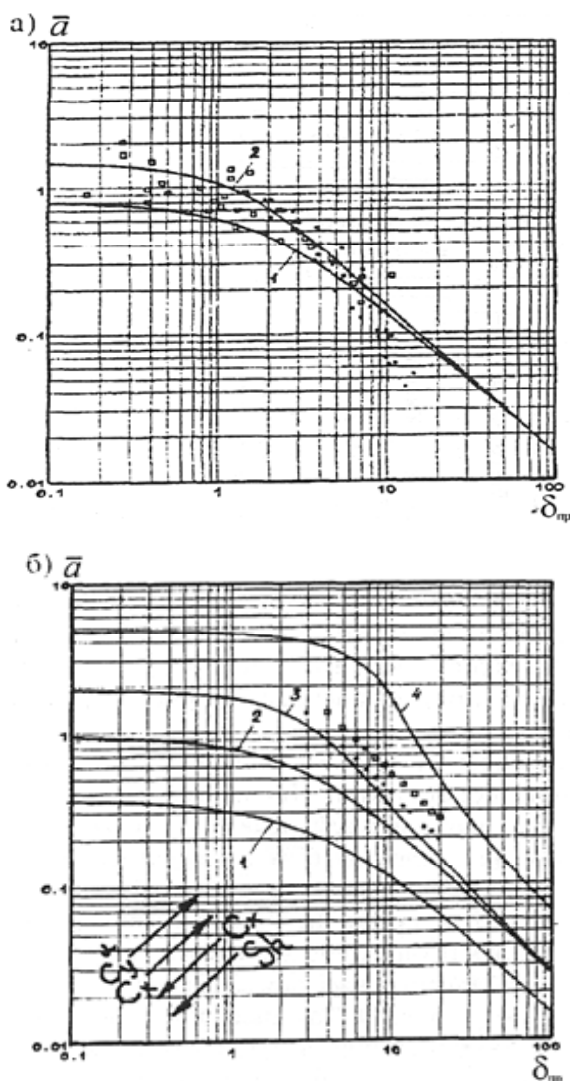


Рис. 7. Залежність відносної амплітуди коливань вихрового порушення від числа Скратона (приведеного демпфірування) [1]: а – для гнучких елементів із круговою формою поперечного перерізу при різних режимах обтікання, 1 – докритичний; 2 – закритичний; б – для гнучких елементів із довільною формою поперечного перерізу. Точками відзначені експериментальні дані

### Приклади практичної реалізації аеропружної стабілізації конструкцій.

Не всі запропоновані аеродинамічні методи стабілізації конструкцій можуть в однаковій мірі застосовуватися в будівництві. Більш того, деякі з них кращі тільки в горизонтальних елементах конструкцій. Варто враховувати, що багато методів, що знижують амплітуди коливань, одночасно призводять до збільшення, іноді значного, лобового опору, поперечної сили й аеродинамічного моменту. Добре відома робота Р. Прісе [1], одна з найбільш ранніх і докладних. У ній пропонуються різноманітні способи демпфірування коливань поганообтікаючих тіл циліндричної форми, включаючи трубопроводи, димарі, вежі. Серед цих способів були: навівання дроту, встановлення ребер жорсткості, втулок, перфорованих кожухів. Саме Р. Прісе звернув увагу на вплив цих пристосувань на лобовий опір. Зокрема, використання перфорованих кожухів запобігає кризи обтікання, тому що лобовий опір залежить не від числа Рейнольдса, а тільки від ступеня перфорації, тобто від аеродинамічної прозорості кожуха (рис. 8).

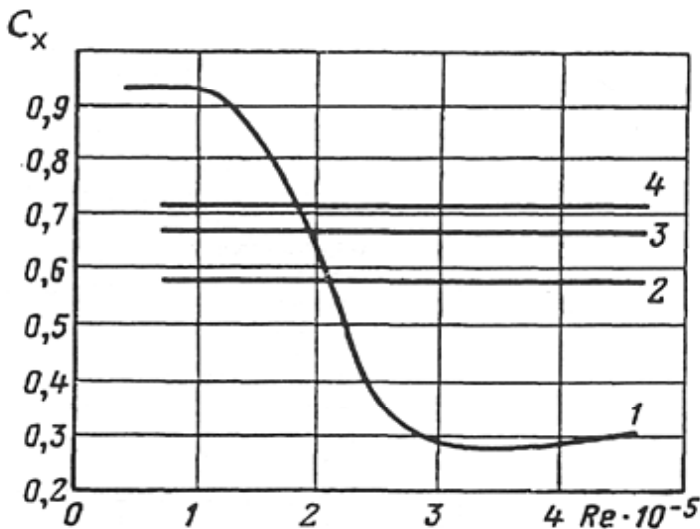
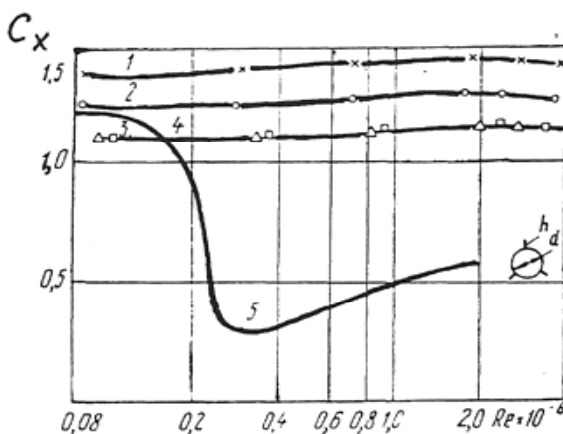
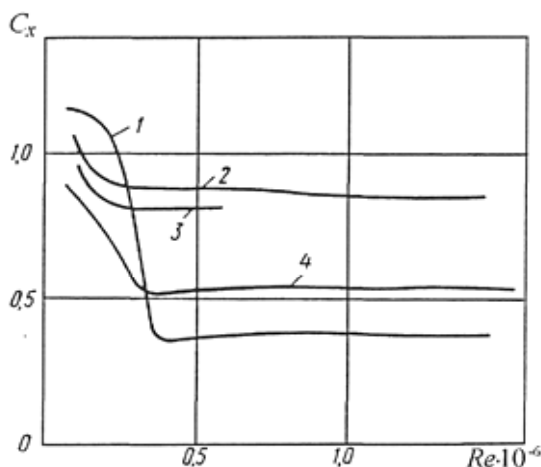


Рис. 8. Вплив перфорованого циліндричного кожуха на лобовий опір кругового циліндра: 1 – гладкий циліндр; 2 – діаметр отворів перфорації 12,5%, відстань між отворами 12,5%; 3 – те ж, 4,17% – 4,17%; 4 – те ж, 4,17% – 12,5%

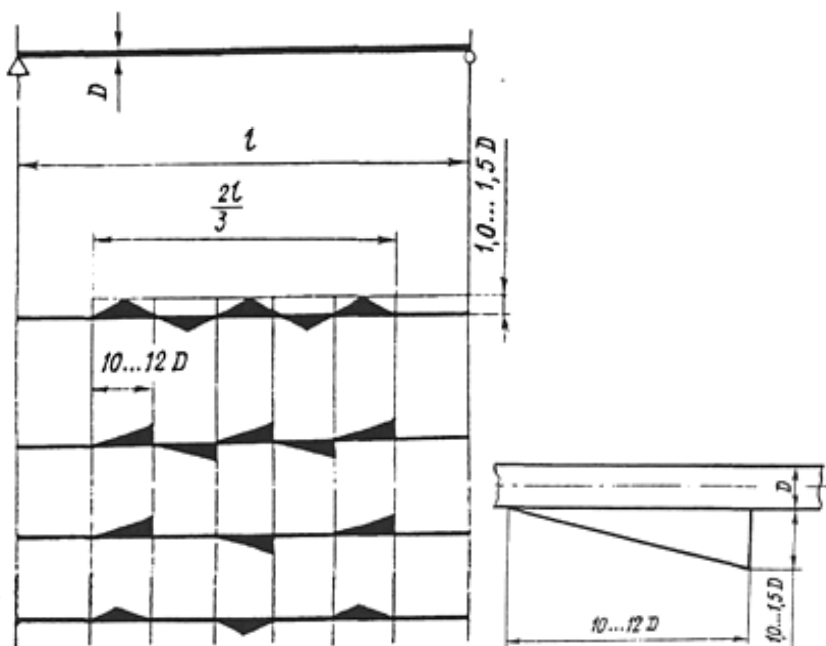


**Рис. 9.** Вплив ребер жорсткості на лобовий опір кругового циліндра



**Рис. 10.** Вплив навивання дроту на лобовий опір кругового циліндра

Варто звернути увагу на те, що різні аеродинамічні методи створюють ефект стабілізації завдяки різноманітним явищам аеромеханіки. Так, установка дротів паралельно твірній циліндра дозволяє зафіксувати точки зривання вихорів і знизити напруженість вихорів у широкому діапазоні числа Рейнольдса. Одночасно, спіральне навивання дроту створює фазовий зсув у зриві вихорів, тобто порушує синхронізацію зриву вихорів уздовж елементу.



*Рис. 11, а. Интерцентри Берда*

Перфорований зовнішній кожух сприяє здуванню суміжного шару. Знову звернемося до аеродинамічних якостей різних способів стабілізації. Слідом за Р. Price, С. Cowdrey і J. Lawes [1] підтвердили різке зростання лобового опору циліндра у випадку використання ребер жорсткості  $h/d = 0.06$  і  $h/d = 0.12$  (рис.9).

Ці дослідження були продовжені М. Pris [1]. На рис. 10 показаний вплив навивання. Интерцентри Берда [2] були ефективно використані для стабілізації горизонтальних елементів, зокрема, підвісних трубопровідних мостів (рис. 11, а). Спиральне навивання дроту дуже ефективне (рис. 11, б), якщо можливо оптимізувати діаметр дроту при мінімальному підвищенні лобового опору (рис. 10).

Крім того, на протигагу ребрам жорсткості, включаючи интерцентри Берда, у місцях контакту дроту з конструкцією концентрація напружень відсутня. Проблема стабілізації конструкцій у потоці виявилася найбільш актуальною в області мостобудування. Так, сучасні гнучкі балкові, висячі і вантові мости мають легкообтічну форму поперечного перерізу. Вони подані на рис. 12.

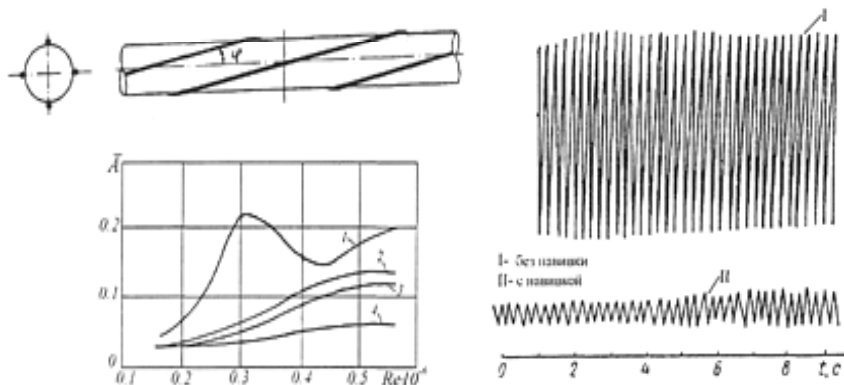


Рис. 11, б. Оптимальні параметри спірального навивання дроту  $\phi=110$ ;  $d/D=0,003$ : 1 – без навивання, 2 –  $n=8,3$ , 3 –  $n=3,4$ , 4 –  $n=4$

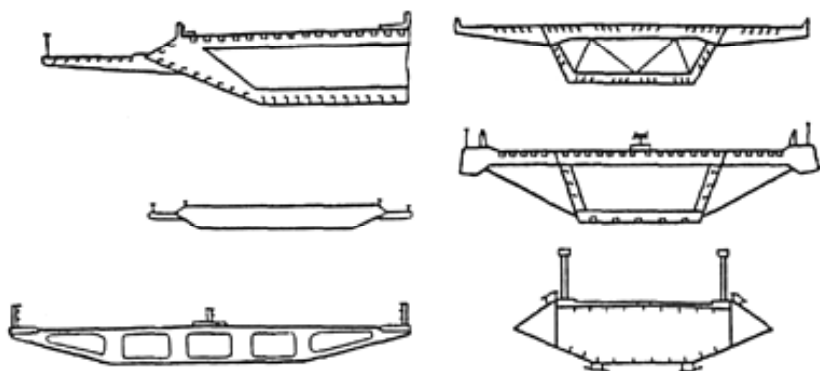


Рис. 12. Підвищення аеродинамічних якостей поперечних перерізів мостів

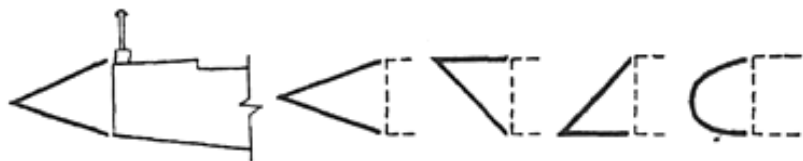


Рис. 13. Моделі об тікачів пролітних споруд мостів

Мостам надається така ж форма і при експлуатації, якщо вони виявляють аеропружну нестійкість після зведення. Це досягається за допомогою різноманітних обтікачів, як показано на рис. 13.

Такі обтікачі знайшли застосування на мостах Yamato (Японія), St. John (США) і Long Harbour (Канада). Результати випробувань моста Long Harbour (Канада) в аеродинамічній трубі показані на рис. 14, а вантового моста Katsushika-Edogawa (Японія) – на рис. 14,б.

Дуже ефективною є стабілізація коробчатих мостів за допомогою перфорації стінок головних балок, коли вітровий потік проходить крізь конструкцію, як це зображено на рис. 15 для вантового моста через р. Вере в Тбілісі. Ефективне використання дефлекторів, як показано на рис. 12, для пішохідного моста Kawasaki-Busi (Японія) і на рис. 15,б – на пілоні пантового моста Katsushika-Edogawa (Японія).

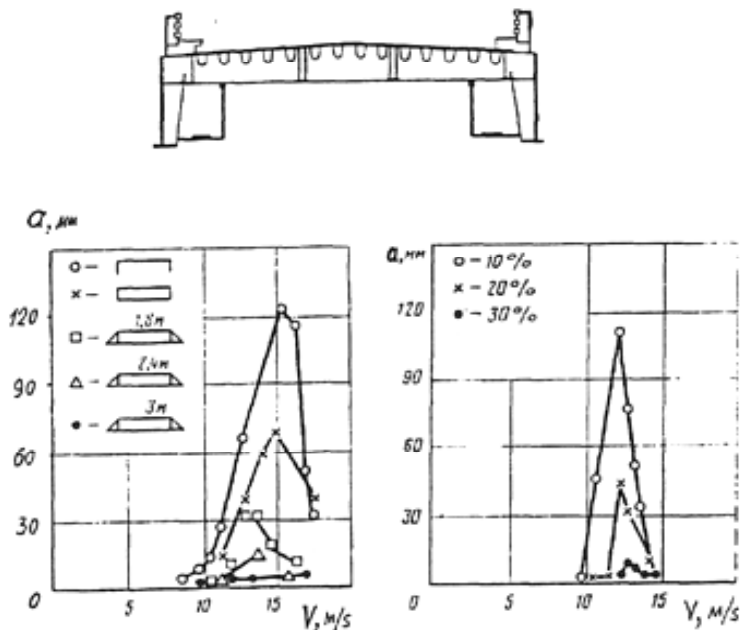


Рис. 14, а. Ефективність обтікачів вантового моста Long Harbour (Канада)

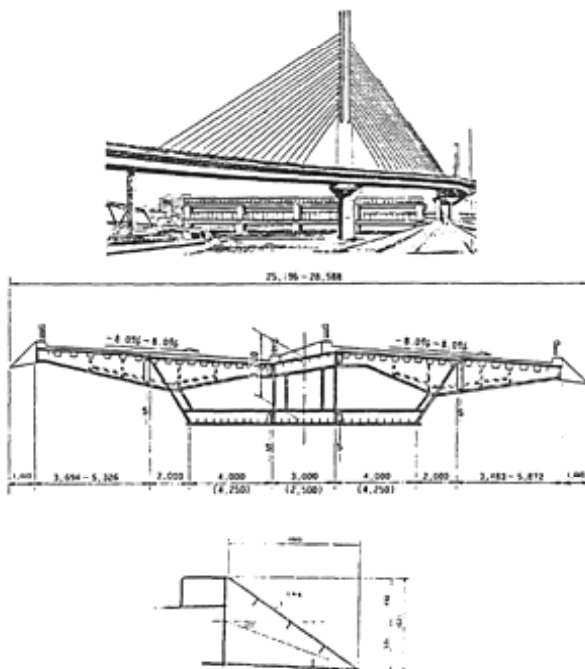
Ефективне застосування наскрізних каналів для стабілізації призматичних пілонів висячих і вантових мостів. Цей спосіб був запропонований для варіанту вантового моста через р. Дніпро в м. Дніпропетровську (Україна) (рис. 16).

Ідея устрою наскрізних каналів для стабілізації гнучких висотних споруд добре відома [ 1 ] і використовувалася для стабілізації монументів (рис. 17):

- а. м. Брест (Білорусь) – 100 м;
- б. м. Волгоград (Росія) – 100 м;
- в. м. Самара (Росія) – 52 м.

У такий спосіб була вирішена проблема стабілізації монумента Перемоги висотою 142 м на Поклонній горі в м. Москва (Росія). Наскрізні канали було виконано на висоті від 100 до 142 м. На рис. 18 надані результати аеродинамічних випробувань моделі монумента в масштабі 1:10 у великій аеродинамічній трубі ЦАГІ ім. проф. М.Є. Жуковського.

Використання перфорованого настилу на двох висячих трубопровідних мостах через р. Амудар'ю (Афганістан) прольотом 660 м і через р. Дніпро (Україна) прольотом 720 м дозволило запобігти галопування. На рис. 19 надана фотографія секційної моделі і її геометрична схема, а на рис.20 результати випробувань в аеродинамічній трубі ЦАГІ ім. проф. М.Є. Жуковського.



*Рис. 14, б. Обтікачі вантового моста Katsushika-Edogawa (Японія)*

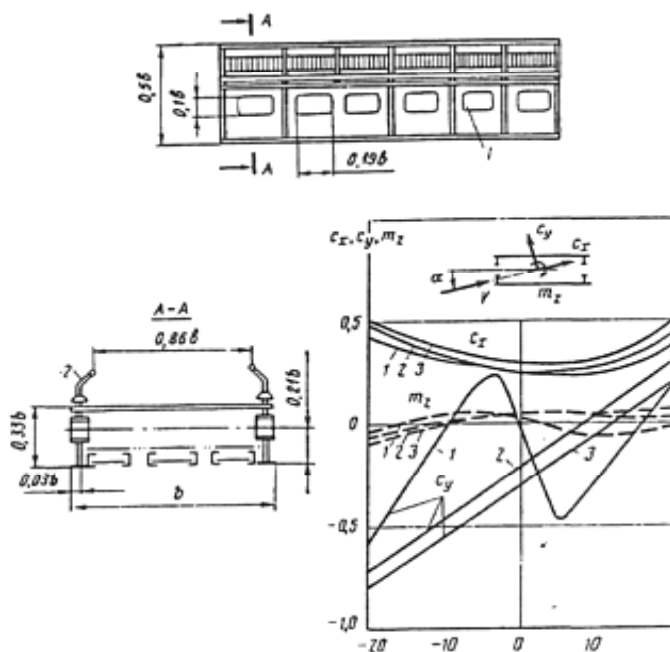


Рис. 15, а. Модель балки жорсткості вантового моста через р. Вере в Тбілісі (Грузія)

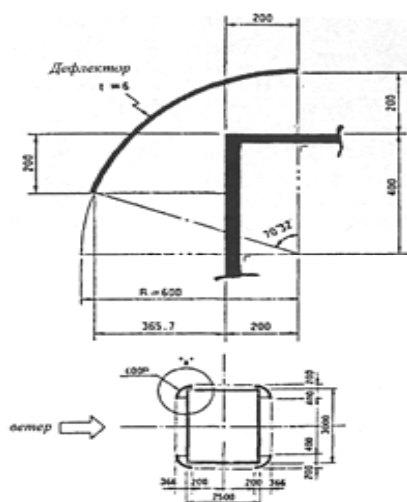
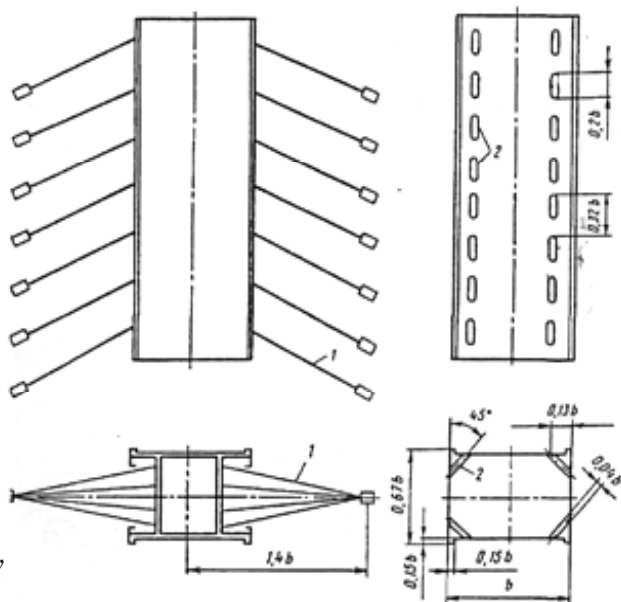
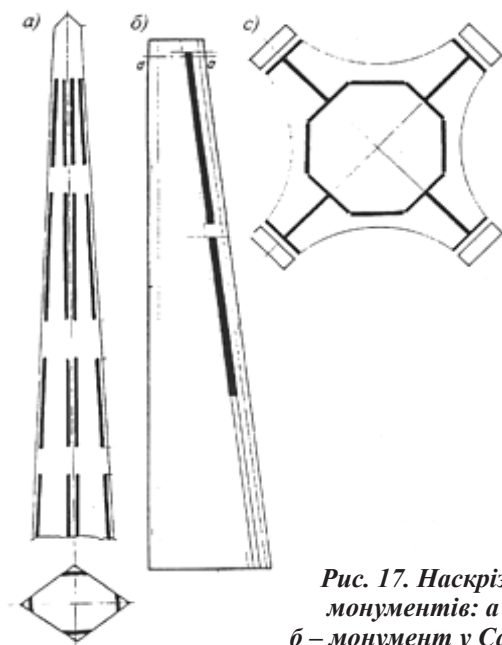


Рис. 15, б. Дефлектори пілона вантового моста Katsushika-Edogava (Японія)



*Рис. 16. Модель  
пілона вантового  
моста через  
р. Дніпро в  
Дніпропетровську  
(проект)*



*Рис. 17. Наскрісні канали для стабілізації  
монументів: а – монумент у Волгограді;  
б – монумент у Самарі; в – монумент у Бресті*

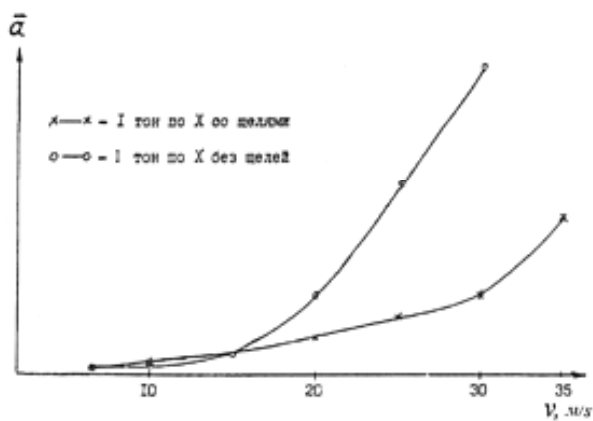


Рис. 18. Результати випробувань моделі монумента Перемоги

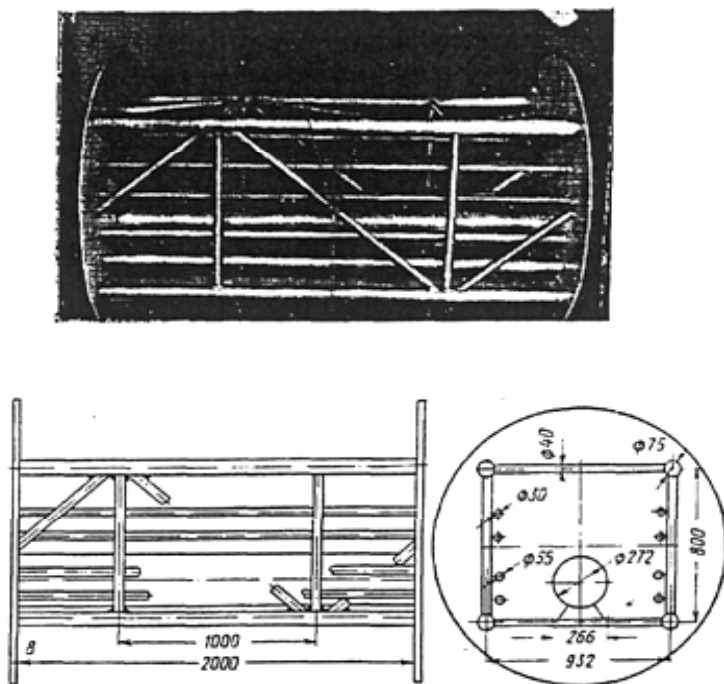


Рис. 19. Секційна модель висячого моста через р. Амудар'ю в Афганістані

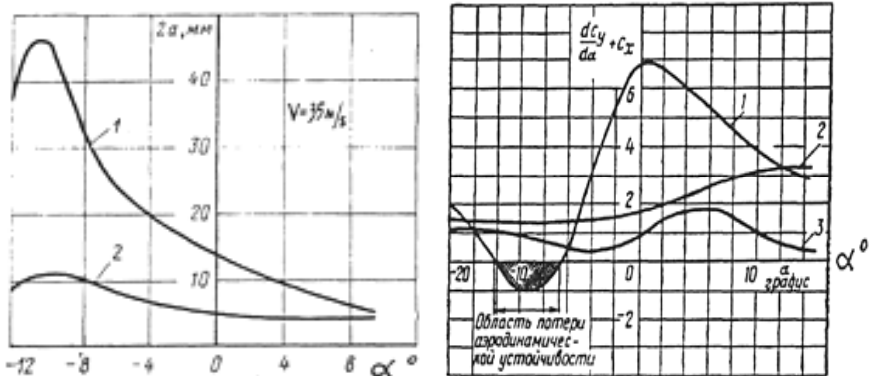


Рис. 20. Вплив перфорації настилу на аеропружну стійкість висячого моста через р. Амудар'ю: 1 – суцільний настил; 2 – перфорований настил (до 30%); 3 – без настилу

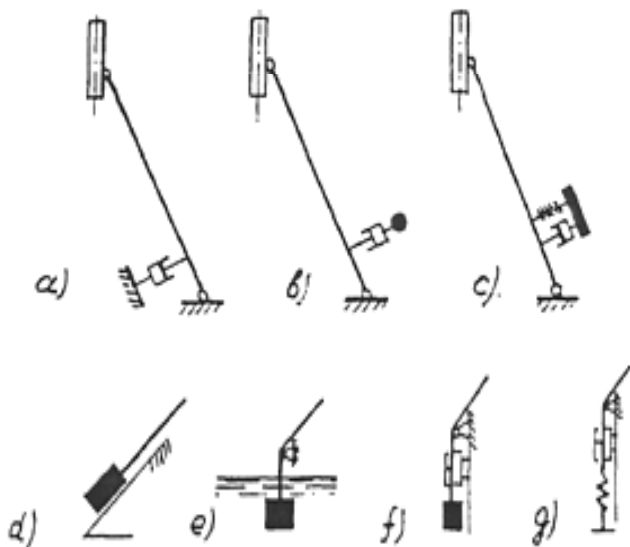
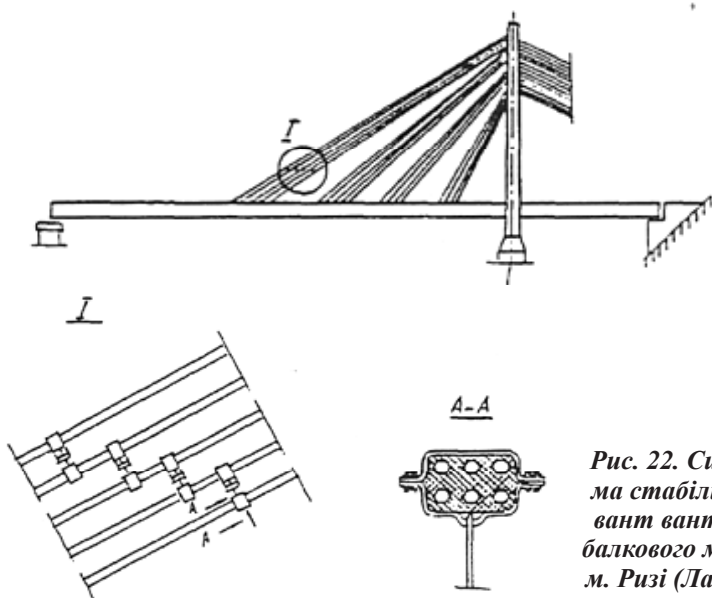


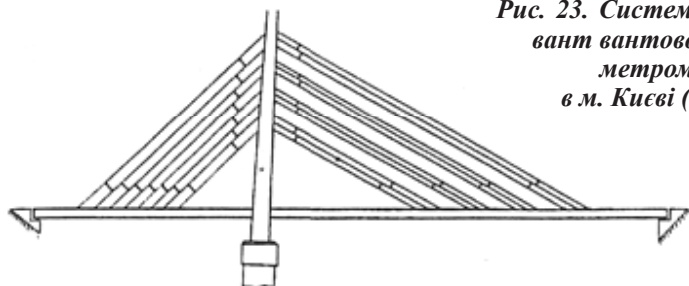
Рис. 21. Схема амортизації вант



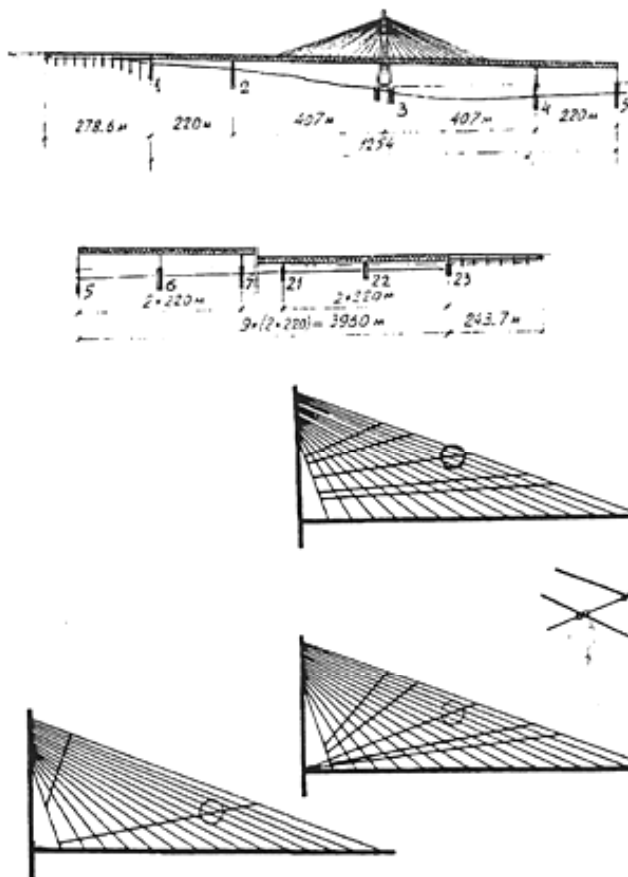
**Рис. 22. Система стабілізації вант вантово-балкового моста м. Ризі (Латвія)**

Географія і довжини прольотів сучасних висячих і вантових мостів вражають. Поряд із цим, їхній подальший розвиток висуває важливу проблему стабілізації вант. Більш докладно вона викладена в роботі [3]. Коливання вант мають різноманітну природу:

1. аеропружна нестійкість вант у вітровому потоці;
2. динамічна реакція пілонів на дію вітру;
3. динамічна поведінка пролітної споруди моста в полі вітрових і рухливих навантажень;
4. ожеледно-заморозні відкладення на вантах;
5. взаємодія вант із вітровим потоком при зливах (дошові коливання).



**Рис. 23. Система стабілізації вант вантово-балкового метромоста в м. Києві (Україна)**

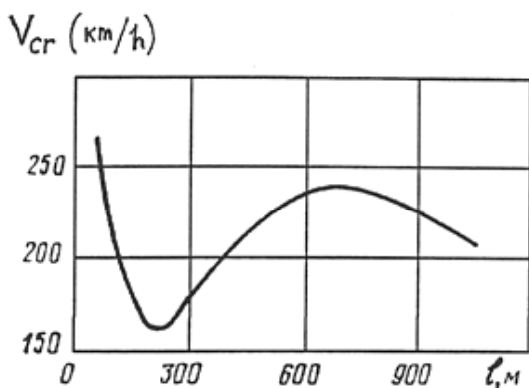


**Рис. 24. Стабілізація вант двоярусного висячого моста в м. Ул'янівську (Росія)**

Іноді для стабілізації вант використовуються різні демпфіруючі улаштування у вигляді додаткових мас і поглиначів (рис. 21).

Найбільш ефективні розробки були реалізовані на реальних об'єктах:

- 1) міст прольотом 312 м в м. Ризі (Латвія), зображений на рис. 22;
- 2) метроміст прольотом 270 м в м. Києві (Україна) (рис. 23) і
- 3) в проєкті двоярусного моста прольотами 410+410 м в м. Ул'янівську (Росія) (рис. 24).



*Рис. 25. Зміна критичної швидкості на різних стадіях монтажу моста Severn (Англія)*

У всіх трьох випадках в основу методу стабілізації вант була покладена ідея об'єднання всіх ізольованих вант у єдину вантову систему. При цьому дискретний спектр частот окремих вант різної довжини і зусилля натягнення трансформуються в «розмазаний», безперервний, спектр. Це унеможливує як автоколивання будь-якої окремої ванти, так і коливання вантової системи в цілому. Жорсткі розпірки, що з'єднують ванти в «вантову систему», на кожному зі згаданих мостів, мають такі особливості:

1. вони розташовані з визначеною закономірністю;
2. у вузлах їхнього кріплення з вантами вони мають додаткові джерела поглинання енергії коливань;
3. у необхідних випадках вони забезпеченні поглиначами.

Цей метод стабілізації довів свою високу ефективність. Крім того, розпірки естетичні, прості у виробництві і на монтажі, ремонтоздатні, безпечні для пішоходів і транспорту і практично не потребують додаткових експлуатаційних витрат.

### Висновки

Гарантія аеродинамічної стійкості конструкції в процесі експлуатації є основним об'єктом даного аналізу. Але в період монтажу динамічна жорсткість і дисипативні властивості конструкцій часто виявляються значно нижчими, чим при експлуатації. Внаслідок цього значення критичної швидкості явищ аеропружної нестійкості також знижуються. На цей факт уперше звернули увагу під час монтажу висячого моста Severn (Англія) (рис. 25).

Таким чином, при розробці заходів для стабілізації конструкцій у потоці перевагу варто віддавати тим, що ефективні як при

## АЭРОДИНАМИЧЕСКАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ КОРОБЧАТЫХ МОСТОВ\*

Характерной формой поперечного сечения большинства гибких мостов, как пешеходных, так и городских, балочной, висячей или вантовой системы, является замкнутая прямоугольная коробка с консолями, схематически изображенная на рис. 1. Такие мосты, как правило, очень чувствительны к ветровым нагрузкам. Поэтому при проектировании и в дальнейшем при эксплуатации коробчатых мостов весьма актуальна проблема их статической стабилизации, т.е. снижения горизонтальной ветровой нагрузки (лобового сопротивления) на пролетные строения.

Сформулированная таким образом цель решается экспериментально в аэродинамической трубе с помощью серии моделей. Модели пролетного строения коробчатой формы позволили варьировать удлинение  $L/H$  замкнутой коробки, удлинение консолей  $l/H$  и относительную высоту вертикальных стабилизаторов  $h/H$  в широких пределах:  $L/H=1; 2; 3; 4$ ;  $l/H=0,5; 1,0; 1,5; 2,0$ ;  $h/H=0; 0,25; 0,5; 0,75; 1,0$ .

Можно утверждать, что исследованные соотношения параметров  $L/H$ ,  $l/H$  и  $h/H$  охватывают практически все существующие и реально возможные размеры коробчатых пролетных строений мостов. Экспериментальные исследования были проведены в аэродинамической трубе Днепропетровского государственного университета. Выбор масштаба моделей упрощается в силу очевидной автомодельности обтекания тел с подобной формой поперечного сечения (рис. 1).

Для повышения достоверности результатов экспериментальных исследований каждый опыт при фиксированных значениях параметров  $(L/H)_i$ ,  $(l/H)_i$  и  $(h/H)_i$  повторялся 6 раз с последующим осреднением данных.

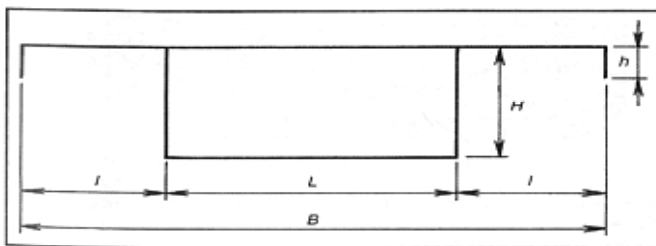


Рис. 1. Схема поперечного сечения коробчатого моста

\*Опубликовано в ж-ле «Вестник мостостроения», № 3-4, 2001, Москва.

Основные результаты исследований, позволяющие определить оптимальные соотношения параметров  $h/H$  при различных фиксированных значениях параметров  $L/H$  и  $l/H$ , представлены на рис. 2. В качестве критерия оптимальности принято максимальное снижение лобового сопротивления  $c_x$ . Как следует из рис. 2, при заданных значениях основных геометрических размеров поперечного сечения коробчатой формы  $L$ ,  $H$  и  $l$  можно назначить эффективную высоту  $h$  вертикальных стабилизирующих щитов.

Наряду с оценкой лобового сопротивления различных моделей в процессе аэродинамических исследований анализировалась подъемная сила с целью изучения влияния вертикальных стабилизаторов на потерю аэроупругой устойчивости по критерию Ден-Гартога:

$$c_y^\alpha + c_x < 0; c_y^\alpha = \frac{dc_y}{d\alpha}.$$

Приведенные на рис. 3 графики зависимости аэродинамического параметра  $(c_y^\alpha + c_x)$  от соотношений  $L/H$ ,  $l/H$  и  $h/H$  позволяют выделить области возможной аэроупругой неустойчивости типа галопирования. В то же время они показывают высокую эффективность предлагаемых вертикальных стабилизаторов по предотвращению аэроупругой неустойчивости.

Представленные в графическом виде на рис. 2 зависимости  $c_x$  можно аппроксимировать функцией вида:

$$c_x = a_0 + a_1(h/H) + a_2(l/H) + \\ + a_3(L/H) + a_4(lh/H^2) + a_5(hL/H^2) + \\ + a_6(lL/H^2) + a_7(l^2/H^2).$$

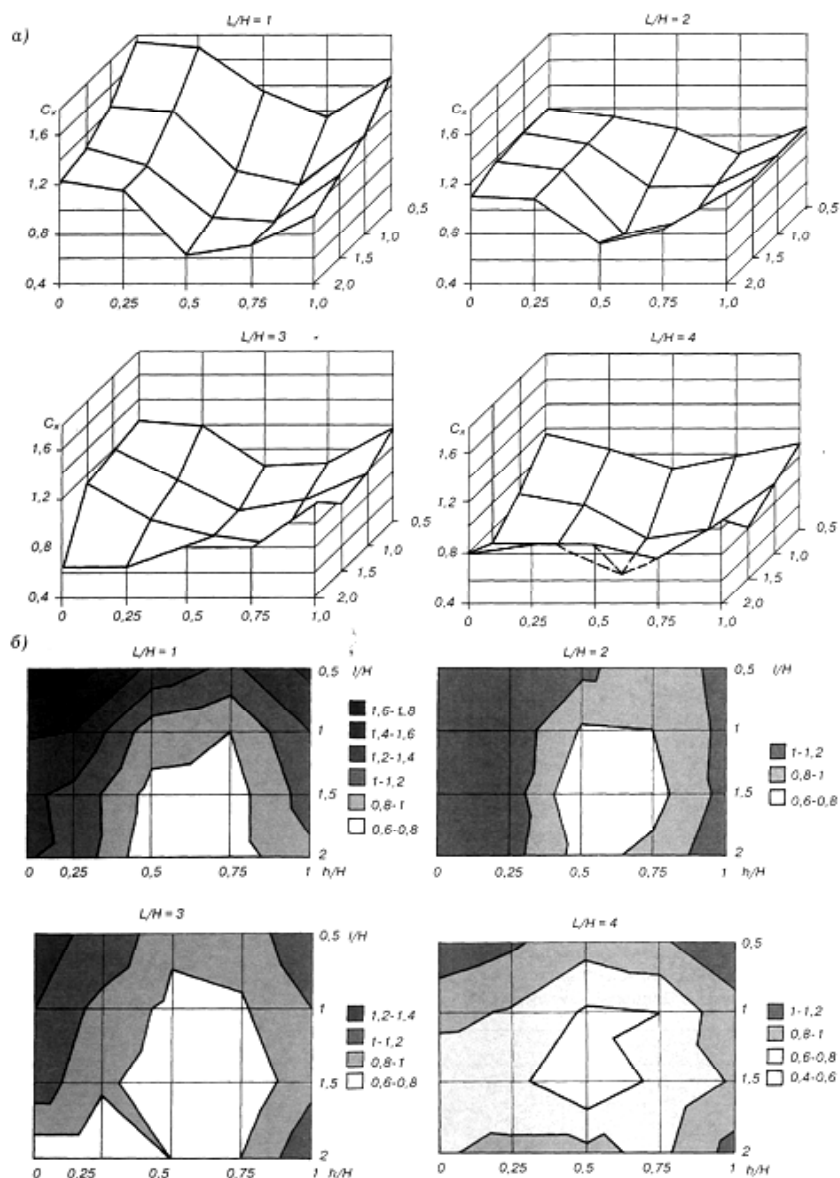
Значения коэффициентов  $a_i$  аппроксимации приведены ниже:

$$a_0 = 2,5625; a_1 = -1,8089; a_2 = -1,0933; a_3 = -0,3222; a_4 = 0,2159; a_5 = 0,1636; a_6 = 0,9841; a_7 = 0,2612.$$

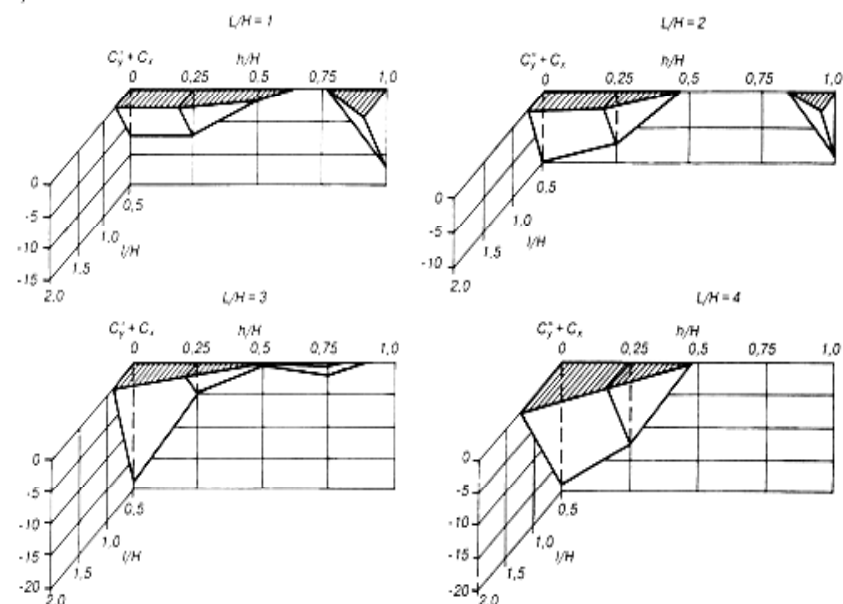
Предложенная аппроксимация обнаруживает незначительное влияние отношения  $L/H$  на аэродинамические качества коробчатых мостов.

Среднеквадратичная ошибка для  $c_x$  составляет 2,2%, что в максимальной мере соответствует точности инженерных расчетов.

Стабилизирующее действие предложенных вертикальных элементов объясняется образованием обширной зоны разрежения за наветренным элементом и регулированием поведения ветрового потока при обтекании пролетного строения. Вертикальные пластины, установленные по торцам консолей, управляют потоком: обеспечи-



а)



б)

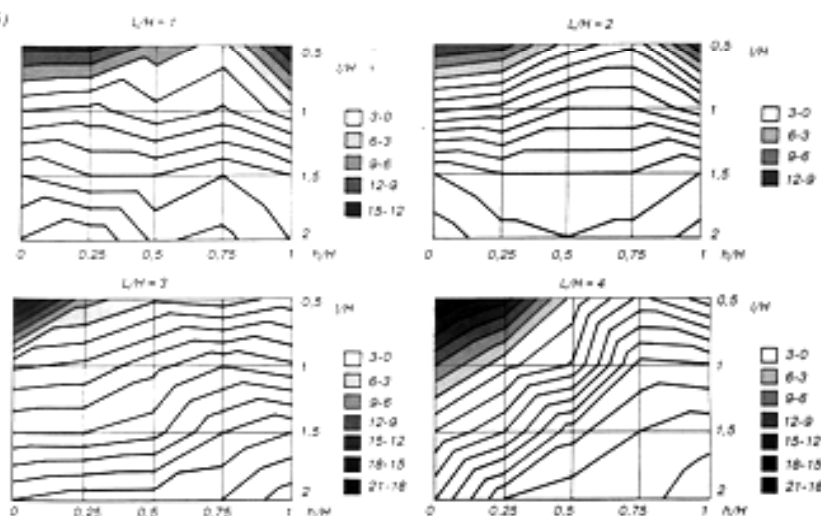


Рис. 3. Влияние геометрических параметров  $L$ ,  $H$ ,  $l$ ,  $h$  коробчатых мостов на потерю аэроупругой устойчивости: а – трехмерное представление; б – двухмерное представление (изолинии) (области значений параметров  $l/H$  и  $h/H$ , при которых возможна аэроупругая неустойчивость галопирующего типа выделены штриховкой)

вают вторичный отрыв с нижнего пояса наветренной главной балки и «прилипание» потока к верхней и нижней поверхностям пролетного строения.

Стабилизирующее влияние вертикальных ребер по торцам консолей на лобовое сопротивление было использовано при строительстве пешеходного моста пролетом 7+95 м через р. Нерис в г. Вильнюсе (Литва). При размерах коробчатого поперечного сечения  $B/H = 7,2/1,8$  м и вылете консолей  $l = 1,8$  м высота ребер  $h$  составила 0,9 м. Принятое соотношение  $h/H = 0,5$  соответствовало результатам экспериментальных исследований, представленным на рис. 4, по оптимизации параметра  $h/H$  для данного мостового перехода. Это конструктивное решение защищено авторским свидетельством.

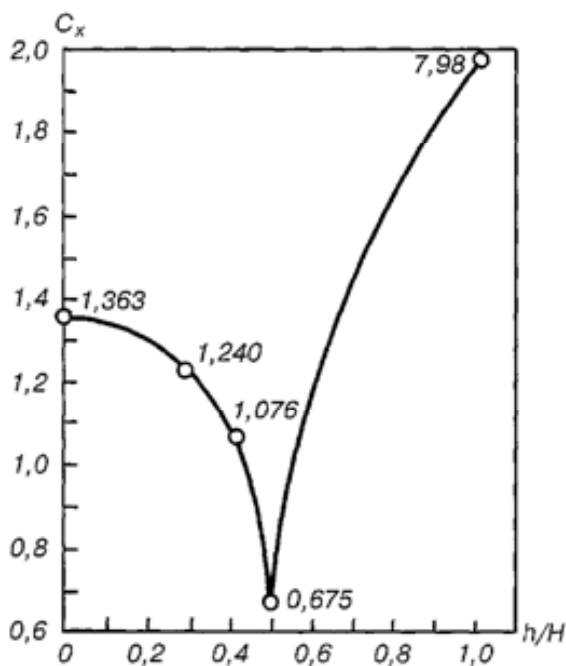


Рис. 4. Определение оптимального значения параметра  $h/H$  для пешеходного моста в г. Вильнюсе

# ГЕНЕРИРОВАНИЕ ВЕТРОВЫМ ПОТОКОМ ИНФРАЗВУКОВЫХ ВОЛН В ПРИЗЕМНОМ СЛОЕ АТМОСФЕРЫ\*

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Влияние низкочастотной вибрации зданий и сооружений в частотном диапазоне 0,1–10 Гц, вызванной взаимодействием их с ветровым потоком, на организм человека, его профессиональную деятельность достаточно хорошо изучено и подробно описано М.И. Казакевичем и В.В. Кулябко [10]. Такой реакцией обладают гибкие конструкции типа висячих и вантовых мостов и трубопроводов (М.И. Казакевич [9], E. Simiu и R.H. Scanlan [22]), **высотных сооружений, линий электропередач** (Е.В. Горохов, М.И. Казакевич и др. [8]).

Новой проблемой в ветроинженерии является генерирование инфразвуковых волн (ИЗВ) и их влияние на биосферу. При этом можно выделить несколько важнейших аспектов данной проблемы:

- исследование механизма генерирования инфразвуковых волн в ветровом потоке;
- техника измерения инфразвуковых волн;
- физиологические и психологические последствия воздействия инфразвуковых волн на человека и животных;
- защита биосферы от вредного воздействия инфразвука.

Несмотря на то, что инфразвуковые колебания, возникающие от естественных, природных источников, переносят ничтожное количество энергии, штормовые ветры генерируют мощные инфразвуковые волны.

## 2. «ГОЛОС МОРЯ»

Генерирование инфразвуковых волн при взаимодействии ветрового потока с препятствиями – наименее изученная область ветроинженерии. Инфразвук – это область звуковых частот, которая лежит вне восприятия человеческого уха. Волны этого частотного диапазона характеризуются высокой проникающей способностью. Инфразвуковая область находится ниже 20 Гц – частотного предела слухового восприятия звука человеком. Такие волны человек скорее чувствует, чем слышит. Вместе с тем человек встретился со звуковыми волнами, генерируемыми взаимодействием ветрового потока с препятствиями, в древнейшие времена. С именем мифологическо-

---

\*Опубликовано в ж-ле «Вісник Донбаської державної академії будівництва і архітектури», т. 1, № 4(29), 2001, Макеевка.

го героя Древней Греции Эола, сына Посейдона и повелителя ветров связан древний музыкальный инструмент – эолова арфа. Эта воздушная арфа имела «эоловы струны» – струны разной толщины и устанавливалась на крышах домов. Звучание «эоловых тонов» менялось в зависимости от скорости ветра: от тихого и нежного до очень громкого.

Еще в 30–х годах В.В. Шулейкин и В.А. Березкин открыли [16] инфразвуковые колебания, возникающие в штормовом районе и названные В.В. Шулейкиным «голос моря». Распространяясь со скоростью около 330 м/с, инфразвуковая волна намного опережает движение породившего его урагана, предупреждая о надвигающемся шторме. Вот как описывает это явление сам В.В. Шулейкин: «Инфразвуковые волны, несомненно, рождаются над морем, и притом где-нибудь далеко от нас, там, где сейчас работает шторм. По-видимому, штормовой ветер, проносясь над неровной взволнованной поверхностью воды, создает периодические сгущения и разрежения в воздушной среде, и вот эти «сигналы о далеком шторме» несутся во все стороны от штормового района, как настоящий голос моря. Да, именно голос моря. Так и надо будет назвать это интересное явление, которое удалось обнаружить. ...Ведь инфразвуковые волны разносятся кругом в воздухе с той же скоростью (около 330 м/с), как и звуковые волны. Значит, они должны обгонять шторм и заблаговременно предупреждать о шторме. Вероятно, в морской воде они тоже возбуждаются (под действием колебаний давления в атмосфере над морем), а там они распространяются почти в 5 раз скорее, чем в воздухе».

Исследования В.В. Шулейкина показали [17], что при скорости ветра 20 м/с мощность инфразвуковых волн может достигать 3 Вт на погонный метр фронта морской волны. Сравнительно небольшой шторм рождает инфразвуковые волны с частотой 6 Гц и мощностью в десятки кВт. Как было установлено, именно такую частоту имеет инфразвук при высоте морских волн 1 м и скорости ветра 30 м/с. Более детально взаимодействие сильных ветров с морскими волнами изучено и описано Л.М. Бреховских [5,6], В.К. Cook [18], R.W.B. Stephens [23], W. Bonn [19] и др.

### **3. ДРУГИЕ ПРИМЕРЫ**

При обтекании сильным ветром пересеченной местности, в частности, горных массивов также генерируются инфразвуковые волны. Это явление было названо «горные волны» [15].

Более полно явление «вихревого звука» получило развитие в теоретических и экспериментальных исследованиях Д.И. Блохинцева

[3, 4], Д.В. Баженова [1, 2], Л.М. Лямшева [12], Б.А. Луговцева [11]. Природа этого явления связана с образованием вихрей при обтекании препятствий ветровым потоком воздуха. Поток при обтекании препятствия дробится па порции, создавая колебательное движение воздушных масс в приземном слое атмосферы. Если скорость потока невелика, а поперечные размеры препятствий велики, вихревой звук будет в инфразвуковом диапазоне. Нечто подобное наблюдается при обтекании зданий различного вида городских застроек [7].

Генерирование ИЗВ было обнаружено при воздействии ветра на гигантское сооружение 2400–метровой линейной антенной решетки в северо–восточной Атлантике [24]. ИЗВ в ветровом потоке изучали Wilson J. [25], Georges T.M. и Beasley W.H. [20].

Явление «поющих дюн» наблюдается на прибрежных песчаных дюнах при обдувании их ветровым потоком.

Очень мощные ИЗВ возникают и при извержении вулканов. Так, инфразвуковые волны с частотой 0,1 Гц, генерированные вулканом Кракатау при извержении в 1883 году, несколько раз обошли вокруг земного шара.

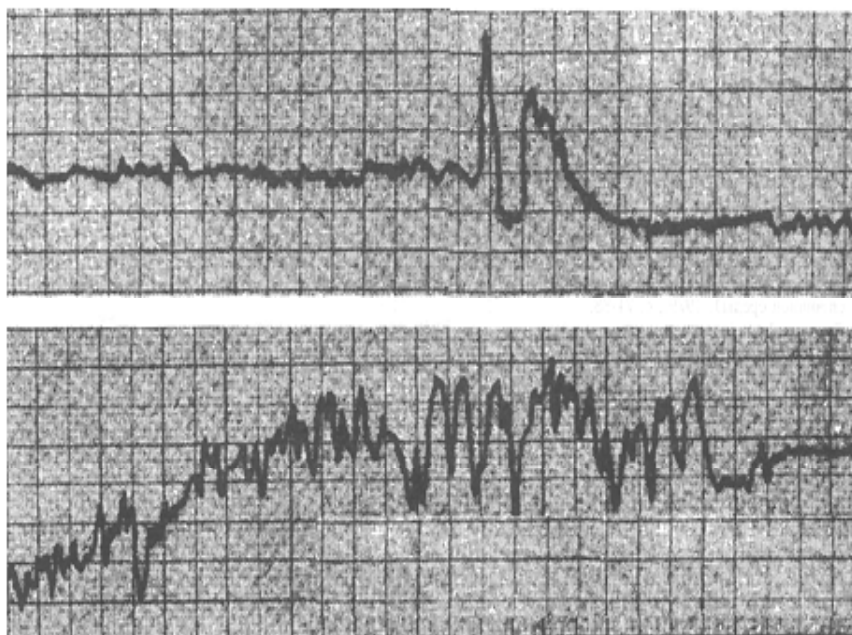
Распространение волн в однородной среде сопровождается затуханием [14]. Для ИЗВ затухание в атмосфере очень мало. Это объясняется зависимостью коэффициента затухания от квадрата частоты. В результате инфразвуковой шум распространяется на очень большие расстояния. Для них практически нет преград. Поглощение энергии ИЗВ с частотой 0,1 Гц в нижних слоях атмосферы очень мало и составляет всего  $2 \cdot 10^{-9}$  дБ/км. Поэтому их иногда называют «акустическим нейтрино». И хотя механизмы улавливания ИЗВ человеком и многими особями животного мира недостаточно изучены, тем не менее обитатели морей заблаговременно «знают» о приближении шторма. Аналогично, животный мир Земли чувствует приближение землетрясений и извержений вулканов.

По крайней мере, экспериментально установлено, что домашние животные слышат инфразвуковой «шум» с частотой 8–12 Гц [13]. В частности, домашние голуби воспринимают инфразвуковые колебания с нижним порогом частоты меньше 1 Гц. Этим объясняют природу ориентации птиц в пространстве при дальних перелетах в обход зон штормов и действующих вулканов.

#### **4. ДЕЙСТВИЕ ИНФРАЗВУКОВЫХ ВОЛН НА ОРГАНИЗМ ЧЕЛОВЕКА**

Исследования нарушений в функциях внутренних органов человека, подвергшегося воздействию инфразвука, находятся еще в начальной стадии. Однако, полученные результаты позволяют сделать

вывод о большой потенциальной опасности инфразвуковых волн для здоровья человека. Они способствуют потере чувствительности органов равновесия тела, что приводит к появлению боли в ушах, позвоночнике и повреждениям мозга. Еще более пагубным следует считать психологические последствия, обусловленные ИЗВ. Человек при воздействии инфразвуковых волн испытывает ощущение легкой тошноты, вращения, судорожных подергиваний глазных мышц и вращений глазных яблок, дискомфорта. Такие симптомы указывают на нарушения функций органов равновесия при облучении человека инфразвуком в диапазоне частот 2–10 Гц. Ответные реакции организма изучались при двух режимах работы источника инфразвука. На рис.1 представлены 2 записи биотоков при воздействии на организм инфразвука частотой 6 Гц при интенсивности 142 дБ и частотой 2 Гц при интенсивности 150 дБ. Первая кривая практически не отличается от реакции органов человека на многие другие воздействия. Вторая кривая значительно сложнее первой. Это свидетельствует о более существенных нарушениях функций органов равновесия.



*Рис.1. Записи электрических потенциалов глазных мышц при облучении пациента инфразвуком интенсивностью 142 дБ и частотой 6 Гц (вверху) и интенсивностью 150 дБ и частотой 2 Гц (внизу)*

При воздействии ИЗВ, как отмечается в работе [15], возникают разнообразные симптомы: сотрясение грудной клетки и брюшной полости, изменение ритмов дыхания и биений сердца, расстройства желудка и центральной нервной системы. В результате длительного воздействия инфразвуковых волн развивается значительная астения, что приводит к физическому упадку сил. В отдельных случаях снижается способность к умственной деятельности, появляется раздражительность, нарушается сон. Часто добавляются нейровегетативные нарушения и даже возникают психические нарушения на почве беспокойства, тревоги и страха.

Известны ультраструктурные изменения печени и поджелудочной железы [15]. Можно предположить резонансный характер воздействия ИЗВ на различные органы человека, частотные спектры которых приведены в работе [10].

## **5. МЕРЫ ЗАЩИТЫ И СПОСОБЫ РЕГИСТРАЦИИ**

Традиционные средства и меры борьбы с вредным влиянием ИЗВ на организм человека малоэффективны или вовсе непригодны. Для инфразвука механического происхождения определены основные направления исследований по снижению уровней интенсивностей [15]. Снижение воздействия ИЗВ, вызванных ветровым потоком, в силу специфических физических особенностей их происхождения не изучалось. Оно может быть связано с формами поведения человека в поле ИЗВ.

Для регистрации ИЗВ наибольшее распространение получили микрофоны специальной разработки известной датской фирмы «Брюль и Кьер» в комплекте с предусилителями и анализаторами инфранизкого спектра. Наряду с ними фирма создала также широкую гамму шумомеров, частотных анализаторов, фильтров и магнитофонов. Методики измерений и регистрации ИЗВ разнообразны и постоянно совершенствуются. Их современное состояние описано и комментируются в работе [15].

## ***Литература***

1. Баженов Д.В., Баженова Л.А., Римский-Корсаков А.В. Влияние турбулентности набегающего потока на тело и интенсивность излучения вихревого звука / В сб. Акустико-аэродинамические исследования. – М.: Наука, 1977, с. 35–41.
2. Баженов Д.В., Баженова Л.А., Римский-Корсаков А.В. Влияние вихревых вихрей на излучение вихревого звука. – Акустика, 1978, №24, вып. 3, с. 433–435.

3. Блохинцев Д.И. Вихревой звук, – ЖТФ, 1945, т. 15, вып. 1–2.
4. Блохинцев Д.И. Возбуждение резонаторов потоком воздуха. – ЖТФ, 1945, т. 15, вып. 1–2.
5. Бреховских Л.М., Гончаров А.И. К вопросу об излучении инфразвука в атмосферу поверхностными волнами в океане. – Изв. АН СССР, Физика океана, 1973, т. 9, № 9.
6. Бреховских Л.М., Гончаров В.В. Излучение звука пограничным слоем океан–атмосфера / В сб. Морское приборостроение. Сер. Акустика, вып. 1. – М.: Наука, с. 47–61.
7. Винокур Р.Ю. О распространении звука, создаваемого точечным источником в некоторых условиях городской застройки. – Акуст. журнал, 1979, №25, вып. 5, с. 666–669.
8. Горохов Е.В., Казакевич М.И., Шаповалов С.Н., Назим Я.В. Аэродинамика электросетевых конструкций. Донецк, 2000. – 336с.
9. Казакевич М.И. Аэродинамика мостов. – М.: Транспорт. 1987. – 240с.
10. Казакевич М.И., Кулябко В.В. Введение в виброэкологию зданий и сооружений. Днепропетровск, 1996. – 200с.
11. Луговцев Б.А. Турбулентные вихревые кольца / В сб. Нестационарные проблемы гидродинамики (Динамика сплошной среды). 1979., с. 71–88.
12. Лямшев Л.М. Об эоловых тонах. – Акуст. журнал, 1962, №8, вып.1, с. 91–98.
13. Новогрудский Е.Е., Шульгин А.И., Валиулин А.А. Инфразвук: враг или друг? – М.: Машиностроение, 1989. –64с.
14. Ржевкин С.Н. Курс лекций по теории звука. – М.: МГУ, 1960. – 261с.
15. Сокол Г.И. Особенности акустических процессов в инфразвуковом диапазоне частот. Промінь. Дніпропетровськ, 2000. – 136с.
16. Шулейкин В.В. Дни прожитые. Изд. 3. М.: Наука, 1972. – 604с.
17. Шулейкин В.В. Физика моря. – М.: АН СССР. 1953. – 230с.
18. Cook В.К., Young J.M. Strange in the atmosphere. – Sound Uses and Contr., 1962, v.1, №2.
19. Donn W., Vitte F. Infrasonics waves from marine storms. – Trans. Amer. Geoph. Union, 1967, v.48, №1.
20. Georges T.M., Beasley W.H. Refraction on infrasound by upper atmospheric winds. – J. Acoust. Soc. Amer., 1977, v.61, MH, pp. 28–33.
21. McGrath J.R. Infrasonic sea noise at the Mid Atlantic Ringe near 37° N. – J. Acoust. Soc. Amer., 1976, v.60, №6, pp. 1290–1299.
22. Simiu E., Scanlan R.H. Wind Effects on structures. 3 ed., 1996.
23. Stephens R.W.B. Infrasonics. – Revista de acoustica, 1971, v.2, №1/2, pp. 48–55.
24. Westervelt P.J. Parametis Acoustic Array. – Acoust. Soc. Amer., 1963, v.4, №35, pp. 536–537.
25. Wilson J. Spatial correlation of wind generated noise at very low-frequencies. – J. Acoust. Soc. Amer., 1972, v.52, №2, pp.34–36.

## АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ АЭРОДИНАМИКИ ВЫСОТНЫХ ЗДАНИЙ\*

*«... архитектура есть такая обширная наука, приукрашенная и обильно оснащенная массой разносторонних знаний...»*

*«архитектор ... человек, владеющий письмом, искусный в графике, обученный геометрии, знакомый с подбором рассказов из истории, прослушавший внимательно курс у философов, знающий музыку, не лишенный познаний в медицине, сведущий по части толкований юристами, обладающий знаниями астрономии и законов небесной механики...»*

*Марк Витрувий Поллион.  
Десять книг об архитектуре*

Новое массовое увлечение строительством высотных зданий требует более широкого применения архитекторами и инженерами научных достижений в различных областях знаний, в том числе физики, атмосферы, строительной аэродинамики, психофизиологических разделов медицины и ряда других. Именно это требование заставлял своим примером выдающийся архитектор древности Витрувий.

Мобилизация современных научных знаний позволяет более достоверно учитывать специфические особенности взаимодействия ветрового потока с высотными зданиями как в изолированном состоянии, так и в массивах городской высотной застройки различной композиции.

В рамках данного обзора не представляется возможным достаточно подробно изложить все многообразие особенностей взаимодействия ветрового потока с высотным зданием. Поэтому, наряду с изложением широкого спектра существующих проблем и их фрагментарной характеристики, данная работа описывает несколько наиболее значительных факторов, игнорируемых в связи с недостаточной компетентностью архитекторов и ответственностью властей.

К таким факторам, относятся в первую очередь:

– режимы обтекания, вызывающие возникновение качественно различных течений и потоков **вихревых, угловых, сквозных, винтовых**

---

\*Опубликовано в ж-ле «Металлические конструкции», УАМК, т. 13, № 3, 2007.

**и сопровождаемые «эффектом каньона»,**

– «эффектом аэродинамической трубы», «эффектом кобры» и «эффектом пылесоса»,

– триединые проявления дискомфорта, сопровождаемые «эффектом морской болезни» и «эффектом Монро».

### **Взаимодействие высотных зданий с ветровым потоком**

Взаимодействие высотных зданий с ветровым потоком обнаруживает большое разнообразие. Причину такого разнообразия следует искать как в свойствах ветрового потока, так и в многообразии высотных зданий. К свойствам ветрового потока можно отнести:

- скорость ветра;
- направление ветра;
- градиент ветрового потока (угол атаки);
- степень турбулентности потока.

К многообразию высотных зданий в этом аспекте мы относим:

- конфигурацию здания;
- композицию зданий в массиве окружающей застройки;
- ориентацию застройки зданий по отношению к преобладающим (или наиболее сильным) ветрам;
- шероховатость поверхности здания, наличие балконов, лоджий, выступающих элементов различной конфигурации и назначения;
- наличие «карманов» и сквозных проемов как на уровне пешеходов, так и на внешней поверхности;
- наличие внешних и внутренних углов здания;
- свойства подстилающей поверхности территории, окружающей здание.

Даже приведенного перечня свойств ветрового потока и многообразия типов высотных зданий достаточно для понимания сложности основных проблем при их проектировании. При этом не упомянуты важнейшие климатические факторы, взаимодействующие с ветровым потоком, такие как температура и влажность воздуха, профиль ветра в приземном слое атмосферы с учетом характеристики пограничного слоя земли, отложения снега с возможностью образования «снеговых мешков», гололедице-изморозевые отложения. Их влияние практически не поддается прогнозированию и должно моделироваться при экспериментальных исследованиях.

### **Фундаментальные особенности пространственного обтекания высотных зданий**

К фундаментальным особенностям обтекания относятся:

- трехмерность обтекания;

- атмосферная турбулентность;
- образование ускоренных течений;
- аэроупругие реакции на турбулентность реальных ветровых потоков;
- образование застойных «мертвых» зон;
- возникновение дискомфортных состояний внутри и вокруг зданий;
- стабилизация высотных зданий повышенной гибкости при ветровых воздействиях.

Ниже приведена краткая характеристика этих особенностей.

**Трехмерность обтекания** является важным свойством ветрового потока. Она обусловлена:

- конечными размерами высотных зданий;
- взаимодействием ветрового потока с высотным зданием в зоне границ его поверхности;
- градиентными свойствами ветрового потока в приземном слое атмосферы;
- степенным (или близким к нему) законом профиля ветрового потока в приземном слое атмосферы.

Трехмерность обтекания вызывает возникновение поля аэродинамических сил и моментов как главного фактора кинематического воздействия ветрового потока на высотные здания.

**Атмосферная турбулентность** ветрового потока возникает вследствие различных физических факторов:

- температурная конвекция;
- влияние пограничного слоя, обуславливающего профиль скорости ветра;
- обтекание углов плохообтекаемых тел, что приводит к отрыву потока или вихреобразованию.

Но основным фактором возникновения атмосферной турбулентности следует считать механический: неоднородный рельеф местности, кустарники, деревья, сооружения, здания, городская застройка создают порывы и пульсации ветрового потока.

Многие высотные здания, имеющие низкий и инфранизкий спектр частот собственных пространственных колебаний ниже 1 Гц и низкий уровень диссипации энергии, чувствительны к порывам ветра, т.е. к турбулентным потокам в приземном слое атмосферы.

**Образование ускоренных течений** в зоне высоких скоростей в приземном слое является следствием трехмерности потока при обтекании высотных зданий в массиве городской застройки.

Различают следующие виды течений (см. рис.1) [1].

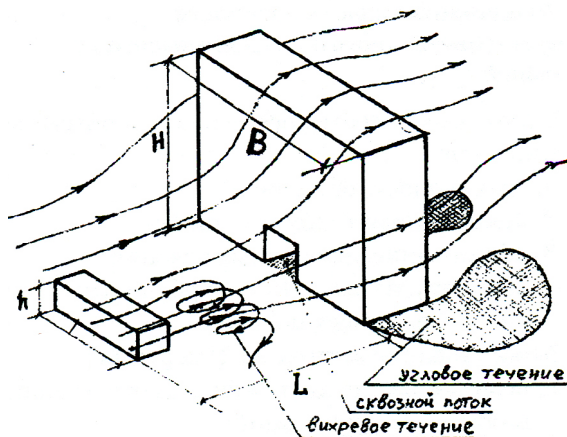
- **вихревые течения** – образуются за искусственными или есте-

стенными препятствиями перед высотным зданием;

– **угловые течения** – перетекания ветрового потока через углы здания, сопровождаемые ускорением потока;

– **сквозные потоки** – ускоренные течения вдоль высотных зданий плотной застройки («**эффект каньона**») или в проемах, арках, проходах зданий («**эффект аэродинамической трубы**»);

– **винтовые течения** – характерны для современных решений высотных зданий башенного типа конической, пирамидальной, винтообразной, сигарообразной и подобных архитектурных форм.



*Рис. 1. Виды течений*

Сквозные потоки в прикладной аэродинамике характеризуются как струйные течения. Действительно, если в нижней зоне здания имеется сквозной проем, то часть потока всасывается в виде струй из наветренной стороны в подветренную зону здания. Подобные течения возникают и в поперечном потоку направлении между соседними зданиями.

Скорость сквозного потока, как правило, является функцией четырех параметров:  $H$ ,  $B$ ,  $h$  и  $L$ . Как показывают различные исследования, при направлении ветра нормально к фасаду здания (угол атаки  $\alpha = 0$  и угол скольжения  $\beta = 0$ ) отношение максимальной скорости ветра в проеме здания  $V_c$  к скорости ветра на высоте  $H$  составляет  $V_c/V_H = 1,2$ . Следовательно, давление ветра на пешехода в проеме здания еще значительно возрастает, т.к. соотношение  $V_c/V_H$  связано со скоростью ветра на высоте  $H$ , а не на отметке проема.

**Образование застойных («мертвых») зон** можно наблюдать при

обтекании высотных зданий ступенчатого профиля, что может сопровождаться скоплением мусора, возникновением «снеговых мешков».

### **Современные аспекты аэродинамики высотных зданий**

Проектирование, строительство и эксплуатация высотных зданий требуют решения ряда организационных, юридических и инженерно-технических вопросов. К ним, в частности, относятся:

1. Создание Технических Условий по проектированию, строительству и эксплуатации высотных зданий. Они должны регламентировать назначение ветровых нагрузок с учетом микрометеорологического районирования, топографических особенностей рельефа местности и влияния окружающей застройки. В них также должны найти отражение:

- снеговые и гололедные воздействия на здания;
- воздействия локального давления на элементы зданий (в первую очередь, ограждающие конструкции);
- триединство действия ветра:
  - статическое,
  - пульсационное,
  - явления аэроупругой неустойчивости;
- воздействие одиночного порыва ветра.

В аэродинамических исследованиях высотных зданий должны найти отражение в максимальном объеме динамические расчеты с получением спектров собственных частот и соответствующих им форм пространственных колебаний, в том числе в процессе монтажа.

2. Создание динамического паспорта высотных зданий

3. Регулярная оценка дискомфорта состояний человека внутри и снаружи здания, в том числе:

- дискомфортная реакция организма человека на вибрации в зависимости от их уровня и дозы (**«эффект морской болезни»**);
- дискомфортная реакция организма человека на связанные изгибно-крутильные пространственные низкочастотные колебания высотных зданий башенного типа (**«эффект кобры»**);
- дискомфорт в зоне пешеходов, вызванный вертикальными потоками у поверхности земли (**«эффект Монро»**).

Особое значение в аэродинамике высотных зданий приобретает объективная оценка областей и значений локального отрицательного давления на боковые поверхности в угловых зонах и на кровлю. Она может быть получена лишь на основе аэродинамических экспериментальных исследований в аэродинамических трубах [2], либо при компьютерном моделировании. Это, несомненно, связано со значительными материальными затратами.

Вместе с тем, накопленный опыт и современные разработки национальных стандартов ряда стран позволяют дать конкретные рекомендации по назначению ветровых нагрузок на фрагменты стен и кровли высотных зданий в чувствительных зонах.

Не вникая в детальные характеристики геометрических параметров зон отрицательных значений ветрового давления, приведем его максимальные значения для угловых зон трех типов (см. табл. 1):

- внешние углы;
  - внутренние углы («карманы»);
  - скошенные углы,
- а также для двух типов кровли (см. табл. 2):
- плоские;
  - сферические, с учетом влияния высоты карниза.

Приведенные в табл. 1 и 2 аэродинамические коэффициенты лобового сопротивления имеют важное, а в некоторых случаях и определяющее значение при решении следующих проблем высотного строительства:

- теплоперенос стеновых ограждений, в т.ч. из стекла;
- прочность и надежность ограждающих конструкций из стекла, архитектурных деталей, элементов их крепления, оконных рам;
- экологические последствия образования в «карманах» застойных зон (хаотическое движение и скопление бытового мусора).

### **Триединые проявления дискомфорта**

Высотные здания, подверженные действию ветра, должны быть достаточно прочными, удовлетворять требованиям надежности и обладать современными потребительскими качествами. Опыт последних десятилетий строительства высотных зданий отмечает особую актуальность одного из потребительских качеств – пригодность к нормальной эксплуатации в условиях интенсивных ветровых воздействий.

Это требование в общих чертах можно сформулировать следующим образом: здание должно быть запроектировано так, чтобы его пространственные колебания в ветровом потоке не вызывали неприятных ощущений у людей, находящихся как внутри, так и снаружи здания на различных прилегающих территориях, площадках и пешеходных зонах [3,4].

Вызываемый взаимодействием зданий с ветровым потоком дискомфорт сказывается и на пригодности к нормальной эксплуатации как внутри зданий, так и открытых пространств в пределах плотной застройки зданий, а также объектов общественного назначения на нижних этажах.

Таблица 1

Максимальные значения аэродинамических коэффициентов в зонах  
разрежения на боковых поверхностях высотного здания

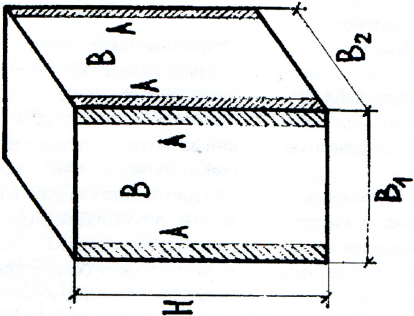
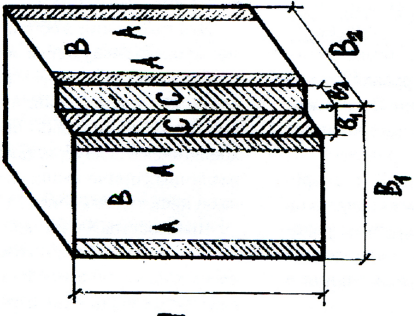
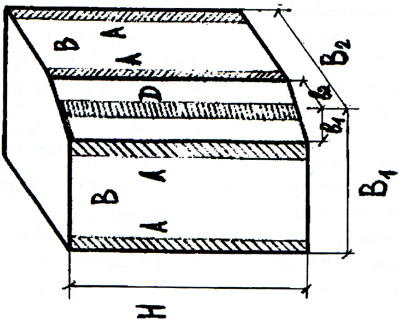
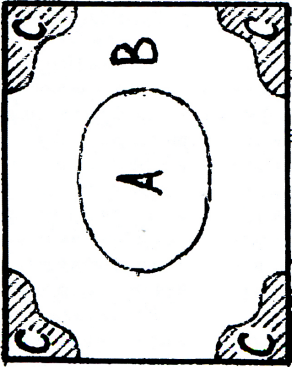
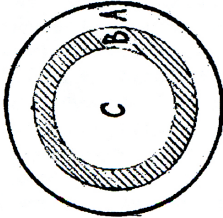

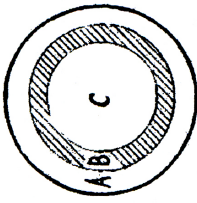
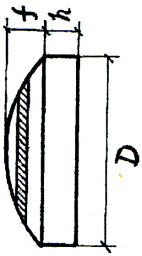
Прямоугольные стены	Прямоугольные стены с углубленным углом	Прямоугольные стены со скошенным углом
 <p> <math>C_a = -3,0</math>  <math>C_b = -2,4</math> </p>	 <p> <math>C_a = -3,0</math>  <math>C_b = -2,4</math>  <math>C_c = \begin{cases} -3,0 &amp; \text{при } b/B \leq 0,2 \\ -2,4 &amp; \text{при } b/B &gt; 0,2 \end{cases}</math> </p>	 <p> <math>C_a = -3,0</math>  <math>C_b = -2,4</math>  <math>C_d = \begin{cases} -3,0 &amp; \text{при } b/B \leq 0,2 \\ -2,4 &amp; \text{при } b/B &gt; 0,2 \end{cases}</math> </p>

Таблица 2

Максимальные значения аэродинамических коэффициентов в зонах разреза на кровле высотных зданий

Плоская кровля	Сферическая кровля	Сферическая кровля с карнизом
 <p> <math>C_a = -2,5</math>  <math>C_b = -3,2</math>  <math>C_c = -5,0</math> </p>	  <p> <math>C_a = (</math>  - 4,4 при <math>f/D = 0</math>  - 2,6 при <math>f/D = 0,5</math>  <math>C_b = (</math>  - 3,7 при <math>f/D = 0</math>  - 2,8 при <math>f/D = 0,5</math>  <math>C_c = (</math>  - 1,5 при <math>f/D = 0</math>  - 3,0 при <math>f/D = 0,5</math> </p>	  <p> <math>C_a = (</math>  max  - 5,1 при <math>f/D = 0</math>; <math>h/D = 0,25</math>  - 2,6 при <math>f/D = 0,5</math>; <math>h/D = 0,25</math>  <math>C_b = (</math>  max  - 3,7 при <math>f/D = 0</math>; <math>h/D = 0,25</math>  - 2,8 при <math>f/D = 0,5</math>; <math>h/D = 0,25</math>  <math>C_c =</math>  max  - 3,0 при <math>f/D = 0,5</math>; </p>

### Дискомфорт внутри здания

Описанные выше (см. табл. 1) краевые зоны существенного возрастания значений локального отрицательного давления – разрежения – приводят к невозможности открытия окон в этих зонах зданий из-за возникновения неблагоприятного дискомфортного явления – **«эффекта пылесоса»**.

Пригодность зданий к нормальной эксплуатации в контексте современных тенденций градостроительства приобретает особый аспект, а также в связи с участвовавшими случаями проявления недопустимого дискомфорта у людей, который вызван вибрациями зданий вследствие взаимодействия их с ветровым потоком.

Критериями дискомфорта в этом случае являются уровни виброскоростей и виброускорений, качественная и количественная оценка которых зависит от амплитуд колебаний, частотных диапазонов и функционального назначения зданий или их отдельных фрагментов или участков.

Традиционно критерии дискомфорта отражают в Санитарных нормах, национальных стандартах, а также ISO. Вибрации зданий, вызванные ветровыми воздействиями, связаны чаще всего не с проявлением их аэроупругой неустойчивости, а с турбулентной (пульсационной) природой реального ветрового потока в приземном слое атмосферы. Поэтому интегральным параметром, позволяющим судить об уровне дискомфорта, следует считать значения низших тонов собственных частот пространственных колебаний, а не конфигурацию зданий и их ориентацию относительно вектора скорости ветрового потока [3, 4].

Очевидно, что в большей степени недопустимый дискомфорт присущ гибким зданиям, обладающим низкими, а в отдельных случаях и инфранизкими частотами собственных колебаний (1 Гц). Во-первых, частоты колебаний до 1 Гц наименее изучены с точки зрения физиологического и психологического воздействия на организм человека. Во-вторых, даже в объемах современных знаний в этой области установлено, что реакция людей на эти вибрации разнообразна: от раздражительности у отдельных индивидов до укачивания с проявлениями неприятных симптомов – тошноты, головокружения, сонливости, затруднений при ходьбе (ощущение, что пол «уходит из-под ног»). Если опираться на новейшие данные медико-физиологических исследований, укачивания людей при низкочастотных вибрационных воздействиях предположительно являются формой частичных эпилептических припадков, затрагивающих мозг или ствол мозга человека, особенно в лежачем состоянии. Таким образом, воздействия низкочастотных вибраций на людей, вызванных взаимодействием гибких высотных зданий с ветровым потоком, требуют расширения понятия непригодности таких зданий к нормальной эксплуатации.

Полезно заметить, что методология изучения реакции людей на низкочастотные вибрационные воздействия чаще всего опирается на опрос и экспертные оценки. И хотя в объективности оценок можно не сомневаться, данная методология указывает на начальный этап психофизиологических исследований воздействия низкочастотных вибраций на организм человека [4].

Еще одно важное замечание. Взаимодействие психического и физиологического начал при оценке реакции человека на вибрационное воздействие обнаруживает максимальную корреляцию в ночное время суток для жилых помещений, а также в условиях тишины, характерной для рабочей среды людей, занятых умственным трудом или некоторыми технологическими операциями высокоточного неконвейерного производства. Это объясняется резким повышением чувствительности восприятия вибраций человеком.

Психическое начало в субъективных ощущениях и восприятиях дискомфортных вибраций значительно усиливается при возникновении акустических проявлений вибрации зданий или при фиксации взгляда человека на неподвижный окружающий ландшафт, особенно с большой высоты. К акустическим проявлениям вибрации можно отнести скрипы, например, при наличии в узлах и соединениях зданий источников сухого трения, взаимные соударения близко расположенных элементов, предметов, перекачивания предметов в состоянии безразлично-го равновесия и др.

Одним из критериев недопустимого дискомфорта гибких зданий при ветровом воздействии является повторяемость (частота появления) дискомфортного уровня вибрации определенной интенсивности за конкретный отрезок времени, т.е. допустимая вероятность их появления. Например, за неимением более достоверных оценок приводится следующий критерий. Среднее квадратическое значение виброускорения  $W = 0,5 \%$  от  $g$  (ускорения земного притяжения) должно вызывать неприятные ощущения у  $2 \%$  жителей данного яруса или этажа и повторяться не чаще одного раза в 6 лет. Соотношения между различными уровнями дискомфорта и вызывающими их виброускорениями предложены в табл. 3.

Исследования неизменно обнаруживают одну особенность – порог осязаемости колебаний снижается по мере возрастания значений частот вибрации.

**Таблица 3**

**Зависимость уровня дискомфорта от виброускорения**

Уровень дискомфорта		Виброускорение (% от g)
<b>Вибрации</b>	неощутимые	0,5
	ощутимые	0,5-1,5
	раздражающие	1,5-5,0
	крайне раздражающие	5,0-15,0
	непереносимые	> 15,0

**Таблица 4**

**Границы комфорта**

Критерий	Характеристика зоны	Наибольшая скорость в порыве, м/с	Частота повторений порывов, час/год
1	Площади и парки	~6	~1000 (до 10% времени)
2	Пешеходные дорожки и другие зоны пребывания людей	~12	~ 50 (до 2 раз в месяц)
3	-	~20	~ 5
4	-	~25	<1

### **Дискомфорт в пешеходных зонах внутри застроенных территорий**

В последние десятилетия появились разнообразные формы высотных зданий и композиций открытых пространств, которые могут создавать при определенных неблагоприятных обстоятельствах области интенсивных приземных потоков. Тем самым, могут быть созданы недопустимые дискомфортные условия для пешеходов в этой зоне. Чаще всего такие композиции включают комплексы высотных зданий, значительно возвышающиеся над окружающей городской застройкой. Такие зоны иногда называют **«городскими каньонами»**.

Для количественной оценки уровней дискомфорта требуется:

1. установить соответствие между различными уровнями дискомфорта для пешеходов и вызывающими его скоростями ветра;
2. определить максимально допустимые повторяемости, т.е. частоты повторения пороговых значений скорости ветра.

Некоторые источники предлагают приближенные границы уровней дискомфорта пешеходов:

$V = 5$  м/с – начало дискомфорта;

$V = 10$  м/с – неприятные ощущения;

$V = 20$  м/с – опасно, которые соответствуют равномерному потоку. Иногда в рассмотрение вводится понятие эффективной скорости  $V_{\text{эфф.}}$  учитывающей пульсации ветра в приземном слое атмосферы [1]:

$$V_{\text{эфф.}} = V[1 + k(\bar{V}^2)^{1/2}/V],$$

где  $k = 3$ ,  $V$  – средняя скорость,  $(\bar{V}^2)^{1/2}$  – среднее квадратическое значение пульсаций продольного компонента скорости. В этом случае границы уровней дискомфорта несколько иные:

$$V_{\text{эфф.}} \begin{cases} 6 \text{ м/с} - \text{начало дискомфорта;} \\ 9 \text{ м/с} - \text{влияет на поведение пешеходов;} \\ 15 \text{ м/с} - \text{вызывает затруднения при ходьбе;} \\ 20 \text{ м/с} - \text{становится опасно.} \end{cases}$$

Способность пешеходов приспосабливаться к сильным ветрам значительно снижается при неожиданных порывах ветра. Накопленный к настоящему времени опыт позволяет оценить границы комфорта по критерию допустимой повторяемости (табл. 4).

Однако приведенные критерии носят субъективный характер и применяются из-за отсутствия более достоверных данных.

Поскольку нормируемые стандарты по критериям дискомфорта пешеходов на данный момент отсутствуют, практика применения критериев дискомфорта в градостроительстве вообще и в высотном, в частности, обычно регламентируется компетентностью архитекторов и властей и является мерой уважения своих сограждан.

### **Способы стабилизации ветровых потоков в пешеходной зоне**

Несмотря на отсутствие стандартов по критерию дискомфорта пешеходов, известны положительные примеры улучшения режима приземного ветра с точки зрения его отрицательного воздействия на пешехода.

Так, например, если обнаруживается, что в определенных зонах приземные ветры слишком сильны или вызывают специфические течения и потоки, описанные выше (вихревые, угловые, сквозные – струйные, винтовые, градиентные), которые сопровождаются дискомфортными условиями для пешеходов, необходимо изыскивать способы изменения режима приземного ветра. В практике городской застройки высотных зданий известны эффективные способы улучшения ветрового режима в пешеходной зоне с целью защиты пешеходов от дискомфортных состояний:

- открытые площадки следует по возможности проектировать таким образом, чтобы исключить движение пешеходов через зоны сильных ветров;
- в потенциально опасных зонах предусматривать поручни;

- устраивать покрытие над пешеходными зонами \*;
- устанавливать в соответствующих местах сплошные или ячеистые ветрозащитные экраны, однако они лишь способствуют отклонению ветрового потока с одного участка приземной зоны на другой;

- высаживать плотно растущие деревья и кустарники высотой 2–3 м.

Отметим, что еще одной чувствительной зоной с точки зрения обеспечения не только дискомфорта, но и безопасности пребывания человека является кровля высотных зданий. Это вызвано двух–трехкратным увеличением скорости ветрового потока на высоте 100–300 м и, соответственно, четырех–десятикратным возрастанием давления ветра как на человека при выполнении работ по эксплуатации и ремонту кровли, агрегатов и оборудования на кровле, так и на конструкции перильного ограждения.

### **Стабилизация аэроупругих реакций высотных зданий башенного типа**

Наиболее проблемной с точки зрения дискомфорта людей внутри здания является аэроупругая реакция высотных зданий преимущественно башенного типа на связанные изгибно-крутильные пространственные низкочастотные колебания («эффект кобры»). Эффективный способ стабилизации подобных колебаний, разработанный в Японии, нашел широкое применение за последние два десятилетия. Он основан на создании гасителей колебаний принципиально нового типа – жидкостных настроенных гасителей колебаний (**liquid dampers of vibrations**). В качестве рабочей используется жидкость достаточно высокой вязкости, например, глицерин.

### **Заключение**

Подобное многообразие проявлений взаимодействия ветрового потока с высотными зданиями, которое весьма фрагментарно представлено в данном обзоре, не наблюдается даже для такого класса гибких конструкций, как висячие и вантовые мосты, антенно-мачтовые сооружения. Ключевой причиной различий является присутствие человека, как основного субъекта функционирования высотных зданий. Это обстоятельство повышает ответственность, с одной стороны, архитекторов и инженеров, а с другой стороны – власти за обеспечение потребительских качеств как с точки зрения прочности и надежности зданий, так и с точки зрения комфорта пребывания людей внутри здания и на окрუ-

---

\*Иллюстрацией эффективности перекрытий пешеходных зон является пешеходный мост через реку Москва на Бережковской набережной в г. Москве.

жающих территориях. Для этого требуется научное сопровождение генерального планирования территорий массовой застройки и проектирования высотных зданий.

### *Литература*

1. Симиу Э., Сканлан Р. Воздействие ветра на здания и сооружения / Пер. с англ. Б.Е. Маслова, А.В. Швецовой / Под ред. Б.Е. Маслова. – М.: Стройиздат. 1984. – 360 с.
2. Казакевич М.И., Мелашвили Ю.К., Сулаберидзе О.Г. Аэродинамика висячих покрытий. – Киев: Будівельник, 1983. – 104 с.
3. Казакевич М.И. Аэродинамика мостов. – М.: Транспорт, 1987. – 240 с.
4. Казакевич М.И., Кулябко В.В. Введение в виброэкологию зданий и сооружений. – Днепрпетровск: ПГАСА, 1996. – 200 с.

В нелинейных системах различной природы независимо от того, являются ли они моделями аэроупругих колебаний механических систем или других физических объектов, химических процессов, биологического поведения живых структур, экономических или социально-политических явлений, энергетический обмен носит неадекватный характер. Большие затраты начальной энергии не гарантируют экстремальных состояний. И, наоборот, при определенных условиях незначительные порции энергии способны вывести систему на резонансные траектории [1]. При этом бесспорным фактом является доминирующая роль начальных условий в проблеме обусловленности существования устойчивых решений в частотной области многозначности амплитуд как признака предсказуемости [1]. Введение понятия «области притяжения начальных условий» позволило предсказывать существование устойчивых решений нелинейного осциллятора в частотной области с тремя и более устойчивыми предельными циклами Пуанкаре [2]. Непредсказуемость как признак хаоса в нелинейных детерминированных системах обуславливается именно фундаментальной ролью начальных условий в определенных областях существования [3].

В аэроупругих системах примером хаотических процессов можно считать турбулентность, срывы вихрей Кармана, кризис обтекания кругового и близких к нему тел, панельный флаттер, бафтинг как интерференцию первичного и вторичного отрывов за упругим телом в следе, а также колебания на границе области галопирования в спутной струе при обтекании тандема упругих элементов в скошенном потоке или на границе области синхронизации автоколебаний вихревого возбуждения упругого элемента.

Примеры хаотических колебаний в различных аэроупругих системах, таких как парогенераторы АЭС, пластина при одностороннем обтекании сверхзвуковым потоком, обшивка ракетносителя «Сатурн» описаны в работах [4–6].

Основной физической моделью для исследования явлений аэроупругой неустойчивости гибких элементов конструкций является упругая одномассовая система, причем, для вихревого возбуждения галопирования и срывного флаттера можно ограничиться одной степенью свободы, а для дивергенции, изгибно-крутильного

---

\*Опубликовано в журнале «Металлические конструкции», УАМК, т. 14, № 3, 2008.

флаттера и параметрических колебаний – двумя степенями свободы.

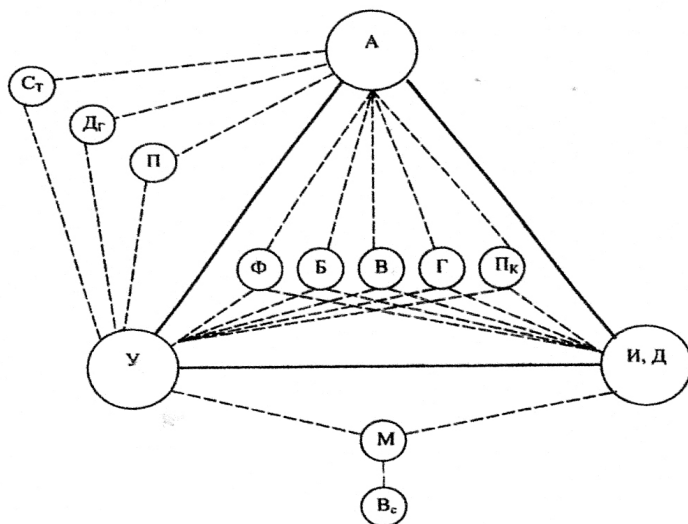
В качестве математических моделей явлений аэроупругой неустойчивости принято нелинейное дифференциальное уравнение Дуффинга второго порядка, отражающее геометрическую нелинейность аэроупругих систем повышенной гибкости и диссипативную нелинейность при учете нестационарных аэродинамических сил.

Особенностью колебательных режимов упругих конструкций в ветровом потоке является их несимметричность. Действительно, вертикально ориентированные конструкции под действием скоростного напора ветра имеют криволинейную форму упругого равновесия, относительно которого происходят колебания. Горизонтально ориентированные конструкции также имеют криволинейную форму упругого равновесия под действием вертикальных постоянных нагрузок, т.е. собственного веса, веса оборудования. В правой части нелинейного дифференциального уравнения Дуффинга – гармоническая возмущающая сила постоянная составляющая. Принцип суперпозиции неприменим. Как показывают многочисленные исследования, например, [6, 7], взаимодействие гибких сооружений с ветровым потоком в приземном слое атмосферы сопровождается большим разнообразием аэроупругих явлений. В самой фрагментарной форме эти явления классифицированы и представлены в работах [6, 7]. Эта классификация охватывает практически все известные к настоящему времени реакции упругих тел в ветровом потоке, кроме весьма специфических «дождевых» колебаний и реакций на одиночный порыв ветра.

Общую физическую картину возникновения аэроупругих реакций при взаимодействии инерционных, упругих и диссипативных сил упругой системы с аэродинамическими силами можно символически представить в виде обобщенной системы Коллара [6, 7] (рис. 1).

Параметры аэроупругих явлений обусловлены формой поперечного сечения элементов конструкций, их конфигурацией и ориентацией относительно направления ветрового потока, с одной стороны, и перечисленными свойствами упругой системы, с другой стороны. Кроме того, существенную роль играют механическая структура ветра, т.е. скорость, направление и продольно-поперечные пульсации ветра, а также влияние снеговых и гололедо-изморозевых отложений.

Таким образом, данная проблема оказывается в сфере взаимодействия таких наук, как аэрогидромеханика, гидрометеорология, теория сооружений и нелинейная механика.



**Рис. 1. Обобщенная схема Коллара:** *А* – аэродинамические силы; *У* – упругие силы; *И* – инерционные силы; *Д* – диссипативные силы; *В<sub>с</sub>* – внешние силы, несвязанные с ветровыми воздействиями; *Ст* – статические деформации; *П* – потеря устойчивости плоской формы изгиба; *Дг* – дивергенция; *Ф* – классический или срывной флаттер; *Б* – бафтинг; *В* – вихревое возбуждение; *Г* – галопирование; *П<sub>к</sub>* – параметрические колебания; *М* – механические колебания

К основным причинам аэроупругих явлений можно отнести:

- порывы ветра;
- периодические аэродинамические силы, связанные со срывом вихрей Кармана;
- отрицательное аэродинамическое демпфирование;
- нестационарные и квазистационарные аэродинамические силы;
- периодические изменения параметров упругих элементов конструкций;
- аэродинамическая связь между изгибной и крутильной формами перемещений.

Следует обратить внимание на связь между возможными режимами отрыва потока и соотношениями размеров поперечного сечения упругих тел при различных типах аэроупругой неустойчивости (рис. 2).



**Рис. 2. Режимы отрыва потока (а) и возможные типы аэроупругой неустойчивости (б)**

Перейдем к анализу нелинейных диссипативных систем на основе дифференциальных уравнений Дуффинга, которые являются вполне достаточными и приемлемыми для исследования критериев возникновения и условий существования аэроупругих автоколебаний. На смену традиционным представлениям о детерминированных и случайных колебаниях в нелинейных системах приходит понимание существования также хаотических колебаний. При этом необходимо различать случайные и хаотические движения.

Открытие нового явления в нелинейной динамике - хаотических колебаний коснулось даже простейших с точки зрения математического описания нелинейных детерминированных систем с одной степенью свободы, таких как система Дуффинга.

В 60-х годах нами при исследовании нелинейного осциллятора Дуффинга была убедительно доказана доминирующая роль начальных условий в проблеме обусловленности существования устойчивых решений в частотной области многозначности амплитуд [1]. Было введено понятие «области притяжения начальных условий», которое впоследствии стало широко известно под названием «аттрактора». Теперь уже можно было предсказывать существование устойчивых решений осциллятора Дуффинга в частотной области с тремя и более устойчивыми предельными циклами Пуанкаре. В настоящее время является неоспоримой роль начальных условий в возникновении странных аттракторов в не-

линейных детерминированных системах как признака непредсказуемости – хаоса. Здесь уместно для убедительности привести слова Ильи Пригожина в работе [8]: «начальные условия и динамика перестают быть независимыми».

Для простейшей динамической системы Дуффинга не всегда возможно предсказать движение на заданном интервале времени при определенных начальных условиях [2, 3]. В хаотических колебаниях, в отличие от случайных, обнаруживается внутренний порядок, который обуславливает возможность предсказания определенных свойств динамических детерминированных систем. Как отмечалось выше, примером хаотических явлений можно считать турбулентность, срывы вихрей Кармана, кризис обтекания круглоцилиндрических и близких к ним тел в гидроаэромеханике. Причем, эти явления не случайны, часто носят вполне регулярный характер и предсказуемы на основе современных теорий.

Сближение устоявшихся понятий и новых, связанных с хаотическими колебаниями, наблюдается при рассмотрении нестационарных движений, когда четко разграничить переходный хаос и переходные процессы, проследить переход от странных аттракторов к предсказуемым аттракторам (периодическим или квазипериодическим движениям) или наоборот, весьма затруднительно.

Аттрактором называют множество точек или подпространство в фазовом пространстве, к которому приближается траектория после затухания переходных процессов. Классические примеры аттракторов – точки равновесия, неподвижные точки отображений, предельные циклы или поверхности торов для квазипериодических движений.

В отличие от классических задач, где граница области притяжения начальных условий (или других параметров системы) представляет собой гладкую непрерывную линию (или поверхность), в нелинейных системах обнаружены негладкие границы. Одной из основных особенностей хаотических колебаний и является трансформация гладкой границы области притяжения. Гладкая граница распадается (расслаивается) на бесконечное множества складок, образующих фрактальную структуру.

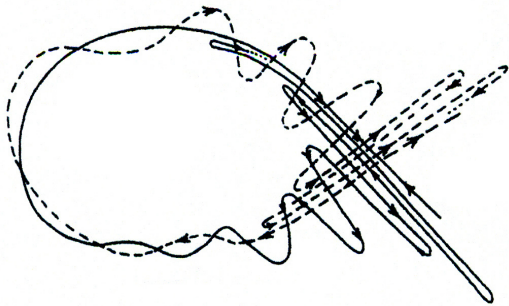
Впервые численный эксперимент, обнаруживающий странные аттракторы в нелинейных детерминированных колебательных системах, был выполнен в работе E.N.Lorenz [9] при изучении вынужденного вязкого гидродинамического течения для возможностей прогноза погоды. Однако хаотические колебания, математическим образом которых являются странные аттракторы, были годом ранее обнаружены S.Kobayashi [10] при исследовании с по-

мощью аналитических методов и аналогового моделирования колебаний изогнутой пластины при одностороннем обтекании сверхзвуковым потоком – панельного флаттера. Известны и более ранние упоминания, например, I. Marsden, о нерегулярных колебаниях в экспериментах НАСА (США) в доспутниковую эпоху, но в то время для их осмысления и анализа не было подходящих физических и математических моделей. Позднее хаос в аэроупругой системе при панельном флаттере наблюдался на поверхности внешних оболочек во время первых полетов ракетополетителей «Сатурн».

В работе Марсдена [11] делается предположение о взаимосвязи между отрывным обтеканием круговых цилиндров и возможностью возникновения странных аттракторов.

В этой связи особое внимание следует обратить на ранние работы В.К. Мельникова [12, 13], который предложил метод получения границ параметров динамических систем с несколькими несмежными положениями равновесия, в которых возможны хаотические явления. Этот метод был в 60–е годы основным математическим аппаратом исследования в Объединенном Институте Ядерных Исследований в Дубне нестационарных процессов при изучении термоядерных реакций.

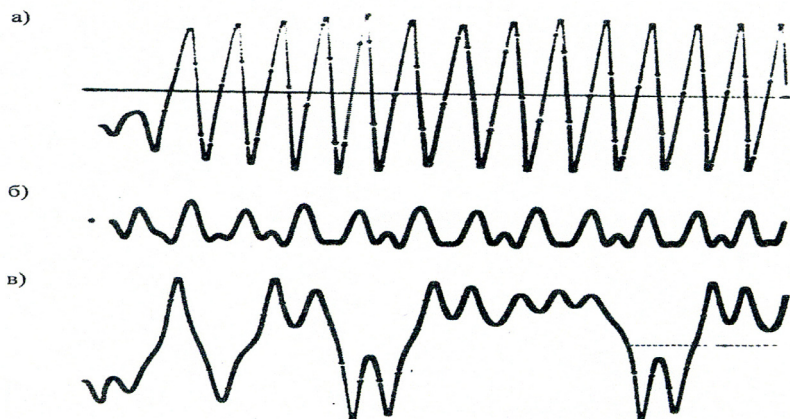
Принципиальными предпосылками применимости метода Мельникова являются однородность и непрерывность границ фазовых пространств. Следствие этого допущения – возможность одновременного существования как стохастических (случайных), так и хаотических, чувствительных к начальным условиям, процессов [13] (см. рис. 3).



*Рис. 3. Асимптотические траектории «многожества Мельникова» и образуемые ими каналы*

Данный подход к исследованию хаотических колебаний в детерминированных системах при квазипериодическом возмущении получил название «детерминированного метода Мельникова». Дальнейшее развитие «метод Мельникова» получил за последние 20 лет, в основном, за рубежом, в многочисленных исследовани-

ях динамических систем различной природы, например, медленно меняющихся систем [14], систем с дихотомными и мультипликативными шумами [15]. К одной из самых ранних работ, в которых были обнаружены хаотические колебания, относится кандидатская диссертация автора (1967 г.), фрагменты из которой (см. рис. 4) приведены в работе [16], стр. 146–147.

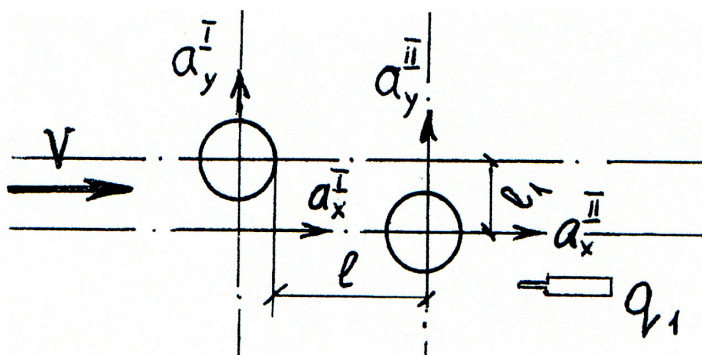


**Рис. 4. Временные процессы нелинейных систем с двумя потенциальными ямами: а) «большие» колебания; б) «малые» колебания; в) хаотические колебания**

Обращаясь к более поздним исследованиям, отметим, что переход от строго регулярных к хаотическим колебаниями в нелинейных аэроупругих системах описан в ряде работ. Например, такой переход обнаружен при гидроупругом расчете трубок парогенератора АЭС с реакторами, охлаждаемыми водой под давлением. Эволюции предельных циклов отражают переход регулярных колебаний к хаотическим и обратно. Их анализ подвиг нас обратиться к проблеме обтекания не пучка труб, а тандема круговых цилиндров. Этот интерес был связан с очень широким распространением тандема цилиндров в различных классах сооружений и элементов конструкций: несущих канатах; канатных подвесках и оттяжках; надземных трубопроводах – магистральных, внутризаводских; проводниках расщепленных фаз ЛЭП; элементах пространственных мостов и многих других.

Результаты изучения характера обтекания, механизма возникновения и возможных режимов аэроупругих колебаний тандема ци-

линдров (см. рис. 5) в зависимости от скорости потока, взаимного их расположения и собственной частоты цилиндров подробно изложены в работах [6] (стр. 128–140) и [17].



*Рис. 5. Схема расположения тандема цилиндров в аэродинамической трубе*

Аналитическое решение задачи влияния начальных условий в виде начальных взаимных смещений цилиндров пока отсутствует, поэтому предсказуемость возможных периодических режимов колебаний их в потоке может быть осуществлена только экспериментально. Для двух разнесенных, т.е. неспаренных, цилиндров траектории движения их свободных концов (при консольной схеме закрепления) гораздо более замысловаты и зависят от тех же факторов, что и для спаренных цилиндров, но в значительной степени и от схода потока, т.е. взаимного их расположения относительно направления потока. В серии проведенных опытов (см. работы [6, 17]) зазор между цилиндрами в направлении потока постоянный и равен одному калибру. Оба цилиндра имели одинаковый диаметр и собственную частоту. Изменялся лишь параметр схода потока

$$\varphi = \arctg l/l; \quad \bar{l}_1 = l/d = 0 \dots 1,35.$$

Детальное изучение поведения тандема цилиндров в скошенном потоке обнаруживает некоторые закономерности в возникновении аэроупругой неустойчивости типа галопирования второго по потоку цилиндра в пространстве параметров схода потока, зазора между цилиндрами и степени турбулентности потока, которые в сущности выступают в качестве начальных условий. При исследовании аэродинамической интерференции нестационарных аэродинамических сил в процессе обтекания тандема цилиндров были исследованы не только аэродинамические характеристики лобового сопро-

тивления  $c_x$  и поперечной силы  $c_y$  в зависимости от скоса потока и степени его турбулентности, но и траектории их движения с помощью визуализации течений (рис. 6). Необходимо отметить два важных обстоятельства. Во-первых, физический смысл потока с прикладной точки зрения – это не смещение одного цилиндра относительно другого, а отклонение направления ветрового потока от оси цилиндров. А поскольку направление ветрового потока носит непредсказуемый характер, важно оценить влияние скоса потока на возможность возникновения установившихся автоколебаний аэроупругой неустойчивости.

Во-вторых, анализ аэродинамических характеристик  $c_x$  и  $c_y$  обнаруживает в определенном интервале изменений параметра скоса потока отрицательный градиент подъемной силы, что согласно критерию Ден-Гартога

$$c_y^a + c_x < 0$$

свидетельствует о возможности неустойчивости типа галопирования. С возрастанием турбулентности область неустойчивости значительно уменьшается.

Поскольку амплитуды автоколебаний  $a$  обратно пропорциональны значению критической скорости  $V_{кр}^{гал}$ , а критическая скорость, в свою очередь, обратно пропорциональна параметру Ден-Гартога ( $c_y^a + c_x$ ):

$$a = \frac{2V^2}{\omega_0 V_{кр}^{гал}} \sqrt{1 - V_{кр}^{гал}/V}; \quad V_{кр}^{гал} = \frac{2m\delta\omega_0}{|c_y^a + c_x| \pi r d},$$

очевидным, что интенсивность автоколебаний напрямую оценивается интенсивностью параметра Ден-Гартога. Наиболее интенсивны автоколебания цилиндра в следе при минимальной турбулентности  $\varepsilon = 0,5\%$ . Таким образом, наличие зазора между двумя цилиндрами, а также скоса потока значительно усугубляют непредсказуемость периодических режимов колебаний, что несомненно подтверждает хаотическую природу данной аэроупругой системы.

Подробный анализ взаимодействия изолированного цилиндра и тандема цилиндров с ветровым потоком, приведенный выше, убедительно показывает актуальность прогноза возникновения как установившихся аэроупругих колебаний (явлений аэроупругой неустойчивости), так и непредсказуемых (хаотических) режимов колебаний для широкого класса конструкций и инженерных сооружений, упоминавшихся выше.

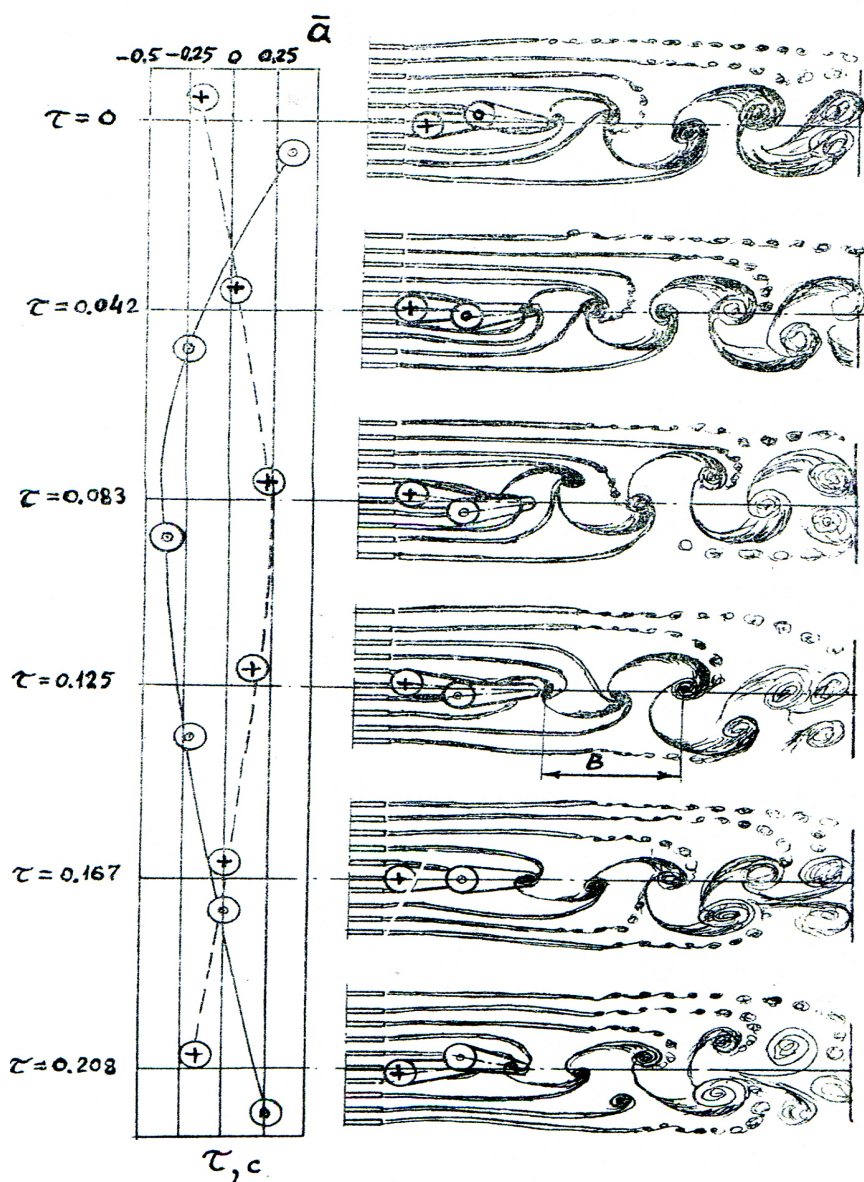


Рис. 6. Траектория движения и аэродинамический след при визуализации течения дымом ( $V = 1,1$  м/с;  $f_0 = f_{01} = 3,6$  Гц;  $Sh = Sh_1 = 0,1$ ;  $V_{np} = 10$ )

Новые знания и подходы к осмыслению и интерпретации наблюдаемых в аэроупругих системах явлений позволят расширить границы хаоса в аэроупругих системах в область других явлений неустойчивости, обусловленных взаимодействием потока с упругими элементами или системами упругих элементов.

### *Литература*

1. Казакевич М.И., Кваша Э.Н., Редько С.Ф. Влияние начальных условий на характер установившихся колебаний систем с нелинейной восстанавливающей силой. Математическая физика. Вып. 15. – Киев: Наукова думка, 1974. – С. 59–62.
2. Казакевич М.И., Редько С.Ф., Кулябко Ю.В. Предсказуемые аттракторы в нелинейных несимметричных системах. Докл. АН УССР. Сер. А., Физ.-мат. и техн. науки, 1990, № 1, с. 18–20.
3. Казакевич М.И., Редько С.Ф. Эволюции областей притяжения в нелинейной несимметричной системе Дуффинга. Докл. АН Украины, 1991, № 11. – С. 21–24.
4. Kazakevitch M.I. Chaos in aeroelastic systems. American-Russian-Ukrainian Conf. on Chaos. Ed. David K. Campbell, Kiev, 1992.
5. Казакевич М.И. Хаос в аэроупругих системах – хаотические колебания. В Сб. «Воздействия ветра на здания и сооружения, возводимые в горных районах». Тбилиси, 1991. – С. 73–80.
6. Ветровые и гололедные воздействия на воздушные линии электропередачи / Е.В.Горохов, М.И.Казакевич, С.В.Турбин, Я.В.Назим; Под ред. Е.В.Горохова. Донецк, 2005. – 348 с.
7. Казакевич М.И. Аэродинамика мостов. – М.: Транспорт, 1987. – 240 с.
8. Пригожий И., Стенгерс И. Порядок из хаоса. Новый диалог человека с природой. – М.: Эдиториал УРСС, 2000. – 312с.
9. Lorenz E.N. Deterministic Non-Periodic Flow. J. Atmos. Sci., 1963, v. 20, p. 130–141.
10. Kobayashi S. Two-dimensional Panel Flatter. 1. Simply Supported Panel. Trans. Japan Society Aeronautical Space Sciences. 1962, v.5, № 8, p. 90–102.
11. Marsden J. Attempts to relate the Navier-Stokes equations to turbulence, in «Turbulence Seminar», **Lecture Notes in Mathematics**, 615, 1977.
12. Мельников В.К., Саясов Ю.С. Теория захвата частиц в синхронный режим ускорения с учетом неконсервативности уравнений движения. Препринт Института Объединенных Ядерных Ис-

следований (Лаборатория теоретической физики), Р-101, Дубна, 1958. – 20 с. См. также ЖТФ, XXX, вып. 6, 1960, с. 656–664.

13. Мельников В.К. Об устойчивости центра при малых периодических возмущениях. Препринт ИОЯИ (Лаборатория теоретической физики), Р-737, Дубна, 1961. – 45 с.

14. Wiggins S., Holmes P. Homoclinic orbits in slowly varying oscillator. SIAM, J. of Math. Analysis. 1987, vol. 18, p. 612–629.

15. Simin E., Franczek M. Melnikov based open-loop control for a class of nonlinear system. Proc. Design Eng. Tech. Conf. ASME «Symp. on Vibr. And Control of Stochastic Dyn. Systems». L.A. Bergman, ed. ASME, New-York. 1995, p. 897–902.

16. Казакевич М.И., Волкова В.Е. Динамика систем с двумя потенциальными ямами. – Днепропетровск: ГИД, Арт-Пресс, 2000. – 160 с.

17. Казакевич М.И., Графский И.Ю., Редько С.Ф. Идентификация ультрагармонических автоколебаний при аэродинамической интерференции тандема круговых цилиндров в скошенном потоке. Докл. АН УССР. Сер. А., Физ.-мат. И техн. науки, 1985, № 4, с. 27–30.

**РАЗДЕЛ 3**  
**МОСТЫ И КОНСТРУКЦИИ.**  
**ДИНАМИКА. ВИБРОЭКОЛОГИЯ**

*«Опыт ценится выше,  
чем грохочущая работоспособность.»*

*Закон Паркинсона*

## **НАТУРНЫЕ ИСПЫТАНИЯ ВИСЯЧЕГО ТРУБОПРОВОДНОГО МОСТА ЧЕРЕЗ р. ДНЕПР ПРОЛЕТОМ 720 МЕТРОВ\***

В вопросах проектирования и строительства висячих мостов в нашей стране и за рубежом накоплен большой опыт. В то же время действительная работа этих сооружений изучена недостаточно. Поэтому натурные испытания с целью проверки соответствия расчетных схем реальным свойствам сложных пространственных конструкций и достоверности их статического, динамического и аэродинамического расчетов представляются весьма актуальными.

Натурные испытания особенно необходимы при создании уникальных по своим размерам и народнохозяйственной значимости висячих мостов новой конструкции, когда некоторые вопросы статического и динамического расчета находятся в стадии развития и совершенствования.

В 1978 г. ГПИ Днепрпроектстальконструкция с участием ЦНИИ проектстальконструкции были проведены натурные испытания висячего моста пролетом 720 м через реку Днепр на трассе аммиакопровода Тольятти–Горловка–Григорьевский лиман, запроектированного ЦНИИпроектстальконструкцией.

---

\* Опубликовано совместно с Е.И. Шкловским, Ш.К. Вецманом, З.А. Шульманом, Е.А. Нейманом и А.А. Гордашниковым в Трудах ЦНИИПСК, Москва, 1980.

Испытания проводились с целью:

- определения общей деформативности, уровня напряжений в элементах металлоконструкций и усилий натяжения канатных элементов;

- определения собственных динамических характеристик (частот, периодов, форм и логарифмических декрементов вертикальных, горизонтальных и крутильных колебаний).

С учетом целей и задач испытаний, специфики сооружения были разработаны схемы и методы нагружения конструкций статической и динамической нагрузками. Большая протяженность моста вызвала необходимость разработки специальных приборов для дистанционного измерения параметров напряженно-деформированного состояния элементов конструкций моста и регистрации собственных динамических характеристик с учетом проведения испытаний при неблагоприятных метеорологических условиях,

В процессе статических и динамических испытаний (рис. 1) было проведено свыше 1500 измерений.

Статические испытания выполнялись при заполнении трубопровода водой. Интенсивность нагрузки составляла 0,19 тс/м. При этом измеряли: прогиб фермы жесткости, напряжения в элементах фермы жесткости, пилона и анкерной балки, а также усилия в раскосах вертикальных висячих ферм, канатах главного кабеля и основных оттяжек.

Прогиб фермы жесткости измеряли прогибомерами часового типа. В середине пролета был установлен специальный прогибомер на базе реохордного датчика с цифровым дистанционным отсчетом, что позволило производить постоянный контроль за прогибом фермы жесткости в течение всего времени заполнения системы водой.

Измерение напряжений в конструкциях моста и усилий в канатах осуществлялось с помощью компараторов с базами 420–1045 мм и автоматизированной измерительной системы с использованием струнных датчиков. Принцип действия струнного датчика основан на зависимости собственной частоты колебаний натянутой струны от ее длины, массы и силы натяжения. Датчик выполнен в виде ленточной струны, заключенной в герметичный корпус вместе с парой электромагнитов (адаптером и возбудителем), которые в комплекте с усилителем позволяют возбуждать автоколебания струны. Датчик устанавливался в специальные опоры на элементах металлоконструкций и канатах.

Частота колебаний струны фиксировалась частотомером Ф5080, Комплекс приборов этой системы обеспечивал дистанционное измерение напряжений и усилий одновременно в 100 точках. Чувстви-

тельность измерительного комплекса составила  $2,5 \text{ (кгс/см}^2\text{)/Гц}$  и  $0,2 \text{ тс/Гц}$ . Чувствительность компараторов –  $50 \text{ кгс/см}^2\text{/дел.}$  и  $0,5\text{-}1,1 \text{ тс/дел.}$  Контроль за изменением температуры конструкций моста осуществлялся с помощью медных термометров ТСМ-410-01.

Усилия в канатах вантовой системы от постоянной нагрузки измеряли накладными динамометрами.

Для определения динамических характеристик моста была применена специальная методика и средства возбуждения собственных колебаний конструкций как в вертикальном, так и в горизонтальном направлениях. Существо метода заключалось в том, что на конструкцию моста воздействовала сила с интервалом времени, равным периоду собственных колебаний, которая вызывала перемещение конструкции в направлении действия силы с возрастающей амплитудой. Использование следящего устройства позволяет прикладывать силу в нужный момент времени, что дало возможность возбуждать гармонические колебания моста с минимальной затратой энергии (силами 2-3 человек). Для создания опорных точек в реку были опущены 4 якоря весом 2 т каждый. Раскачивание моста в вертикальной плоскости производилось с помощью рычажной системы непосредственно с фермы жесткости (рис. 2). Раскачивание в горизонтальной плоскости производилось со специальных плавсредств. Размах раскачивания составлял до 300 мм.

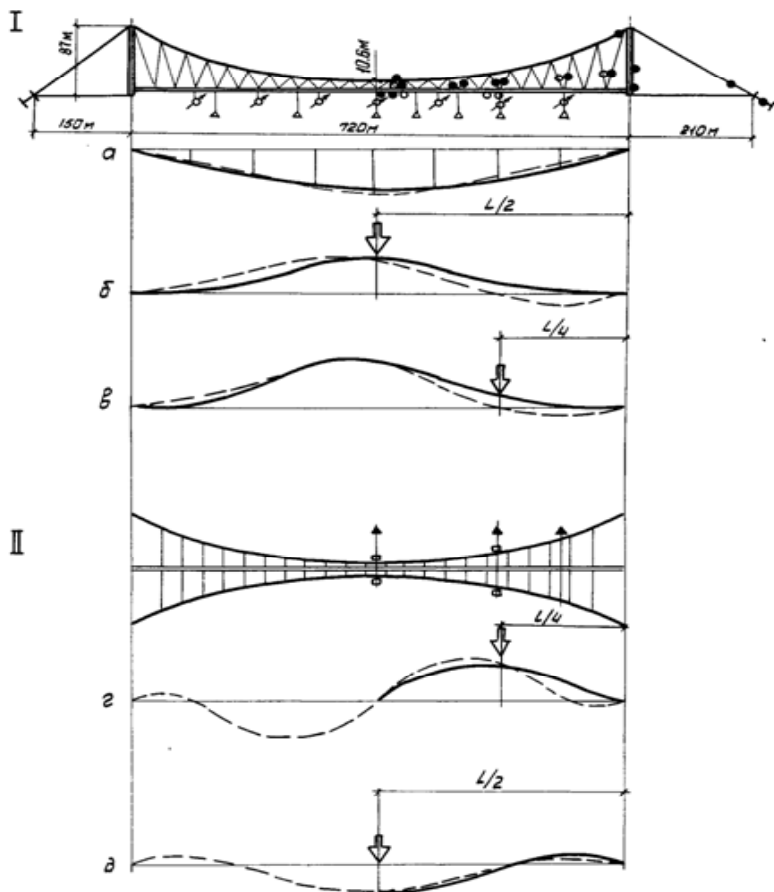
Параметры колебаний фермы жесткости определяли с помощью лазерного визира ЛВ-5М, создававшего базовую линию, и фотоприемного устройства, являвшегося позиционно-чувствительным элементом для количественной оценки отклонения от этой линии.

Для регистрации параметров колебаний также использовали комплект аппаратуры на основе реохордных датчиков. В местах измерения колебаний реохордными датчиками в реку, на тросах, через блоки были опущены 20 якорей весом по 0,2 т каждый. На осях блоков располагались реохордные датчики, преобразовывавшие перемещение точек закрепления блоков в электрический сигнал. Запись сигналов производилась на ленту магнитоэлектрического осциллографа НО10-М.

Регистрация параметров колебаний пилона осуществлялась вибродатчиками типа ВВП.

Анализ результатов статических испытаний (табл.1) показал, что замеренные прогибы моста, усилия в канатных элементах и максимальные напряжения в металлоконструкциях моста от испытательной нагрузки близки к расчетным.

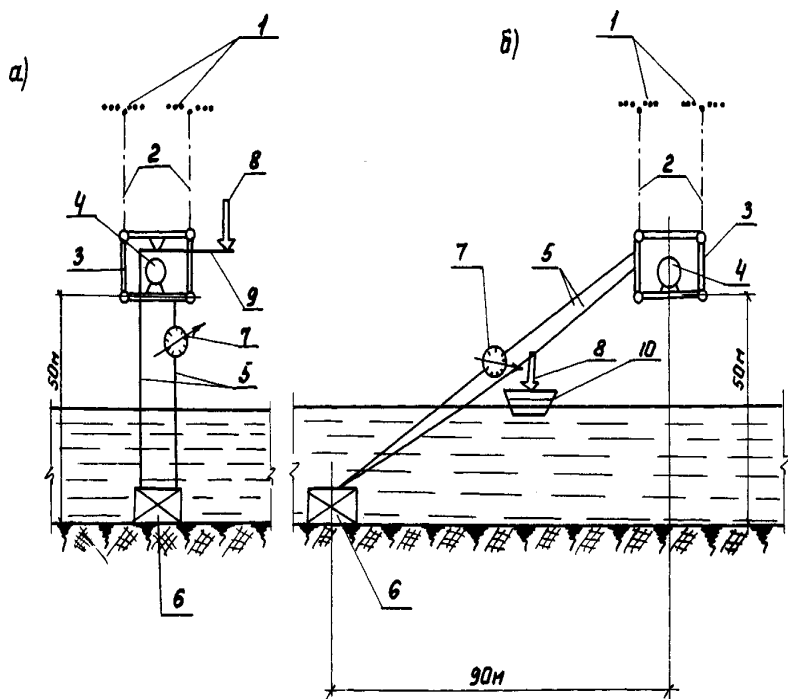
Форма изгиба моста имеет плавные очертания и близка к проектной (рис. 1). В результате наблюдения за изменением прогиба в



**Рис. 1. Схема испытаний висячего моста:** I – схема расстановки приборов при загрузках в вертикальной плоскости; II – то же при загрузках в горизонтальной плоскости; а – форма изгиба моста от статической нагрузки; б – форма вертикальных колебаний балки жесткости при возбуждении вертикальных колебаний в середине пролета; в – то же в четверти пролета; г – форма горизонтальных колебаний при возбуждении горизонтальных колебаний в четверти пролета; д – то же в середине пролета; — — — экспериментальные формы изгиба и колебаний, — — — расчетные. Условные обозначения:  $\bigcirc$  – компараторы;  $\bigcirc$  – компараторы и струнно-акустические тензометры;  $\bullet$  – прогибомеры;  $\Delta$  – реохордные датчики для регистрации вертикальных колебаний;  $\blacktriangle$  – то же горизонтальных колебаний;  $\square$  – то же крутильных колебаний.

середине пролета моста во время заполнения трубопровода водой установлено, что прогиб изменяется пропорционально нагрузке. После снятия испытательной нагрузки остаточных прогибов моста и изменения усилий натяжения канатных элементов не наблюдалось. Установлена зависимость прогиба от изменения температуры конструкций. Для середины пролета при изменении температуры на 1С изменение прогиба моста составило 21 мм, что приблизительно соответствует расчетной величине.

Результаты динамических испытаний висячего моста получены в виде осциллограмм, которые отражают перемещение различных точек во времени.



**Рис. 2. Схемы возбуждения колебаний моста:**

**а** – возбуждение вертикальных колебаний; **б** – возбуждение горизонтальных колебаний. 1 – главный кабель; 2 – подвески; 3 – ферма жесткости; 4 – аммиакопровод; 5 – трос 3 мм; 6 – якорь; 7 – прибор для контроля попадания возбуждающей силы в резонанс; 8 – возбуждающая сила; 9 – рычаг; 10 – плот

Обработку результатов динамических испытаний производили в две стадии: предварительно и окончательно. Цель предварительной обработки результатов, выполнявшейся в процессе динамических испытаний, состояла в контроле правильности работы измерительной аппаратуры, ее настройке и уточнении длительности записи динамических процессов на различных скоростях протяжки ленты осциллографа, обеспечивающей как ручную, так и машинную (на ЭВМ ) обработку виброграмм. При окончательной обработке результатов испытаний, приведенных ниже, определялись основные параметры колебательного процесса: амплитуды, частоты (периоды), формы и логарифмические декременты колебаний сооружения в различных точках.

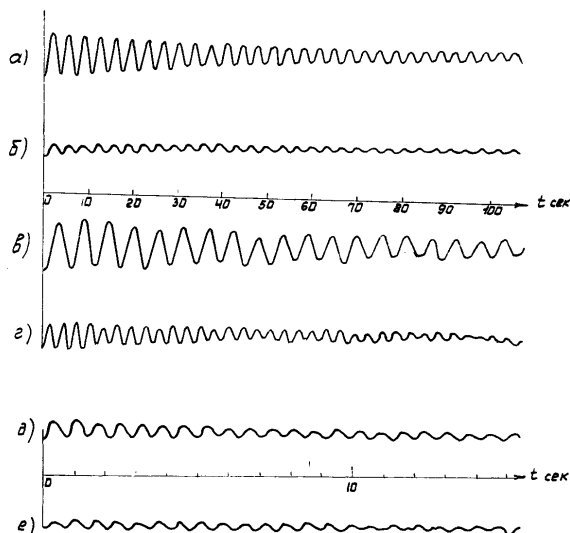
*Таблица 1*

Параметры	Экспериментальные	Расчетные
Прогиб моста, мм:		
в середине пролета	418	446
в четверти пролета	303	280
Усилия в канатных элементах, тс:		
в главном кабеле	148	161
в основной оттяжке правого берега	146	159
в опорном раскосе вертикальной висячей фермы	4,2	4,3
Максимальные напряжения в металлоконструкциях, кгс/см:		
в поясах фермы жесткости	300	340
в пилоне	125	125
в анкерной балке	150	175

При необходимости по записанным виброграммам могут быть получены данные об ускорениях, динамических напряжениях и др.

На рис. 3 изображены виброграммы, полученные после раскачивания моста в вертикальной и горизонтальной плоскости, а также в ветровом потоке.

Результаты простой масштабной обработки виброграмм представлены в табл. 2 и 3, а формы колебаний на рис.1.



**Рис. 3. Виброграммы перемещений отдельных узлов балки жесткости (а-г) и пилона (д,е). Вертикальные колебания балки жесткости: а – в середине пролета при возбуждении в вертикальной плоскости в середине пролета; б – в четверти пролета при возбуждении в вертикальной плоскости в четверти пролета. Горизонтальные колебания балки жесткости: в – в середине пролета при возбуждении в горизонтальной плоскости в середине пролета; г – в четверти пролета при возбуждении в горизонтальной плоскости в четверти пролета. Колебаний пилона в плоскости моста: д – при возбуждении колебаний балки жесткости в середине пролета; е – вызванные ветровым потоком**

**Таблица 2**

Параметры	Возбуждение вертикальных колебаний		Расчетные значения
	в $1/2 l$	в $1/4 l$	
Период $T$ , с	3,41	3,34	3,69
Частота $\omega$ , рад/с	1,84	1,88	1,7
Логарифмический декремент колебаний $\delta$	0,065	0,045	принято 0,05

Таблица 3

Параметры	Возбуждение горизонтальных колебаний			
	в 1/2 l		в 1/4 l	
	экспериментальные	расчетные	экспериментальные	расчетные
Период T, с	5,92	6,1	3,02	3,15
Частота $\omega$ , рад/с	1,06	1,03	2,08	2,0
Логарифмический декремент колебаний $\delta$	0,057	0,05	0,056	принято 0,05

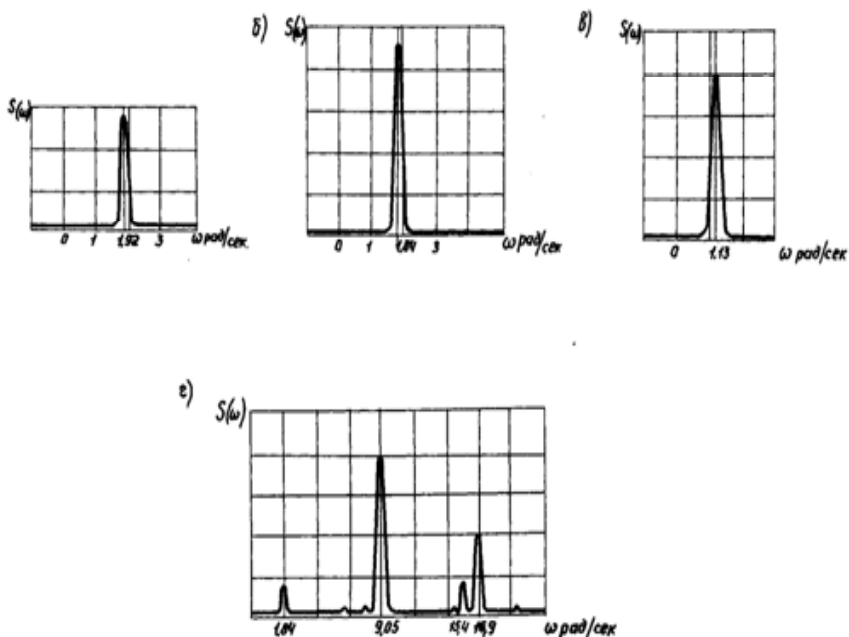
При раскачивании сооружения в горизонтальной плоскости в четверти пролета были зарегистрированы крутильные колебания с параметрами: период  $T=2,92$  с, частота, соответственно,  $\omega = 2,15$  рад/с, а при ветровом воздействии были зарегистрированы колебания пилона в плоскости моста с параметрами: период  $T = 0,71$  с, частота  $\omega=8,9$  рад/с; расчетные значения по первой форме:  $T= 0,668$  с,  $\omega=9,4$  рад/с.

Более точные аналитические методы обработки осциллограмм, основанные на спектральном анализе с помощью преобразований Фурье с привлечением современной вычислительной техники, позволили получить спектральные плотности (энергетические спектры) распределения энергии по частотам колебаний. Некоторые графики спектральной плотности (энергетические спектры) представлены на рис. 4. Спектральные плотности колебательных процессов применяются, в основном, при исследовании их частотной структуры. Пусть  $X_k(t)$  – реализация некоторого стационарного случайного процесса. Тогда величина

$$X_K(\omega, t^*) = \int_0^{t^*} X_k(t) e^{-2\pi i \omega t} dt$$

представляет собой преобразование Фурье функции  $X_k(t)$  на конечном интервале времени реализации  $t^*$ , а односторонняя спектральная плотность распределения энергии по дискретным значениям частот имеет вид

$$S(\omega) = \frac{2}{t^*} / X_K(\omega, t^*)^2, \omega \geq 0.$$



**Рис. 4.** Графики спектральной плотности (энергетические спектры) балки жесткости (а,б,в.) и пилона (г); а – вертикальных колебаний при возбуждении в середине пролета; б – то же в четверти пролета; в – горизонтальных колебаний при возбуждении в середине пролета; г – колебаний пилона в плоскости моста при возбуждении вертикальных колебаний балки жесткости в середине пролета

Оценка спектральной плотности методом быстрого преобразования Фурье была произведена с помощью стандартных программ на ЭВМ\*.

Анализ результатов динамических испытаний позволяет получить общее представление о динамических свойствах сооружения, его чувствительности к реальному ветровому воздействию. В то же время он позволяет дать оценку достоверности расчетных алгоритмов, принятых при проектировании конструкций висячего моста, представляющего собой сложную стержневую пространственную систему.

Сравнение приведенных в табл. 2 и 3 расчетных и экспериментальных значений частот и логарифмических декрементов колебаний фермы жесткости висячего моста показывает, что фактическая

частота вертикальных колебаний по низшей форме превышает расчетную на 10%, а фактическая частота горизонтальных колебаний – на 3%. Диссипативные свойства висячей системы находятся на уровне расчетных. Расчетное значение низшей частоты колебаний пилон в плоскости моста отличается от экспериментального на 5%. Имеющие место (в пределах допустимого) расхождения в динамических характеристиках обусловлены не только допущениями при выборе расчетных схем, но и возможными отклонениями фактических физико-механических свойств несущих канатов от принятых в расчете.

По данным испытаний, разработанный в ЦНИИПСК алгоритм расчета динамических характеристик висячих систем дает результаты, близкие к фактическим, и может в дальнейшем служить надежной основой динамического и аэродинамического расчета подобных сооружений.

## РЕАКЦИЯ ВИСЯЧЕГО ПЕРЕХОДА ПРОЛЕТОМ 720 М НА РЕАЛЬНОЕ ВЕТРОВОЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ\*

Оценка аэродинамической устойчивости гибких висячих и вантовых мостовых конструкций в процессе их эксплуатации может быть выполнена только на основе инструментальных наблюдений за поведением сооружений и анализа реакции их на реальное ветровое воздействие.

В процессе наблюдений за поведением висячего перехода аммиакпровода, описание которого приведено в предыдущей статье авторов, при ветровом воздействии выполнен следующий комплекс измерений:

- измерение перемещений (смещений) фермы жесткости в горизонтальной плоскости от ветрового напора; – измерение параметров колебаний фермы жесткости, пилона и несущих канатов в ветровом потоке;
- длительные измерения амплитуды колебаний фермы жесткости и пилона;
- измерение механической структуры ветра (скорости и направления) в горизонтальной плоскости.

Реализация программы измерений потребовала применения специальных, не выпускаемых промышленностью датчиков и приборов. ГПИ «Днепрпроектстальконструкция» разработал методику и комплект аппаратуры для измерений перемещений и параметров колебаний элементов перехода, позволяющие осуществлять регистрацию этих параметров синхронно с механической структурой ветра в течение длительного времени. С помощью комплекта аппаратуры впервые получены совокупность параметров, необходимых для анализа реакции сооружения на ветровое воздействие в любой момент времени, характеристики, необходимые для общей оценки надежности сооружения, и дана оценка возможности возникновения явлений аэроупругой неустойчивости.

Измерения перемещений фермы жесткости от ветрового напора выполнялись с помощью устройства, разработанного на базе лазерного визира ЛВ-5, имеющего мощность лазерного генератора 0,5 мВт. Лазерный визир, устанавливаемый на неподвижном основании, создает в этом устройстве базовую линию вдоль фермы

---

\* Опубликовано совместно с А.С. Мякшиным, Е.А. Нейманом, Ю.С. Фрейдиным и З.А. Шульманом в Трудах ДИИТ, вып. 214/25, Днепропетровск, 1982.

жесткости, а фотоприемное устройство, являющееся позиционно-чувствительным элементом и укрепляемое на объекте измерений, регистрирует смещение относительно этой линии. Визир позволяет получать лазерный луч мощностью, достаточной для «засвечивания» фотоприемного устройства при расстоянии между ними до 1000 м и средней интенсивности дневного света. Калибровка измерительного комплекта на специальном лабораторном стенде и в натурных условиях показала, что чувствительность устройства при расстоянии от фотоприемника до лазерного визира, равном 400 м, составляет 1 мм/мм записи, а его амплитудно-частотная характеристика линейна в полосе частот 0–5 Гц и не имеет фазовых искажений. Основным достоинством разработанного устройства является возможность получения в одной записи как квазистатических перемещений объекта наблюдений от ветрового напора, так и колебательных процессов, вызванных этим воздействием. На приведенном фрагменте записи (рис. 1) отчетливо видны оба эти процесса. Параметры колебаний фермы жесткости, пилона и несущих канатов измерялись комплектом виброизмерительной аппаратуры, состоящей из вибродатчиков сейсмического типа С5С, делителя выходного сигнала ШК-2 и магнитоэлектрического осциллографа НО44, укомплектованного гальванометрами ГБ-Ш-3. Особенностью этих измерений является необходимость регистрации инфранизкочастотных колебаний в вертикальном и горизонтальном направлениях.

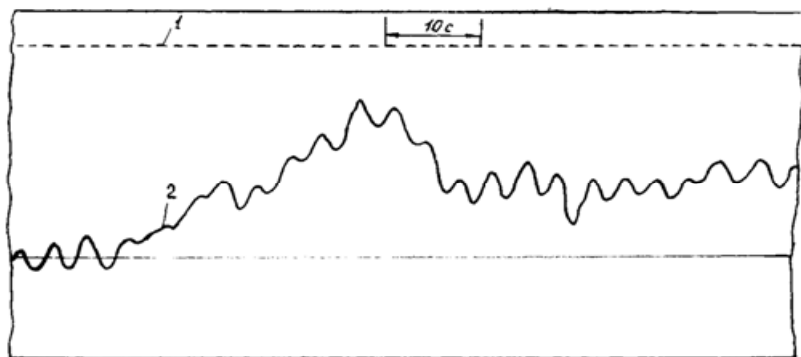


Рис. 1

Применение приборов С5С в заводском исполнении в качестве датчиков инфранизкочастотных колебаний осложнялось трудностью их регулировки на мосту и необходимостью периодической настройки магнитной и механической систем. Эти трудности обусловлены

конструктивными особенностями датчиков. Схема размещения вибродатчиков на мосту показана на рис. 2. Комплект аппаратуры предварительно тарировался на специальном стенде, создающем калиброванные по частоте (0,1–10 Гц) и амплитуде (0,5–15 мм) горизонтальные и вертикальные колебания. Результаты тарировки позволили определить масштабные коэффициенты и линейный участок градуировочной характеристики виброизмерительного комплекта. Технические характеристики аппаратуры:

- |  |                |
|--|----------------|
| 1. Диапазон частот   | 0,2–10 Гц.     |
| 2. Диапазон амплитуд   | 0,5–15 мм.     |
| 3. Чувствительность регистрации  | 0,1–0,15 мм/мм |
| 4. Нелинейность амплитудно-частотной характеристики в диапазоне частот 0,25–5 Гц | – 3%.          |

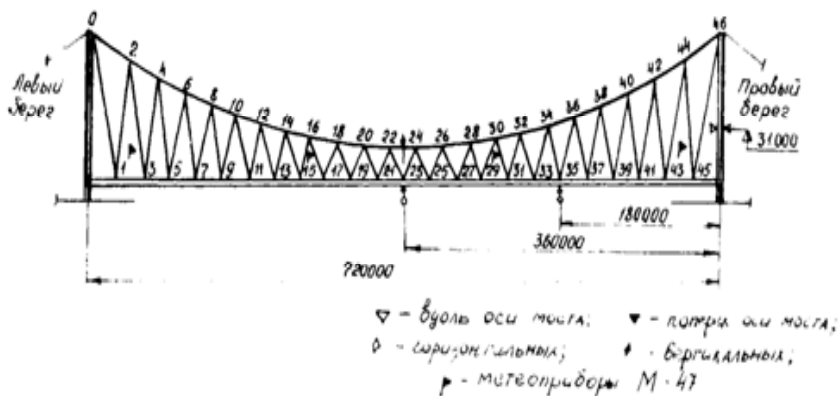


Рис. 2

Регистрация колебаний элементов моста выполнялась при различных скоростях и направлениях ветра, имевших место в период наблюдений. Скорость ветра в этот период составляла 5–15 м/с. Фрагменты записи колебаний моста приведены на рис. 3–5. На рис. 4 изображена осциллограмма колебаний фермы жесткости и пилона: 1 — отметчик времени; 2 — горизонтальные колебания фермы жесткости в четверти пролета (лазерный визир ЛВ-78); 3 — горизонтальные колебания фермы жесткости в четверти пролета (вибродатчик С5С); 4 — колебания пилона на отметке 31 м из плоскости моста (вибродатчик ОСП-2МГ); 5 — колебания пилона на отметке 31 м в плоскости моста (вибродатчик ОСП-2МГ); 6 — скорость ветра. Запись произведена 29.11.1979 г. Направление ветра 310–320°(СЗ), скорость 4–6 м/с.

Большой интерес представляет накопление данных о действительных величинах амплитуд колебаний висячих мостов и переходов в естественном ветровом потоке. Он вызван тем, что ветровое воздействие является доминирующей временной нагрузкой для таких сооружений. Аппаратура для получения данных о таком воздействии должна обеспечивать непрерывную в течение длительного времени автоматическую регистрацию колебательных процессов сооружений при различных интенсивности и направлении ветра. Отсутствие такой аппаратуры приводило к тому, что при экспериментальных исследованиях амплитуды колебаний сооружений оценивались по небольшому числу визуальных наблюдений, не позволяющих выполнять статистический анализ этих процессов. Созданная в институте измерительная аппаратура обеспечила автоматическую непрерывную запись параметров колебаний основных элементов моста в период наиболее интенсивных ветров в районе расположения висячего перехода аммиакопровода. В комплект аппаратуры, кроме вибродатчиков С5С, входили трехканальный усилитель УПН-III для усиления сигналов, поступающих от вибродатчиков, специальный самопишущий прибор НОО2, обеспечивающий длительную непрерывную запись исследуемых процессов на бумагу с тепловым носителем, и специально сконструированное устройство для автоматического включения регистрирующего прибора в момент достижения скорости ветра больше 3–3,5 м/с (или иной контрольной величины). Параметры колебаний регистрировались в трех точках: в середине пролета фермы жесткости в вертикальном и горизонтальном направлениях и пилона на отметке 31,0 м (в плоскости моста). Продолжительность непрерывной записи составляла 24 часа, после чего происходила смена бумаги на регистраторе.

Для оценки влияния параметров ветрового потока на колебания фермы жесткости, пилона и несущих канатов в процессе их регистрации выполнялась синхронная запись скорости и направления (в горизонтальной плоскости) ветра. В качестве измерительного прибора для этих целей использовался установленный на мосту анеморумбометр М-47. Специальные усовершенствования позволили выполнять непрерывную запись показаний этого прибора на той же ленте осциллографа, на которой регистрировались колебания (см. рис. 3–5). Место установки датчика анеморумбометра показало на рис. 2 (датчик № 1).

Наиболее полные методы обработки осциллограмм основаны на спектральном анализе с помощью преобразований Фурье с привлечением современной вычислительной техники, что позволяет получить спектральные плотности (энергетические спек-

тры) распределения энергии по частотам колебаний. Спектральные плотности колебательных процессов применяются в основном при исследовании их частотной структуры. Пусть  $x_k(t)$  –реализация некоторого стационарного случайного процесса. Тогда величина

$$X_K(\omega, t^*) = \int_0^{t^*} X_k(t) e^{-2\pi i \omega t} dt$$

представляет собой преобразование Фурье функции  $x_k(t)$  на конечном интервале времени реализации  $t^*$ , а односторонняя спектральная плотность распределения энергии по дискретным значениям частот имеет вид

$$S(\omega) = \frac{2}{t^*} |X_K(\omega, t^*)|^2, \omega \geq 0.$$

Оценки спектральной плотности методом быстрого преобразования Фурье (БПФ) были произведены с помощью специальных: программ на ЭВМ. Несмотря на нерегулярный характер колебаний, при спектральном анализе осциллограмм четко выделяются колебания с частотами, совпадающими с собственными частотами, колебаний сооружения и его отдельных элементов (пилоны, несущие канаты и балка жесткости) в вертикальной и горизонтальной плоскостях. Соответствующие графики спектральной плотности  $S(\omega)$  **распределения** энергии колебаний по их частотам представлены на рис. 6.

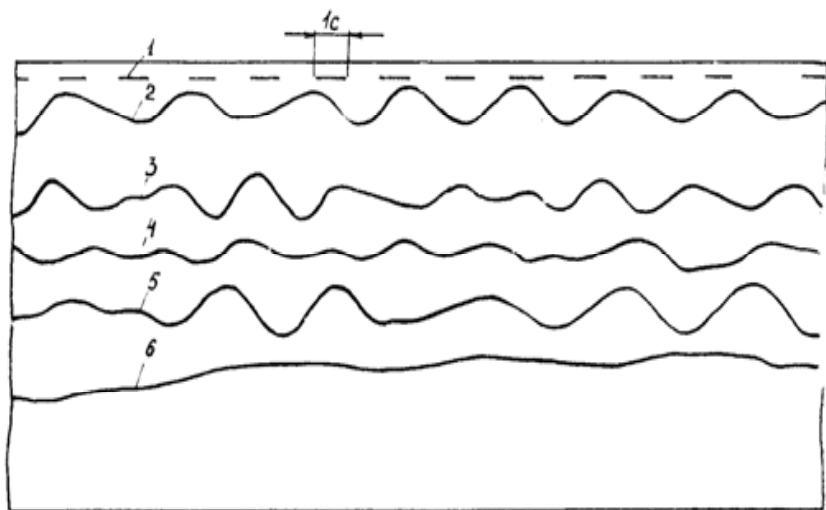
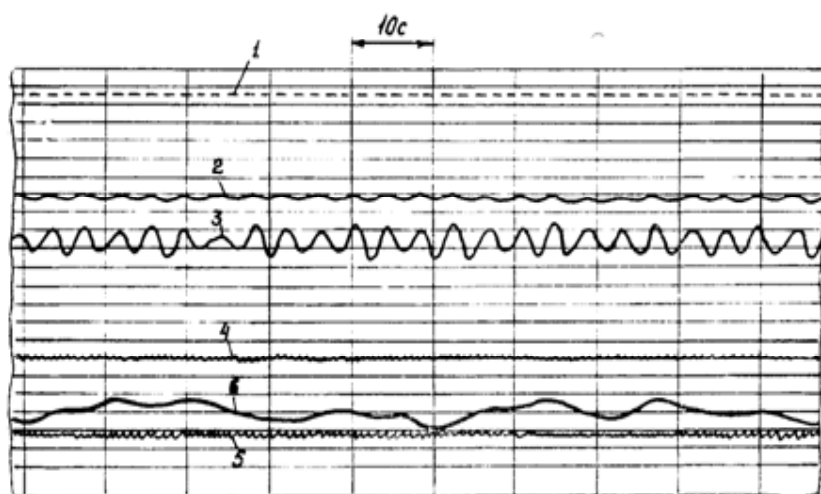
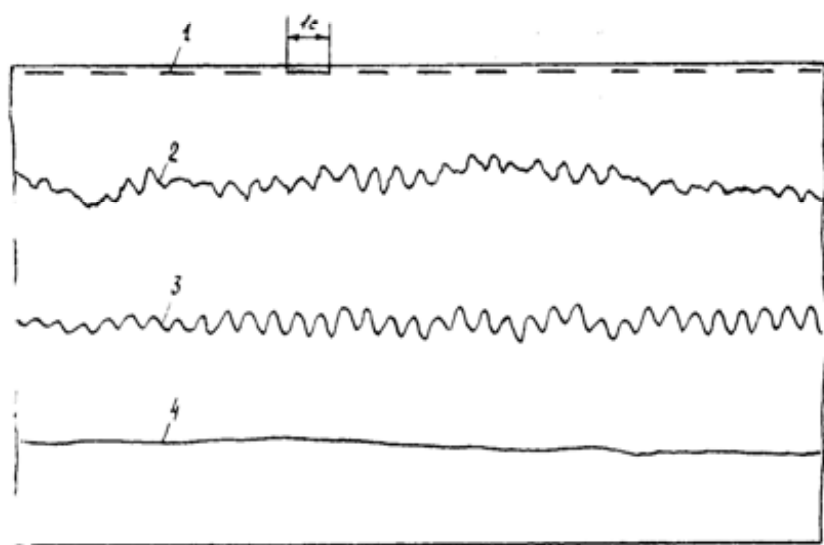


Рис. 3



*Рис. 4*



*Рис. 5*

Таблица 1

Ветер		Палка жесткости										Пилон				Несущие канаты	
		вертикальные частоты колебаний				горизонт, частоты колебаний						поперек моста		вдоль моста			
		в $\frac{1}{2} l$		в $\frac{1}{4} l$		в $\frac{1}{2} l$		в $\frac{1}{4} l$		рад/с	Гц	рад/с	Гц	рад/с	Гц		
		рад/с	Гц	рад/с	Гц	рад/с	Гц	рад/с	Гц								
рад/с	Гц																
0,123	0,02		0,02	0,123	0,02	0,123	0,02	0,123	0,02								
			0,31	1,1	0,18	0,98*	0,156	0,85	0,137								
			0,43	1,47	0,23	1,59	0,254	1,47*	0,23								
				1,84*	0,293	2,57	0,41	1,96*	0,31								
				2,2*	0,35	3,8	0,61										
				2,94	0,47												
0,368*	0,059											0,49	0,078	0,123	0,02		
0,75	0,12											0,98	0,156	1,84	0,293		
1,1	0,176											7,5*	1,19	8,85*	1,41		
1,72	0,27											8,4*	1,13				
0,123*	0,02															0,123	0,02
0,74	0,117															0,98*	0,156
1,1	0,170															1,47*	0,23
																2,33	0,37
																2,7	0,43
Не регистрировался		1,84	0,293														
				1,84*	0,293	0,245	0,039	0,245	0,039								
				2,94*	0,47	0,98*	0,156	0,98	0,156								
						1,59	0,254	1,59*	0,254								
						2,7	0,43	2,07*	0,33								
								3,18	0,508								

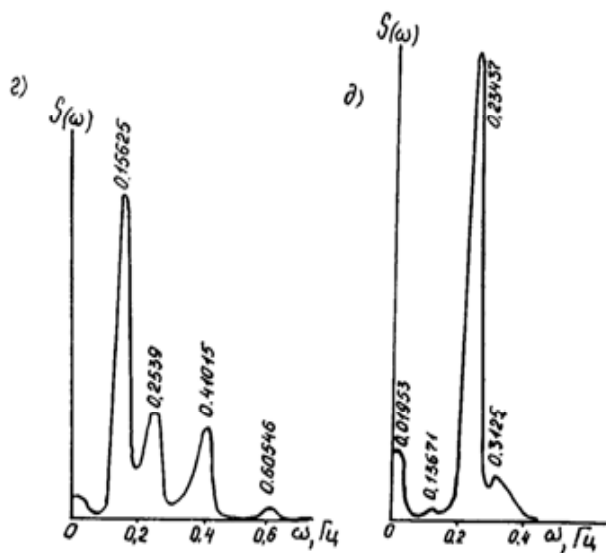
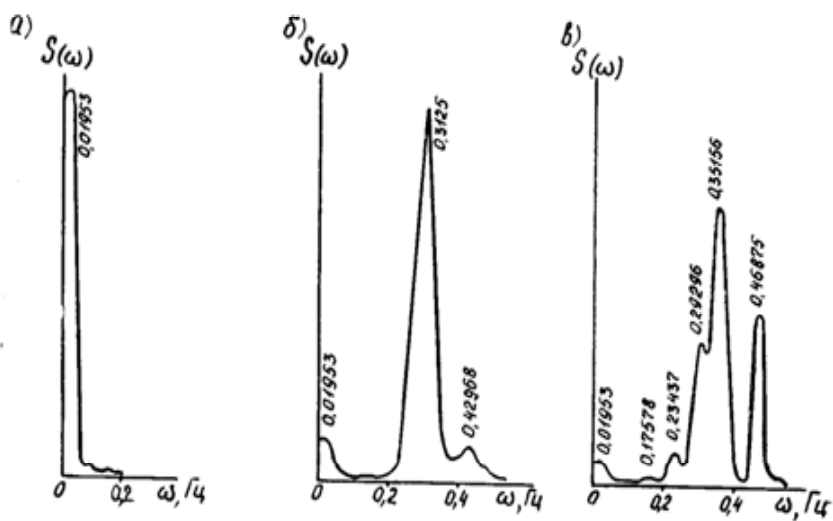


Рис. 6

Результаты спектрального анализа случайных колебаний элементов конструкций висячего перехода аммиакопровода в ветровом потоке приведены в табл. 1, которая содержит широкий спектр частот колебаний балки жесткости в вертикальной и горизонтальной плоскостях в середине и четверти пролета, пилона вдоль и поперек продольной оси моста и несущих канатов в горизонтальной плоскости в середине пролета, а также значения частот пульсационной составляющей ветрового потока. Как видно из табл. 1, реакция элементов конструкций висячего перехода содержит колебания с доминирующей очень низкой частотой пульсационной составляющей ветрового потока  $\omega = 0,123$  рад/с. Колебания элементов конструкций происходят на одной из низших собственных частот. Кроме того, наблюдается взаимное влияние колебаний элементов конструкций. Значения частот доминирующих колебаний (с точки зрения максимального распределения энергии колебаний) в табл. 1 отмечены звездочкой (ср. с графиками на рис. 6). Сопоставительный анализ колебаний в вертикальной и горизонтальной плоскостях позволяет выделить частоты, которые относятся к крутильным формам колебаний балки жесткости:  $\omega = 2,7$  рад/с. Колебания пилона в потоке происходили с собственными частотами: в плоскости моста  $\omega = 8,85$  рад/с и из плоскости моста  $\omega = 7,5$  рад/с. Кроме того, заметно влияние колебаний балки жесткости: в плоскости моста – вертикальных колебаний с частотой  $\omega = 1,84$  рад/с, а из плоскости моста – горизонтальных колебаний с частотой  $\omega = 0,98$  рад/с.

В горизонтальных колебаниях несущих канатов в середине пролета четко идентифицированы первая  $\omega = 0,98$  рад/с) и вторая ( $\omega = 1,47$  рад/с) собственные формы и первая форма крутильных колебаний ( $\omega = 2,7$  рад/с).

Амплитуды колебаний балки жесткости, пилона и несущих канатов в мм, а также флуктуации скорости ветра в м/с оценивались при спектральном анализе с помощью известной статистической характеристики случайных значений амплитуд – среднего квадратичного отклонения (стандартного отклонения)  $\sigma$ , определяемого по формуле

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{n}}.$$

Соответствующие значения стандартов амплитуд приведены на графиках спектральной плотности  $S(\omega)$ . Таким образом, стандартные отклонения амплитуд колебаний сооружений в потоке ветра не превосходят следующих значений:

– для амплитуд вертикальных колебаний балки жесткости в сере-

дине пролета  $\sigma = 5$  мм;

– то же, в четверти пролета  $\sigma = 4$  мм;

– для амплитуд горизонтальных колебаний балки жесткости в середине пролета  $\sigma = 13$  мм;

– то же, в четверти пролета  $\sigma = 8$  мм;

– для амплитуд горизонтальных колебаний несущих канатов в середине пролета  $\sigma = 6$  мм;

– для амплитуд колебаний пилона вдоль моста  $\sigma = 0,144$  мм;

– то же, поперек моста  $\sigma = 0,08$  мм.

Максимальные измеренные амплитуды колебаний элементов конструкций висячего перехода приведены в табл. 2.

Таблица 2

	Балка жесткости						
Элемент кон- струкций	середина пролета		четверть пролета		Канаты несу- щие, 1/2l	Пилон на отметке 31 м	
Тип колебаний	верт.	гориз.	верт.	гориз.	гориз.	в плоск, моста	из плоск, моста
Амплитуда ко- лебаний, мм	9	15	8	13	9	0,2	0,1
Скорость ве- тра, м/с	15	15	15	15	15	10	1 10
Направле- ние ветра	40 – 45° к продольной оси моста						

Как видно из этой таблицы, максимальные амплитуды вертикальных колебаний не превосходят 1/80000 длины пролета, а горизонтальных 1/50000 длины пролета.

Анализ приведенных величин стандартов амплитуд позволяет сделать вывод об аэродинамической устойчивости висячего перехода аммиакопровода пролетом 720 м в естественном ветровом потоке, характеризуемом средними значениями скорости ветра  $V_{cp} = 10 - 15$  м/с и стандартом амплитуд изменений скорости ветра в порывах  $\sigma = 4$  м/с.

Использование лазерного метода для анализа суммарных перемещений любого сечения висячего перехода в горизонтальной (вертикальной) плоскости при метеорологических (или иных внешних) воздействиях показано на рис. I. Синхронная регистрация воз-

действий и реакции сооружения на них позволяет в этом случае при полном отсутствии неподвижных точек раздельно определять параметры статических и динамических перемещений сооружения. Сравнение параметров горизонтальных колебаний балки жесткости в четверти пролета, полученных лазерным методом и вибродатчиком С5С, показывает полную идентичность результатов. Однако существенным преимуществом лазерного метода является возможность инструментального измерения и длительных регистрации статических смещений элементов конструкций под действием постоянных внешних нагрузок, а также синхронного слежения за квазистатическими перемещениями при адиабатических изменениях этих нагрузок. В частности, на рис. 1 хорошо прослеживаются горизонтальные статические перемещения балки жесткости висячего перехода в четверти пролета в зависимости от изменений скоростного напора. Поскольку изменение скорости носило неадиабатический характер, вызванные флуктуациями скорости ветрового потока колебания конструкций в горизонтальной плоскости наложился на линию статических смещений. Скорость ветрового потока в пределах приведенного на рис. 1 участка записи изменялась от  $V_{н}=10$  м/с до  $V_{в}=13$  м/с.

## **К НОРМИРОВАНИЮ УРОВНЯ ДОПУСТИМЫХ ВИБРАЦИЙ В СИСТЕМЕ «ПЕШЕХОД–МОСТ»\***

К новым аспектам в проблеме динамики мостов следует отнести анализ вибраций конструкций с позиций их вредного влияния на организм человека и выбор соответствующих мер виброзащиты при проектировании новых или усилении существующих сооружений. В настоящее время достаточно полно исследован механизм воздействия вибраций на материалы и конструкции, изучено их влияние на надежность сооружений, созданы соответствующие методы расчета. Вместе с тем известно, что вибрации относительно малой интенсивности, практически не отражающиеся на усталостной прочности элементов сооружений, могут оказаться недопустимыми с точки зрения возникновения неприятных, а иногда болезненных, ощущений у людей, находящихся на мосту, т.е. у пешеходов, пассажиров и водителей транспортных средств. В данной работе рассматриваются только воздействия вибрации на пешеходов и обслуживающий персонал, находящийся непосредственно на конструкции.

Особенно остро проблема виброзащиты человека на мосту встает в связи с существующими тенденциями современного мостостроения: создание большепролетных, легких сооружений с использованием предварительно напряженного железобетона, сталей повышенной и высокой прочности, алюминиевых сплавов, висячих и вантовых систем. На сооружениях такого типа неоднократно наблюдались колебания значительной интенсивности, вызывающие дискомфортные условия для людей.

К основным проблемам вибрации, определяющим степень её воздействия на организм человека, относятся частотный состав, уровни характерных кинематических факторов (виброперемещений, виброскоростей и виброускорений), направление, регулярность (повторяемость) вибрации, длительность воздействия на человека [1].

Частотный спектр колебаний связан с собственным частотным спектром сооружения и периодичностью действия возмущающих сил. Спектр собственных колебаний обусловлен размерами, материалом и конструктивной формой сооружений. С большой степенью достоверности можно установить частотный диапазон 0,2–20 Гц, характерный для сооружений типа мостов при колебаниях по первым

---

\*Опубликовано совместно с М.М. Кравцовым и И.Л. Закорой в Трудах ДИИТ «Вопросы динамики мостов и теории колебаний», Днепропетровск, 1984.

трем-пяти формам. Можно выделить частоты, связанные с колебаниями основных несущих конструкций (как правило, в пределах 0,3–10 Гц) и с колебаниями локального характера (в пределах 2–20 Гц): элементов проезжей части, проходов, консолей, перил и т.д. Известно, что период собственных колебаний сооружений в вертикальной плоскости по основному тону можно приближенно оценить величиной ( $T = l / (75 \div 150)$ ), или в среднем  $T = l / 100$ , где  $T$  – период колебаний, с;  $l$  – пролет сооружения, м.

Диссипативные свойства конструкций мостов в решающей степени определяются теми же факторами, что и частотный, спектры характеризуются величиной логарифмического декремента колебаний  $\delta = 0,02 \div 0,13$  (в отдельных случаях – до 0,3) [2, 3]. Столь низкий уровень затухания способствует неблагоприятным воздействиям вибраций на людей. В диапазоне сравнительно низких скоростей ветра, представляющем интерес с точки зрения рассматриваемой проблемы, лишь в небольшой степени проявляется повышение степени затухания вследствие аэродинамического демпфирования.

Вибрация конструкций мостов может возникать и развиваться в результате воздействия различных динамических нагрузок. На железнодорожных, автодорожных и городских мостах люди, находящиеся на тротуарах и служебных проходах, подвергаются воздействию вибрации от движущейся временной нагрузки. Помимо вертикальных колебаний, могут проявляться и горизонтальные (поперечные и продольные) вследствие боковых толчков, виляния, торможения (ускорения) экипажей. Следует выделить колебания основных несущих конструкций (главных балок или ферм) и элементов проезжей части либо пешеходного прохода (особенно длинных консолей поперечных балок).

Методы расчетного определения параметров вынужденных колебаний, вызванных движущейся нагрузкой, к настоящему времени разработаны с достаточной полнотой как в детерминистской, так и в вероятностной постановке [2, 4]. В значительно меньшей степени изучен характер динамических воздействий, возбуждаемых пешеходами. Известны сохраняющие до сих пор актуальность фундаментальные исследования И.М. Рабиновича [5] и Н.А. Бернштейна [6], более поздние работы И.И. Казея [7], В.П. Чиркова и др. [3], ряда зарубежных авторов [8, 9].

В работах [8, 9] приведены результаты исследований вертикальных и горизонтальных компонент давления одиночных пешеходов на жесткую конструкцию, выделены величины динамических составляющих, отмечается возрастание этих величин (связанных преимущественно с относительными перемещениями центра тяже-

сти тела) при увеличении темпа ходьбы.

Рядом особенностей отличаются динамические воздействия, вызываемые группой пешеходов (толпой). Частотный состав динамических вертикальных и продольных горизонтальных воздействий находится в диапазоне 1,5–3 Гц (с вероятностью не менее 95%) и может быть приближенно представлен нормальным распределением со средним значением 2,2 Гц и средним квадратическим отклонением 0,3 Гц [9]. По данным работы [8], эти величины составляют соответственно 2,0 и 0,222 Гц. Частота основной гармонической компоненты поперечных горизонтальных воздействий вдвое ниже. Выявлена тенденция к уменьшению степени динамических воздействий («динамических коэффициентов») при увеличении числа пешеходов, одновременно находящихся на мосту. По наблюдениям ряда исследователей, в том числе В.И. Киреенко, существует предельная величина нагрузки от толпы, при превышении которой динамические воздействия не проявляются. По данным работы [8], эта величина составляет 3000 Н/м, а динамические воздействия достигают максимальной величины при нагрузке 1300 Н/м<sup>2</sup>, т. е. 1,6–1,8 чел/м<sup>2</sup>.

Несмотря на разброс фаз и частот движения отдельных пешеходов, при анализе колебаний мостов четко выделяется гармоническая составляющая [5]. При высокой частоте собственных колебаний сооружений (более 3–5 Гц) частота этой составляющей близка к указанной выше средней частоте распределения [8, 9], а при более низких (менее 3 Гц) – к частоте собственных колебаний. Отмечена тенденция к произвольной синхронизации темпа ходьбы группы пешеходов по фазе на частоте с колебаниями сооружения [8]. Вибрации достигают наибольшей интенсивности при близости средней частоты возбуждающих воздействий (2–2,2 Гц) к одной из первых частот собственных вертикальных колебаний сооружения.

Необходимо отметить, что указанный выше частотный диапазон возмущающих воздействий при движении толпы соответствует собственным частотам по 1–2 первым формам для пешеходных мостов наиболее широко применяемых пролетов – от 15 до 80 м. В работе [8] приведена приближенная методика расчетного определения динамических воздействий от толпы, на основании которой в ГДР разработан проект норм расчета пешеходных мостов на динамические воздействия  $R_i$  – FB Dyn. Ряд предложений по расчету содержится в работах [9, 10].

Вибрация, вызываемая воздействием движущихся экипажей и пешеходов, возникает достаточно часто, тем более, что ее проявление не связано с максимальной интенсивностью и высокими скоростями движения.

На технологических (в частности конвейерных) эстакадах промышленных предприятий могут возникать вибрации пролетных строений (и уложенных на них служебных проходов) под действием технологического оборудования; на трубопроводных мостах, вертикальные и горизонтальные колебания могут быть связаны с динамическим действием транспортируемого по трубам продукта. Вибрация подобного происхождения может достигать значительной интенсивности и длиться достаточно долго; с нею необходимо считаться при оценке условий работы обслуживающего персонала. Методы расчета вибраций от действия технологического оборудования освещены в работах [11, 12].

Вибрация мостов может возникать в результате действия факторов природной среды – ветровых, температурных, сейсмических.

Следствием пульсаций скоростного напора ветра являются в основном поперечные горизонтальные колебания по первым собственным формам, на которые накладываются низкочастотные колебания, соответствующие периоду флуктуации естественного ветрового потока (частота 0,02 Гц) [13]. Амплитуды колебаний такого типа обычно невелики, и доля динамической составляющей существенно снижается с увеличением скорости ветра.

В результате действия ветра могут возникать различные явления аэроупругой неустойчивости сооружения и отдельных его элементов [14]. С точки зрения воздействия на пешеходов, особый интерес имеют те аэроупругие явления, которые могут проявляться при скорости ветра до 10-15 м/с. Движение пешеходов при ветре большей скорости физически затруднено настолько, что требования ограничения уровня вибрации по условиям комфорта при этом отступают на второй план [15]. В указанном диапазоне скоростей возможны явления ветрового резонанса и галопирования.

Амплитуды вибраций при ветровом резонансе иногда достигают существенных величин: наблюдались вертикальные виброперемещения балок жесткости вантовых мостов до 0,05–0,25 м, соответствующие амплитудные значения виброускорений достигали 1–3 м/с, или  $(0,1 \div 0,3) \text{ g}$  [16–18]. Следует подчеркнуть, что ветровая нагрузка указанного выше диапазона возникает с достаточно высокой повторяемостью практически во всех регионах. Методы расчета параметров колебаний при явлениях аэродинамической неустойчивости освещены в работах [14, 18, 19]. Отметим, что критические скорости ветра  $V_{\text{кр}}$ , соответствующие появлению ветрового резонанса, находятся в «опасном» диапазоне для висячих и вантовых мостов с пролетами от 100 до 250 м.

Это является следствием известной закономерности

$$V_{cr} = \frac{d}{ShT},$$

где  $d$  – характерный размер сооружения, м (здесь – высота балки жесткости);  $Sh$  – число Струхала (безразмерная характеристика), обычно  $0,08 \leq Sh \leq 0,22$ ;  $T$  – период собственных вертикальных колебаний по одной из первых форм, с.

К колебаниям значительной интенсивности могут привести сейсмические воздействия. Вибрация может явиться следствием резких подвижек в несовершенных опорных частях несущих конструкций (а также в опорах коммуникаций, прокладываемых по мостам) при изменении температуры воздуха, сооружения, трубопровода. Колебания такого рода происходят редко и их можно не принимать во внимание при анализе воздействия вибрации на человека.

В подавляющем большинстве случаев наблюдаются поступательные (вертикальные или горизонтальные) колебания конструкций. Горизонтальная и вертикальная динамические нагрузки могут обусловить угловые (крутильные) колебания пролетного строения: первая – при несовпадении центра кручения с центром тяжести сечения (при отсутствии горизонтальной плоскости симметрии конструкции) или с его аэродинамическим центром, а вторая – если она действует со смещением относительно вертикальной продольной плоскости симметрии. Угловые колебания могут возникнуть и при аэродинамической неустойчивости типа срывного флаттера. Крутильные колебания сооружения в целом воспринимаются человеком преимущественно как поступательные вертикальные и горизонтальные поперечные вибрации, если только место его расположения не приближено к центру кручения сечения несущей конструкции.

По способу передачи [20] на человека, вибрацию подразделяют на общую, передающуюся через опорные поверхности (ноги идущего или стоящего человека), и локальную, передающуюся через руки человека (на мостах – от перил).

Необходимо отметить также психологическое действие проявлений вибрации, воспринимаемых органами чувств (зрительных и слуховых): заметных на глаз колебаний опор светильников, трамвайной и троллейбусной контактной сети на мосту, несущих канатов, вант, подвесок, сопровождаемые стуком при соударениях.

Частотный диапазон чувствительности человеческого организма к вибрации весьма велик – от 0,1 до 1500 Гц. Характер вредного действия вибраций на человека во многом зависит от частотного состава [21] (табл. 1).

Вибрации разных направлений при равной их интенсивности не одинаково воспринимаются человеком. Наиболее неблагоприятны, с точки зрения ощущений, виброускорения в полосе частот 4–8 Гц при вертикальных и менее 2 Гц при горизонтальных колебаниях [1]. Порог восприятия (порог чувствительности) в этих частотных полосах соответствует ускорению около  $0,01 \text{ м/с}^2$  [1]. Воздействие вибраций на человека в значительной степени зависит от их длительности. По данным работы [1], величина предельно допустимых виброускорений при длительности воздействия до 5 минут сохраняется на одном уровне, затем начинает падать и снижается через 4 часа более чем в 5 раз.

Таблица 1

Действие вибрации	Частоты колебаний мостов, Гц
Укачивание	
Основные резонансы тела	
Затруднение дыхания	
Вредное влияние на зрение	
То же, на сердечно-сосудистую систему	
Ухудшение координации рук, ног	
Ухудшение качества работы	

Длительность пребывания человека на мостах и соответственная длительность воздействия вибрации обусловлены его передвижением с помощью транспортных средств или пешком, выполнением ремонтных работ или осмотром конструкций во время эксплуатации. Для пешеходов время пребывания на мосту обычно составляет 1–10 мин. Степень воздействия вибрации зависит от позы человека и характера выполняемой им деятельности.

При анализе реакции людей на вибрации мостов необходимо учитывать также следующие особенности:

- малоизученный в медицине частотный диапазон воздействий 0,2–2 Гц;
- достаточно высокие требования пешеходов к комфорту (выше, чем в транспортных средствах и на рабочих местах промышленных предприятий, и, по-видимому, ниже, чем в жилых домах и производ-

ственных помещениях для умственного труда);

- большое разнообразие мостов по расположению, назначению, характеру пешеходного движения (городские, в зонах отдыха, над путями и автодорогами, служебные проходы и т. д.);

- дополнительные психологические воздействия на людей, связанные со значительной высотой расположения пешеходного прохода моста над окружающей местностью. К настоящему времени разработаны различные национальные и международные нормативные документы, ограничивающие интенсивность вибрации на транспорте, в промышленности, в сельском хозяйстве.

Рекомендательный характер носит предложенный Международной организацией по стандартизации (ИСО) стандарт ИСО 2631-78 [1]. Во многих национальных и ведомственных нормах учтены его основные положения. Стандартом установлены допустимые пределы вибрации по критериям обеспечения производительности работы («граница снижения производительности труда от вибрации»), безопасности и здоровья («предел воздействия») и комфорта («порог снижения комфорта»). Для оценки интенсивности вибрации используется величина виброускорения. Отметим, что эта характеристика наиболее удобна при практическом использовании, поскольку её предельно допустимые значения изменяются в существенно более узком диапазоне, чем виброскорости, или, тем более, виброперемещения. Базовой в этом стандарте является «граница снижения производительности труда», которая в 2 раза ниже «предела воздействия»; «порог снижения комфорта» в 3,15 раза ниже базовой границы. «Предел воздействия» установлен примерно на половине экспериментально определенного предела переносимости, что является слишком высоким уровнем при длительном воздействии вибрации на человека. Стандарт не распространяется на сооружения типа мостов, однако основные его положения заслуживают внимания.

В СССР действуют Санитарные нормы проектирования промышленных предприятий СН 245-71 [22], формально распространяющиеся и на сооружения транспорта. В этих нормах ограничены параметры вибрации, передаваемой на рабочие места в производственных помещениях. Нормируемыми параметрами вибрации являются среднеквадратичные величины виброскоростей в октавных полосах частот [23] или амплитудные значения виброперемещений при гармонических колебаниях заданной частоты. Приведены нормативы параметров при непрерывном воздействии вибрации в течение рабочего дня (8ч.). При продолжительности воздействия вибрации в течение рабочего дня, меньшего 4, 2 и 1 ч, **допустимые величины увеличивают соответственно в 1,4; 2 и 3 раза.** Характер труда (умственного

или физического), близость человека к источнику вибрации, а также направление вибрации в нормах не учитываются.

С 1980 года в СССР действует ГОСТ 12.1.012-78\* [20], устанавливающий классификацию и гигиенические нормы вибрации, требования к вибрационным характеристикам производственного оборудования. В ГОСТе учтены положения соответствующих стандартов СТ СЭВ 1932-79 [24]. Нормирование произведено отдельно для общей и локальной вибрации. При этом общую вибрацию по источнику её возникновения разделяют на следующие категории: 1 - транспортная вибрация; 2 - транспортно-технологическая, воздействующая на операторов специальных машин с ограниченным перемещением; 3 - технологическая вибрация, воздействующая на операторов стационарных машин или передающаяся на рабочие места, не имеющие источников вибрации.

Последняя разделена на категории 3а, 3б, 3в и 3г, отличающиеся особенностями расположения рабочих мест и характером труда. Отметим категорию 3в, соответствующую рабочим местам на складах, в столовых, бытовых помещениях, наиболее близкую к условиям пребывания человека на мосту.

Нормируемые величины виброускорений для категории 1 соответствуют «границе снижения производительности труда» [1], а для категорий 2 и 3 они находятся ниже «порога снижения комфорта».

Предусмотрена возможность гигиенической оценки вибрации частотным (спектральным) анализом нормируемого параметра, интегральной оценкой нормируемого параметра по частоте, а также дозой вибрации.

При частотном анализе в диапазоне 0,8–80 Гц нормируемыми параметрами являются средние квадратичные значения виброскорости  $V$  или виброперемещения  $a$  в октавных или 1/3 – октавных полосах частот для воздействия вибрации в течение 8 ч (480 мин). Если фактическое время воздействия  $T$  меньше 480 мин, то значение нормируемого параметра  $U_t$  определяется по формуле

$$U_t = U_{480} \sqrt{\frac{480}{T}},$$

где  $U_{480}$  – допустимое значение параметра, приведенное в таблицах [20], при длительности воздействия вибрации 480 мин (при этом  $t$  принимается не менее 10 мин). Максимально допустимая величина виброускорения в данном случае составляет

$$U_{10} = U_{480} \sqrt{\frac{480}{100}} \cong 7U_{480}.$$

В качестве рекомендуемого приложения к стандарту приведены величины допустимых амплитуд виброперемещений для расчета строительных конструкций при проектировании. Три ряда величин в диапазоне 2–63 Гц относятся к помещениям разного назначения; длительность воздействия вибрации и её направление не указаны.

Весьма жестким ограничениям (на уровне полосы чувствительности) подчинены допустимые вибрации в жилых домах [25]. В практике проектирования общественных зданий обычно принимают предельно допустимое значение амплитуды горизонтального виброускорения  $0,15 \text{ м/с}^2$  [26]; проект главы СНиП «Нагрузки и воздействия» устанавливает эту величину в размере  $0,07 \text{ м/с}^2$ . Следует учитывать, что эти нормативы относятся к помещениям для умственного труда и при большой длительности воздействия.

До сих пор отсутствуют международные или национальные нормативы обязательного характера, ограничивающие по гигиеническим соображениям вибрации мостов; однако практика эксплуатации настоятельно требует установления соответствующих критериев. С этой целью в форме тестов производятся исследования воздействий вибраций мостов на человека (ФРГ, Япония [27]).

На основании анализа явлений ветрового резонанса висячих и вантовых мостов в Канаде, США и Великобритании используется предложение Уордлоу [16, 17] об ограничении продольной амплитуды виброускорения величиной  $0,5 \text{ м/с}^2$  ( $0,05g$ ) при частоте около 1 Гц; это требование распространяют и на диапазон частот  $0,5\text{--}2$  Гц.

Стремление к исключению возможности резонансных колебаний мостов, вызываемых движением пешеходов, косвенно отражено в известном положении действующих отечественных норм проектирования мостов [28]: «в пролетных строениях автодорожных, городских и пешеходных мостов расчетный период свободных вертикальных колебаний не должен находиться в интервале  $0,3\text{--}0,7$  с, а период горизонтальных колебаний не должен совпадать с периодом вертикальных колебаний или быть кратным ему». Это положение в свое время подвергалось справедливой критике И.И. Казея [7], в основном из-за чрезмерно широкого частотного диапазона, в котором находится едва ли не большинство мостов на дорожной сети, и неточностей ряда формулировок. Предложения И.И. Казея легли в основу соответствующего пункта проекта главы СНиП по проектированию мостов, в котором «запрещенный» диапазон перепадов периодов свободных вертикальных колебаний ограничен  $0,45\text{--}0,6$  с, введен соответствующий диапазон  $0,9\text{--}1,2$  с недопустимых величин перепадов периодов колебаний в горизонтальной плоскости, уточнено чисто форм, для которых ведется проверка, снято ограничение

периодов колебаний для автодорожных мостов. Представляется целесообразным ввести расчетную проверку пролетных строений пешеходных и городских мостов по критерию воздействия вибраций на человека (пешехода), считая возникновение опасных для человека колебаний одним из предельных состояний по пригодности к нормальной эксплуатации. В качестве нормируемого параметра при проектировании предлагается использовать величину  $W_{amp}$  амплитуды виброускорения гармонических (вынужденных) колебаний в диапазоне частот, меньших или равных 20 Гц. При оценке вибрации существующих мостов определяются средние квадратичные значения виброускорения в пределах 1/3-октавных полос  $W_q$ , а затем условная величина

$$W_{amp} = \frac{W_q}{0,7}.$$

Расчетная проверка формулируется в виде  $W_{amp} < W_{sup}$ .

Величины  $W_{sup}$  предлагается назначать раздельными для колебаний в вертикальной и горизонтальной плоскости, но не зависящими от частоты в диапазоне частот, меньших или равных 20 Гц (в запас, по диапазону частот, соответствующему наибольшей чувствительности человека к вибрации). Целесообразно установить единые нормативы  $W_{sup}$  независимо от причины возникновения колебаний. Предельные значения виброускорений при ветровом резонанс по указанным ранее причинам следует увеличить только при скорости ветра свыше 10 м/с.

На основе анализа указанных выше норм и рекомендаций, с учетом особенностей вибрации мостов и соответствующей реакции пешеходов предлагаются следующие величины  $W_{sup}$  (табл. 2).

Таблица 2

Направление вибрации	Предельные значения виброускорения (м/с ) <sup>2</sup> при колебаниях вызванных				
	движением транспорта	движением пешеходов	ветровыми воздействи- ми при скорости ветра, м/с		
			< 10	25	>25
Вертикальное	0,5			1,0	не регламен- тируется
Горизонталь- ное	0,25			0,5	

При скорости ветра в интервале  $10 \text{ м/с} < V < 25 \text{ м/с}$  значения  $W_{sup}$  следует принимать по интерполяции.

Предлагаемые нормативные значения могут уточняться после накопления опыта практических расчетов и натурных наблюдений.

Проверка по критерию воздействия вибрации на человека не исключает необходимости выполнения обычного комплекса расчетных проверок по прочности, устойчивости, выносливости и деформативности.

Гигиеническую оценку вибрации» вызванной действием технологического оборудования на мостах специального назначения (конвейерных, трубопроводных и т.д.), следует производить в соответствии с ГОСТ [20] по категории вибрации За. Эта методика может быть использована и для оценки вибраций мостов обычной транспортной сети при длительном пребывании на них ремонтного и обслуживающего персонала.

Расчетные проверки по уровню вибрации можно не производить, если на мосту имеются лишь служебные проходы, предназначенные для кратковременного пребывания (движения) ограниченного круга лиц. Не производится проверка и для сооружений временного характера. Обычно мостами временного типа пользуется ограниченный круг лиц, которые должны строго соблюдать правила движения: запрещение движения «в ногу», бега и т.д. Следует иметь в виду, что вредное влияние низкочастотной вибрации усугубляется при резких поворотах и наклонах головы [29].

Приведенные значения  $W_{sup}$  (табл. 2) соответствуют «нормальному» (неупорядоченному) движению пешеходов; ходьба «в ногу», безусловно, не должна допускаться, для чего может потребоваться проведение разъяснительной работы среди населения и вывешивание предупредительных надписей.

Если расчетный или измеренный уровень вибрации не отвечает предъявленным требованиям, то должны быть приняты меры виброзащиты.

Мероприятия по снижению чрезмерного уровня вибраций отличаются большим разнообразием:

- направленное формирование спектра собственных частот колебаний путем надлежащего выбора конструктивной формы, геометрических параметров, материала конструкций;
- повышение (понижение) жесткости конструкций;
- повышение диссипативных свойств мостовых конструкций;
- создание конструкций с улучшенными аэродинамическими качествами;
- установка динамических и аэродинамических гасителей колебаний;

– активное управление колебаниями средствами автоматического регулирования.

Убедительные примеры эффективности установки динамических гасителей колебаний на пешеходных мостах в Англии описаны в работе [30]. Анализ колебаний большой группы пешеходных мостов показал, что в некоторых случаях уровень ускорений превышает нормативные значения [31], устанавливаемые по формуле

$$W_{sup} = 0,5\sqrt{f} \text{ м/с}^2.$$

Здесь  $f$  – собственная частота колебаний моста, Гц. Параметры гасителей с оптимальной настройкой [14] корректировались в процессе их установки. Описанные в работе [30] гасители отличаются весьма малыми значениями относительной массы (0,6% массы пролетного строения). Тем не менее эффективность снижения амплитуд колебаний достигала 6–10 при гармоническом возбуждении резонансных колебаний и 2,2–4 при возбуждении пешеходами. При этом особо отмечается такой факт: затухание колебаний, вызванных пешеходами (ходьба и бег), происходит настолько быстро, что они практически прекращаются после схода пешехода с моста.

Для исключения заметной на глаз вибрации канатных элементов следует применять объединение параллельных канатов вант или подвесок с помощью сжимов в отдельных сечениях, установку демпферов у мест закреплений.

Собственные частоты опор светильников и контактной сети не должны совпадать или быть кратными с собственными частотами главных ферм (балок) и поперечной конструкции.

### *Литература*

1. Руководство по оценке воздействия общей вибрации на тело человека: Международный стандарт ИСО 2631-78. – 20 с.
2. Бондарь Н.Г. и др. Динамика железнодорожных мостов / Под ред. Н.Г. Бондаря. – М.: Транспорт, 1965. – 412 с.
3. Чирков В.П., Иванов А.В., Дмитриевская Е.Б. Результаты экспериментальных исследований динамических характеристик пролетных строений пешеходных мостов: Труды Моск. Инс-та инж. ж.-д. транспорта, вып. 641. – М.; МИИТ» 1981, с. 22–34.
4. Барченков А.Г. Динамический расчет автодорожных мостов. – М.: Транспорт, 1981. – 70 с.
5. Рабинович И.М. Динамическое воздействие толпы на мосты по данным специальных опытов Отдела инженерных исследований. – В сб.: Вопросы динамики мостов. – Научно-технический комитет

НКПС, вып. № 63, 13-й сборник Отдела инженерных исследований. – М.» 1927.

6. Бернштейн Н.А. Исследования по биодинамике ходьбы и бега. Там же.

7. Казей И.И. Совершенствовать нормативы динамических характеристик мостов. – Автомобильные дороги, 1972, № 1.

8. Schulze H. *Dynamische Einflüsse der Verkehrslast auf Fußgängerbrücken*. Sygnal und Schiene, №2, 1980, (S. 91–33); №3, 1980 (S. 143–147).

9. Kramer H., Kebe H.-W. Durch Menschen erzwungene Bausewerksschwingungen. Bauingenieur, №54, 1979, s. 195–199.

10. Чирков В.П., Иванов А.В. О динамическом расчете пешеходных мостов: Труды Моск. инс-та инж. ж.-д.транспорта, вып.650. – М.: МИИТ, 1979, с.79–89.

11. Сорокин Е.С. Динамический расчет несущих конструкций зданий. – М.: Госстройиздат» 1956.

12. Справочник по динамике сооружений / Под ред. Б.Г. Коренева, И.М. Рабиновича. – М.: Стройиздат, 1972. – 512 с.

13. Казакевич М.И. и др. Реакция всячего перехода пролетом 720 м на реальное ветровое воздействие. – В кн.: Вопросы динамики мостов и теории колебаний: Межвуз. сб. науч.тр., вып.214/25. – Днепрпетровск: ДИИТ, 1982, с. 45–55.

14. Казакевич М.И. Аэродинамическая устойчивость надземных и всячих трубопроводов. – М: Недра, 1977. – 200 с.

15. Durgin F.N., Chock A.W. Pedestrian Level Winds. Proc ASCE, J. Str. Div., vol. 108, № St 8, Aug, 1982, p. 1751–1767.

16. Wardlaw R.L. A review of the aerodynamics of bridge road decks and the role of wind tunnel investigations. Public Roads V. 39, №3, 1975, p. 122–127.

17. Wardlaw R.L. Some approaches for improving the aerodynamic stability of bridge road decks. Pбoc. Int. Conf. On Wind Eff. Build. And Struct., Tokyo, 1971.

18. Казакевич М.И., Кравцов М.М., Попов В.Ю. О проверке аэродинамической устойчивости всячих мостов и переходов. – В кн.: Строительная механика и расчет сооружений, № 6.– М.: Стройиздат, 1976, с. 45–48.

19. Руководство по расчету зданий и сооружений на действие ветра. – М.: Стройиздат, 1978 / Центр.науч.-исслед.ин-т строит.конструкций им. В.А.Кучеренко. – 224 с.

20. Система стандартов безопасности труда. Вибрация. Общие требования безопасности. ГОСТ 12.1.012–78. .Переиздание с изменением № 1 в ноябре 1981 г. – М.: Издательство стандартов, 1982. – 28 с.

21. Пановко Г.Я., Потемкин Б.А., Фролов К.В. Вибрационные воздействия и их влияния на человека. – В кн.: Вибрации в технике, т. 6. Защита от вибрации и ударов / Под ред. чл.-корр. АН СССР К.В. Фролова. – М.: Машиностроение, 1981, с. 366–373.
22. Санитарные нормы проектирования промышленных предприятий СН 245–71. – М.: Стройиздат, 1972. – 97 с.
23. Вибрация. Термины и определения. ГОСТ 24346-80. – М.: Издательство стандартов, 1980. – 32 с.
24. Вибрация. Допустимые уровни общей вибрации на рабочих местах: Стандарт СЗВ, СТ СЭВ 1932–79. – 6 с.
25. Санитарные нормы допустимых вибраций в жилых домах. – М.: Минздрав СССР, 1975. – 12 с.
26. Ханджи В.В. Расчет многоэтажных зданий со связевым каркасом. – М.: Стройиздат, 1977.
27. Komatsu S, Kato T. Matsumura H. Design and construction of Kawasaki-Bashi foot- Bzidge. Der Stahlbau, №3, 1980, s. 69–77.
28. Чирков В.П., Иванов А.В., Дмитриевская Е.Б. О путях улучшения динамических характеристик пролетных строений эксплуатируемых пешеходных мостов: Труды Моск. инс-та инж. ж.-д. трансп., вып. 641. – М.: МИИТ, 1981, с. 35–44.
29. Бернацкий В.Н. и др. Ускорения, воздействующие на организм человека при штормах: Космическая биология и авто-космическая медицина, № 1. – М.: Медицина, 1981.
30. Jones R.T., Pzetlove A.J., Eyre R. Two case studies in the use of tuned vibration absorbers on footridges. The Structural Engineer, №3 (June), 1981, p. 27–32.
31. BS 5400. Steel, concrete and composite bridge. London, British Institution.

## **ИНСТРУМЕНТАЛЬНЫЕ НАБЛЮДЕНИЯ ЗА РАБОТОЙ ВАНТОВЫХ ТРУБОПРОВОДНЫХ МОСТОВ БОЛЬШИХ ПРОЛЁТОВ\***

Большую роль в оценке эксплуатационной надежности, долговечности и безопасности вантовых трубопроводных мостов играют натурные обследования, испытания и длительные наблюдения сооружений. Они служат надежной основой диагностики металлоконструкций.

Генеральной целью испытаний является проверка соответствия работы вооружения и отдельных его элементов под нагрузкой принятым в проекте расчетным предпосылкам. Результаты испытаний являются основанием для оценки возможности сдачи сооружения в эксплуатацию или оценки ресурса сооружения, а также для уточнения инструкции по его эксплуатации, разработки рекомендаций по совершенствованию конструктивных форм и методов расчета конструкций.

На особо важных и уникальных сооружениях следует организовать постоянные натурные наблюдения с целью оказания технической помощи при эксплуатации, уточнения метеорологического и сейсмического микрорайонирования и соответствующих нагрузок, изучения реакции конструкций на реальные воздействия; обнаружения динамической или аэроупругой неустойчивости; выявления динамических факторов, вызывающих отрицательные воздействия на биосферу. Это позволит обоснованно диагностировать состояние конструкций и в необходимых случаях разрабатывать мероприятия по повышению их надежности.

Одним из доминирующих критериев диагностики вантовых трубопроводных мостов являются их динамические свойства, выступающие в качестве интегральных оценок состояния. За последнее десятилетие разработаны методы и средства измерения динамических характеристик конструкций, в том числе в инфранизкочастотном спектре (до 0,2 Гц). К этим характеристикам относят собственные частоты, формы и логарифмические декременты пространственных колебаний, параметры вынужденных колебаний. Сопоставляя эксплуатационные значения динамических параметров с их эталонны-

\*Опубликовано совместно с Е.А. Нейманом, З.А. Шульманом, М.М. Кравцовым в Трудах ЦНИИПСК «Экспериментальные исследования эксплуатационной надежности металлических конструкций зданий и сооружений», Москва, 1980.

ми, «паспортными» значениями, теоретическими (расчетными) или экспериментальными, полученными при вводе сооружений в эксплуатацию, можно достаточно обоснованно дать диагностику состояния конструкций.

Опыт эксплуатации, многолетних наблюдений и диагностики конструкций двух уникальных висячих трубопроводных мостов газопровода Афганистан-СССР через р. Амударья пролетом 660 м и аммиакопровода Тольятти–Одесса через р. Днепр пролетом 720 м показывает, что систематический анализ состояния сооружения позволяет не только содержать их на требуемом уровне, но и своевременно осуществлять мероприятия по обеспечению эксплуатационной надежности и расчетной долговечности этих сооружений.

Наряду с упоминавшимися выше интегральными динамическими критериями диагностики состояния сооружения широкое распространение могут получить и иные критерии, оценка которых дифференцируется поэлементно в результате выполнения комплекса инструментальных измерений. К этому комплексу можно отнести: измерение перемещений несущих элементов конструкций в вертикальной и горизонтальной плоскостях под воздействием силовых факторов, в том числе и метеорологического, что позволяет определить фактическую жесткость и деформативность элементов и сооружения в целом; измерение усилий и напряжений в узлах и элементах; геодезические измерения пространственного положения (геометрии) элементов и узлов сооружения.

Экспериментальные исследования, испытания и наблюдения, проводимые для оценки и прогнозирования эксплуатационной надежности конструкций висячих мостовых переходов, выполняются на всех этапах воздействия, при вводе в действие и при эксплуатации сооружения. В период возведения конструкций измеряются геометрические характеристики моста, уточняются физико-механические свойства материала конструкций, в том числе канатов, используемых в вантовой системе, определяются усилия в элементах вантовой системы, монтажных высокопрочных болтах и другие параметры. В целом, на этом этапе выполняется комплекс измерений, обеспечивающий получение информации о соответствии конструктивных и монтажных параметров их проектным значениям.

При вводе сооружения в эксплуатацию проводятся пусковые испытания на расчетные и эксплуатационные нагрузки. На этом этапе выполняются экспериментальные исследования, цель которых – выявление действительной работы конструкций и сравнение ее с принятой в расчете.

Для достижения этой цели проводится комплекс измерений,

обеспечивающий получение достоверной информации о параметрах работы мостового перехода при различных нагрузках и их сочетаниях. При этом определяются напряженно-деформированное состояние конструкций, усилия в канатных элементах, динамические характеристики сооружения и его реакция на реальные ветровые нагрузки.

В процессе эксплуатации выполняются периодические инструментальные и визуальные наблюдения за состоянием конструкций и параметров их работы в реальных условиях, определяются и сравниваются с исходными величинами, полученными при сдаче сооружения в эксплуатацию, собственные частоты колебаний элементов моста, деформативность и изменения усилий в вантовой системе, на базе которых делается оценка надежности работы конструкций.

Для реализации программы измерений в ГПИ «Днепр-проектстальконструкция» разработана комплексная система контроля и диагностики эксплуатационной надежности вантовых мостов и переходов (см. рисунок).

Система включает подсистемы измерения геометрических характеристик и деформативности сооружения, напряженного состояния конструкций, усилий в элементах вантовой системы, параметров колебаний. Измерения положения в плане и профиля фермы жесткости, отклонения пилонов от вертикали и других геометрических характеристик выполняются геодезическими инструментами, лазерными визирами ЛВ-5 и зенитцентрирами высокой точности.

Усилия натяжения в канатах раскосной системы в период ее монтажа определяются с помощью накладных динамометров усовершенствованной конструкции. В отличие от аналогичных динамометров системы ЛИИЖТа, приборы конструкции ГПИ ДнепрПСК снабжены кулачковым нагружающим устройством, которое обеспечивает более высокую точность и сокращает время измерений. В главном кабеле и канатах ветровой фермы в период регулирования вантовой системы усилия оцениваются по давлению масла в гидросистеме домкратов и с помощью встроенных в натяжную систему канатов силоизмерительных датчиков.

Динамический метод измерений позволяет определять относительно наибольшие изменения усилий в канатах главного кабеля и ветровой фермы. В этом методе используется известная связь между усилием натяжения и частотой свободных поперечных колебаний каната. Разработанная аппаратура, реализующая этот метод измерений, обеспечивает высокоточный длительный контроль усилий в канатах большого диаметра (60 мм и более). На его основе организуется дистанционный контроль этого параметра.

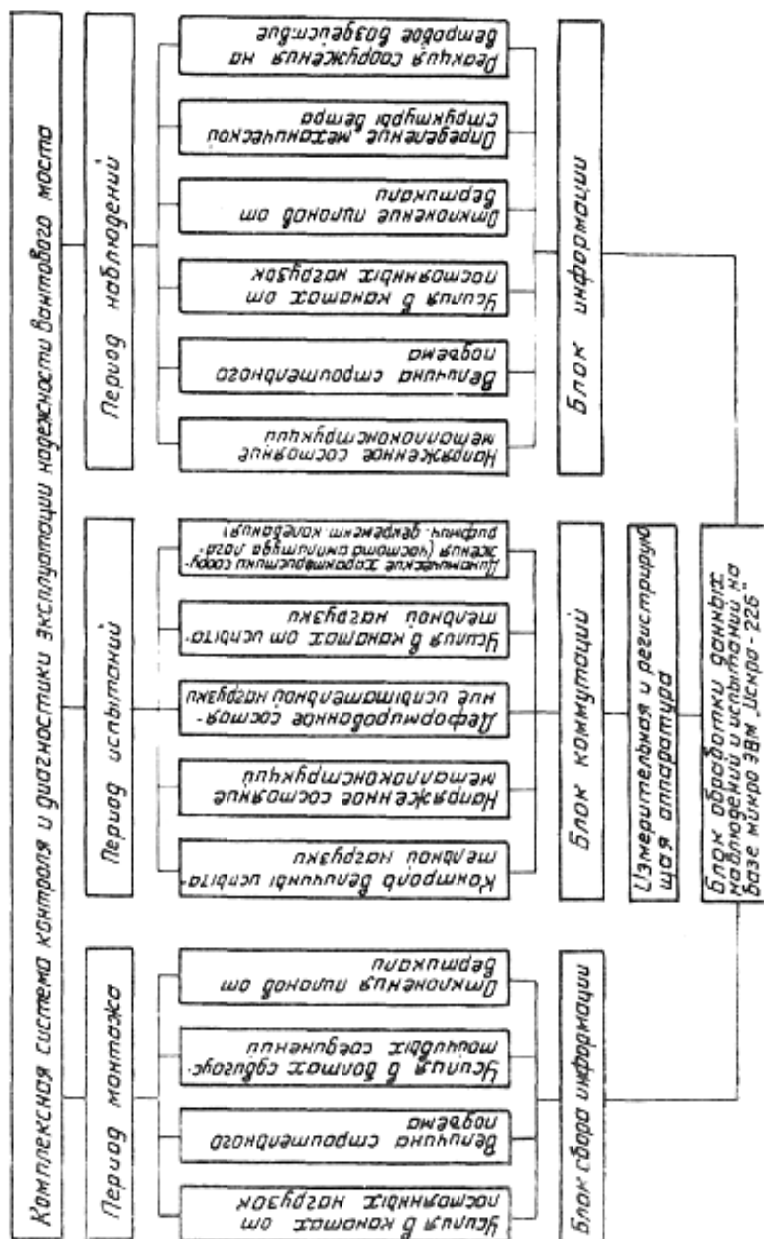


Рис. 1. Комплексная система контроля и диагностики эксплуатационной надежности винтовых мостов и переходов

Деформативность сооружения определяется путем измерения профиля фермы жесткости при нагружении конструкции испытательной нагрузкой. Измерения выполняются с помощью оптического устройства, сконструированного на базе лазерного визира ЛВ-78 и инварных реперных реек, неподвижно установленных на конструкции. В отдельных, наиболее характерных точках моста, с целью оперативного контроля за его прогибом используются разработанные институтом индуктивные и реохордные преобразователи больших перемещений. Выходной сигнал этих преобразователей регистрируется автоматически в цифровой форме.

Напряженное состояние элементов конструкций на всех этапах контроля измеряется датчиками деформаций со струнно-акустическими преобразователями, конструкция которых разработана в ГПИ ДнепрПСК. Принцип действия этих датчиков основан на изменении частоты собственных колебаний струны, закрепленной на конструкции, в зависимости от действующих в ней механических напряжений. В разработанном деформометре преобразователь работает в автогенераторном режиме, т.е. в режиме непрерывных колебаний струны. Это обусловило возможность их применения в автоматизированной подсистеме длительного измерения напряженного состояния металлоконструкций мостов и мостовых переходов.

Разработанная в институте специальная методика и устройства позволяют выполнять достоверную оценку усилий натяжения высокопрочных болтов в сдвигоустойчивых соединениях элементов конструкций. Весь комплекс средств измерений, устройства для сбора и регистрации параметров работы сооружения при воздействии на него постоянных и временных статических нагрузок объединены в единую информационно-измерительную систему. Для определения динамических характеристик конструкций на стадии натурных испытаний разработана специальная методика и средства возбуждения собственных колебаний сооружения. Существо методики заключается в приложении к конструкции возмущающей силы с интервалом времени, равным периоду собственных колебаний. Использование следящего устройства позволяет прикладывать силу строго в начале такта колебаний, что дает возможность возбуждать гармонические колебания амплитудой возможность возбуждать гармонические колебания амплитуд до 100 мм с минимальной затратой энергии. Измерение параметров колебаний (периодов, амплитуд и декрементов) выполняется датчиками больших перемещений конструкции ДнепрПСК с индуктивными соленоидными преобразователями. Регистрация выходных сигналов всех датчиков, установленных на мосту, осуществляется на одной ленте магнитоэлектрического осциллографа Н044, на магнит-

ной ленте магнитографа или в цифровой форме, пригодной для непосредственного ввода в ЭВМ.

В период инструментальных наблюдений измеряются частоты собственных горизонтальных и крутильных колебаний фермы жесткости и горизонтальных колебаний в двух направлениях пилонов.

ГПИ ДнепрПСК совместно с Институтом Физики Земли разработал комплект виброизмерительной аппаратуры, обеспечивающий измерения параметров колебаний большепролетных вантовых мостов и переходов в области инфранизких частот и больших амплитуд. Комплект аппаратуры включает сейсмоприемники С-5-С, установленные на конструкции, блоки формирования характеристик БФХ-2, делители напряжения ШК-2, магнитоэлектрический осциллограф или самописец. Разработана методика оценки частот собственных колебаний сооружения в ветровом потоке. Это значительно снижает трудоемкость измерений, связанных с необходимостью установки на дне реки неподвижных якорей, относительно которых измеряются колебания. Кроме того, это позволило создать автоматизированный комплекс, стационарно смонтированный на мосту и периодически измеряющий параметры его колебаний в течение длительного времени. Исследования реакции мостов на реальное ветровое воздействие выполняются путем длительного непрерывного синхронного измерения механической структуры ветра и перемещений сооружения в его потоке. Основными компонентами разработанной специально для этих исследований автоматизированной измерительной подсистемы являются анеморумбومتر М63, лазерный измеритель перемещений, регистратор видимой записи НО02, пусковое устройство П2-1. Измеритель статических и динамических перемещений разработан на базе лазерного визира ЛВ-78, имеющего мощность квантового генератора 1 мВт. Лазерный визир, установленный на неподвижном основании, создает базовую оптическую линию, направленную вдоль продольной оси моста, а фотоприемные устройства, являющиеся позиционно-чувствительными элементами и укрепленные в точках измерений, регистрируют смещения относительно этой оси. Все компоненты измерительной системы синхронизированы, включение аппаратуры происходит автоматически при скорости ветра 10 м/с, время непрерывной работы – 8 часов.

Материалы динамических испытаний и наблюдений анализируются на базе точных аналитических методов, основанных на статистической обработке и спектральном анализе с помощью преобразований Фурье с привлечением современной вычислительной техники. Это позволяет на каждом этапе измерений получать спектральные плотности (энергетические спектры) распределения энергии по ча-

стотам колебаний и на этой основе более точно выполнять сравнительную оценку динамических свойств сооружения в различные периоды его эксплуатации.

Анализ результатов длительных наблюдений за состоянием конструкций вантового моста через р.Днепр позволил сделать вывод о достаточной эксплуатационной надежности сооружения. Так, уровни усилий в канатах ветровой фермы, в береговых оттяжках, в раскосах вантовой фермы за период эксплуатации сооружения с 1979 по 1984 гг. практически не изменились и близки к расчетным значениям. Наибольшее изменение строительного подъема происходило в начальный период эксплуатации. Уменьшение строительного подъема в период с 1979 по 1980 гг. составило 122 мм, с 1980 по 1981 гг. – 145 мм. С 1982 по 1984 гг. не отмечено существенного изменения величины строительного подъема фермы жесткости.

В настоящее время величина строительного подъема, приведенная к 10°С составляет 1954 мм. Профиль сооружения за период эксплуатации практически не изменился, оставаясь достаточно плавно очерченным. Отклонения пилонов от первоначального положения не имеют временной закономерности и определяются, в основном, температурой воздуха в момент измерений. Существенного изменения отклонения пилонов от вертикали с 1980 по 1984 гг. не зарегистрировано.

Параметры колебаний элементов конструкций моста через р.Днепр близки к расчетным значениям и за период эксплуатации практически не изменились (табл. 1).

*Таблица 1*

***Периоды колебаний фермы жесткости и пилонов через р. Днепр***

Элементы конструкции	Вид колебаний		Периоды колебаний, с					
			Расчетные	Измеренные				
				1979г.	1980г.	1981г.	1982г.	1984г.
Ферма жесткости	Вертикальные	l/4	3,69	3,41	3,2	3,33	3,6	3,45
		l/4	-	3,34	3,44	3,33	3,6	3,45
Пилон	Горизонтальные	l/4	6,10	5,92	6,4	6,2	6,7	6,40
		l/4	3,15	4,4	4,3	3,1	4,5	4,30
		Вдоль моста	0,66	0, 71	0,7	—	—	0,7
		Поперек моста	-	-	0,84	-	-	0,83

Несколько иные результаты наблюдений за состоянием конструкций вантового моста через р.Амударья. Так, по натурным данным динамических интегральных характеристик (табл. 2) был сделан вывод о снижении эксплуатационной надежности сооружения к 1981г.

*Таблица 2*

***Частоты вертикальных и горизонтальных колебаний фермы жесткости вантового моста через р.Амударья***

Вид колебаний	Частоты колебаний, рад/с, по годам		
	1974	1981	1984
Вертикальные	1,94	2,04	2,04
Горизонтальные	1,2	1,06	1,3

Выполненные измерения усилий в ветровых канатах подтвердили этот вывод: значения усилий снизились на 25–30%, что нашло отражение и в снижении динамической жесткости в горизонтальной плоскости на 10-15%. Этот факт послужил основанием для проведения ремонтно-профилактических работ на данном сооружении (1983–1984 гг.).

## **ДИАГНОСТИКА МЕТАЛЛИЧЕСКИХ КОНСТРУКЦИЙ И ЕЕ РОЛЬ В ОБЕСПЕЧЕНИИ НАДЕЖНОСТИ СООРУЖЕНИЙ\***

Из большого разнообразия признаков качества надежности к наиболее важным и существенным применительно к металлическим конструкциям следует отнести безотказность, расчетную долговечность, безопасность и ремонтпригодность. Под безотказностью понимают эксплуатационную надежность сооружений в целом и их отдельных элементов. Расчетная долговечность – это расчетный срок службы (или ресурс) при заданной обеспеченности нагрузок такого вида, как ветровая, снеговая, сейсмическая, ветровое волнение и некоторые другие. Безопасность конструкций предполагает их надежность по отношению к биосфере, т.е. к жизни и здоровью людей или состоянию окружающей среды при учете таких факторов, как редкие стихийные воздействия, непредусмотренные условиями нормальной эксплуатации, грубые ошибки на стадиях проектирования, изготовления, строительства или эксплуатации конструкций. Ремонтпригодность конструкций характеризует конструктивную форму с точки зрения условий нормальной эксплуатации и возможности выполнения ремонтно-профилактических, восстановительных и иных работ в процессе нормальной эксплуатации для обеспечения расчетной долговечности или продления срока службы конструкций.

Большую роль в оценке эксплуатационной надежности, долговечности и безопасности металлических конструкций играют натурные обследования, испытания и длительные наблюдения сооружений. Они служат надежной основой диагностики конструкций. Основной целью испытаний является проверка соответствия работы сооружения и отдельных его элементов под нагрузкой принятым в проекте расчетным предпосылкам. Результаты испытаний являются основанием для оценки возможности сдачи сооружения в эксплуатацию, а также для уточнения инструкции по его эксплуатации, разработки рекомендаций по совершенствованию конструктивных форм и методов расчета конструкций. В процессе статических и динамических испытаний производится исследование действительной работы сооружения, определение уровня напряжений и усилий в его элементах и узлах, а также фактической жесткости, деформативности и динамических характеристик всего сооружения и отдельных элементов.

---

\* Опубликовано в книге «Развитие металлических конструкций». ЦНИПСК, МИСИ, ЦНИИСК, Москва, 1987.

На особо важных и уникальных сооружениях следует организовывать постоянные натурные наблюдения, которые осуществляются с целью оказания технической помощи при эксплуатации; уточнения метеорологического и сейсмометрического микрорайонирования и соответствующих нагрузок; изучения реакции конструкций на реальные воздействия; обнаружения динамической, гидро- или аэроупругой неустойчивости; выявления динамических факторов, вызывающих отрицательные воздействия на биосферу. Это позволяет обоснованно диагностировать состояние металлических конструкций и в необходимых случаях разрабатывать мероприятия по повышению их надежности.

Одним из доминирующих критериев диагностики металлических конструкций являются их динамические свойства, выступающие в качестве интегральных оценок состояния. За последнее десятилетие разработаны методы и средства измерения динамических характеристик конструкций, в том числе в инфранизкочастотном спектре (до 0,2 Гц). К этим характеристикам относят собственные частоты, формы и логарифмические декременты пространственных колебаний, параметры вынужденных колебаний. Сопоставляя эксплуатационные значения динамических параметров с их эталонными, «паспортными» значениями, теоретически (расчетными) или экспериментальными, полученными при вводе сооружений в эксплуатацию, можно достаточно обоснованно дать диагностику состояния конструкций. Таким образом, диагностика металлических конструкций аналогично диагностике судо- и авиастроительных конструкций в машиностроении или атомных реакторов в энергетике играет важную роль в обеспечении надежности сооружений и опирается на динамические методы экспериментальных исследований.

Опыт эксплуатации многолетних наблюдений и диагностики металлических конструкций двух уникальных висячих трубопроводных переходов – газопровода Афганистан–СССР через р.Амударью пролетом 660 м и аммиакопровода Тольятти–Одесса через р.Днепр пролетом 720 м – показывает, что систематический анализ состояния сооружений позволяет не только содержать их на требуемом уровне, но и своевременно осуществлять мероприятия по обеспечению эксплуатационной надежности и расчетной долговечности этих сооружений. При этом необходимо отметить, что диагностика конструкций является составной частью эксплуатации сооружений и не требует дополнительных эксплуатационных затрат, исключая средства на привлечение (не реже одного раза в пять лет) специализированных организаций для выполнения инструментальных измерений, геодезической съемки и некоторых других видов работ.

Наряду с упоминавшимися выше интегральными, динамическими критериями диагностики состояния металлоконструкций широкое распространение могут получить и иные критерии, оценка которых дифференцируется поэлементно в результате выполнения комплекса инструментальных измерений. К этому комплексу можно отнести:

- измерение перемещений несущих элементов конструкции в вертикальной и горизонтальной плоскостях под действием силовых факторов, в том числе метеорологического воздействия, что позволяет определить фактическую жесткость и деформативность элементов и сооружения в целом;

- измерение усилий и напряжений в узлах и элементах;

- геодезические измерения пространственного положения (геометрии) элементов и узлов сооружения.

Безопасность конструкций как признак качества надежности определяется санитарным критерием диагностики, т.е. характером воздействия вибраций на организм человека. Любая вибрация оценивается с различных точек зрения ее физиологического или психологического воздействия на человека: комфорта с предельным порогом его снижения; обеспечения профессиональной деятельности с предельной границей снижения производительности труда вследствие усталости при выполнении работ на конструкциях; обеспечения безопасности и здоровья, которому соответствует предел воздействия. К основным параметрам вибрации, обуславливающим санитарный критерий диагностики, т.е. определяющим степень ее воздействия на организм человека, относятся: частотный состав, уровни характерных кинематических факторов – виброперемещений, виброскоростей и виброускорений, направление, регулярность (повторяемость) вибрации, длительность воздействия на человека.

При оценке безопасности конструкций с точки зрения санитарного критерия диагностики учитываются также: малоизученный в медицине частотный диапазон воздействия 0,2÷2 Гц; достаточно высокие требования человека к комфорту (на рабочих площадках промзданий – ниже, в жилых домах и производственных помещениях для умственного труда – выше); большое разнообразие металлических конструкций по назначению, характеру динамических воздействий и пр.; дополнительные психологические воздействия на людей, связанные с высотой расположения рабочих площадок над окружающей местностью. Интенсивность безопасных уровней вибрации конструкций регламентируется в СССР Санитарными нормами (СН 245-71), которые значительно устарели по сравнению с такими нормативными документами, как ГОСТ 12.1.012–78\*, СТ СЭВ 1932-79, ИСО 2631-78.

Одним из современных путей повышения эксплуатационной надежности, безопасности и долговечности конструкций является виброзащита. Виброзащитой в технике называют совокупность методов и средств для уменьшения вредного воздействия вибрации на человека, конструкции зданий и сооружений, расположенные на них машины, механизмы и приборы. Основная цель виброзащиты конструкций – снижение амплитуд колебаний и соответственно динамических напряжений в их элементах, вызванных действием динамических нагрузок различной природы.

# STABILIZATION OF A CABLE-STAYED FOOTBRIDGE\*

## 1. INTRODUCTION

The cable-stayed footbridge across the river Neris in Vilnius, Lithuania, was built in 1984. The bridge was designed by the Transmost Institute in St. Petersburg (then Leningrad), Russia.

Structures of this type are rather sensitive to dynamic effects, especially moving pedestrian loading, which is characterized by periodic load pulses with a frequency of about  $2 \pm 0.2$  Hz in the vertical direction and  $1 \pm 0.1$  Hz in the horizontal plane [1]. Resonance oscillations occur when natural frequencies of the structure in the vertical or the horizontal plane coincide with the frequency of loading impulses.

In this case users complained about feelings of discomfort when crossing the footbridge. Review of the design calculations revealed that no dynamic analysis had been performed. Tests on the structure proved the existence within its natural frequency spectrum of a horizontal frequency of about 1 Hz. This indicated the need for stabilization of the bridge in the horizontal plane, which could be best achieved by modifying the horizontal rigidity and the associated horizontal natural frequency of the bridge to preclude resonance.

## 2. DESCRIPTION OF THE STRUCTURE

The footbridge is a three-span structure with span lengths of  $118.5 + 51.0 + 34.5$  m (Fig. 1). Its cable stays, supported by the 47 m high reinforced concrete pylon, are located in the central vertical plane of the bridge. Each of the four stays consists of six wire ropes made of 91 parallel galvanized wires of 5 mm diameter.

The 2.5 m deep main girders are spaced at 3.0 m. The girders have fixed bearings at the tower pier and expansion bearings at all other supports. The roadway width is 6.5 m between the railings.

The bridge was designed for a pedestrian load of 400 kg/m and the weight of two hot water pipelines at 1700 kg/m.

## 3. DYNAMIC INVESTIGATIONS

### 3.1. Determination of natural frequencies.

The purpose of dynamic analysis is to obtain the lowest natural frequencies for the various vibration modes of the structure. Then the effect of pedestrian loading intensity on the values of natural frequencies

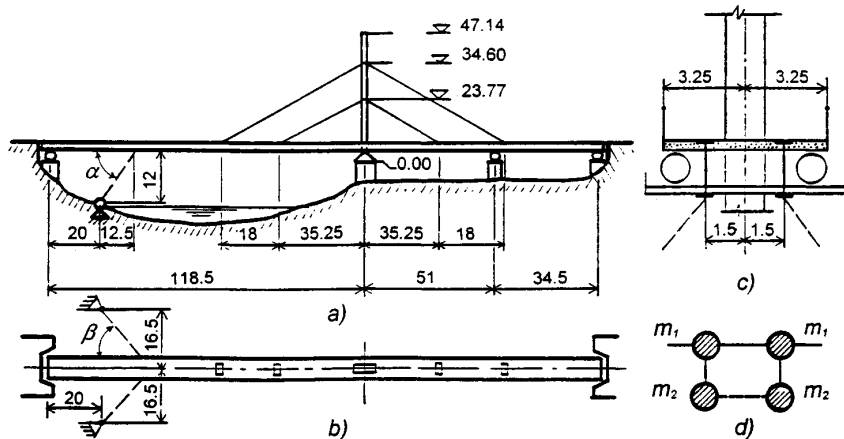
---

\*Опубликовано совместно с В.В. Кулябко в Трудах IABSE Symposium, San Francisco, 1995.

and the various methods of modifying the vibration characteristics of the structure can be studied.

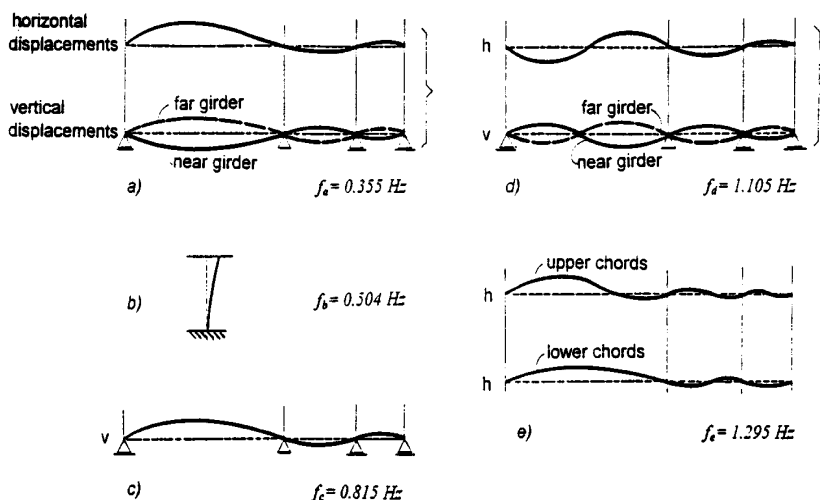
A discrete-continuous model with 46 degrees of freedom was used for the dynamic analysis by the finite element method. Longitudinal deformations of the elements and the asymmetry of the mass and the rigidity distribution along the depth of the bridge cross section were considered. The mass was assumed localized at four points of the cross section (Fig. 1 d).

The five characteristic vibration modes and the values of corresponding frequencies are shown in Fig. 2, arranged in order of increasing frequencies.



**Figure. 1. Cable-stayed pedestrian bridge in Vilnius, Lithuania, a) Elevation; b) Plan; c) Cross Section; d) Calculation model of the cross section**

The lowest frequency was obtained for the first mode of the flexural-torsional horizontal vibrations (a). The lateral vibration out of the bridge plane is second lowest (b). Next is the vertical vibration of the span structure together with the pylon vibration in the longitudinal plane (c). Coupled flexural-torsional horizontal vibrations in the second and the third modes (d), (e) have the highest frequencies. The characteristic relationships between the torsional and the flexural horizontal vibrations of the structure are governed by the existence of only one (vertical) symmetry axis of the bridge cross section.



**Figure. 2.** *Vibration modes and natural frequencies of the bridge without pedestrian loading, a) flexural-torsional horizontal vibrations, first mode; b) lateral vibrations of the bridge pylon; c) vertical vibrations of the span; d) and e) second and third modes of the flexural-torsional horizontal vibrations*

### 3.2. Effect of pedestrian loading on dynamic characteristics.

Dynamic effects on the bridge are governed by two characteristic properties of moving pedestrian loading:

a) the frequency  $f$  the load impulses depends on the intensity  $q$  of the pedestrian loading;

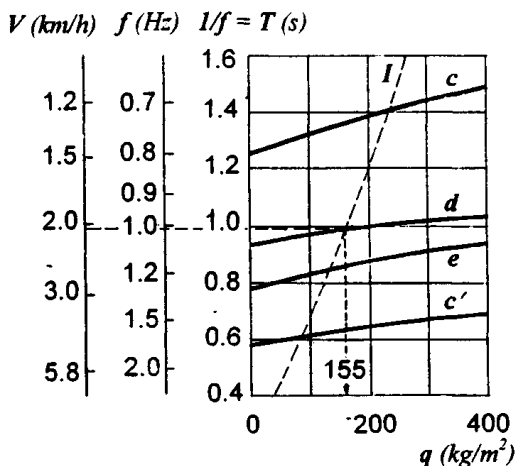
b) the velocity  $V$  of pedestrian movement along the bridge also depends on the load intensity  $q$ .

These relationships were determined by numerous investigations by I. I. Kazej, S. I. Kazej, A. L. Zakora and M. I. Kazakevytch and can be expressed by the following formulas:

$$q = \frac{400}{1 + 1.4 f}, \text{ k g / m}^2$$

$$V = 0.036(25 f^2 + 30 f), \text{ k m / h.}$$

The relationships between the pedestrian load intensity, the velocity of the pedestrians movement and the frequency of the load impulses are shown graphically in Fig. 3.



**Fig 3.** Graphic representation of relationships between the footbridge frequencies  $f$ , velocity of pedestrian movement  $V$ , and pedestrian loading intensity  $q$  for relevant vibration modes shown in Fig. 2. *c*) vertical vibrations, 1st mode; *c*) vertical vibrations, 2nd mode; *d*) flex. tors, horiz. vibr. 2nd mode; *e*) flex. tors, horiz. vibr. 3rd mode; *I*) interaction curve.

Inspection of this diagram shows the unfavorable coincidence of the horizontal frequency of the pedestrians' effect with the natural frequency of 1.02 Hz of the flexural-torsional horizontal vibrations of the second mode, which occurs when the average velocity of the pedestrians' walk  $V$  is about 2.05 km/h. This case corresponds to the pedestrian load  $q = 155 \text{ kg/m}^2$ , or an average of 2.21 pedestrians per one square meter of the bridge deck. This explains the pedestrians' discomfort described as «the ground slipping from under the feet».

### 3.3. Comparison of analytical and experimental results.

Ground rules for analytical diagnostic investigations of dynamic behavior of bridge structures under service conditions as well as during the erection have been outlined in [2]. Dynamic characteristics can also be obtained directly, by tests on the completed structure. The methods for dynamic testing of bridges are described in detail in [3]. The relevant factors in such investigations are: the wind effects, vibrations induced by vehicular traffic which may magnify the natural vibrations of the structure, dynamic characteristics of pedestrian loading. Experimental methods, which can provide verification of analytical results, are generally more reliable.

Comparison of dynamic characteristics obtained by the two methods for the Vilnius bridge is given in Table 1.

*Table 1*  
***Calculated and experimental values of vibration frequencies (Hz)***

Case (refer to Fig. 2)	Analysis	Tests
a) flexural-torsional horizontal vibrations, 1st mode	0.355	0.37
b) pylon vibrations out of the bridge plane	0.504	-
c) vertical vibrations, 1st mode	0.815	0.83
d) flexural-torsional horizontal vibrations, 2nd mode	1.105	1.20

The comparison shows good qualitative agreement between the analytical and the experimental results, however, the values of frequencies obtained by testing are consistently higher by about 3 - 5%.

Dynamic testing also provided data for determination of the damping characteristics of the structure. For vertical oscillations the logarithmic decrement value of damping  $\delta$  was found to be 0.033; for the flexural-torsional horizontal oscillations the value of  $\delta$  was 0.017 to 0.04.

#### **4. STABILIZATION OF THE BRIDGE.**

The bridge is one of the access routes to the well frequented Vinginis Park in Vilnius; therefore pedestrian comfort, in addition to fatigue strength of the structure, were important considerations.

Investigations established the need to increase the flexural-torsional horizontal vibration frequency of the second mode (case (d) in Fig. 2) in order to preclude resonance. Two methods of achieving this aim were considered:

1. Increase of the horizontal rigidity of the bridge by means of two additional girders to be placed outside of the existing ones;
2. Increase of the horizontal rigidity by means of added cable stays.

Based on considerations of structural effectiveness, economy, construction problems and maintainability the second alternative was chosen.

Added cable stays with Angles of inclination  $\alpha = 44^\circ$  and  $\beta = 53^\circ$  are attached to the bottom flanges of the girders at a point 32.5m from the end support (Fig. 1). The lower ends of the cables are anchored in special foundation blocks in the flood plane of the river.

The lower cable ends are provided with spring absorbers having lon-

gitudinal natural frequency of 10 Hz, with the purpose of stabilizing the vertical displacement of the span under the effects of temperature and pedestrian loading.

By these means the frequency of the second mode flexural-torsional horizontal vibrations of the structure, which was causing resonant vibrations under the effects of pedestrian loading, was increased by 20% and the problem was eliminated.

### *References*

1. Schulse, H. Dynamische Einflüsse der Verkehrslast auf Fussgängerbrücken. *Signal and Schiene*, 1980, No. 2, p. 91-93; №. 3, p. 143-147.
2. Kazakevych, M.I., Kulyabko V.V. Complex Study of Dynamics and Aerodynamics of Long-span Pipelines and Bridges. *East European Conference on Wind Engineering*, Warsaw, 4-8 July 1994, p. 113-122.
3. Kazakevych, M.I. Aerodynamics of Bridges. Transport, Moscow, 1987.

### Введение

Для многих видов сооружений **динамические нагрузки** (природного или техногенного происхождения) **являются основными**, определяющими внешние размеры, конфигурацию, вид и параметры сечений. К таким сооружениям из-за повышенной гибкости и слабой диссипации относятся объекты, выполненные из **металлических конструкций**: высотные здания и сооружения (супернебоскребы, башни, мачты, трубы, радиотелескопы, монументы и т.д.); мосты, эстакады и трубопроводы; воздушные линии электропередач, включая опоры ЛЭП; морские и речные платформы и другие гидротехнические сооружения; конструкции атомных и тепловых электростанций и агрегатов; различные конструкции промзданий [1–6]. Однако, существуют еще два аспекта, в связи с которыми исследования динамики сооружений в ближайшее время получают, по мнению авторов, бурное и, возможно, неожиданное развитие, с их практическим применением. Прежде всего, это касается качества жизни и работы **людей** в жилых и производственных помещениях (назовем эту проблему «сервисно-цивилизованной» и рассмотрим ее ниже – как проблему **виброэкологии**). Потребуется существенно пересмотреть точность определяемых (теоретически прогнозируемых) динамических параметров всевозможных видов колебаний (чаще – вынужденных, но иногда и свободных) разных точек и сечений конструкций сооружений на всех этапах его создания и эксплуатации. Это обусловлено тем, что до настоящего времени в СНГ инженерные расчеты строительных конструкций (по СНиП) выполнялись, как правило, лишь с проверкой их динамической прочности, для чего требовались совсем иные критерии, а также связанные с ними точность постановки задачи, принципы выбора расчетной схемы (динамической модели) и подходы к описанию динамических процессов и свойств (математической модели).

Вместе с тем, можно предположить, что в странах с растущим объемом стихийно заброшенных конструкций закрывающихся промышленных предприятий произойдет (или уже произошло?!) такое «насыщение» территорий городских и промышленных зон конструкциями с истекшим сроком службы (неизвестного или аварийного состояния), при котором даже частичное их техническое обследо-

---

\* Опубликовано совместно с В.В. Кулябко в ж-ле УАМК «Металеві конструкції», т. 1, № 1, Макеевка, 1998.

ние станет невероятно трудоемким, а иногда и практически невыполнимым. В таких случаях для полной паспортизации и мониторинга застройки может потребоваться массовое применение **интегрально-инструментальной динамической диагностики** с работами комплексного характера: взаимосвязанных теоретических исследований и расчетов с натурными испытаниями (например работа [8]).

Таким образом, в данной статье сделана попытка из всего спектра задач современной динамики конструкций вычленить некоторые проблемы, в основном, по таким аспектам: моделирование задач динамики сооружений при анализе их прочности, колебаний, виброэкологии и диагностики конструкций.

## 1. ФИЛОСОФСКИЕ АСПЕКТЫ.

Период развития динамики сооружений, совпадающий с бурным развитием авиастроения, ракетостроения и судостроения, отмечен **дифференциацией строительной механики**. Выделились в самостоятельные научные направления строительная механика самолета, строительная механика ракет, строительная механика корабля, имеющие свои специфические особенности как в части **расчетных схем**, так и в части **взаимодействия** этих классов конструкций с соответствующей окружающей средой как внешним воздействием. Сформировались и новые научные направления типа – динамика самолета, динамика ракет, динамика корабля.

Дальнейшая эволюция этих направлений в динамике сооружений связана с очевидной необходимостью **учета обратной связи** динамического поведения конструкций на физико-механические параметры нагрузок и воздействий, обусловленных природными явлениями. Как следствие, стали развиваться прикладные направления аэро-и гидродинамики.

К философским аспектам проблем динамики сооружений следует также отнести взаимодействие форм колебаний реальных сооружений вследствие полигармоничности их реакций на внешние воздействия, в том числе, **в процессе монтажа**, когда сооружение находится в различных «агрегатных» состояниях. Не менее важно **взаимодействие различных видов движения элементов** конструкций – кручение с изгибом в горизонтальной и вертикальной плоскостях.

К новым важным аспектам в проблеме динамики сооружений можно без преувеличения отнести **влияние динамических реакций конструкций в поле внешних воздействий на человека**, а также влияние человека как источника пешеходной нагрузки на динамическое поведение сооружений. Исследования поведения систе-

мы «человек–сооружение» оказались плодотворными благодаря продвинутой теории биомеханики человека.

## 2. КОНЦЕПЦИИ ВЫБОРА РАСЧЕТНЫХ СХЕМ ПРИ ИДЕАЛИЗАЦИИ ОБЪЕКТОВ.

Успешное решение задач динамики сооружений может быть обусловлено учетом:

- **связанности различных форм** движения конструкций во времени по координатам  $x, y, z$ ;
- различий **статической упругой линии и многообразных динамических** упругих линий;
- реальной полигармоничности динамических реакций, отражающих **взаимодействие нескольких форм колебаний** по каждой из координат. Очень важным фактором эволюции динамики сооружений является возможность расчетных схем отражать особенности поведения конструкций в поле реальных нагрузок и воздействий, в том числе, **в условиях неопределенности**, в частности, **при отказе** отдельных элементов. В этом случае возможно искажение исходной физической модели.

## 3. ФИЗИЧЕСКАЯ СУЩНОСТЬ ДИНАМИЧЕСКИХ НАГРУЗОК И ВОЗДЕЙСТВИЙ НА СООРУЖЕНИЯ.

Традиционно для задач динамики одной из важнейших проблем считается определение **возмущений** (корректное **измерение** характерных параметров, их статистическая **обработка** и ввод в **модель**) с последующим решением этих задач в вероятностной постановке с применением **нелинейных пространственных моделей сооружений**.

В настоящее время неустанно повышаются **мощности** технологического **оборудования и скорости** движения **транспорта**. Увеличиваются **размеры, гибкость зданий**, сооружений и, как следствие, — динамические нагрузки при действии **ветра, сеймики, транспорта**. Здесь можно было бы представить различные классификации и определения динамических нагрузок и воздействий. Но все они имели бы временный, не окончательный вид, так как концовка текущего тысячелетия особенно характерна появлением новых видов оборудования и транспорта, а также материалов, схем и масштабы сооружений, что автоматически связано с появлением новых классов динамических процессов и нагрузок техногенного или комбинированного происхождения.

Будем здесь называть динамической **нагрузкой** фактор **силовой**, вызывающий при движении конструкции либо **силы инер-**

**ции**, сопоставимые со статическими нагрузками от собственного веса (что следует учитывать при анализе НДС), либо колебания конструкций, **ощутимые** находящимися на них людьми, влияющие на качество работы приборов, оборудования и т.п. А динамическим **воздействием** – природное или техногенное **явление**, вызывающее поле силовых или **кинематических** внешних факторов, динамически взаимодействующих с сооружением.

Определенные проблемы динамических расчетов связаны с **корректным учетом** масштабности сооружений (и их моделей), а также адекватности всех основных нагрузок при **компьютерном** или физическом **моделировании** с попытками воссоздания истинных процессов и НДС конструкции. В частности, в работах [3, 9–28] предложены некоторые модели и **алгоритмы**, позволяющие более корректно, чем многие универсальные комплексы, проводить **одновременно расчет составного объекта и на статические, и на динамические** нестандартные нагрузки с учетом взаимодействия инерционных нагрузок с упругими конструкциями и инерционными упругодиссипативными основаниями, с анализом **устойчивости системы, присоединения** к ней каких-либо подсистем (пристроек и др.), с учетом всей **истории** основного **нагружения** объекта.

В рассматриваемой постановке могут **приниматься возмущения как силовые, так и кинематические**, в том числе случайные, **во временной и частотной областях**. В необходимых случаях кроме традиционных (часто при помощи упрощенно-квазистатических силовых факторов) форм учета динамических нагрузок от ветра, землетрясения, движения автомобильного и железнодорожного транспорта, работы оборудования могут быть исследованы **нетрадиционные подходы** к расчету процессов **взаимодействия**. Здесь исчезают понятия классического силового или кинематического возмущения и проявляются **параметрические** колебания, **автоколебания и т.п.**

Например, при расчете конструкций с **подвижными** нагрузками система «пешеходы + конструкция» должна рассматриваться как **единая биомеханическая** система с переменными параметрами; «подрессоренные экипажи, движущиеся по пролетному строению» – как инерционные нерегулярные **односторонне связанные** механические системы, одна из которых – подвижная. При **взаимодействии конструкций с ветровым потоком** следует учитывать возможность возникновения аэроупругих автоколебаний и других последствий **ветровых** нагрузок (в качестве примера можно привести компьютерный аэродинамический расчет трубопроводного балочного перехода пролетом 100 м при вихревом возбуждении

[10] и др.). Динамическим методом, параллельно с анализом колебаний, с тем же подходом исследуется и **устойчивость равновесных состояний** конструктивных систем (например, комбинированных), **история нагружения** элементов, эффективность или особые явления при **присоединении новой конструкции** к существующему сооружению.

#### **4. РЕДУЦИРОВАННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНСТРУКЦИЙ, НАЗНАЧЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ И ТЕСТИРОВАНИЕ РАСЧЕТНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ.**

Проблемы корректного **теоретического** моделирования процессов динамики, проведения **динамических расчетов и натурных испытаний** строительных сооружений возникают **при проектировании, реконструкции, обследовании и диагностике** состояния конструкций. Они связаны с необходимостью:

- **уменьшения** уровня **вибрации** конструкций для улучшения условий работы технологического (например, прецизионного) **оборудования**;
- **снижения динамических напряжений** и вероятности возникновения **явления усталости** при работе строительных конструкций на **переменные нагрузки**;
- **повышения требований** к виброзащите, к **комфортности** помещений при переходе к **международным стандартам ISO** (см., например, ISO 6897, 2631 [30]);
- **разработки новых способов** основанного на комплексных исследованиях мониторинга, обследования и оперативной диагностики состояния конструкций, у которых срок службы заканчивается (или истек), а эксплуатация продолжается – с нарастанием степени риска.

В теории расчета строительных конструкций и сооружений уже давно употребляется термин «комбинированные системы». Сборномонолитные здания и сооружения из металлических и железобетонных конструкций можно назвать «составными», т.к. они составлены из совершенно различных подсистем: плит, панелей, кирпичных стен и т.д. Кроме того, А.Р. Ржаницын называл «составными стержнями и балками» двухветвяные колонны, сложные балки перекрытий. На наш взгляд, в общем случае, следует считать **«сложносоставными»** сооружения, **выполненные из материалов, узлов и конструкций с существенно отличающимися упругодиссипативными и инерционными свойствами подсистем, имеющие** элементы различных типов, конфигураций, схем работы и **взаимодействующие** через контактные поверхности со сложными

*(грунтовыми и другими) средами, полями нагрузок и т.п.*

**При динамических расчетах** таких строительных объектов по наиболее распространенным в Украине вычислительным комплексам и методикам принимается, например, **произвольное усреднение** логарифмических декрементов колебаний  $\delta$  и т.п. мер диссипации. Ошибочность этой процедуры при анализе вынужденных колебаний конструкций тем больше, чем разнообразнее материалы и свойства подсистем. Значения  $\delta$  в реальном сооружении **могут отличаться** для различных подсистем **в десятки и сотни раз**: от тысячных долей (для металлических конструкций, прокат) до целых единиц (для грунтовых оснований и сред, прокладок и элементов из резин, полимеров). Эти качественные и количественные различия свойств конструкций и узлов должны быть учтены в корректных динамических моделях.

Отсутствуют и четкие методические рекомендации по учету в моделях такого числа и направлений обобщенных координат (динамических **степеней свободы**), которое позволяет корректно исследовать динамику и выявлять эффекты **пространственных колебаний объекта, нелинейного взаимодействия** элементов конструкций и **подсистем** между собой, а также с нетрадиционными видами **динамических нагрузок**. Очевидно, что по излишне упрощенным моделям могут быть получены ошибочные результаты, качественно и количественно отличные от действительных.

Достоверность динамических моделей и алгоритмов расчетов на ветровые, подвижные и другие динамические нагрузки наилучшим образом оценивается при сравнении компьютерных процессов с виброграммами проведенных **динамических испытаний** сооружения в **натурных** условиях его эксплуатации. Актуальна и проблема оперативной диагностики конструкций, находящихся, например, **десяtkи лет в неблагоприятных условиях эксплуатации**. Поэтому в методический комплекс рассматриваемых задач включаются вопросы специфики натурных и лабораторных динамических испытаний с анализом и корректировкой погрешностей, с расширением возможностей таких испытаний **на мониторинг текущего состояния конструкций** (в развитие способов неразрушающего контроля). Заметим, что методики, позволяющие корректно определять (при помощи компьютерных расчетов и аппаратуры), фиксировать, прогнозировать, анализировать изменения свойств конструкций, актуальны также **при консервации или расконсервации, модернизации или переориентации** промышленных предприятий Украины. Их массовое применение позволит предотвратить различные **аварии, чрезвычайные ситуации**, снизить ущерб от неблагоприятных

последствий безграмотной эксплуатации различных сооружений.

Наиболее актуальны следующие задачи динамики сооружений, связанные с выбором корректных динамических моделей:

- **создание научных основ комплексных исследований составных сооружений**, определяющих неразрывное единство и **взаимосвязь** теоретического **моделирования** и статико-динамического **расчета** конструкций с уточнением параметров моделей путем проведения **целенаправленных натурных испытаний** (итоговые результаты расчетов и испытаний **в их сопоставлении могут быть приняты** в качестве параметров **диагностики** таких сооружений);

- обоснование способов выбора редуцированных дискретных **пространственных нелинейных динамических моделей составных сооружений**, а также составления и **тестирования** дифференциальных **уравнений их движения** с учетом особенностей подсистем, конструкций и узлов таких объектов, облегчающих анализ **совместных форм колебаний, пространственных эффектов**;

- поиск новых путей **развития и обобщения динамических моделей** различных подсистем

(балок, колонн, вант, плит, каркасов, оснований и фундаментов, сыпучих сред, армированных массивов и др.), создаваемых **из малого числа однотипных элементов**: стержень, **нелинейные комплекты-связи** (в том числе — **односторонние связи** при работе элементов типа канатов только на растяжение, при отрыве конструкций от основания, при взаимодействии слоев оснований и др.);

- создание методики нетрадиционного учета **нелинейных** характеристик **упругих и диссипативных** элементов и свойств узлов и соединений, способов исследования колебаний при наличии статических и поличастотных составляющих в воздействиях применительно к составным конструкциям с упругой **кубической** (и иной) **нелинейностью** (суб- и супергармонические колебания), к узлам и соединениям **на высокопрочных болтах** при наличии сил **сухого трения**: при движении **с остановками**, при повышенном **трении покоя, при вибрационном сглаживании**. (Некоторые пути решения этих проблем предложены в работах [15-21]).

Для уточнения параметров моделей и характеристик конструкций необходимо также:

- разработать и создать оригинальные **лабораторные стенды и установки**, например, для исследования работы **фрикционных соединений** в узлах и пакетах с применением **высокопрочных болтов** (при различных режимах вибрации), оценки эффективности установки **динамических гасителей** колебаний на моделях балок и сейсмостойких зданий и др.;

- предложить аналитические и численные способы учета реальных (в т.ч. **случайных**) **возмущений и компьютерно-системного ввода** их в модели для усовершенствования расчетов и проведения исследований **взаимодействия подсистем** конструкций между собой и с динамическими нагрузками.

Следует заметить, что, при создании динамической модели сооружения ее принимают либо в виде **абсолютно твердого тела**, имеющего упруго-диссипативные связи, либо в виде балочных, каркасных, высотных, большепролетных и других **упругих** конструкций. Основными элементами этих моделей могут приниматься **абсолютно-жесткие ячейки стержня** (изгибаемого, сжато-растянутого, закручиваемого), соединенные **упруго-диссипативными шарнирами, и комплекты-связи**. Основанные на этих принципах **разветвленные модели** позволяют учитывать сложные формы совместных изгибно-крутильных колебаний составных сооружений (здания, мосты, башни), взаимодействующих с упругим основанием, принимать неодинаковые по виду и величине параметры трения в подсистемах, в слоях неоднородных сред и материалов, исследовать нелинейные колебания и взаимодействие подсистем. Для **неразрезных** конструкций балочного типа требуется подробный анализ образования и характеристик особых зон сгущения на спектрах собственных частот.

Для **висячих и вантовых систем**, в частности, при создании тематических моделей записываются дифференциальные уравнения динамического (и статического) равновесия основных узлов из условия совместных колебаний вант, нитей, подвесок, пилонов, балок жесткости, опор, основания. Так, проведенное тестирование моделей конкретных подсистем в виде струн и висячих нитей по результатам расчетов и экспериментов показало удовлетворительное совпадение спектров собственных частот (для пологой гибкой нити погрешность не превышала 1% [21]).

Для многих задач динамики сооружений уходит в прошлое возможность раздельного решения двух проблем: **динамики конструкций**, которые условно считались «закрепленными» в неподвижных фундаментах, и **динамики оснований и фундаментов**. Доказано, что динамическая модель у этих подсистем (особенно в случае высотных объектов, когда погрешность в частотах низших собственных форм может превышать 50%) должна быть **общая**, исследоваться должна задача **взаимодействия сооружения и основания**.

В простейшей постановке можно рассматривать колебания сооружения или фундамента, представляя их в виде **абсолютно твердого тела**, контактирующего по одной стороне с упругими связями, которые моделируют основание или виброизоляторы (если изучаются

колебания отдельного жесткого здания или фундамента под машину). Дифференциальные уравнения **пространственных** колебаний подобного жесткого **сооружения произвольной формы** (здания, фундамента и т.п.) с произвольно расположенным по одной его стороне конечным числом вертикальных и горизонтальных **упругих (кубически-нелинейных)** и диссипативных связей позволяют исследовать перекачку энергии, суб- и супергармонические процессы. Аналогично выглядят и модели для расчета колебаний **плоского диска** (перекрытия здания, либо виброплощадки) с упруго-диссипативными связями **по двум его сторонам**, а также модели **систем из нескольких параллельных горизонтальных дисков**. С помощью таких динамических (и соответствующих математических) моделей анализируются нелинейные **вращательные в плане колебания** многоэтажных зданий [21, 26].

Постановка задачи здесь связана, во-первых, с тем, что существует класс сооружений, спектр собственных частот которых из-за жесткости конструктивной схемы их «коробки» (рам, стен, перекрытий, фундаментов) близок к спектру условного абсолютно-твердого тела аналогичных параметров. Это **малозэтажные здания** с большим количеством продольных и поперечных несущих стен, объекты с мощным пространственным каркасом, с единой фундаментной плитой, **пассивные фундаменты под оборудование, плотины** и т.п. Во-вторых, при помощи натуральных динамических испытаний такого типа сооружений можно проводить **диагностику состояния и паспортизировать как бы общие динамические свойства и сооружений, и оснований (грунтов, виброизоляторов)**. Актуальность этой проблемы вытекает не только из современных научных задач взаимодействия основания и сооружения, но и из практики появления в последние годы специфических катастроф типа **гигантских оползней**, при которых изменяющиеся условия (природные и техногенные) эксплуатации грунтов меняют характеристики оснований, усложняют их взаимодействие со смежными сооружениями, от чего растут осадки, просадки, подвижность массивов, склонов и т.п.

В качестве варианта характеристик (приближенных к реальным) некоторых оснований могут быть приняты **вертикальные и горизонтальные упруго-нелинейные (кубические) и диссипативные связи**, расположенные по подошве в трех направлениях в каждой точке контакта основания и объекта. Состояние грунта, близкое к «оползню течения», может быть учтено в итоговых уравнениях путем смены знака параметра нелинейной жесткости с «плюса» («жесткая» характеристика уплотняющегося грунта) на «минус» («мягкая»). Возможен и учет иных связей (односторонних, с сухим

трением сложных моделей и т.п.).

Перспективны также варианты **трибологических моделей** колеблющихся конструкций и контактных слоев материалов (и опирающейся конструкции, и несущего основания опоры), позволяющие, например, учесть особенности моделирования **узлов и соединений** с (упруго-, вязко-) **фрикционными** или другими одно- или двусторонними связями и свойствами. Необходимо, однако, строго учитывать, например, при анализе работы **соединений на высокопрочных болтах**, фактически действующие на узел возмущения. Подобные исследования были выполнены **на специальных установках** по оценке влияния эффекта вибрационного сглаживания на силы трения и усилие в пакете [15], причем результаты компьютерного моделирования сопоставлялись и с аналитическими решениями. Заметим, что аналогично рассматриваются силы сухого трения в грунтах, смесях и узлах свободного контакта (на трении) между монтируемыми конструкциями, подсистемами, средами.

Для моделирования **переменных во времени свойств** сооружений (в частности, в процессе формования конструкций из смесей в способах **монолитного домостроения** с применением **металлического несущего каркаса**) создана методика оценки изменений динамических характеристик конструкций, а также пути и примеры моделирования других сложных связей и свойств (комплекты с **кубическими нелинейными** упругими характеристиками, со статическим «**пригрузом**», с **односторонней работой** и др.), см. работы [21–28].

Возможны (и часто необходимы) варианты решения задач одновременно статического и динамического взаимодействия упругих конструкций с различными грунтовыми основаниями и т.п. средами, с учетом одностороннего характера связей, **позиционного сухого трения** и т.п. В этом случае эффективен вариант модификации дискретной стержневой модели Ржаницына для расчета сплошного изотропного тела, апробированный на **инерционной упруго-диссипативной модели неоднородного** тела или среды [28]. Тестирование проведено по классическим задачам С.П. Тимошенко, с переходом к основанию Винклера и т.п. В работе [21] сопоставлены методики анализа **передачи вибрации** на какие-либо объекты по грунту, например, при погружении или извлечении **свай**, работе **молотов и т.п.**

Известно, что обычно **динамические испытания** проводятся либо как **приемочные** (при сдаче, например, моста в эксплуатацию), либо с какой-нибудь **второстепенной целью**. Авторы считают, что многие параметры динамических моделей (например, логарифмиче-

ский декремент колебаний, массы, жесткости) целесообразно уточнять путем проведения **целенаправленных натуральных статико-динамических испытаний** объекта или его аналога. По результатам таких испытаний могут быть сделаны и самостоятельные (прямые) экспресс-выводы об уровнях амплитуд перемещений, скоростей, ускорений, динамических усилий и напряжений, возникающих в сечениях несущих конструкций в режиме нормальной эксплуатации.

Авторами разработаны специальные методики по **проведению специфических натуральных динамических испытаний**. Даны рекомендации по схемам расстановки датчиков, по выбору виброизмерительной или регистрирующей аппаратуры. Учитываются такие особенности крупных сооружений, как инфранизкие частоты исследуемых собственных форм (менее 0.2 Гц). Предложена оригинальная методика оценки (и снижения) искажений, вносимых в частоты и формы собственных колебаний испытываемого сооружения присоединяемых к нему элементов технологической оснастки или аппаратуры. Рассмотренные особенности методик и результаты **натурных** динамических испытаний обследованных зданий, башен, мостов привели к созданию **лабораторных стендов и установок**, предлагаемых для научных и учебно-методических работ. Так, установки для анализа работы фрикционных соединений при вибрации подтвердили теоретические выводы по особенностям и моделированию демпфирования колебаний сооружений силами позиционного сухого трения и показали, что коэффициент трения при некоторых режимах работы узлов и соединений на высокопрочных болтах может снижаться на порядок.

## **5. СТАБИЛИЗАЦИЯ КОНСТРУКЦИЙ В ПОЛЕ ДИНАМИЧЕСКИХ НАГРУЗОК И ВОЗДЕЙСТВИЙ.**

При появлении новых (не предусмотренных проектом) динамических нагрузок или при изменении требований к объекту (например, его назначения), качественном или количественном изменении первичных свойств сооружения (например, при его износе, коррозии и др.) может возникнуть необходимость в **стабилизации** конструкции или ее элемента. Перечислим основные прикладные **способы гашения колебаний** строительных конструкций.

**5.1. Частотная отстройка** (собственных частот от частот возмущения) реализуется обычно **при помощи конструктивных способов гашения колебаний**. Например, – путем направленного изменения **масс и ли/и жесткостей** элементов конструкций, **взаимного расположения опорных устройств, связей**, жестких и шарнирных **узлов** (т.е. путем изменения расчетной **схемы** или ее параметров)

с соответствующим изменением динамических характеристик собственных (**спектра собственных частот**) и вынужденных колебаний. Так, в мостах иногда ставят дополнительные стабилизирующие оттяжки, ограничители колебаний, повышают изгибную и крутильную жесткости, обеспечивают необходимое соотношение частот соответствующих форм собственных колебаний [9, 29].

**5.2. Диссипативные свойства** конструкций, их отдельных элементов и сооружения в целом при оценке динамических качеств объекта играют роль управляющих параметров. От них во многом зависят не только уровни **динамических напряжений** и параметры **усталостной прочности** материалов и сопряжений, но также такие виброэкологические показатели, как амплитуды (**уровни**) скоростей и ускорений, а особенно – длительность экспозиции этих процессов, связанная с **дозой** вибрации, получаемой человеком, находящимся на конкретной конструкции. Поэтому одним из наиболее эффективных путей стабилизации конструкций в поле динамических нагрузок и воздействий является повышение этих свойств.

В первую очередь, к ним можно отнести **комбинирование** применяемых в конструкциях **материалов**. Например, вместе со стальными конструкциями, имеющими обычно очень малые логарифмические декременты колебаний, все шире используются комбинации: **сталь-железобетон** (известны сталежелезобетонные мосты с монолитным настилом по стальным главным балкам; трубобетонные опоры и колонны), **сталь-алюминий** (сплавы с повышенным содержанием магния; ортотропные плиты и алюминиевые пакеты настилов мостов в США). Кроме того, иногда на наиболее динамически деформируемые поверхности наносятся специальные **вибропоглощающие покрытия**. Такие идеи в настоящее время все шире реализуются в большепролетных мостах. В частности, в висячих и вантово-балочных мостах пилоны (а иногда и опорные зоны пролетного строения) выполняют из железобетона, а пролетное строение – из стали (мосты в городах Риге и Киеве, в Дании, в Японии, во Франции).

**5.3. Конструкционное демпфирование**, связанное с наличием (или внесением) фрикционных элементов в системе, имеет, по видимому, наибольшие перспективы. Оно превосходит по эффективности внутреннее трение в материалах и проявляется по типу сухого трения на микро- и макроуровнях почти во всех **узлах и соединениях, в швах и сочленениях, на контактах сред и подсистем** [16].

**5.4. Динамические и ударные гасители колебаний, корректоры, поглотители-демпферы** присоединяемые как дополнительные подсистемы к определенным точкам сооружения, как правило, имеют некоторые **ограничения** по эффективности (например, примене-

ние гасителей особенно рационально при стационарных вынужденных гармонических колебаниях) и требуют проведения тщательных расчетов и опытной настройки [24, 29]. Так как **демпфирующие элементы** в этих устройствах часто используют комбинированное с сухим трение, то требуется решение проблем, описанных ранее, в п. 4.

**5.5. Аэро- и гидродинамическое гашение** колебаний относится, естественно, только к сооружениям, элементы которых расположены в ветровом (или ином) потоке. Оно эффективно при стабилизации легких и гибких конструкций, чувствительных к ветровому воздействию. При **статической** стабилизации снижают уровень локального давления ветра, лобового сопротивления, аэродинамических моментов и поперечных сил. При **динамической** – снижают аэродинамические силы и реакции вдоль и поперек потока, а также причины возникновения явлений аэроупругой неустойчивости. Сюда относится: турбулизация потока путем **перфорации конструкций** для канализации потока, путем создания особого **рельефа и сечений сооружений, и местности**, присоединения **интерцепторов, обтекателей и т.п.** [1, 3-6].

**5.6.** Все рассмотренные способы стабилизации колебаний конструкций тесно связаны с проблемами **виброизоляции источников вибрации и виброзащитой приемников**. С помощью описанных методик может проводиться также анализ традиционных методов и средств **виброзащиты** помещений **с людьми** и оборудованием, технического обследования конструкций. Например, упомянутые динамические модели позволяют решать **в нелинейной постановке** задачи **виброзащиты** прецизионного оборудования, **виброизоляции** (точечной или в виде поля) фундаментов и машин и т.п. В частности, в указанной постановке они дают возможность анализировать сложные эффекты нелинейных колебаний типа эффектов **взаимосвязи колебаний по обобщенным координатам (перекачки энергии)**, возникновения **субгармонических, ультрагармонических и комбинационных резонансов** и т.п. Кроме того, созданы рекомендации по **снижению уровня вибрации**, по улучшению виброэкологических параметров строительных конструкций и сооружений. Разработаны определенные пути теоретического прогнозирования и реализации инженерно-технических мероприятий. Часть из них связана с **изменением динамических характеристик приемников** вибрации (проводится описанная в п.5.1 частотная отстройка и т.п.), часть – с изменением условий работы **механизма передачи вибрации** от источника к приемнику и часть – с **изменением ситуации по источнику** вибрации – установка распорок, корректоров, гасителей (см. п. 5.4) и т.п.

## 6. ВИБРОЭКОЛОГИЯ КАК НАУКА О ВЛИЯНИИ ВИБРАЦИИ НА ОРГАНИЗМ ЧЕЛОВЕКА, НА ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТЬ ТРУДА И КАЧЕСТВО ЖИЗНИ.

Одним из интересных и перспективных направлений исследований в динамике сооружений, по мнению авторов, в ближайшие десятилетия станет компьютерное **моделирование взаимодействия** (активного и пассивного) **тела человека** (прежде всего, – **опорно-двигательного аппарата**) и **конструкций** или устройств. Например, при расчете и прогнозировании вибродозы, получаемой за смену на элементах рабочих площадок или подмостях, на монтажных люльках (для покраски конструкций зданий, мостов и т.д.).

Проблема влияния вибрации зданий и сооружений на организм человека рассматривается здесь в свете требований стандартов ISO, а также дополнений к СНиП «Нагрузки и воздействия». В СНиП предусмотрено предотвращение при колебаниях конструкций вредных воздействий вибрации на человека, снижение дискомфорта и ощущения опасности. Исходя из физиологических требований ограничиваются прогибы конструкций (только в вертикальной плоскости, вне зависимости от вида конструкции, изгибной жесткости и т.д.). В то же время, в стандартах ISO вводится 5 пределов (физиологических критериев) **по уровню и дозе** (времени воздействия) скоростей и ускорений.

Заметим, что аналогичный ГОСТ (1990г.) по вибробезопасности рабочих мест использовал эти же подходы, почему-то исключив ограничения по наиболее важным для крупных сооружений низкочастотным диапазонам.

Авторами в монографии [7] приведена классификация смежных с рассматриваемой задачей наук и обоснована необходимость выделения отдельного направления, которое названо **виброэкологией**. Исследования связаны с разработкой основных понятий и определений «виброэкологии зданий и сооружений». Анализируются реакции человека на определенные режимы вибрации. Оцениваются по различным методикам допустимые уровни колебаний. Предложен способ теоретического анализа нагруженности и взаимодействия биомеханической модели человека с легкой опорной строительной конструкцией. Вводится понятие и **форма специального документа (виброэкологического паспорта** конструкции, помещения), регистрирующего соответствующие свойства сооружений и помещений. Рассмотрены примеры измерения, оценки и анализа этих свойств для многих объектов.

В работах [1, 3–5, 7, 29] исследованы варианты и даны новые защитные **технические решения** по некоторым видам демпферов,

гасителей, вибротехнологиям, а также по способам снижения вредного влияния вибрации (в частности, на организм человека).

## **7. ИНТЕГРАЛЬНАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ ДИАГНОСТИКА КОНСТРУКЦИЙ ПРИ ИХ МОНТАЖЕ И ЭКСПЛУАТАЦИИ, ПАСПОРТИЗАЦИЯ И МОНИТОРИНГ СОСТОЯНИЯ СООРУЖЕНИЙ, ЗОНИНГ ТЕРРИТОРИЙ.**

Многие крупные зарубежные фирмы в последнее время все большее внимание уделяют вопросам диагностики и мониторинга состояния существующих эксплуатируемых конструкций. В текущий момент времени **измеряются эксплуатационные значения собственных частот, форм и логарифмических декрементов пространственных колебаний, а также амплитуды вынужденных колебаний.** Затем они сопоставляются с эталонными значениями (**первичного** паспорта), теоретическими и экспериментальными. Это дает возможность интегрально диагностировать состояние строительных конструкций и обеспечивать надежность сооружений по аналогии с диагностикой в авиа- и судостроении, атомной энергетике и др. Заметим, что диагностика конструкций является составной частью эксплуатации сооружений и требует весьма малых затрат **не реже одного раза в 5 лет** на привлечение специализированных организаций для инструментальных измерений, геодезической съемки и т. п.

Известно, что каждое **натурное обследование или испытание** сооружения требует особого обоснования при выборе аппаратуры, схем размещения датчиков, при обработке результатов. В материалах Еврокода EN-1991 указано, с одной стороны, что возможно «проектирование при помощи испытаний» (в разделе 3 – по металлическим конструкциям). С другой стороны, отсутствуют вообще какие-либо данные по испытаниям (кроме усталостных испытаний). В работах [5-7] описываются принципы **динамической диагностики** и возможности ее применения при строительстве и эксплуатации сооружений. Как видно из работ [8,11, 17, 21], были:

- созданы методики проведения специфических **натурных динамических испытаний**, направленных на определение основных **динамических характеристик несущих конструкций** (необходимых как для уточнения вида и параметров моделей, так и для составления **диагностических паспортов**), а также – на **уменьшение** (в ходе эксперимента) **погрешности**, вносимой прикрепляемой к сооружению **технологической оснасткой**;

- предложены новые инженерные методики проведения **динамической интегральной диагностики, мониторинга (наблюдение,**

**анализ и прогноз) состояния и паспортизации** – для сооружений и конструкций, а также **зонинга** – для территорий. В каждом случае предполагается предварительное составление проекта работ, программы измерений и т.п.

**Предлагается комплексное** использование компьютерных моделей и способов динамических испытаний составных сооружений. Показано, какие **динамические характеристики** свободных и вынужденных колебаний объекта являются чрезвычайно важными его свойствами, дающими **интегральную информацию** о жесткостных, инерционных и диссипативных параметрах натурального объекта в момент проведения его обследования и испытаний. Результаты теоретических и экспериментальных исследований (натурных или лабораторных динамических испытаний) составных сооружений для решения задач **текущей диагностики конструкций** предложено оформлять в виде особого **динамического паспорта** конструкции **на конкретный момент времени**.

Разработаны формы **динамического, сейсмо-динамического, вибротехнологического и виброэкологического паспортов**, объединяющие результаты расчетов и испытаний. **Периодическая паспортизация** позволяет широко применять предложенный комплексный подход не только при проектировании, расчетах и сдаче в эксплуатацию **новых** объектов, но и при **мониторинге эксплуатируемых** конструкций и сооружений. Это, в частности, способствует ускоренному проведению обследования ответственных и выявлению аварийных объектов. Созданы также методики проведения **предпроектной** паспортизации сооружений и **зонинга** (районирования) территорий, учитывающие особенности мониторинга при транспортной и промышленной сейсмике.

Так, на **особо важных и уникальных объектах** целесообразно организовывать: 1) постоянные **натурные наблюдения** и оказание технической помощи при эксплуатации; 2) уточнения метеорологического и сейсмометрического микрорайонирования и соответствующих нагрузок (зонинг); 3) изучение **реакции** конструкций на реальные воздействия; 4) обнаружение динамической, гидро- или аэроупругой **неустойчивости**; 5) выявление динамических факторов, вызывающих **дискомфорт** монтажников и другого **персонала или жителей** на всем протяжении строительства и эксплуатации сооружения, **водителей и пассажиров** экипажей, **пешеходов** на транспортных сооружениях, а также отрицательные воздействия на **биосферу**.

В заключение заметим, что корректность моделей исключает ошибки при проведении комплексной динамической диагностики

сооружений или оснований (например, резонансным методом, вибратором). Практическая апробация указанных методик проводилась авторами на **крупных сооружениях** (в основном, из металлических конструкций) Украины, России, Литвы, Латвии, Афганистана (использовалась **виброизмерительная техника** России, Молдавии, Германии).

## ВЫВОДЫ.

Приведенный обзор и анализ некоторых проблем динамики сооружений показывает, что **задачи динамики** в настоящее время **стали еще более актуальными** и сложными (чем прежде) для многих современных сооружений и в особенности – для выполненных из **металлических конструкций**. Инструктивно-нормативная база Украины по данному вопросу нуждается в повышенном и неустанном внимании специалистов, в регулярном ее пересмотре. Но не в «коренной перестройке» исторически накопленного научно-нормативного опыта мировой и отечественной практики проектирования, обследования, диагностики, реконструкции и усиления конструкций, а в осторожных его уточнениях, экспериментальных проверках.

Необходимо создание мощной **комплексной** (экспериментальной и теоретической) **научной базы** для решения практических задач моделирования динамики, расчетов, испытаний и интегральной диагностики составных сооружений путем разработки **трех новых взаимосвязанных групп методик**: а) методик создания корректных **динамических моделей** составных сооружений и **полей динамических нагрузок в их взаимодействии между собой и с основаниями**, а также методик ведения **расчетов**, позволяющих анализировать **нелинейные пространственные колебания** и НДС конструкций; б) методик проведения динамических **испытаний** с учетом специфики сооружений и оценкой частот и форм собственных колебаний конструкций; одним из практических «выходов» подобных работ должны быть **расширенные классификации и компьютерные модули-атласы всевозможных динамических нагрузок**, измеренных и моделируемых в их взаимодействии с современными сооружениями (большинству инструкций по «нагрузкам от работающих машин» уже исполнилось по 30–40 лет); в) методик **интегральной диагностики и паспортизации** сооружений, проведения **мониторинга состояния** и оценки **виброэкологических, сейсмодинамических** показателей обследуемых несущих конструкций, а также **зонинга** территорий.

По нашему мнению, целесообразно создать (с финансированием работ в рамках комиссий по Еврокоду или по грантам фондов, национальных ассоциаций, корпораций и т.п.): 1) **набор-атлас ди-**

**намических моделей конструкций** типовых региональных и перспективных **сооружений** с инструкциями и числовыми примерами их применения (работа имеет теоретический характер); 2) **набор-атлас** динамических **характеристик** основных видов конструкций, в первую очередь, – типов и параметров **диссипативных свойств материалов, узлов и конструкций** (комплексный характер); 3) **набор-атлас основных динамических нагрузок** от природно-климатических воздействий – по регионам, от работы агрегатов – по отраслям промышленности, от транспорта и оборудования – по типам помещений, грунтовым условиям городов и т.д.; 4) комплект полных рекомендаций и **методик по совместному учету** трех вышеуказанных наборов при решении конкретных задач **взаимодействия конструкций, узлов, неоднородных инерционных оснований, сред и иных подсистем с полями статических и динамических нагрузок**; 5) **компьютерные интерактивные комплексы, учебники, пакеты прикладных программ и методические пособия** по расчету, проектированию, обследованию, паспортизации, **диагностике и мониторингу состояния** конструкций и зонингу территорий, а также по **обучению** (или переподготовке) специалистов и студентов практическому решению указанных задач.

### *Литература*

1. Бондарь Н.Г., Загора А.Л., Казакевич М.И. Гашение колебаний пролетных строений мостов // Надежность и долговечность машин и сооружений. Вып. 6. – К. – 1984. – С. 103–109.
2. Большаков В.И., Кулябко В.В. О применении комплексных методов анализа статики и динамики механических систем к решению задач трибологии и материаловедения // Тр. Между нар. конф. «Проблемы соврем, материаловедения». – 4.1. – Днепропетровск. – 1997. – С. 128–132.
3. Динамический расчет сооружений на специальные воздействия. – М.: – Стройиздат, 1981. – 215с.
4. Загора А.Л., Казакевич М.И. Гашение колебаний мостовых конструкций. – М.: Транспорт, 1983. – 134с.
5. Казакевич М.И. Аэродинамика мостов. – М.: Транспорт, 1987. – 240 с.
6. Kazakevitch M.I. Structure Stabilization in the Wind Flow // Proc. 2nd East European Conf. on Wind Eng. EECWE'98. – Vol.1. – Prague. – 1998. – P. 11–31.
7. Казакевич М.И., Кулябко В.В. Введение в виброэкологию зданий и сооружений. – Днепропетровск: ПГАСА, 1996. – 200с.
8. Казакевич М.И., Кулябко В.В. Динамическая диагностика и мо-

ниторинг состояния строительных конструкций ответственных сооружений // Труды IV-й Укр. науч.-техн. конф. «Металлические конструкции». – Киев–Николаев. – 1996. – С. 84–85.

9. Kazakevich M.I., Kulyabko V.V. Stabilisation of a Cable-Stayed Footbridge // Proc. IABSE Symp. «Extending the Lifespan of Structures». – San-Francisco. – 1995. – P. 1099–1104.

10. Kazakevitch M.I., Kulyabko V.V. Complex Study of Dynamics and Aerodynamics of the Long-Span Pipelines and Bridges // Proc. East European Conf. on Wind Engin. «EECWE '94». – Vol. 2 (G–L), part 1. – Warsaw (Poland). – 1994. – P. 113–122.

11. Kazakevitch M.I., Kulyabko V.V. Monitoring of long span steel structures // Proc. 9th International Conf. on metal structures. – Krakow (Poland). – 1995. – P. 245–250.

12. Kazakevitch M., Kulyabko V. The Dynamic Characteristics of the Footbridges // Proc. Nordic Steel Construction Conf. – Vol. 1. – Malmö (Sweden). – 1995. – P. 375–381.

13. Kazakevich M.I., Kulyabko V.V., Dubichvost A.A. The discrete dynamic models of the interaction complex composite structures with the dynamic loads // Proc. Intern. Conf. on the Applications of Computer Science and Mathematics in Architecture and Civil Engin. – Weimar (Germany): CD-ROM IKM'97. – 1997. – P. 1–5.

14. Казакевич М.И., Кулябко В.В., Степонавичюс А.К. Особенности динамических характеристик неразрезных автодорожных мостов // Proc. 4th Intern. Conf. «Modern Building Materials, Structures and Techniques». – Vol. 2. – Vilnius: «Technika». – 1995. – P. 243–250.

15. Кулябко В.В. Физические модели для анализа влияния вибрации на силы сухого трения во фрикционных соединениях на высокопрочных болтах // Сб. науч. тр. ПГАСА. – Днепропетровск. – 1997. – № 2, 4.2. – С. 76–81.

16. Кулябко В.В. О нелинейных характеристиках и свойствах некоторых позиционных демпферов скольжения. – М.: Машиноведение, АН СССР. – 1980. – № 3. – С. 29–32.

17. Кулябко В.В. Перспективы динамики металлических конструкций при их проектировании, изготовлении, транспортировке, монтаже, ремонте и испытаниях // Труды Междунар. конф. «Теория и практика металлических конструкций». – Макеевка. – 1997. – С. 58–65.

18. Кулябко В.В. Совмещенные трибологические модели колеблющихся конструкций, опор и контактных слоев материала несущего основания // Труды Междунар. конф. «Проблемы современного материаловедения». – 4.1. – Днепропетровск. – 1997. – С. 136–140.

19. Кулябко В.В. Применение динамических расчетов и ис-

пытаний при обследовании различных сооружений // Труды Междуна- р. конф. «Металлостроительство-96» (Состояние и перспективы развития). – Т. 2. – Макеевка. – 1996. – С. 32–33.

20. Кулябко В.В. Рекомендации по созданию динамических моделей сложно-составных сооружений // Вісник Академії. – Дніпропетровськ: ПДАБА. – 1997. – № 3. – С. 40–47.

21. Кулябко В.В. Развитие динамических моделей, розрахунків та випробувань складених конструкцій і споруд: Автореф. дис... д-ратехн. наук: 05.23.01 / ПДАБА – Дніпропетровськ, 1998.

22. Kulyabko V.V. Complex-compound structures Dynamic Calculation Methodology // Proc. Intern. Conf. «Challenges to Civil and Mechanical Eng-ring in 2000 and Beyond». – Vol.3. – Wroclaw (Poland). – 1997. – P. 153–160.

23. Kulyabko V.V. Modeling of Spatial Oscillations of Complex Structures and his use in Natural Diagnostics of a Condition of Constructions // Proc. Intern. Congress ICSS-98. – Vol.1. – Moscow. – 1998. – P. 350–355.

24. Kulyabko V. Dynamic Stabilization of the Towers Constructions // Proc. 2nd European & African Conf. on Wind Eng. 2 EACWE. – Vol. 2. – Genova (Italy). – 1997. – P. 1693–1700.

25. Kulyabko V., Davidov I. Simulation of Dynamic Responses of Structures on the Elastic-Dissipate Foundation at Operation Wind Loads // Proc. 2nd East European Conf. on Wind Eng. EECWE '98. – Vol.2. – Prague. – 1998. – P. 423–428.

26. Кулябко В.В., Давыдов И.И. Варианты моделирования колебаний многоэтажных каркасных зданий и сооружений // Proc. 5th Intern. Conf. «Modern Building Materials, Structures and Techniques». – Vol.3. – Vilnius: «Technika». – 1997. – P. 175–180.

27. Кулябко В.В., Дубихвост А.А. Колебания сложных систем под действием массивной подвижной нагрузки с учетом односторонности связей. // Proc. 5th Intern. Conf. «Modern Building Materials, Structures and Techniques». – Vol.3. – Vilnius: «Technika». – 1997. – P. 163–168.

28. Кулябко В.В., Дубихвост А.А., Давыдов И.И. Новый подход к моделированию взаимодействия составных сооружений со сложными основаниями // Труды 3-й Укр. науч.-техн. конф. «Механика грунтов и фундаментостроение». – Том. 1. – Одесса. – 1997. – С. 61–64.

29. Перельмутер А.В. Управление поведением несущих конструкций. – Киев: УФИМБ, 1998. – 148с.

30. Руководство по оценке воздействия общей вибрации и вибрации зданий на тело и организм человека: Международный стандарт ISO. Per. № ISO-2631-85. – М. 1985. – 17с.

## ДИНАМИЧЕСКАЯ ДИАГНОСТИКА КОНСТРУКЦИИ СТАЛЬНОГО БУНКЕРА\*

В последние годы все возрастающую роль в оценке надежности, долговечности и безопасности различных конструкций и объектов играет их мониторинг. Он подразумевает наблюдение, анализ и прогноз статического и динамического поведения сооружения в целом, а также отдельных его элементов в пространстве реальных нагрузок и воздействий.

Поведение в данном случае трактуется как реакция конструкции на внешнее воздействие. Анализ предполагает сравнение фактических параметров нагрузок и воздействий в реальных условиях эксплуатации с их расчетными значениями, что необходимо для уточнения обеспеченности внешних воздействий и достоверности расчетных схем. Составленный на основе наблюдений и оценок прогноз состояния конструкции позволяет обоснованно судить о ее остаточном ресурсе, уровне накопившихся повреждений и износа и в необходимых случаях активно влиять на повышение надежности работы.

Одним из доминирующих критериев диагностики сооружений являются их динамические свойства, выступающие в качестве интегральных оценок состояния конструкции. К этим характеристикам относят частоты и формы собственных колебаний, а также логарифмические декременты затухания вынужденных колебаний.

В основу принципа интегральной динамической диагностики, разработанной проф. М.И. Казакевичем и успешно применяемой им в течение ряда лет [1], положено измерение фактических значений собственных частот, форм и логарифмических декрементов пространственных колебаний при вводе сооружения в эксплуатацию с указанием их в специально составляемом динамическом паспорте. В дальнейшем они являются эталонными значениями, с которыми сравниваются величины перечисленных выше динамических характеристик конструкции, записываемых периодически в процессе эксплуатации. Любое несоответствие является сигналом, свидетельствующим о наличии в конструкции какого-либо повреждения или дефекта. Их вид и характер с высокой степенью достоверности может быть определен на основе атласа дефектов. Он создается при стендовых испытаниях эталонной конструкции, на которой модели-

---

\* Опубликовано совместно с Д.О. Банниковым в Трудах Физико-механического ин-та НАН Украины, вып. 6, Киев, 2001.

руют различные типы дефектов и путем динамических испытаний отслеживают их влияние на динамические параметры.

Однако, подчас проведение подобных испытаний является довольно дорогостоящим и не всегда эффективным мероприятием. Такая ситуация характерна для ряда строительных конструкций, в особенности их большеразмерных классов.

Предлагаемый авторами подход к решению данной проблемы на основе проведения численных экспериментов по методу конечных элементов (МКЭ) позволяет довольно объективно, точно, многовариантно, наглядно и достаточно просто и дешево реализовать процесс создания атласа дефектов и оценки динамических свойств конструкции. При этом учитывается ее пространственная работа, что является неоспоримым преимуществом такого подхода перед остальными методами строительной механики.

В качестве объекта для исследований был выбран стальной пирамидально-призматический бункер, являющийся в настоящее время одним из наиболее распространенных типов емкостей, предназначенных для хранения и перегрузки различных сыпучих материалов. Разнообразие геометрических параметров такого класса бункеров и применяемых конструктивных решений, а также самих загружаемых материалов обуславливает довольно широкую область технологических процессов, в которых они задействованы.

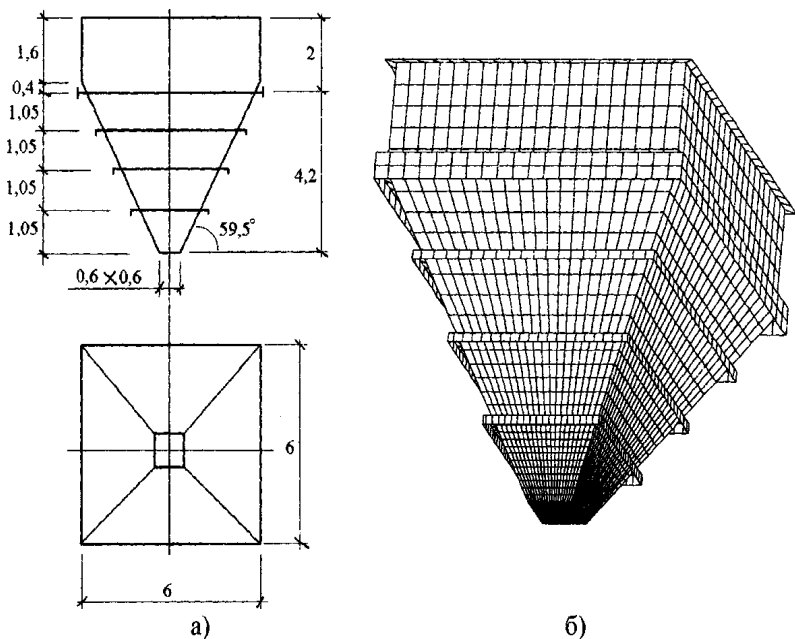
Однако, применяемая в настоящее время официальная методика проектирования таких бункеров, предполагающая расчленение конструкции на отдельные простые элементы с последующим расчетом каждого из них по элементарным плоским расчетным схемам [2], приводит на практике к созданию довольно неэкономичных и часто ненадежных сооружений.

Наряду с этим, проводимые в последнее время комплексные обследования бункерных эстакад указывают на наличие большого числа разнообразных дефектов, износа и повреждений конструкций, носящих преимущественно эксплуатационный характер. Так, по данным одного из отчетов о проведении подобного обследования [3] техническое состояние более половины бункеров было определено как «аварийное», что означает наличие нарушений требований по предельным состояниям I группы. Отказ же хотя бы одного из бункеров, особенно большой грузоподъемности, означает замедление либо вообще полную остановку производственно-технологического процесса, не говоря о возможности более тяжелых аварийных последствий.

Положение усугубляется тем, что к настоящему моменту времени в Украине отсутствует какая-либо общегосударственная норма-

тивная база, регламентирующая не только эксплуатационное сопровождение, но и сам процесс расчета и конструирования стальных пирамидально-призматических бункеров.

Для оценки динамических свойств таких бункеров был использован предложенный в Руководстве в качестве расчетного пример жесткого бункера для хранения угля, размерами в плане 6х6 м и высоте воронки 4,2 м, решенный в стали марки СтЗкп2 [2, с. 75–79]. Толщина обшивки принималась равной 6 мм, ребра жесткости - из уголков 140х9, расположенные с шагом 1,05 м по высоте. Расчетная схема представляет собой четверть конструкции бункера с заданием граничных условия симметрии деформаций по краям. В качестве конечного элемента (КЭ) использовался 4-узловой изопараметрический оболочечный моментный КЭ. Опираение конструкции моделировалось постановкой в углу шарнирно-неподвижной опоры. Конструктивная и расчетная схемы (22210 степ, своб.) приведены на рис. 1. Задача решалась в линейной постановке.



**Рис. 1. Конструктивная (а) и конечно-элементная (б) схемы рассчитанного в примере из «Руководства» [2]**

В таблице 1 представлен собственный частотный спектр анализируемого бункера (первые 32 частоты), а на рис. 2 – формы колебаний, соответствующие некоторым из приведенных частот. Они представляют собой колебания различных отсеков обшивки бункера в различных сочетаниях и с различной интенсивностью. Угловая линия соединения соседних стенок друг с другом во всех случаях остается неподвижной. Парциальные частоты ребер жесткости намного более высокие, чем приведено в таблице 1.

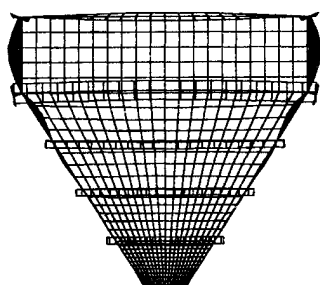
*Таблица 1*

***Собственный частотный спектр порожнего бункера при высоте вертикальной части 1,6 м***

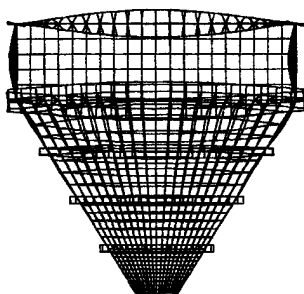
№ частоты	Значение, Гц	№ частоты	Значение, Гц	№ частоты	Значение, Гц	№ частоты	Значение, Гц
1	10,93	9	15,55	17	19,35	25	21,99
2	11,45	10	15,55	18	19,72	26	21,99
3	11,45	11	15,70	19	19,72	27	22,20
4	11,60	12	16,04	20	19,97	28	22,33
5	14,51	13	18,34	21	20,15	29	22,68
6	15,44	14	18,96	22	20,95	30	24,12
7	15,47	15	19,31	23	20,95	31	24,39
8	15,47	16	19,31	24	21,52	32	24,56

В ходе настоящих исследований варьировалась высота вертикальной части бункера, как один из наиболее важных конструктивных параметров, определяющих прочностные, жесткостные и динамические свойства системы. Полученная зависимость для порожнего состояния на примере 1-й частоты представлена на рис. 3.

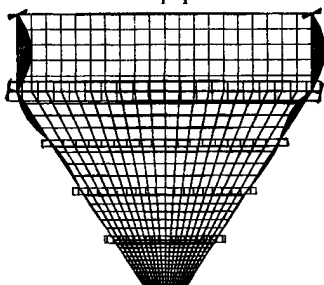
При этом была обнаружена интересная закономерность, заключающаяся в наличии пика частот при соотношении высоты вертикальной и пирамидальной частей бункера, равной 0,2. Оно оказывается



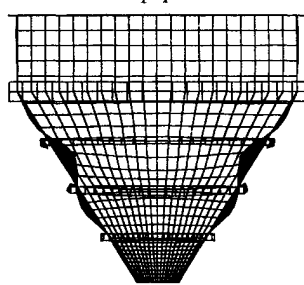
1-я форма



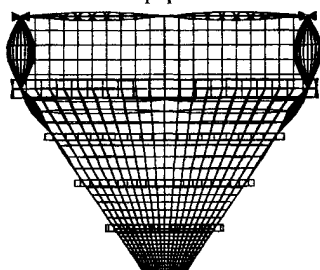
2-я форма



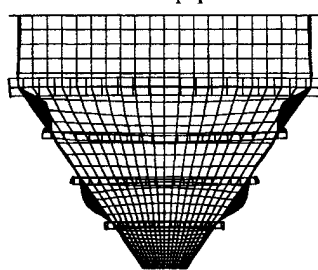
3-я форма



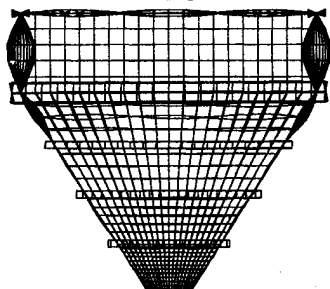
5-я форма



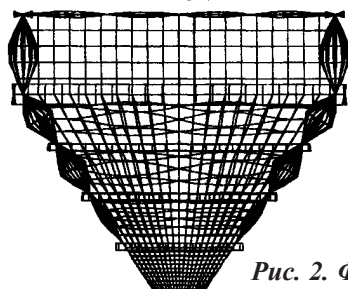
6-я форма



13-я форма



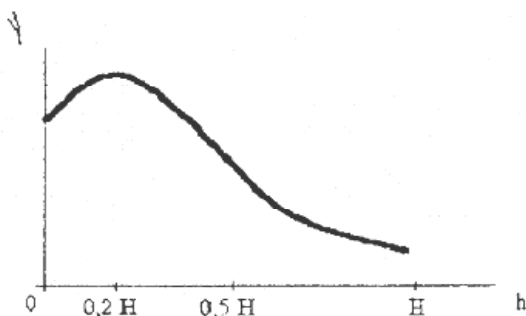
18-я форма



30-я форма

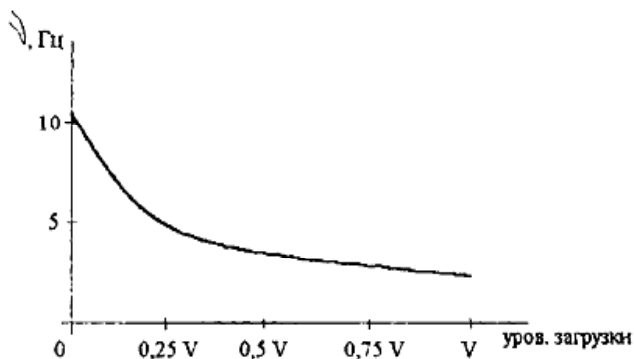
*Рис. 2. Формы колебаний бункера в порожнем состоянии*

наиболее рациональным с позиций материалоемкости конструкции. Снижение частот при дальнейшем увеличении высоты призматической части связано с падением ее парциальной частоты. Формы колебаний при этом оказываются идентичны.



**Рис. 3. Зависимость изменения частотного спектра порожнего бункера от высоты обвязки**

Зависимость изменения частотного спектра и форм колебания при изменении наиболее важного технологического параметра – уровня загрузки бункера, приведено на рис. 4 ( $V$  – полный объем загруженного бункера). Расчеты велись в предположении распределения присоединенных масс от материала аналогично распределению его давления на стенки сосуда по теории Рэнкина без учета диссипативных свойств сыпучего.



**Рис. 4. Изменение 1-й частоты при различных уровнях загрузки бункера**

Таким, образом, применение МКЭ для оценки динамических свойств конструкций является довольно эффективным. Получаемые при этом результаты могут быть использованы не только при составлении динамических паспортов сооружений, но и служить основой для разработки общегосударственной нормативной и проектно-конструкторской базы.

### *Литература*

1. Аэродинамика электросетевых конструкций / Е.В. Горохов, М.И. Казакевич, С.Н. Шаповалов, Я.В. Назим / Под ред. Е.В. Горохова и М.И. Казакевича. – Донецк, 2000. – 336 с.
2. Руководство по расчету и проектированию железобетонных, стальных и комбинированных бункеров / Ленпромстройпроект. – М.: Стройиздат, 1983. – 200 с.
3. Криворожский государственный горно-металлургический комбинат «Криворожсталь». Доменная печь № 9, бункерная эстакада. Обследование и оценка технического состояния металлоконструкций: Отчет о НИР, в 3 т. / ОАО проектный институт «Днепрпроектстальконструкция». – Днепропетровск, 1997.

# IMPROVEMENT OF STEEL BUNKER DESIGNING METHOD\*

## 1. Introduction.

Now steel pyramiddally-prismatic bunkers are one of the most widespread types of vessels for the storage and accumulation of bulk granular materials. Their usage in different branches of industry is numbered about one hundred years already, but they are one of the worst studied kinds of building constructions.

One reason of it is that bunker design is a complicated enough subject covering the analysis of thin shells and stiffened plate structures with uncertain load distribution. On the other hand, the very wide spectrum of technological processes served with them and loaded materials themselves lead to wide variation of used constructive solutions and geometrical parameters of pyramiddally-prismatic bunkers.

That's why existing designing method is based on division of the structure into single simple elements with the following calculating of them according to a set of unrelated flat schemes [1]. This way doesn't take into account the very important factor - space work of the construction.

In addition, with absence in Ukraine any norm documents regulating these questions it all results in creating uneconomic and unreliable bunkers. The cases of accidents and damages of them are known in practice. Such situation is cannot be considered satisfying and need to conduct research in this sphere and improve existing designing method.

## 2. Finite element simulation of steel pyramiddally-prismatic bunkers.

As an object of the research as was mentioned above the steel pyramiddally-prismatic bunker was chosen. Its constructive scheme is given in Fig 1.

Typically such bunker consists of lower pyramidal and upper prismatic (vertical.) parts. The pyramidal part represents a turned pyramid all walls of which are made of thin (6-14 mm) steel sheets. To be able to grasp the pressure of material or other technological loads they are strengthened with stiffening ribs. If the vertical part, of the construction is high enough it is design constructively the same as funnel. In the other case it represents bunker girders, as shown in Fig 1. One of the designing problems for the steel pyramiddally-prismatic bunkers is that a number of different constructive solutions and schemes exists and is used in. the

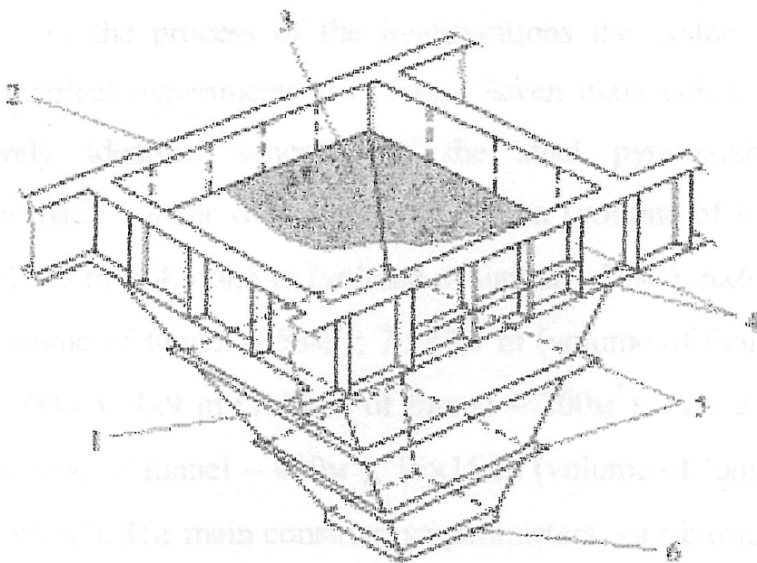
---

\* Опубликовано совместно с Д.О. Банниковым и А.В. Перельмутером в Трудях 7 Международной Конференции Вильнюсского технического Университета, Вильнюс, 2001.

same time. Theoretical analysis of the efficacy of each of them has not been done and engineers usually use their experience to make the choose. The following dilemmas often rise before them.

At first what kind of the stiffening rib orientation is better: horizontally with junction in the corners of the bunker or normally to the wall without such junction? Traditionally the first variant is considered more reliable. In the small bunkers the second one is preferable.

The main lack of the horizontal rib orientation is the appearance in the corners of plastic deformations. To avoid it some attempts foreseeing doing different openings in this zones were undertaken. However, desirable effect wasn't reached. Plishkin J.S. suggested a method that takes into account plastic-elastic work of the bunker elements [2], but it didn't become widespread, too. It is connected with the appearance of significant dynamic loads in the process of exploitation leading, as a rule, to fatigue damages, that is especially dangerous under the conditions of low temperatures.



**Fig 1. Typical constructive scheme of steel pyramidally-prismatic bunker:**  
**1 - pyramidal part (funnel), 2 - vertical prismatic part (girders),**  
**3 - protective layer, 4 - stiffening ribs. 5 - horizontal stiffening ribs of funnel,**  
**6 - output opening**

The possibility of the non-traditional vertical rib orientation that allows decreasing a length of welded seams was noticed and analyzed by Jagofarov H. [3]. However, the finish answer about preference of this variant wasn't presented.

The second dilemma for the engineers is about choose of the height of the vertical bunker part. Alferov K.V. gives the data that decreasing of the height is better because of decreasing in this case of the bunker surface and, consequently, the metal-capacity [4]. Lipnitskij M.E. and other scientists [5,6], on the contrary, underline necessity of its increasing. According to their opinion it will cause increasing of rigid properties of the construction. and, as a consequence, decreasing of the metal-capacity, too.

There is no accordance as for imagination of scheme of steel pyramiddally-prismatic bunker work in the whole.

Traditionally it is consider as follow: pressure of granular material is grasped with the funnel, then it is over-given through the place of junction of pyramidal and prismatic parts to the prismatic part (bunker girders) and these girders over-gives the load on the supporting elements. The other model of the bunker work was suggested by Jagofarov H. (see [3]). According to it all loads from the funnel are over-given to supporting elements directly through a small support zones. The bunker girders don't take any part in this process and turn out useless.

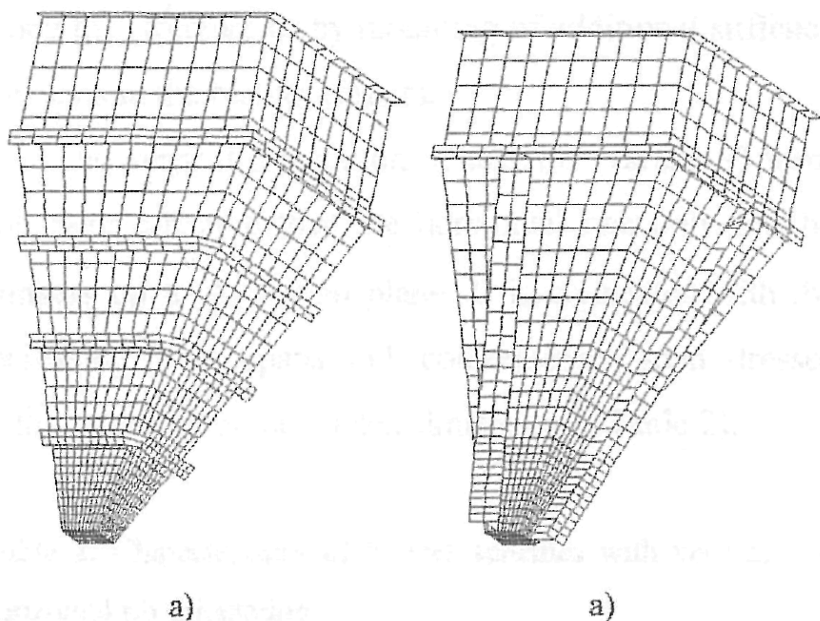
So, to solve all these main designing problems the presented research were done. As a method of the bunker work investigation the method of mathematical simulation on the base of finite element method (FEM) was chosen. All the numerical computings were done by means of SCAD software (version 7.27).

In the process of the investigations the system of numerical experiments was done. Seven main constructively identical schemes of the steel pyramiddally-prismatic bunker were analysed: 3x3 m (volume of funnel ~ 5 m<sup>3</sup>); 4,5x4,5 m (volume of funnel ~ 20m<sup>3</sup>); 6x6 m (volume of funnel ~ 50m<sup>3</sup>); 7,5x7,5 m (volume of funnel ~ 100m<sup>3</sup>); 9x9 m (volume of funnel ~ 200m<sup>3</sup>); 12x12 m (volume of funnel ~ 400m<sup>3</sup>); 15x15 m (volume of funnel ~ 800m<sup>3</sup>). The main constructive parameters - a rib orientation and a height of the vertical part - were varied in the each case.

Finite element (FE) schemes represented a quarter of the bunker, as it was considered symmetrical in plane for the both directions, with corresponding boarding conditions of deformation symmetry. As a FE the shell FE with 6 degrees of freedom in each node was used. The whole number of degrees of freedom for the models was in the range 5000-40000. The load represented a static pressure of material (aglomerat) distributed according to Rankin's theory. All the models were freely fixed at the corners

that was the imitation of the supporting elements. Examples of the carried out FE schemes is shown in Fig 2.

It is necessary to note that the type of model discretization was chosen according to recommendations pre-seated by the authors in the paper [7], which were obtained on the base of comparing results of numerical experiments with physical ones.



*Fig 2. Carried out FE schemes of bunker with stiffening ribs orientated, horizontally (a) and vertically b)*

### **3. Main results of investigations**

#### **3.1. Orientation of stiffening ribs.**

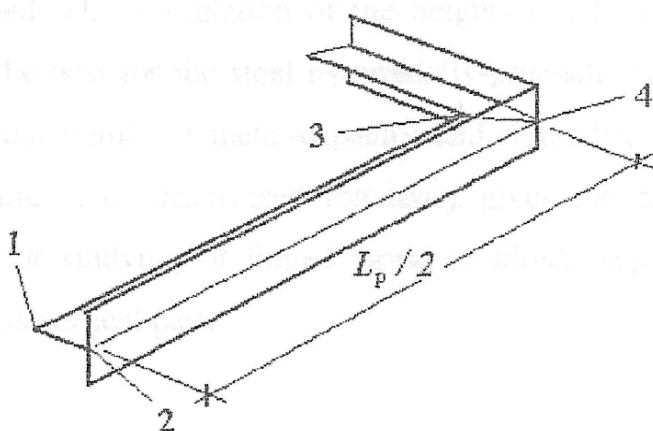
Obtained results connected with the analyzing of the variants of the stiffening rib orientation are presented in Table 1. The data concerns only the bunker 6x6 m, but in the bunkers of other dimensions situation is the same. It was determined that over-distribution of stresses in all the cases takes place only in the rib limits.

*Table 1*

***Stresses and deflections in elements of the first upper rib***

Variant	Equivalent stresses in points (MPa)			Deflections (cm)	
	1	2	3 (4)	in point 2	admitted.
1	167	67	305	0,46	1,89
2	161	93	336	0,69	
3	159	76	(383)	0,62	
4	150	139	170	1,07	
5	164	109	196	0,79	
6	163	102	161	0,81	
7	163	117	(165)	0,80	
8	159	126	118	0,83	

Equivalent stresses are calculated according to IV theory. The cross sections of the ribs in all the variants were taken identical. Other constructive parameters of the bunker were fixed. Stresses were obtained for the points 1-4 situated as shown in Fig 3.



***Fig 3. Points of determination of stresses in stiffening rib  
(half of rib span is shown)***

Numbers of variants correspond to follow rib orientation:

- 1 - horizontal with full junction of the rib;
- 2 - horizontal with junction of the rib shells only;
- 3 - horizontal with junction of the rib walls only;

- 4 - horizontal without any junction;
- 5 - normal with full junction of the rib;
- 6 - normal with junction of the rib shells only;
- 7 - normal with junction of the rib walls only;
- 8 - normal without any junction.

From the Table 1 it is clear that the most low span stresses (point 2) take place in the variant 1, but in point 3 there is a zone of strong stress concentration. The cases of partly junctured ribs don't lead to significant decreasing of stresses. It is watched removing of the stress concentration zone to the external part of the rib cross section (point 4). The such situation cannot consider reliable because in the case of rupture of this knot the bunker construction begins to work according to the variant 4 which is the worst of all.

The best variant from the point of decreasing of the corner stress concentration it is necessary to consider the variant 8. Traditional calculating method gives for this case the stress of 225 MPa (in points 1 and 2), the FEM ~ 160 MPa (see, Table 1 marked line). It means that there is a possibility of decreasing the rib section at 30-35 % according to the theoretical data. The main lack of this variant is connected with a not very high stiffening properties of the structure, but they can be increased easily enough by arrangement some kind of stiffened diaphragms consisted of the junctured ribs situated with the definite step along the structure or by mounting of additional stiffened elements in the bunker corners.

The vertical orientation of the ribs (variant 9) turns out more effective then the horizontal one only for the bunkers up to 4x4 m in plane. It is connected with the increasing of its spans and, consequently, span stresses with increasing of the bunker dimensions (Table 2).

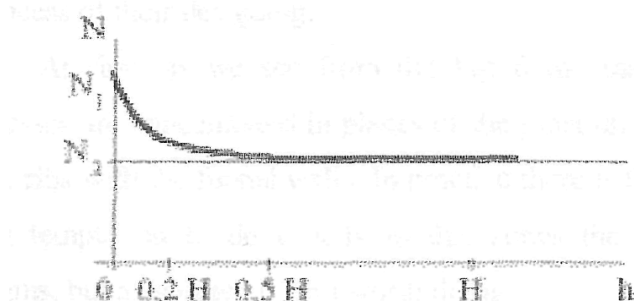
*Table 2*

*Characteristics of bunker schemes with vertical and horizontal rib orientation*

Bunker	Variant	Span stresses (MPa)	Rib cross section	Mass of 1m
3x3 m	8	118	— 90x7	9.6
	9	97	— 75 x 6	6.9
4,5x4,5 m	8	129	— 23Б1	11.8
	9	128	— 20Б1	20,2
6x6 m	8	126	— 55Б1	43.1
	9	112	— 45Б3	71.5

### 3.2. Influence of bunker vertical part.

The influence of the variation of the height of the vertical bunker part was analyzed. The rib constructive scheme was taken according to the variant 8. It was obtained that the influence spreads only on the top part of the bunker funnel and general picture depends on the bunker dimensions not very significantly (Fig 4).



**Fig 4. Influence of height of vertical part on stress-strain state of bunker**

In the upper figure we can see that with the increasing of the height of the vertical part ( $h$ ), beginning with

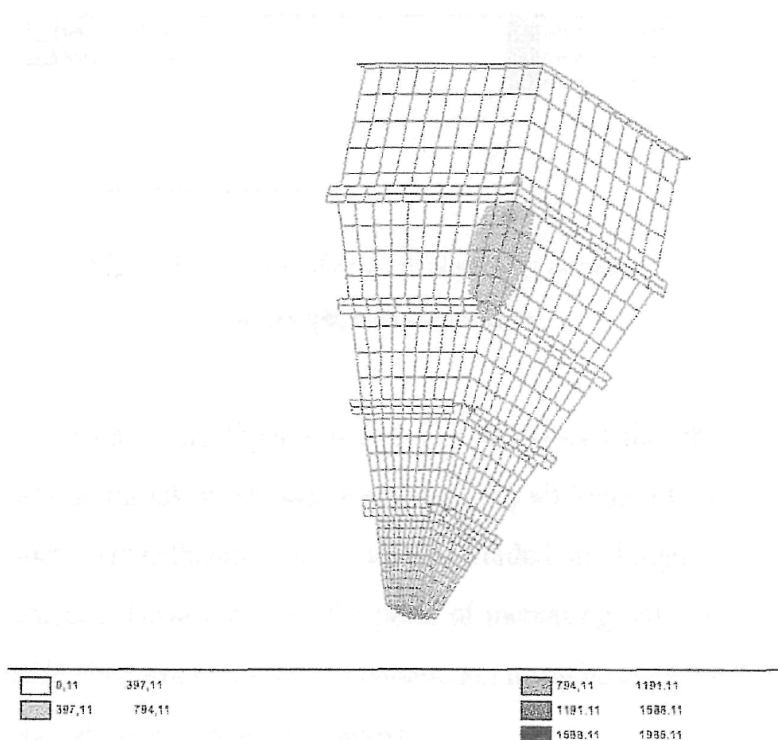
the moment when it reaches approximately 0.2 of the funnel height ( $H$ ), a very low decreasing of general parameter ( $N$ ) - it can be deflection, stress, force, etc. - is watched. This correlation of the heights can be considered the best for the steel pyramidally-prismatic bunkers from the points of metal-capacity and reliability of the structure. This discovered regularity gives the foundations for studying of funnel work of siloses separately from its vertical part.

### 3.3. Model of pyramidally-prismatic bunker work.

FE analysis allowed to research the way of load over-distribution in the steel pyramidally-prismatic bunker. In Fig 5 the picture of equivalent stresses from only the tangential composite of the material pressure is shown.

It is clear that load is over-given to the supporting elements through the narrow zone of the funnel, not a seam of junction of the vertical and pyramidal parts (Fig 6). General scheme of the bunker work reminds the work of a girder with a spreneel where the girder is a vertical bunker part. It appears to be compressed, not strained as was considered before. It means that analytically grounded scheme by Jagofarov H. is more close

to the real bunker work then traditional and bunker designing method must take into account this established peculiarity.



***Fig 5. Distribution of equivalent stresses from tangential composite of material pressure***

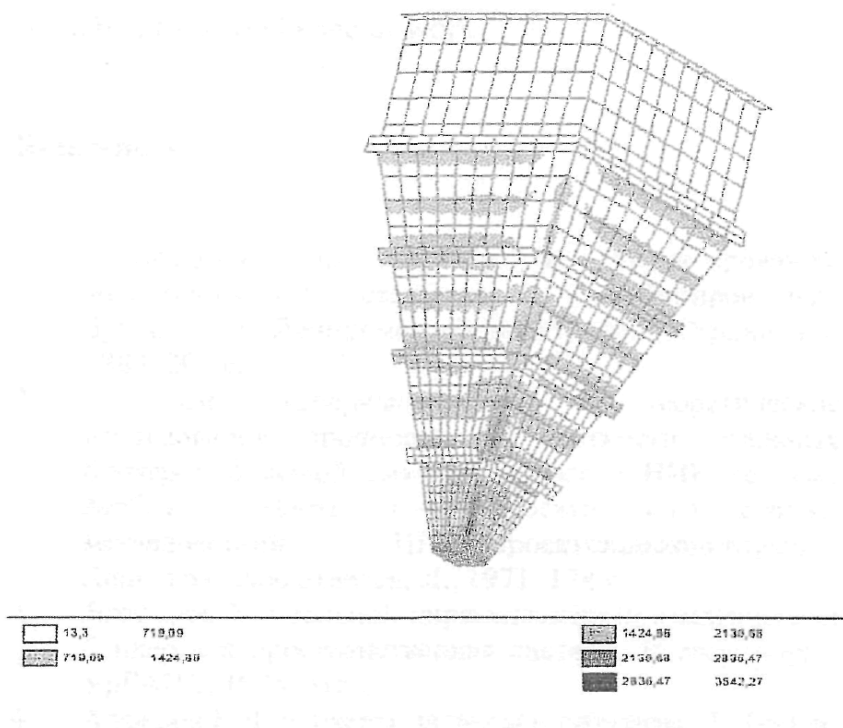
### **3.4. Designing improvements.**

Carried out research allowed to suggest some recommendation as for improvement of existing constructive scheme of the steel pyramidally-prismatic bunkers and a process of their designing.

At first, as we see from the Fig 6 the maximum stresses are concentrated in places of the junction stiffening ribs with the funnel walls. In practice there is the very big temptation to do exactly in this zones the joining seams, but as you see it isn't worth doing.

At second, engineers very often have fears as for reliability of the seam of the vertical and prismatic parts. As seeing from the upper figures

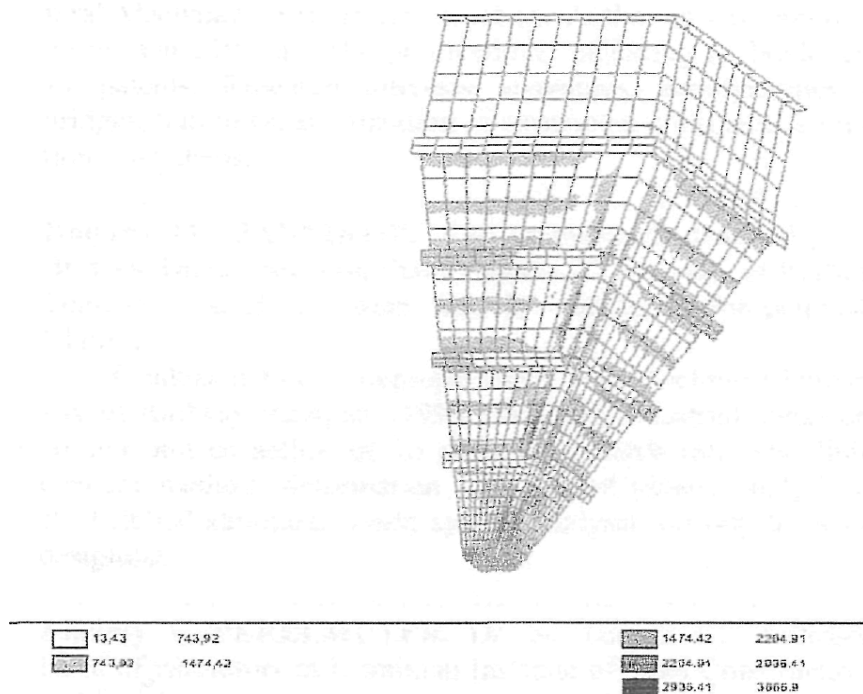
they appears ungrounded. However, the funnel corner zone need especial attention.



**Fig 6. Distribution of equivalent stresses from granular material pressure**

At third, to increase stiffening properties of the bunker construction in its corner zone (the most stressed) engineers establish some lands of additional strengthened solutions. One of them is arrangement here a steel, sheets in the shape of a corner. The results of such strengthening are presented in Fig 7.

Comparing Figures 6 and 7 is convinced that this way is mistaken: stresses even rise. So, all kinds of the such «strengthening» need to be avoided in designing practice. However, from the point of increasing only the stiffening properties of the construction it can be effective enough, as was mentioned above.



***Fig 7. Distribution of equivalent stresses in bunker with strengthened corner zone***

#### **4. Concluding remarks.**

All the presented in this paper recommendations as for improvement of the steel pyramidally-prismatic bunker construction can be used in the process of its designing. They allow to shorten the number of the constructive solutions, to choose the most economic and reliable of them and, in whole, to decrease the mass of the such type bunkers according to theoretical analysis up to 30-40 %. Some of the recommendations may be taken into account in norm documents and be useful not only for the such structures.

Suggested FE approach to designing of the bunkers will allow avoiding of some typical constructive mistakes and creating economic and reliable enough structures because the distribution of steel in them will be approached to its real special work.

## *References*

1. Руководство по расчету и проектированию железобетонных, стальных и комбинированных бункеров / Ленпромстройпроект. М.: Стройиздат, 1983. – 200 с.
2. Провести экспериментально-теоретические исследования прочности и жесткости стальных бункеров большой емкости: Отчет о НИР по теме № 6931 / Центр, н.-и. проекти, ин-т строит. металлоконструкций ЦНИИПроектстальконструкция. Ленинградское отделение, Л., 1971. – 174 с.
3. Ягофаров Х. Стальной пирамидально-призматический бункер как пространственная система, Екатеринбург: УрГАПС, 1998. – 315 с.
4. Алферов К.В. Бункеры, затворы и питатели. Л.: Изд-во машиностр. лит-ры, 1946. – 178 с.
5. Липницкий М.Е., Абрамович Ж.Р. Проектирование железобетонных бункеров и силосов, Л.: Стройиздат. 1960.– 288с.
6. Справочник проектировщика инженерных сооружений / Под ред. А.П. Величкина и В.Ш. Козлова, К.: Будівельник, 1973. – 552 с.
7. Банников Д.О. Выбор параметров конечных элементов при численном моделировании пирамидально-призматических бункеров // Сб. научн. тр.: Строительство. Материаловедение. Машиностроение. Вып. 11. Днепропетровск: ПГАСА, 2000, с. 126–133.

# DYNAMIC PROPERTIES OF STEEL BUNKERS\*

## 1. INTRODUCTION.

Now steel pyramidally-prismatic bunkers are one of the most widespread types of vessels for the storage and accumulation of bulk granular materials. Their usage in different branches of industry is numbered about one hundred years already, but they are one of the worst studied kinds of building constructions.

One reason of it is that bunker design is a complicated enough subject covering the analysis of thin shells and stiffened plate structures with uncertain load distribution. On the other hand, the very wide spectrum of technological processes served with them and loaded materials themselves lead to wide variation of used constructive solutions and geometrical parameters of pyramidally-prismatic bunkers.

That's why existing designing method is based on division of the structure into single simple elements with the following calculating of them according to a set of unrelated flat schemes [1]. This way doesn't take into account the very important factor - space work of the construction,

In addition, with absence in Ukraine any norm documents regulating these questions it all results in creating uneconomic and unreliable bunkers. The cases of accidents and damages of them are known in practice. Not the last place in this situation the different dynamic loads occupy. So, studying the dynamic properties of the steel pyramidally-prismatic bunkers will allow to design more reliable constructions.

## 2. OBJECT AND METHOD OF RESEARCH

### 2.1 Constructive Scheme of Steel Pyramidally-Prismatic Banker.

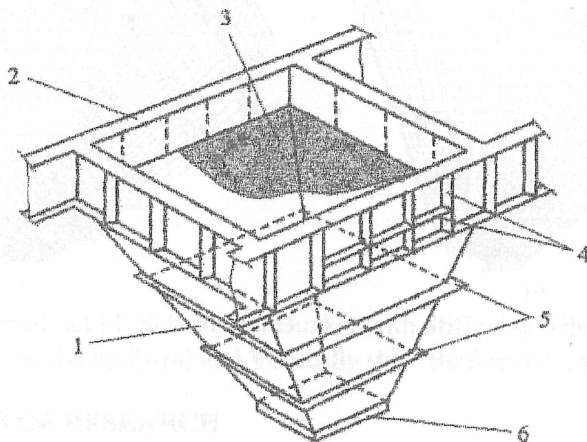
As an object of the research, as was mentioned above, the steel pyramidally-prismatic bunker was chosen. Its constructive scheme is given in Fig. 1.

Typically such bunker consists of lower pyramidal and upper prismatic (vertical) parts. The pyramidal pan represents a turned pyramid all the walls of which are made of thin (6-14 mm) steel sheets. To be able to grasp pressure of the granular material or other technological loads they are strengthened with stiffening ribs, that can be situated horizontally with full junction in the comers of the bunker or without it and even vertically. If the vertical part of the construction is high enough it is

---

\*Опубликовано совместно с Д.О. Банниковым в Трудах IASS Symposium, Nagoya, 2001.

designed constructively in the same way as the funnel. In the other case it represents bunker girders, as shown in Fig 1.



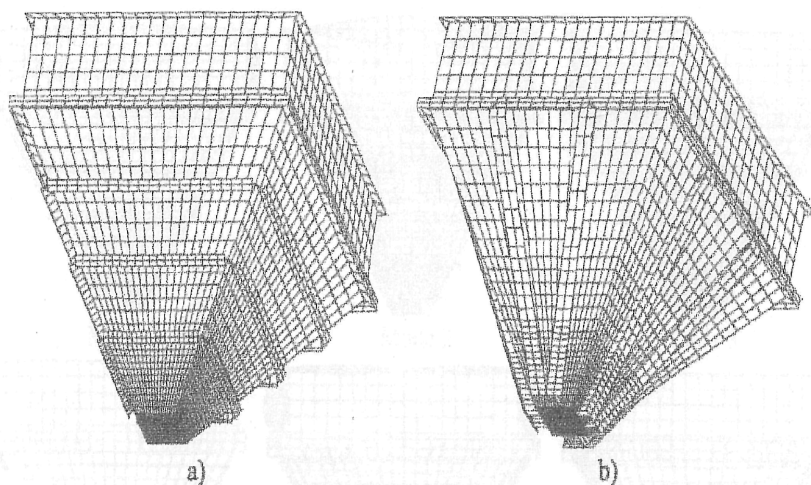
**Fig. 1. Typical Constructive Scheme of Steel Pyramidally-Prismatic Bunker.**  
**1 - pyramidal part (runnel), 2 - vertical prismatic part (girders), 3 - protective layer, 4 - stiffening ribs, 5 - horizontal stiffening ribs of runnel, 6 - output opening**

## 2.2. Using of FEM.

As it is clear, the official method of the bunker designing doesn't allow even formulating any dynamic problem. That's why for the presented research the finite element method (FEM) was chosen. Its power ideology and methodology allow using of it not only for static analysis of the bunker work [2, 3], but and for dynamic one. All the numerical computings were done by means of a computer using the special SCAD software [4].

In the process of the investigations the system of numerical experiments was done. Seven main constructively identical schemes of the steel pyramidally-prismatic bunker were analysed: 3x3 m (volume of funnel ~ 5 m<sup>3</sup>); 4.5x4.5 m (volume of funnel ~ 20m<sup>3</sup>); 6x6 m (volume of funnel ~ 50m<sup>3</sup>); 7.5x7.5 m (volume of funnel ~ 100m<sup>3</sup>); 9x9 m (volume of funnel ~ 2000m<sup>3</sup>); 12x12 m (volume of funnel ~ 400m<sup>3</sup>); 15x15 m (volume of funnel - 800m<sup>3</sup>). The main constructive parameters - a rib orientation and a height of the vertical pan were varied in the each case. The schemes were considered symmetrical in plane. Finite element (FE) schemes represented the shell spatial systems (see fig. 2). As a FE the shell FE with 6

degrees of freedom in the each node was used. The whole number of the degrees of freedom for the models was in the range 20000–160000. All the models were freely fixed at the corners that was the imitation of the supporting elements,



**Fig. 2. Carried out FE Schemes of Bunker with Stiffening Ribs Orientated Horizontally (a) and Vertically (b) – Bunker 6x6 m**

### **3. MAIN RESULTS OF RESEARCH.**

It is well known that the dynamic properties of a structure are the most integral characteristic of it. Usually this principle is well illustrated with the presence of influence of any changes in the structure on its dynamic properties - the principle of dynamic integral diagnostic [5]. From this point the authors tried to generalise all the received results.

#### **3.1 Arrangement of Stiffening Ribs.**

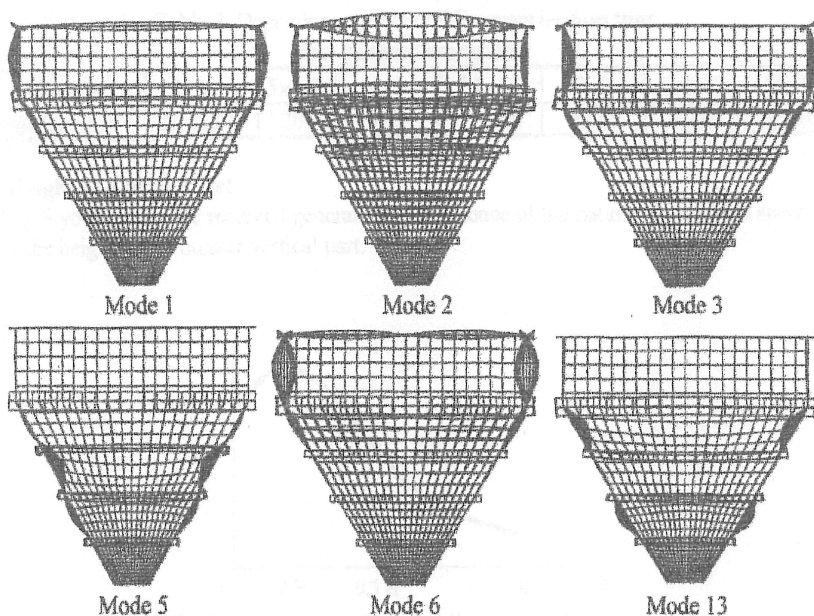
In Table 1 the received first five natural frequencies for the empty bunker 6x6 m are presented (height of the vertical bunker part was 1.6 m in all the cases).

*Table 1*

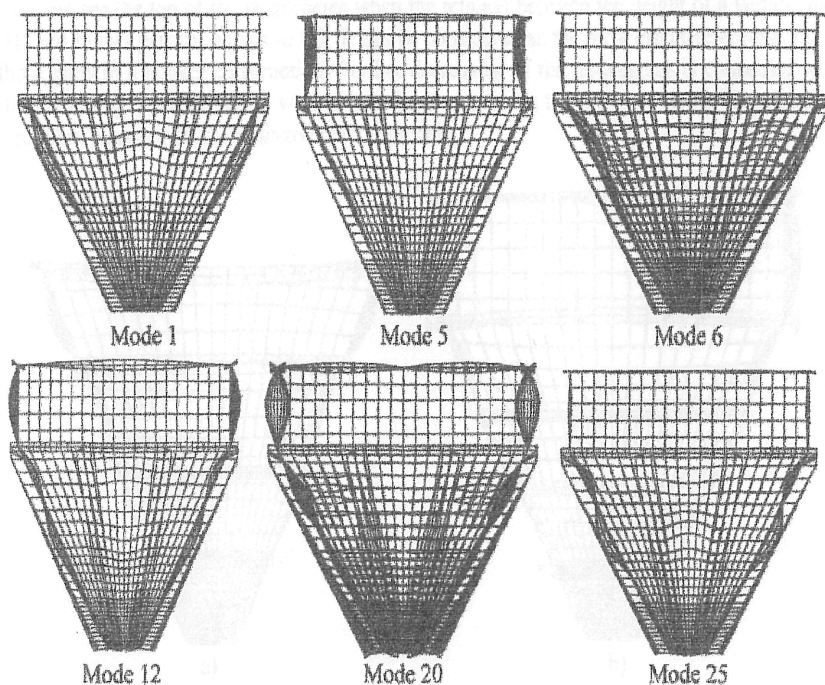
***Dependence of Natural Frequencies Spectrum of Bunker from Stiffening Rib Arrangement (in  $c^{-1}$ )***

Frequencies	Ribs are horizontal to funnel wall		Ribs are normal to funnel wall		Ribs are vertical
	Juncted in corners	without junction in corners	juncted in corners	without junction in corners	
1	11.458	11.318	11.488	11.475	11.279
2	12.539	12.304	12.544	12.401	11.695
3	12.539	12.304	12.544	12.401	11.695
4	12.943	12.753	12.968	12.758	11.731
5	16.423	13.405	16.204	13.409	13.697

It is clear that there is no strong dependence from the rib orientation. The frequencies are approximately the same and situated thick enough. The main vibration modes corresponding to the received frequencies are shown in Fig. 3 and 4. The natural frequencies of the ribs are high enough (more then  $100\ c^{-1}$ ).



***Fig. 3. Vibration Modes for Bunker with Horizontal Ribs***



**Fig. 4. Vibration Modes for Bunker with Vertical Ribs Table 2**

### 3.2 Dimensions of Bunker.

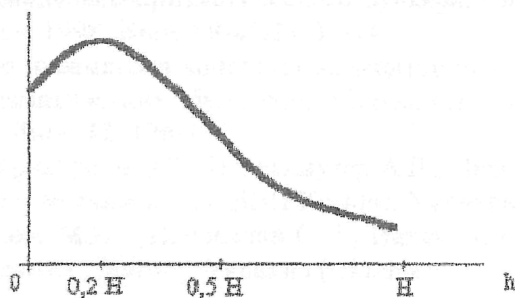
Table 2 illustrates the removal of the frequencies spectrum of the structure to the sphere of lower frequencies with increasing of the bunker dimensions. The variant is with the ribs are situated normally and without any junction in the corners. The height of the vertical part equals to 0.

Dependence of Natural Frequencies Spectrum from Bunker Dimensions

Bunker, m	3x3	4.5x4.5	6x6	7.5x7.5	9x9	12x12	15x15
frequency 1. $c^{-1}$	26.466	17.269	13,721	11.548	9.185	7.236	4.679

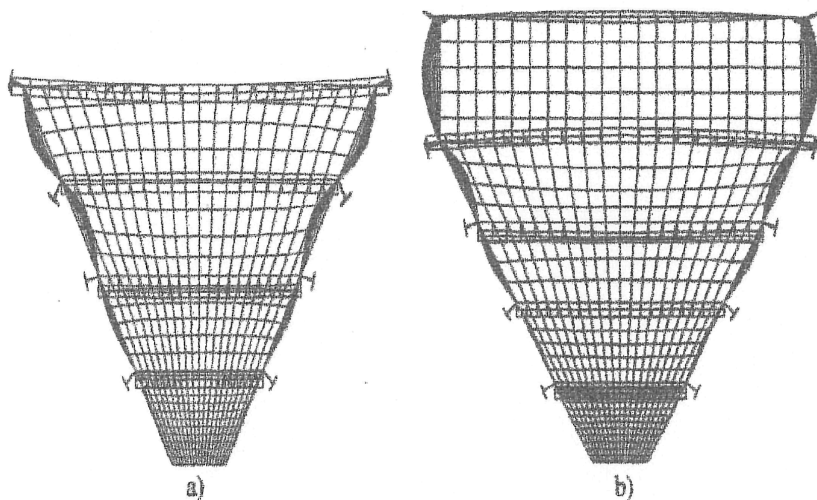
### 3.3 Height of Vertical Part.

In Fig. 5 you can see the received generalised dependence of the natural frequencies spectrum from the height of the bunker vertical part.



**Fig. 5. Dependence of Natural Frequencies Spectrum from Height of Bunker Vertical Part**

You can see the top of the frequencies when the relation between the height of a vertical part ( $H$ ) and funnel part ( $h$ ) equals to 0.2. It can be considered as the most effective correlation of those parts in a bunker construction. Further decreasing of the frequencies is connected with the decreasing of the parcional vertical part frequency that is the lowest (Fig. 6). The such picture takes place for all the analyzed bunker models.



**Fig. 6. The First Vibration Mode (Bunker 6x6 m) when Height of vertical Part equals to: a) 0 ( $13.783 \text{ c}^{-1}$ ) and b) 1.6 m ( $11.475 \text{ c}^{-1}$ )**

#### 4. CONCLUDING REMARKS.

Presented data give the idea about spectrum of the natural frequencies of the steel pyramidally-prismatic bunkers. They will allow more effective to design the structures and be useful in the process of dynamic integral diagnostic. In addition, such data can help to solve some specific problems as shock designing of bunkers, earthquake-resistant designing, etc.

#### *References*

1. Руководство по расчету и проектированию железобетонных, стальных и комбинированных бункеров, (1983), Стройиздат, СССР (USSR).
2. Казакевич М.И., Кострица С.А., Банников Д.О., Напряженно-деформированное состояние стального пирамидально-призматического бункера. *Строительные конструкции. Здания и сооружения*, 1998, Вып. 98-4 (12), 37–44 с.
3. Банников Д.О., Выбор параметров конечных элементов при численном моделировании пирамидально-призматических бункеров, *Строительство. Материаловедение. Машиностроение*, 2000, Вып. И, 126-133 с.
4. Карпиловский В.С., Криксунов Э.З., Перельмутер А.В., Перельмутер М.А., Трофимчук А.Н., (2000). *SCAD для пользователя*, ВВП Компас, Украина (Ukraine).
5. Горохов Е.В., Казакевич М.И., Шаповалов С.Н., Назим Я.В., (2000). *Аэродинамика электросетевых конструкций*, Донецк, Украина (Ukraine).

# ОСНОВНЫЕ ПРИЧИНЫ АВАРИЙ ЖЕСТКИХ СТАЛЬНЫХ БУНКЕРОВ И НИЗКИХ СИЛОСОВ\*

## 1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ.

Во многих отраслях промышленности, сельского хозяйства, на транспорте используются конструкции особого типа, называемые листовыми. Стальные листы в них составляют главную часть сооружения, образуя пространственные оболочки. Основное предназначение таких конструкций заключается в хранении или технологической переработке газообразных, жидких и сыпучих веществ, поэтому, в конструктивном отношении все они представляют собой емкости.

Не исключением являются и стальные бункера, а также родственные им по классу конструкций невысокие силосы, проектируемые для работы с сыпучими материалами. История их применения насчитывает уже свыше ста лет. Однако за все это время стальные бункера и силосы не претерпели принципиальных конструктивных изменений, как, впрочем, и сама методика их расчета и конструирования. Этот факт как нельзя лучше свидетельствует о том, что эти конструкции в настоящее время являются одним из наименее изученных видов строительных конструкций, большая часть аспектов работы которых пока остается в тени исследований.

Статистика аварий стальных бункеров и низких силосов полностью подтверждает это. Однако, прежде чем подробнее соприкоснуться с ней, отметим несколько особенностей затронутой сферы в целом.

Во-первых, авторы полностью разделяют бытующее мнение о том, что обнаружить зло – почти то же, что найти против него лекарство. Поэтому, представленный материал может послужить хорошим поводом задуматься для специалистов и инженеров, так или иначе связанных с конструкциями такого и аналогичного типов. Во-вторых, следует отметить, что специальная литература по данной проблематике совсем не пестрит сведениями об авариях стальных бункеров и силосов. Однако это вовсе не связано с тем, что они редко происходят. Дело в том, что бункера и силосы являются довольно рядовыми сооружениями ввиду своих скромных размеров\*\* и распо-

---

\*Опубликовано совместно с Д.О. Банниковым в ж-ле УАМК «Металеві конструкції», т. 5, № 1, Макеевка, 2002.

\*\*Максимальный (известный авторам) стальной бункер пирамидально-призматического типа имеет размеры 15х18 м в плане при общей высоте 9 м и расположен на КГГМК «Криворожсталь».

ложены на таких участках технологических процессов, которые не предполагают нахождения поблизости людей, тем более – их скопления. Для повышения эффективности работы бункера и силосы группируют друг с другом. Ясно, что выход из строя одного из них незначительно скажется на ходе технологического процесса, и только в исключительном случае может привести к его остановке. Поэтому, аварии бункеров и силосов – процесс, так сказать, незрелищный, о котором невозможно было бы снять импозантный фильм и не влекущий за собой больших человеческих жертв, а значит, из которого трудно сделать показательный пример в литературе.

К тому же, бункера являются неотъемлемым объектом таких производств, которые довольно часто носят стратегический характер, а значит, и все сведения о которых не подлежат широкой огласке. Кроме этого, само правдивое описание всех имевших в практике место аварий подорвало бы авторитет соответствующих строительных и проектных организаций и нанесло бы им материальный ущерб.

В связи с этим, нужно признаться, что авторам стоило немалых трудов собрать необходимые сведения, позволившие обобщить и проанализировать современное положение вещей в данной сфере. В своей работе они старались не доверять и не использовать данные, которые невозможно было бы проверить, а представленный в данной публикации материал имеет точные ссылки на источники, из которых он был позаимствован.

## **2. ОБЩИЕ ПРИЧИНЫ АВАРИЙ СТАЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ.**

Когда разговор заходит об авариях, прежде всего, начинают с их классификации по каким-либо признакам. Традиционно принято разделять аварии строительных конструкций либо по причинам, их вызвавшим, либо по характеру повреждения и разрушения элементов.

Относительно первого подхода известно довольно много попыток классификаций у различных авторов [1 - 5]. Так, любопытен подход Томаса Х. Мак Кейга выделяющего пять основных причин аварий, связанных, главным образом, с человеческим фактором: невежество, экономия, погоня за прибылью, небрежность и стихийные бедствия. Классификация Мизюмского И.А., напротив, отражает только технический аспект. Он выделяет четыре причины аварий: ошибки проектирования, изготовления, эксплуатации и от недостатка знаний. Известный советский исследователь Дмитриев Ф.Д. совершенно справедливо их примиряет, считая, что аварии происходят либо ввиду несовершенства инженерно-технических приемов, либо связаны с социально-экономическими условиями, либо есть следствие объективных природных явлений.

Однако, как известно из опыта, в большинстве случаев авария есть результат наложения нескольких причин, и выделить главную из них, оказавшую решающее влияние, иногда довольно затруднительно. Кроме этого следует различать основную и непосредственную причины аварий, что вносит определенную долю условности во всякую классификацию.

С точки зрения исследователей, к которым авторы осмеливаются причислить и себя, и инженерно-технических работников интерес, в первую очередь, представляют технические причины, предполагающие улучшающее вмешательство в конструктивную систему. В количественном отношении полезные данные об их усредненном процентном распределении приведены в работе [6] (в скобках приведен диапазон вариации по данным различных источников):

- 1) недоработка норм проектирования – 4,0% (0-10%);
- 2) неудачное проектное решение – 25,1% (11-35%);
- 3) низкое качество материалов – 6,0% (0-14,7%);
- 4) дефекты изготовления и монтажа – 48,3% (38,8-65%);
- 5) неправильное содержание – 15,7% (7-25%);
- 6) прочие причины и сочетания – 0,3% (0-2%).

Второй подход к классификации аварий по характеру разрушения элементов менее удобен, поскольку не дает необходимой информации для определения надежностных характеристик сооружений. Поэтому, в данной работе он не рассматривается.

Все вышеизложенные причины аварий характерны для любых строительных конструкций, а значит, справедливы и для стальных бункеров. Вместе с этим, наряду с общими причинами, для каждого отдельного вида конструкций характерны и свои специфические причины аварий, свои типичные ошибки и просчеты, которые вносят определенный перекося в среднестатистические данные для рассматриваемого вида конструкций. Привести их для стальных бункеров и силосов не представляется возможным по причине недостаточности накопленных статистических сведений, поэтому рассмотрим лишь качественную сторону данного явления.

### **3. СПЕЦИФИЧЕСКИЕ ПРИЧИНЫ АВАРИЙ СТАЛЬНЫХ БУНКЕРОВ И СИЛОСОВ.**

При описании аварий стальных бункеров и силосов и анализе их причин будем следовать вышеприведенной классификации, которая является достаточно общей и понятной.

#### ***3.1. Ошибки, связанные с проектированием.***

Все основные специфические причины аварий жестких стальных

бункеров и низких силосов связаны с недостатками проектирования, т.е. входят в группы 1 и 2 общих причин аварий стальных конструкций.

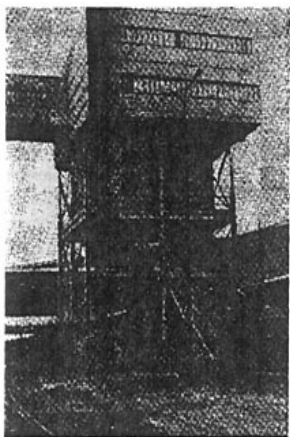
Одна из причин такого рода связана с ***неверным определением нагрузок на конструкцию бункера***. В настоящее время она имеет два аспекта. Первый из них заключается в том, что *определяющим видом нагрузки при проектировании бункеров и силосов считается давление сыпучего материала, оказываемое им на дно и стенки емкостей, а по его определению среди специалистов в настоящее время нет. единого мнения.*

Рекомендуемый отечественной нормативносправочной литературой подход к определению давления при расчете бункеров предполагает использование теории предельного равновесия Рэнкина для неограниченного массива грунта без учета трения материала о стенки [7]. При этом во внимание принимается только статическая сторона задачи, а сама теория справедлива лишь для вертикальных стенок. Конечная эпюра давления имеет гидростатический вид с максимумом в нижней точке (дно бункера).

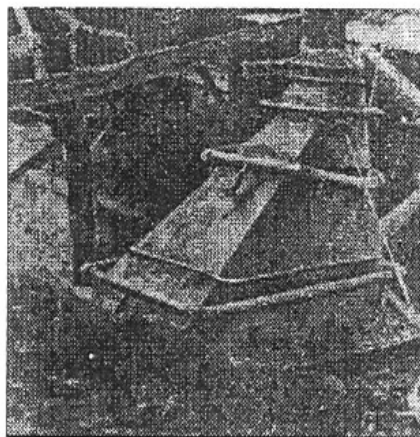
Американская школа в настоящее время, также, допускает применение такого подхода. Однако в качестве альтернативы позволяет использование и более общей теории Кулона, учитывающей трение материала о стенки и справедливой и для наклонных стенок [8]. Эта теория, также, рассматривает только статическую сторону задачи. Кроме этого, допускается применять теории Янсена и Рамберта, предполагающие постоянную геометрию сосуда по высоте и учитывающие силу трения материала о его стенки. Поскольку доказано, что обе эти теории дают заниженные значения давлений, то вводятся специальные поправочные коэффициенты. Суммарная эпюра давления имеет вид качественно отличный от гидростатического, но максимум опять имеет место в нижней точке (дно бункера). Такой подход отечественная школа рекомендует использовать только для проектирования силосов, причем дает иные поправочные коэффициенты, отличающиеся в 1,5–2 раза от американских [9].

Европейская школа, наиболее продвинутая в данном плане, на основе многолетних исследований дает довольно сложную картину распределения давления сыпучего материала [10]. При этом учитывается трение материала о стенки сосуда, форма и размеры сосуда, а также, эффект местного повышения давления при выгрузке сыпучего. Формулы для вычисления его величины носят полуэмпирический характер. Суммарная эпюра распределения давления имеет вид качественно отличный от двух предыдущих: перевернутая гидростатическая (максимальное значение имеет место в верхней точке воронки бункера!) с учетом целого набора локальных всплесков.

а)



б)



**Рис. 1. Вид бункера для хранения цемента до обрушения (а) и после обрушения (б)**

Не стоит и говорить о том, что в количественном плане значения давления, посчитанного по каждой из методик, отличается в разы (до 5 раз). Дополнительная погрешность вносится за счет того, что довольно часто при определении давления используют не фактические, а усредненные характеристики сыпучих материалов, приводимые в нормативно-справочной литературе. Причем по данным различных источников для одних и тех же материалов они также различны (отличие в удельном весе, например, может достигать до 50%). Поэтому, задача верного определения давления сыпучего материала на дно и стенки сосуда является одной из первостепеннейших и актуальнейших в проблеме рационализации конструкции бункеров и силосов.

Так, в работе [1] приводится пример обрушения бункера для хранения цемента размерами  $4,4 \times 3,8 \times 8,5$  м, произошедший после нескольких дней его эксплуатации. При очередной загрузке произошел отрыв воронки в месте ее присоединения к вертикальной части. Воронка рухнула на площадку обслуживания, которая в свою очередь разрушилась и упала на стоящий внизу вагон (рис. 1).

В качестве одной из причин аварии как раз и указывается «...ошибочно принятая величина расчетной нагрузки...». Однако, помимо неверно определенного давления от сыпучего материала, в расчетах не учитывалось избыточное давление воздуха при аэрации, а в качестве непосредственной причины аварии указывается на внезапное обрушение зависшей массы цемента внутри бункера.

Точно такие же причины привели в 1951 г. к аварии сварного це-

ментного силоса на Магнитогорском цементном заводе, описанной в работе [2]. Во время погрузки цемента из стального силоса в железнодорожные вагоны у силоса оторвалось коническое днище и рухнувшим цементом были произведены большие разрушения конструкции самого силоса, кирпичных стен силосного отделения, воздушных и электрических сетей и железнодорожного состава, находящегося под погрузкой. Силос имел объем 1830 м<sup>3</sup> и находился в эксплуатации 2,5 месяца.

На неверное определение давление от хранимого в силосах зерна указывается и при разборе причин целой серии аварий зернового элеватора, произошедших в 1961г. [5]. Силосы были выполнены из железобетона, но это только лишний раз демонстрирует общность данной проблемы.

На этих примерах довольно наглядно прослеживается и второй аспект указанной выше проблемы определения нагрузок, а именно - *существенное заужение спектра учитываемых при проектировании нагрузок и воздействий*.

Например, европейская школа помимо общих для многих строительных конструкций нагрузок от собственного веса сооружения, ветра, снега, рекомендует учитывать и ряд специфических:

- воздействие технологических температурных нагрузок от загрузки нагретого сыпучего материала и связанное с этим возможное изменение физико-механических характеристик стали;

- ударные нагрузки, возникающие при падении больших кусков материала при загрузке бункеров и силосов, при обрушении сводов или склонов сыпучего внутри конструкции, при его неравномерной осадке;

- нагрузки от повышенного воздушного давления, возникающего при быстрой разгрузке и загрузке большого количества сыпучего материала с относительно низкой фильтрационной способностью для газов;

- нагрузки от возможного взрыва пылевидной фракции хранимого сыпучего (это касается, правда, только взрывоопасных материалов);

- эффекты изменения во время хранения физико-механических свойств материала вследствие процессов консолидации, сегрегации и деградации сыпучего;

- нагрузки, возникающие при применении специальных разгрузочных устройств, облегчающих процесс разгрузки плохосыпучих материалов.

Проблема здесь заключается не только в том, что недостаточно исследована специфика этих нагрузок и воздействий как примени-

тельно к конструкции бункеров и силосов, так и в целом на физическом уровне. Как показывают исследования, стенки стальных пирамидально-призматических бункеров необходимо рассчитывать по геометрически нелинейной схеме, иначе происходит существенное искажение получаемых результатов (см., например, [11]). При этом возникает проблема совместного учета различных нагрузок, ведь применение традиционного принципа суперпозиции уже будет являться в корне неверным.

Отечественная нормативно-справочная литература упрощает ситуацию донельзя, рекомендуя все вышеперечисленные эффекты учитывать введением одного-единственного коэффициента динамичности, значения которого зависят только лишь от объема единовременно загружаемого в бункер материала и варьируются в диапазоне 1–1,5. Становится понятным идея такого упрощенного подхода, если вспомнить сколько разночтений наблюдается по вопросу определения давления от сыпучего.

В качестве второй специфической причины аварий стальных бункеров пирамидально-призматического типа можно выделить ***неверное назначение сечений элементов***. Как и предыдущая, данная причина также имеет два аспекта.

Первый из них следует трактовать не как следствие предыдущей причины (хотя связь между ними прямая и неоспоримая), а как *результат применения неверной методики расчета, связанной с недостаточной изученностью и неверной трактовкой работы элементов конструкции бункера и силоса*.

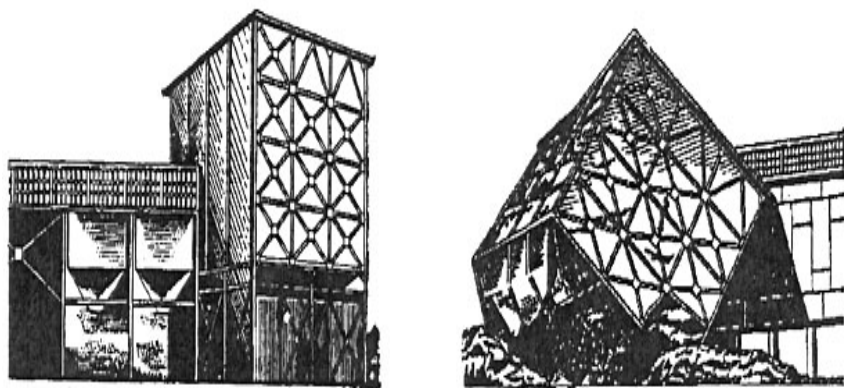
Так, в качестве второй основной причины уже упоминавшейся аварии бункера для цемента указывается ошибочно принятое распределение усилий в зоне состыковки воронки с вертикальной частью, в результате чего отрыв произошел именно в этом месте. Точно такая же ситуация наблюдалась и на бункерах Кузнецкого и Челябинского металлургических комбинатов. Достаточно уязвимой является и зона соединения ребер жесткости воронки в углах друг с другом, быстро приходящая в негодность и потому требующая замены (см. также рис. 3, в).

Дело в том, что официальная применяемая в настоящее время инженерная методика проектирования стальных бункеров рассматриваемого типа, впрочем как и остальных видов листовых конструкций (в т.ч. и силосов), основана на условном разделении единой конструкции на отдельные простые элементы с последующим расчетом их по элементарным плоским расчетным схемам. Такой подход, дающий приемлемые результаты для иных видов строительных конструкций (например, каркасы промышленных зданий), приводит

к огромным погрешностям в случае небольших пространственных конструкций, которыми являются бункера и низкие силосы.

Как показали исследования, проведенные авторами с применением метода конечных элементов, действительная картина напряженно-деформированного состояния и в качественном и в количественном плане существенно отличается от получаемой по традиционной методике. В частности, зонами наибольших напряжений являются места присоединения ребер жесткости к стенкам воронки, соединения их друг с другом в углах бункера, соединения стенок, а не как обычно предполагается — участки стенок в пролетах между ребрами. Передача усилий в месте соединения вертикальной и пирамидальной частей происходит довольно неравномерно, с большой концентрацией их в приугловых зонах бункера. Вертикальные стенки бункеров оказываются сжатыми и при этом не могут быть рассчитаны без учета влияния воронки (подробнее см., например, публикации [12, 13]).

В качестве оправдания приводится примерно следующее, дескать, зачем уточнять методику, если сперва следует уточнять нагрузки; ну а раз с нагрузками неопределенность, то пусть методика ее и перекроет. А если не перекроет?! Ведь, Природа не всегда прощает подобную трактовку ситуации, результатом чего и являются констатируемые случаи аварий.



*Рис. 2. Бункер-накопитель до обрушения (а) и после обрушения (б)*

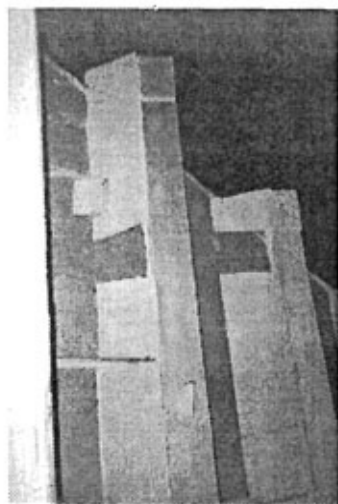
Второй аспект проблемы неверного назначения сечений элементов стальных бункеров связан с довольно типовой в проектной практике ситуацией типа «чрезмерное расширение сферы применения». Так, по данным работы [5] в октябре 1973 г. в одном из совхозов

произошло обрушение стального бункера-накопителя, входящего в состав зерноочистительного комбината и эксплуатировавшегося до этого всего 12 дней (рис. 2). Размер бункера 8х12х7м, масса 33 т, вместимость 600 т зерна. Обрушение бункера произошло внезапно в безветренную погоду при наличии в нем 430 т зерна. Он обрушился с наклоном в сторону машинного зала зерноочистительного комплекса, стойки получили значительные искривления с изгибом на 180°, по без разрыва стали.

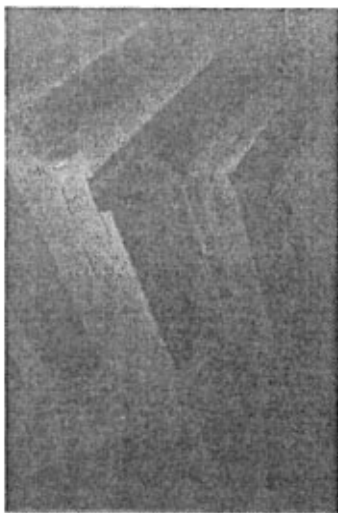
Проверочные расчеты конструкции самого бункера, выполненные по нормам проектирования стальных конструкций, показали, что она обладает достаточной прочностью. Что касается стоек, то их гибкость намного превышала требуемую. Именно в этом и состояла единственная в данном случае причина аварии. Бункер-накопитель был построен без проекта по эскизам, снятым с такого же бункера, построенного ранее в другом совхозе. При этом высота стоек была увеличена с 4 до 5,3м без выполнения надлежащих проверочных расчетов. Вдобавок, изготовлением и монтажом бункера руководили лица, не имевшие технического образования, и поэтому не заметившие допущенного просчета.

Другим показательным примером на данную тему является бункерная эстакада доменного цеха комбината «Криворожсталь». Выполненное в 1995–1997 гг. ее обследование авторской проектной организацией «Днепрпроектстальконструкция» сделало следующие выводы: техническое состояние 5 бункеров эстакады из 16 может быть оценено как неудовлетворительное, т.к. их элементы находятся в ограниченно работоспособном состоянии; техническое состояние остальных бункеров оценено как крайне неудовлетворительное – их элементы находятся в аварийном состоянии [14].

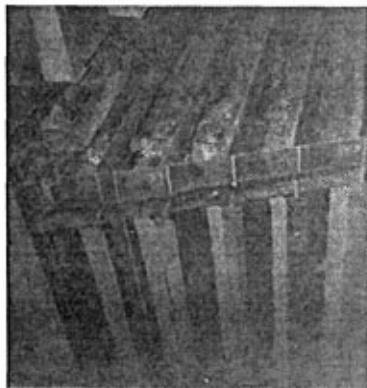
Все бункера пирамидально-призматического типа были выполнены по единой конструктивной схеме с седловидной рамой по центру, были сданы в эксплуатацию в 1976 г. Их основная отличительная особенность – гигантские для такого вида конструкций размеры: 15х18х9м, масса около 100 т, объем свыше 1000 м<sup>3</sup>. В числе отмеченных дефектов, па которых мы подробнее остановимся ниже, фигурировали и разрывы узлов стыковки элементов седло видной рамы друг с другом и с элементами эстакады, в результате чего рама полностью выключилась из работы в качестве несущего элемента. Аварии удалось избежать лишь благодаря тому, что как оказалось, рассчитанные по все той же официальной методике бункера в данном случае обладали значительным запасом прочности, а благодаря вовремя замеченным неисправностям интенсивность их эксплуатации резко снизили.



а)



б)



в)



г)

Рис. 3. Дефекты конструкции бункеров комбината «Криворозжисталь»: а) негерметичность стыков ребер жесткости воронки со стенкой; б) трещины и погнутости ребер жесткости воронки; в) замена изношенной угловой зоны стыковки ребер жесткости, трещины и погнутости ребер; г) отсутствие футеровки на стенке воронки

Действительная причина возникшей ситуации, завуалированная кажущимися просчетами проектировщиков, заключается в неверной трактовке в принципе прогрессивной идеи концентрации материала в строительных сооружениях, сформулированной в 30-е гг. XX в. академиком Мельниковым Н.П. Она вылилась в создание сверхкрупных объектов, процесс проектирования которых не подкреплялся необходимыми в этих случаях, ввиду значительного влияния масштабного фактора, теоретическими исследованиями. Поэтому, имея опыт проектирования лишь небольших бункеров (до 200-300 м<sup>3</sup>), заложенный в официальной методике, данные большеразмерные бункера были спроектированы по тем же принципам, без необходимой в этих случаях корректировки и уточнении методики.

### ***3.2. Ошибки, связанные с изготовлением и монтажом.***

В данном разделе рассмотрим аварии, причины которых относятся к 3 и 4 группам общих причин аварий стальных конструкций.

Продолжая анализировать пример из предыдущего раздела о бункерах комбината «Криворожсталь» приведем список основных дефектов, выявленных при их обследовании. Он включает: многоочаговую пятнистую коррозию стенок бункеров вплоть до сквозной (средний размер пятен 600х200 мм); трещины и отверстия в стенках бункеров, средним размером 300х600 мм; многочисленные зазоры между стыкуемыми элементами, величиной до 50–70 мм; отсутствие сварных швов на отдельных участках, длиной до 1,5 м; многочисленные повреждения ребер – обрывы и деформации полок, вырезы и отверстия в полках и стенках; выполнение ряда узлов не по проекту (рис. 3). Появление этих дефектов обусловлено отчасти коррозионным воздействием и некорректным монтажом, отчасти ударными воздействиями при загрузке-выгрузке сыпучего. Особую группу составляют вырезы и отверстия, сделанные рабочими при проведении ремонтных работ для возможности крепления необходимого оборудования, естественно, без каких-либо предварительных расчетов.

Как видим, причины довольно стандартные. Их можно наблюдать очень часто, но относительно реальных бункеров и силосов они приобретают особую остроту, поскольку они, как и все листовые конструкции, имеют довольно значительную протяженность сварных швов. Общеизвестно же, что 80% разрушений металла в конструкциях происходит именно по ним (см. также пример из работы [2]).

### **3.3. Ошибки, связанные с эксплуатацией.**

Рассмотрим специфику последней, пятой группы общих причин аварий стальных конструкций применительно к жестким стальным бункерам и силосам.

Главный подводный камень, в данном случае, связан с необходимостью постоянно поддерживать в рабочем состоянии футеровку стенок конструкций. Как показывает практика, ее износ может быть довольно существенным, и на незащищенных местах сразу же начинается интенсивная коррозия стальных листов стенок бункеров, отрицательно сказывающаяся на прочностных свойствах конструкции. Так, по данным работы [15] коррозионный износ достигает величины 17,3% толщины стенки конструкции за 50 лет эксплуатации в условиях промышленного предприятия Польши. На бункерах же комбината «Криворожсталь» он по данным обследований составлял 7–12% толщины стенки, в местах же с нарушенной футеровкой достигал величины 23–28% (за 20 лет эксплуатации).

На основе этих и многих других примеров мы лишний раз видим, как небрежность и невежество (по классификации Томаса Х. Мак Кейга) оказываются довольно близки к тому, чтобы сослужить людям плохую службу.

### **Выводы.**

Таким образом, главные причины аварий жестких стальных бункеров и низких силосов связаны с проектной стороной жизненного цикла конструкций. Основные дефекты при этом заключаются в неверном выборе конструктивной, а затем и расчетной схем. Ошибки такой категории являются исключительно опасными, поскольку оказываются присущи каждому спроектированному бункеру или силосу в отдельности. Не случайно большинство описанных в данной публикации аварий произошли именно в первое время после сдачи сооружений в эксплуатацию.

Дальнейшая же судьба тех конструкций стальных бункеров и силосов, запас прочности в которых, заложенный проектировщиками, оказался достаточен для несения эксплуатационных нагрузок, в значительной степени оказывается зависящей от случайного сочетания различных факторов изготовления и эксплуатации, оказывающих крайне неблагоприятное воздействие на надежность свойства конструкций при печально известном отечественном качестве выполнения строительно-монтажных работ.

Особая проблема проектирования стальных бункеров и силосов заключается в необходимости проведения большого объема иссле-

дований, связанных с уточнением механизма и характера действия большого количества возможных в практике нагрузок и воздействий, с одной стороны, и уточнение работы самой конструкции как сложной пространственной конструктивной системы, с другой стороны.

### *Литература*

1. Аугустин Я., Шледзевский Е. Аварии стальных конструкций. Пер. с польского. – М.: Стройиздат. – 1978. – 183с.
2. Беляев Б.И., Корниенко В.С. **Причины аварий стальных конструкций** и способы их устранения. – М.: Издательство литературы по строительству. – 1968. – 208 с.
3. Лашенко М.Н. Аварии металлических конструкций зданий и сооружений. – Л.: Издательство литературы по строительству. – 1969. – 184с.
4. Сахновский М.М., Титов А.М. Уроки аварий стальных конструкций. – К.: Будівельник. – 1969. – 200с.
5. Шкинев А.Н. Аварии в строительстве. – М.: Стройиздат. – 1984. – 320с.
6. ерельмутер А.В. Избранные проблемы надежности и безопасности строительных конструкций. – К.: Изд-во Укр-НИИПроектстальконструкция. – 1999. – 212 с.
7. Руководство по расчету и проектированию железобетонных, стальных и комбинированных бункеров / Ленпромстройпроект. – М.: Стройиздат. – 1983. – 200 с.
8. Structural Engineering Handbook / Edited by Edwin H. Gaylord, Jr., Charles N. Gaylord, James E. Stallmeyer. – McGraw-Hill. – 1997.
9. Справочник проектировщика. Металлические конструкции: В 3-х т. / Под ред. В.В. Кузнецова. – Т. 2: Стальные конструкции зданий и сооружений. – М.: Изд-во АСВ. – 1998. – 526 с.
10. ESDEP WG:Vol. 15. - 1994. - Vol. 15: Structural Systems. Bins: Lecture 15C.2. – 31 p.
11. Банников Д.О. Выбор параметров конечных элементов при численном моделировании пирамидально-призматических бункеров // Сб. научн. тр.: Строительство. Материаловедение. Машиностроение. - Днепропетровск: ПГАСА. – 2000. – Вып. 11. – С. 126-133.
12. Казакевич М.И., Кострица С.А., Банников Д.О. Напряженно-деформированное состояние стального пирамидально-призматического бункера // Вестник: Строительные конструкции. Здания и сооружения. – Донецк: ДГАСА. – 1998. – Вып. 98-4(12). – С. 37–44.

13. Банников Д.О. Прочностные и динамические свойства пирамидально-призматических бункеров для сыпучих материалов // Вісник Дон ДАБА: Композиційні матеріали для будівництва. – Макіївка: ДопДАБА. – 2001. – Випуск 2001–1(26). – С. 116–121.

14. Криворожский государственный горно-металлургический комбинат «Криворожсталь». Доменная печь №9. Бункерная эстакада. Обследование и оценка технического состояния металлоконструкций: Отчет о НИР, в 3 т. ОАО проектный институт «Днепрпроектстальконструкция». – Днепропетровск, 1997.

15. Wichtowski B., Nazarko W. Service life of steel coke bin -non-destructive testing (NDT) Proc. of 6<sup>th</sup> International Conf. «Modern Building Materials, Structures and Techniquess. – Vilnius (Lithuania). – 1999. – P. 155–159.

## НОВАЯ КОНСТРУКЦИЯ БУНКЕРНОЙ ЕМКОСТИ ИЗ СТАЛЬНЫХ ПАНЕЛЕЙ\*

Одним из широко распространенных видов конструкций, применяемых в настоящее время в ряде отраслей промышленности, являются бункерные емкости (бункера). Они предназначены для временного или длительного хранения различных объемов разнообразных сыпучих веществ.

В металлургической и горнорудной отраслях промышленности практически невозможно указать технологический процесс, в котором бы не использовались какие-либо сыпучие материалы. Это различные руды, угли, шлаки, а также множество сыпучих добавок, используемых для получения чугуна и стали. Поэтому в этих отраслях бункера являются неотъемлемым элементом практически любого завода или предприятия. Соответственно, сложности, характерные для эксплуатации бункерных конструкций, также являются типичными для подобных организаций.

**Традиционная конструктивная схема.** Отмеченные проблемы обусловлены тем, что, несмотря на достаточно большое разнообразие видов сыпучих веществ, загружаемых в бункера, бункерные емкости в конструктивном отношении достаточно однотипны. К настоящему времени все они выполняются по традиционной конструктивной схеме с усиливающими ребрами жесткости, которая в окончательном виде сформировалась примерно в середине прошлого века.

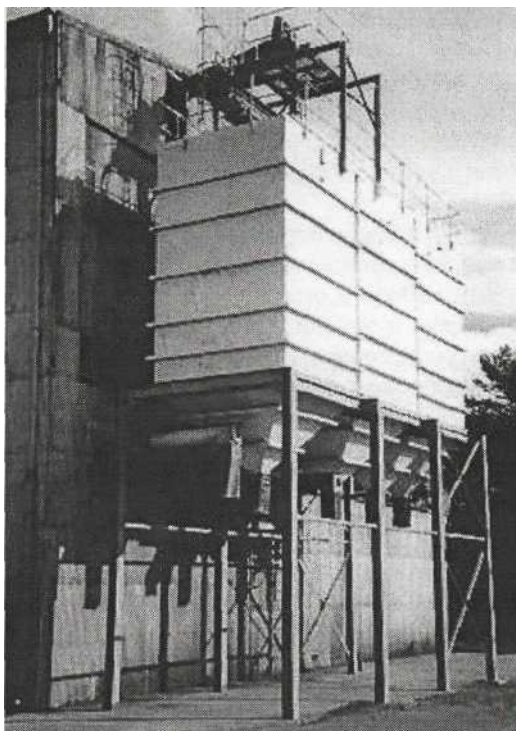
Такая конструктивная схема представляет собой конструкцию бункерной емкости из стальных листов относительно небольшой толщины (6-14 мм), соединяемых между собой с помощью сварки для придания емкости требуемой геометрической формы (рис. 1). Чаще всего емкость выполняется в виде вертикальной призматической верхней части и наклонной пирамидальной нижней части, обеспечивающей при верном выборе угла наклона самотечную разгрузку бункера. Для возможности восприятия давления хранимого сыпучего материала в стенки бункера подкрепляются горизонтальными ребрами жесткости, выполняемыми из прокатных или сварных профилей в форме уголка, швеллера, тавра, либо двутавра жестко соединяемых в углах.

Опираение всей конструкции на основание осуществляется через колонны, располагаемые, как правило, в углах конструкции. Размеры бункерных емкостей в настоящее время могут достигать 20 м в пла-

---

\*Опубликовано совместно с Д.О. Банниковым и Л.М. Рабером в ж-ле «Металлургическая и горнорудная промышленность», № 6, 2007.

не при общей высоте конструкции до 10 м и полезном объеме свыше 1000 м<sup>3</sup>. Подробное описание традиционной конструктивной схемы приведено во многих пособиях и справочниках [1].



*Рис. 1. Традиционная конструктивная схема с ребрами*

Подобная конструктивная схема применяется в настоящее время достаточно широко, что связано с относительной простотой ее внешней геометрической формы и необходимостью выполнения при изготовлении емкости только несложных технологических операций по прикреплению ребер жесткости и стыковке стенок в углах конструкции. Накопленный опыт эксплуатации бункерных емкостей свидетельствует о том, что до 50 % всех аварийных ситуаций обусловлены несовершенством применяемой конструктивной схемы [2]. При этом к ее основным недостаткам относятся:

— высокая неравномерность напряженно-деформированного состояния в различных зонах конструкции. Данный вопрос был исследован авторами и достаточно подробно изложен в монографии [3]. В ней, в

частности, выделяется ряд зон концентрации напряжений (места сопряжения ребер со стенкой и между собой, места сопряжения стенок), в которых напряжения могут на порядок превышать значения в иных участках конструкции. На практике это означает возникновение опасности малоциклового усталостного разрушения и ускоренный коррозионный износ этих зон;

- повышенный расход материала и повышенная деформативность конструкции, что обусловлено стремлением при проектировании уменьшить уровень напряжений в указанных зонах за счет увеличения поперечных сечений несущих элементов по всей конструкции. При этом деформативность конструкции изначально высокая, как показывают результаты выполненных исследований, снижается незначительно [3];

- большая протяженность сварных швов, ведущая к повышенной трудоемкости изготовления и пониженной надежности конструкции. Согласно имеющимся статистическим данным, разрушение сварных конструкций, к которым относятся и бункерные емкости, в 80 % случаев происходит по сварным швам;

- низкая ремонтпригодность конструкции, обусловленная необходимостью в случае повреждения проводить вырезку отдельного участка конструкции и приварку на его место (если имеется возможность) нового. При этом достаточно сложной оказывается задача ремонта и замены изношенной футеровки;

- затрудненность монтажа при значительных размерах конструкции. Это справедливо по отношению к емкостям размером в плане более 6–7 м, собираемых из отдельных укрупненных элементов. Наличие технологических допусков приводит к тому, что несоосность элементов может достигать 20 см и при этом она носит пространственный характер;

- расположение и пространственная ориентация узлов и соединений несущих элементов, способствующая появлению и развитию очагов интенсивной коррозии. Данные многочисленных обследований технического состояния конструкций, проводимые в последнее время, свидетельствуют о доминирующей роли коррозионных повреждений (до 40 %) [4].

Кроме этого, анализируя известные выражения для индикаторов механического подобия из теории подобия применительно к орereinным бункерным емкостям, можно прийти к важному заключению: при увеличении размеров конструкции в  $n$  раз напряжения в ней также возрастают в  $n$  раз, а прогибы в  $n^2$  раз

$$F_r \cdot L_r^{-2} = \sigma_r = E_r, \quad L_r = w_r,$$

где  $F_r$  – масштаб сил,  $L_r$  – масштаб линейных размеров,  $\sigma_r$  – масштаб

напряжений,  $E_t$  – масштаб модуля упругости,  $w_t$  – масштаб перемещений.

Это означает, что с увеличением размеров бункерной емкости необходимо уменьшать шаг расположения ребер жесткости по высоте, что в свою очередь приводит как к еще более неравномерному распределению напряжений в конструкции, так и к увеличению общей протяженности сварных швов. При этом необходимо устанавливать дополнительные ребра жесткости, являющиеся лишними с точки зрения обеспечения прочностных качеств конструкции и ведущие к дополнительным затратам стали на их выполнение.

Таким образом, проблема совершенствования существующей конструктивной схемы стальных бункерных емкостей для сыпучих материалов в направлении повышения их эксплуатационных качеств и надежности является в настоящее время достаточно актуальной. Ее решение позволило бы создавать как более экономичные по расходу материала сооружения, так и снизить эксплуатационные затраты на их обслуживание.

**Улучшенные конструктивные схемы.** Указанные выше недостатки применяемого конструктивного решения, постепенно выявляемые в ходе эксплуатации емкостных конструкций для сыпучих материалов, заставляли инженеров искать возможные пути улучшения ситуации. Однако этот процесс развивался недостаточно эффективно, что обусловлено рядом объективных сложностей, связанных с проектированием бункерных сооружений. К их числу, в первую очередь, относится сложность аналитического расчета такой конструкции, представляющей собой складчатую пространственную систему. Также не последнюю роль сыграли в этом и известные сложности, связанные с прогнозированием поведения сыпучей среды в замкнутых сосудах.

Тем не менее, специалистами Ленинградского отделения ЦНИИ Проектстальконструкция была обоснована возможность уменьшения материалоемкости конструкции за счет учета упругопластической работы ее несущих элементов [5]. Однако широкого распространения данное решение к настоящему времени не получило.

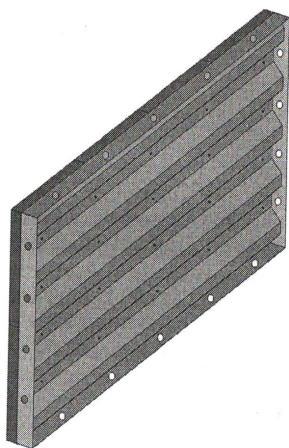
Специалистами проектного института Днепрпроектстальконструкция был высказан ряд идей, имевших отношение к ориентации подкрепляющих ребер жесткости относительно стенок конструкции. В частности, предлагалось ориентировать ребра жесткости нормально к стенкам емкости и не состыковывать их в углах, а также располагать их независимо на каждой стенке. Проведенные авторами исследования позволили установить, что устранения всех перечисленных выше недостатков существующей конструктивной схемы таким способом добиться не удастся [3].

В России одним из современных ученых в области бункеростроения

Х. Ягофаровым предложено располагать ребра жесткости не горизонтально, а вертикально с более активным включением в работу нижней наклонной части конструкции [6]. Однако, как указывает сам автор, подобное решение может быть с успехом применено к емкостям относительно небольшого размера, приблизительно до 4-5 м в плане. К тому же, проведенные авторами исследования позволили заключить, что и подобное конструктивное решение не позволяет устранить недостатки, характерные для традиционной схемы [3].

Из рассмотренного анализа ясно, что фактически все подобные варианты являются частичной модернизацией исходной реберной конструктивной схемы и, соответственно, им присущи практически те же самые недостатки, что и традиционной схеме. Поэтому, проблема улучшения конструктивной схемы к настоящему моменту не может считаться решенной и требует, по-видимому, внесения каких-либо принципиальных изменений в конструктивную схему.

**Панельная конструктивная схема.** В результате детального анализа особенностей работы и эксплуатации бункерных емкостей авторами предложено принципиально иное конструктивное решение. Его суть заключается в формировании конструкции емкости из отдельных панелей. Конструкция панели приведена на рис. 2.



*Рис. 2. Конструкция панели бункерной емкости: 1 – футеровочный слой; 2 – внутренний усиливающий лист; 3 – обвязочные планки; 4 – наружный профилированный лист*

Каждая отдельная панель представляет собой составной двухслойный элемент. Наружный слой является профилированным и предназначен для восприятия нагрузки от давления сыпучих материалов. Конструктивно он представляет собой стальной лист с усиливающими элементами. Наиболее технологичным решением в данном случае является использование цельных гофрированных стальных листов, хоро-

шо зарекомендовавших себя в практике эксплуатации [7]. По результатам предварительного теоретического анализа, выполненного авторами, достаточной оказывается толщина такого листа, равная 4–5 мм.

Заметим также, что в качестве внешнего слоя панели могут применяться и традиционные, но менее технологичные решения. Так, можно выполнять внешний слой из обычных плоских стальных листов, к которым прикрепляются сваркой (или болтами) ребра жесткости в виде замкнутых профилей или обычных прокатных профилей. При этом шаг ребер устанавливается расчетом. В этом случае панельная схема приближается к традиционной конструктивной схеме с ребрами жесткости.

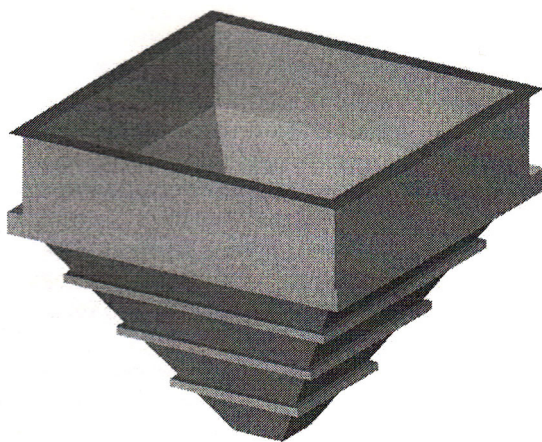
Внутренний слой панели представляет собой плоский стальной лист также небольшой толщины, порядка 3–4 мм. Необходимость его постановки обусловлена тем, что только наружного слоя может оказаться недостаточно для восприятия внешних нагрузок и обеспечения жесткости сооружения. Это особенно справедливо для бункерных емкостей, предназначенных для работы с тяжелыми рудными материалами. И, наоборот, в случае относительно легких сыпучих материалов внутренний слой может и не потребоваться. В таком случае конструкция панели упрощается и становится однослойной. Между собой наружный и внутренний слои панели соединяются с помощью промежуточных болтовых креплений, количество и несущую способность которых устанавливают соответствующим расчетом.

С внутренней стороны к панели прикрепляется футеровочный слой. Он может быть выполнен из современных полимерных материалов со сроком бессменной эксплуатации до 7–8 лет, например, резиновых футеровочных плит (РФП) небольших размеров, разработанных и успешно применяемых в практике предприятием УНИКТИ «ДИН-ТЕМ». В качестве футеровки могут применяться также и традиционные конструктивные решения, например, в виде прикрепления стальных лент. Болтовые крепления, служащие для соединения внешнего и внутреннего слоев панели, одновременно могут быть использованы и для крепления футеровочного слоя. При этом в случае применения РФП головка болта оказывается запрессованной в толщине плиты и не подвергается непосредственному контакту с сыпучим материалом. По внешнему периметру панель усиливается обвязочными элементами, представляющими собой стальные полосы толщиной 6–12 мм. Они прикрепляются на сварке к элементам панели и создают жесткий каркас, снижающий, согласно исследованиям авторов, сдвиговые напряжения по контуру. Кроме этого, обвязочные элементы являясь одновременно и усиливающими конструкцию ребрами жесткости.

Окончательно сформированная панель имеет вид, приведенный на

рис. 3. Размеры отдельной панели зависят от многих факторов, среди которых можно назвать вид хранимого сыпучего материала, геометрическую форму и размеры емкости, положение панели в конструкции, и определяются соответствующими расчетами. Так, например, в малых емкостях (до 3-3,5 м в плане), применяемых, в основном, для перегрузочных бункеров, вся боковая стенка конструкции может представлять собой отдельную панель; в более крупных емкостях, использующихся в доменном производстве, может потребоваться установка нескольких панелей по высоте сооружения. Заметим также, что при этом появляется возможность выполнять нижнюю пирамидальную часть емкости в виде ломаных очертаний, изменяя тем самым угол наклона к горизонту отдельных панелей. Это позволяет улучшать условия истечения материала из емкости и создает дополнительные жесткие контуры, заметно улучшающие работу конструкции. Обвязочные элементы при этом располагают повернутыми на необходимый угол, равно как и при стыковке панелей соседних стенок в углах бункерной конструкции. Форма панели может быть принята прямоугольной для формирования вертикальной части конструкции бункера (как приведено на рис. 3) или трапецевидной – для нижней пирамидальной части емкости. Однако, конструктивно они тождественны.

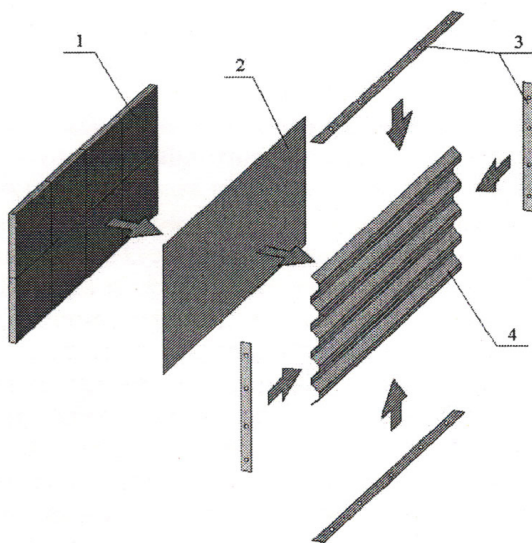
Соединение панелей между собой выполняется на высокопрочных болтах, диаметр которых на 3–4 мм меньше диаметра отверстий в обвязочных элементах панелей. Поскольку отличительная особенность



*Рис. 3. Общий вид плоской панели для бункерной емкости*

этих соединений состоит в том, что оно основано на трении, возникающем между соприкасающимися поверхностями собранных элементов в результате сильного контролируемого сжатия их болтами, ослабление деталей отверстиями не имеет практического значения. Создается монолитность соединения, которая сохраняется, как свидетельствует опыт [8] на протяжении всего периода эксплуатации конструкций.

Разработанная авторами панельная конструктивная схема для стальных бункерных емкостей приведена на рис. 4 (компьютерная модель).



*Рис. 4. Бункерная емкость из стальных панелей*

Такая схема оказывается лишенной большинства недостатков, присущих традиционной конструктивной схеме и, кроме этого, имеет ряд существенных преимуществ, среди которых следует отметить:

- возможность изготовления панелей в условиях завода, что существенно повышает их качество и позволяет снизить вероятность ошибок при монтаже;
- упрощение сборки бункерных емкостей на монтажной площадке;
- существенное уменьшение общей протяженности сварных швов в конструкции, особенно в случае применения цельных гофрированных листов;
- повышение ремонтопригодности конструкции, за счет возможности в короткие сроки и технологически несложно произвести замену поврежденной панели; возможность предварительной проработки кон-

структивного решения панели под различные виды сыпучих материалов и условий работы, включая наличие агрессивной внешней среды;

- возможность ориентации элементов внешнего слоя панели под углом к горизонту, что затрудняет скопление на его поверхности производственной пыли и снижает вероятность возникновения и развития коррозионных повреждений;

- повышение эстетических качеств конструкции емкости.

Кроме этого, для емкости, выполненной по панельной схеме, распределение напряжений в конструкции оказывается гораздо более равномерным, практически отсутствуют зоны их резкой концентрации, характерные для традиционной конструктивной схемы.

### **Основные выводы.**

Изложенный метод совершенствования конструкции бункерных емкостей путем использования стальных панелей, соединенных между собой высокопрочными болтами, свидетельствует о возможности существенного повышения уровня надежности и ремонтпригодности бункеров.

При этом, масса такой емкости не превышает массу бункера, выполненного по традиционной конструктивной схеме с ребрами жесткости. Более того, как показывают проведенные авторами исследования, имеются резервы для уменьшения массы конструкции на 30–35 %, однако, этот вопрос требует более детального исследования и связан с обоснованием возможности использования в практике стальных листов толщиной 2–3 мм.

Предложенное авторами техническое решение защищено патентом Украины (декларацийний патент 69817 А від 15.09.2004) и, по их мнению, может уже сейчас с успехом применяться для создания более экономичных со всех точек зрения, более надежных и долговечных стальных бункерных емкостей для сыпучих материалов.

### *Литература*

1. Справочник проектировщика. Металлические конструкции: В 3 т. / Под ред. В. В. Кузнецова. – Т. 2: Стальные конструкции зданий и сооружений. – М.: Изд-во АСВ, 1998. – 526 с.

2. Банников Д.О., Казакевич М.И. Основные причины аварий жестких стальных бункеров и низких силосов // *Металеві конструкції*. – 2002. – Т. 5. – № 1. – С. 59–66.

3. Банников Д.О., Казакевич М.И. Расчет пирамидально-призматических бункеров методом конечных элементов. – Днепропетровск: Наука и образование, 2003. – 150 с.

4. Джур Ю.Ф., Павлык П.В. Коррозионный износ металлоконструкций и сборного железобетона на объектах металлургических и горнообогатительных комбинатов. Продление сроков эксплуатации // Сб. трудов VIII Укр. науч.-практ. конференции «Металлические конструкции: взгляд в прошлое и будущее». – К.: Сталь. – С. 221–223.

5. Солодарь М.Б., Плишкин Ю.С., Кузнецова М.В. Металлические конструкции для строительства на севере. – Л.: Стройиздат, 1981. – 207 с.

6. Ягофаров Х., Собакин Н.Н. Основы теории проектирования листовых металлических конструкций. Пирамидально-призматический бункер. – Екатеринбург: УрГУПС, 2006. – 234 с.

7. Шестоперов В.Г. Строительство арочного моста из гофрированных металлических элементов // Транспортное строительство. – 2006. – № 2. – С. 16–17.

8. Рабер Л.М. Современное состояние и актуальные проблемы развития соединений на высокопрочных болтах // Металлические конструкции. – 2000. – Т. 3. – № 1. – С. 24–30.

### Введение.

Современные тенденции мирового мостостроения обусловлены разнообразием архитектурных форм и конструктивных решений. Следствием этого являются проблемы идеализации реальных мостовых сооружений, т.е. выбора расчетных схем, адекватно отображающих не только статическую, но и динамическую пространственную работу сооружений в поле многообразных нагрузок и воздействий различного происхождения.

Причины возможных отказов сооружений в целом или отдельных их частей при монтаже и в процессе эксплуатации очень часто обусловлены неадекватностью выбора расчетных схем. Отсюда очевидна необходимость оценки фактических значений параметров статической и динамической жесткости (с учетом частот внешних динамических воздействий и диссипативных свойств конструкций) уже на начальной стадии длительной эксплуатации. Именно на этой стадии роль мониторинга для уникальных, комплексно-многомерных, конструктивно неоднородных, композитных (сталь и железобетон, алюминий) и других сложных мостовых сооружений трудно переоценить, особенно для уточнения расчетных моделей, а также для оценки реакции мостов и отдельных их частей на внешние воздействия. Фундаментальные идеи динамической интегральной диагностики состояния конструкций как наиболее эффективного компонента мониторинга мостов были сформулированы в 70–80 гг. в работах [1–4]. Их дальнейшее развитие в работах [5–13] оказало позитивное влияние на решение реальных проблем обеспечения эксплуатационной надежности, как мостов, так и других классов сооружений.

В качестве убедительной иллюстрации эффективности мониторинга инженерных конструкций следует отметить как результаты многолетних исследований работы уникальных вантовых мостов – газопровода через р. Амударья в Афганистане пролетом 660 м в течение 1973–1991 гг. [1, 2] и аммиакопровода через р. Днепр на Украине пролетом 720 м с 1979 г. по настоящее время [4], так и мониторинг главного монумента Победы на Поклонной горе в г. Москве, организованный в 1995 г. и осуществляемый по настоя-

---

\* Опубликовано в ж-ле «Вестник мостостроения», № 1, 2008, Москва и в «Віснику Дніпропетровського національного університету залізничного транспорту ім. акад. Лазаряна», Вип. 21, 2008, Дніпропетровськ.

щее время, а также мониторинг вантово-арочного моста в Серебряном Бору в г. Москве (на стадии реализации проекта).

### **Диагностика эксплуатационной надежности.**

Проблема надежности конструкций по Н.С. Стрелецкому связана с критерием неразрушимости. Статистическая мера неразрушимости, названная им гарантией неразрушимости, связана с рассмотрением и анализом известного «треугольника Стрелецкого».

При всей совокупности проблем надежности не следует ни противопоставлять, ни формально сопоставлять вопросы теории надежности строительных конструкций и проблемы эксплуатационной надежности реальных инженерных сооружений. По своей сути это пересекающиеся множества. Причем, первое из них с полной уверенностью можно отнести к нечеткому множеству (fuzzy set) с размытыми границами, нечеткой логикой и набором лингвистических характеристик \*, коррелирующих с типом и назначением строительных конструкций, моделью той или иной теории надежности. Второе множество должно быть наполнено конкретным содержанием. В частности, необходимо сформулировать в приоритетном порядке критерии качества эксплуатационной надежности в зависимости от конструктивной формы сооружения, нагрузок и воздействий, а также целого ряда физических, экономических, экологических и иных факторов.

Из большого разнообразия признаков качества надежности к наиболее важным и существенным применительно к мостовым конструкциям следует отнести безотказность, расчетную долговечность, безопасность и ремонтпригодность. Под безотказностью понимают эксплуатационную надежность сооружений в целом и их отдельных элементов.

Расчетная долговечность – это расчетный срок службы (или ресурс) при заданной обеспеченности нагрузок такого вида, как ветровая, снеговая, сейсмическая, ветровое волнение и др.

---

\*Понятие «надежность» аналогично понятию «устойчивость» за последние 5–6 десятилетий стало столь перегруженным, что сформировало нечеткое лингвистическое множество (fuzzy linguistic set). Удачной иллюстрацией нечеткого лингвистического множества «надежность» может служить словосочетание «надежный человек» аналогично словосочетанию «морально устойчивый человек» из другого нечеткого лингвистического множества «устойчивость». Очевидно, эти словосочетания не имеют ничего общего ни с теорией надежности, ни с теорией устойчивости.

Безопасность конструкций предполагает также их надежность по отношению к биосфере, т.е. к жизни и здоровью людей или состоянию окружающей среды при учете таких факторов, как редкие стихийные воздействия, не предусмотренные условиями нормальной эксплуатации, грубые ошибки на стадиях проектирования, изготовления, строительства или эксплуатации конструкций.

Ремонтопригодность конструкций характеризует конструктивную форму с точки зрения условий нормальной эксплуатации и возможности выполнения ремонтно-профилактических, восстановительных работ в процессе эксплуатации.

Безопасность мостовых конструкций как один из признаков качества надежности определяется также санитарным критерием диагностики, т.е. характером воздействия вибраций на организм человека. Любая вибрация оценивается по её физиологическому или психологическому воздействию на человека: комфорт с предельным порогом его снижения; обеспечение профессиональной деятельности с предельной границей снижения производительности труда вследствие усталости при выполнении строительных или ремонтно-восстановительных работ на сооружении, обеспечение безопасности и здоровья, которому соответствует предел воздействия.

К основным параметрам вибрации, обуславливающим санитарный критерий диагностики, относятся частотный состав и уровни характерных кинематических факторов – виброперемещений, виброскоростей и виброускорений, направление, регулярность (повторяемость) вибрации, длительность воздействия на человека (доза) вибрации.

Большую роль в оценке эксплуатационной надежности, долговечности и безопасности конструкций играют натурные обследования, испытания и длительные наблюдения. Они служат достоверной основой диагностики мостовых конструкций. В то же время на особо важных и уникальных мостовых сооружениях необходимо организовать:

- постоянные натурные наблюдения с целью оказания технической помощи при эксплуатации;
- уточнения метеорологического и сейсмометрического микрорайонирования и соответствующих метеорологических и сейсмических воздействий – зонинг;
- изучение реакции мостовых конструкций на реальные воздействия;
- обнаружение явлений динамической и аэроупругой неустойчивости. Это позволяет обосновано диагностировать состояние кон-

струкций и в необходимых случаях разрабатывать мероприятия по повышению их надежности.

### **Критерии диагностики.**

Одним из доминирующих критериев диагностики конструкций являются их динамические свойства, выступающие в качестве интегральных оценок состояния. За последнее десятилетие разработаны современные эффективные методы и средства измерения динамических параметров конструкций, в том числе в инфранизкочастотном спектре (до 0,2 Гц), который характерен для большинства гибких пешеходных, а также висячих и вантово-балочных мостов различного назначения. К этим параметрам относят собственные частоты, формы и логарифмические декременты пространственных колебаний, параметры вынужденных колебаний. Сопоставляя эксплуатационные значения динамических параметров с их эталонными, паспортными значениями, теоретическими (расчетными) или экспериментальными, полученными при вводе сооружений в эксплуатацию, можно достаточно обосновано дать диагностику состояния конструкций. Динамическая интегральная диагностика мостовых конструкций аналогично диагностике судовой и авиастроительных конструкций или атомных реакторов играет важную роль в обеспечении надежности сооружений и опирается на динамические методы экспериментальных исследований.

Опыт эксплуатации, многолетних наблюдений и диагностики ряда уникальных инженерных сооружений показывает, что систематический анализ их состояния позволяет не только содержать сооружения на требуемом уровне, но и своевременно осуществлять мероприятия по обеспечению эксплуатационной надежности и расчетной долговечности. При этом необходимо отметить, что диагностика конструкций служит составной частью эксплуатации сооружений и не требует дополнительных эксплуатационных затрат, за исключением средств на привлечение (не реже одного раза в 5 лет) специализированных организаций для инструментальных измерений, геодезической съёмки и некоторых других видов работ.

Наряду с интегральными динамическими критериями диагностики состояния конструкций широкое распространение могут получить критерии, оценка которых дифференцируется поэлементно в результате выполнения комплекса инструментальных измерений. К этому комплексу следует отнести:

- измерение перемещений несущих элементов конструкций в вертикальной и горизонтальной плоскостях под действием силовых факторов, в том числе метеорологического воздействия, что

позволяет определить фактическую жесткость и деформативность элементов и сооружения в целом;

- измерение усилий и напряжений в узлах и элементах;
- геодезические измерения пространственного положения (геометрии) элементов и узлов сооружения.

### **Мониторинг мостов.**

Мониторинг мостовых конструкций должен получить широкое распространение для оценки их состояния в процессе эксплуатации. В самом обобщенном смысле мониторинг конструкций – это наблюдение, анализ и прогноз. При этом наблюдение предусматривает визуальное и инструментальное описание параметров нагрузок и воздействий различной природы, а также статическое и динамическое поведение сооружения в целом и отдельных его элементов в пространстве реальных нагрузок и воздействий, которое в данном случае трактуется как реакция конструкций на внешние воздействия. Анализ предполагает сравнение фактических параметров нагрузок и воздействий в реальных условиях эксплуатации с их расчетными значениями. Это необходимо для уточнения обеспеченности внешних воздействий и достоверности расчетных схем.

Составленный на основе наблюдений и оценок прогноз состояния конструкций имеет особое значение в мониторинге. Он позволяет обоснованно судить об остаточном ресурсе конструкций и в необходимых случаях активно влиять на повышение надежности в процессе эксплуатации. Достоверность прогноза обуславливается качеством программы наблюдений, оснащения приборами и аппаратурой, средств обработки и анализа результатов наблюдений.

Цель мониторинга – сбор и анализ информации о прочности, устойчивости, жесткости, надежности и расчетной долговечности конструкций, а также о комфорте людей в процессе монтажа и эксплуатации. Следовательно, наряду с традиционными признаками качества надежности – безотказность, безопасность, расчетная долговечность, ремонтпригодность – рассматриваются и экологические признаки, которые в первую очередь отождествляются с санитарными критериями уровня и дозы вибрации. Таким образом, проект мониторинга должен составляться в соответствии с необходимой целесообразностью уточнения реального поведения мостового сооружения в поле внешних воздействий и нагрузок и оценки остаточного ресурса в процессе эксплуатации. Мера необходимой целесообразности, определяющая масштабы мониторинга, должна определяться авторами проекта мостового соо-

ружения по согласованию с заказчиком, балансодержателем и эксплуатирующей организацией на основе индивидуальных специфических особенностей каждого сооружения и проблем его проектирования. Это обусловлено юридической ответственностью авторов проекта за безотказность, долговечность, безопасность и ремонтпригодность мостового сооружения в течение всего срока его существования. Мониторинг мостовых конструкций массового применения может быть основан на базе атласа отказов (дефектов), созданного при стендовых испытаниях эталонной конструкций, на которой можно моделировать различные типы дефектов, и динамическими испытаниями отслеживать влияние их на динамические параметры. При эксплуатации реальных конструкций по изменению динамических параметров по сравнению с паспортными значениями можно предсказывать тип дефектов (или группы дефектов).

При проектировании мостов сложных систем возникают вопросы, достоверные ответы на которые можно получить только при анализе фактической работы сооружения в поле реальных внешних воздействий и нагрузок.

Поэтому мониторинг большепролетных конструкций висячих и вантово-балочных мостов, а также особо важных сооружений осуществляется в индивидуальном порядке. Разрабатывается проект оснащения конструкций приборами и аппаратурой, средствами связи и коммуникаций для измерения динамических параметров работы сооружений в условиях реальных метеорологических, сейсмических, подвижных и технологических нагрузок. На основе накопленного опыта динамической интегральной диагностики состояния конструкций, в частности, мостов больших пролетов, можно утверждать: по характеру изменений собственных частот пространственных колебаний, их форм и логарифмических декрементов колебаний и сдвигов фаз тип дефекта устанавливается с высокой степенью достоверности. Особенности мониторинга при монтаже связаны с анализом изменений в процессе монтажа основных свойств конструкций, таких как жесткость, частоты собственных пространственных колебаний, виброускорения. Цель мониторинга начального периода эксплуатации – уточнение нагрузок и воздействий; проверка соответствия реальной работы конструкций принятым в расчетах допущениям; анализ реакций конструкций на действие реальных нагрузок и воздействий; корректировка в случае необходимости расчета конструкций, а также инструкции по эксплуатации. В процессе длительной эксплуатации мониторинг позволяет оценить:

- изменение динамических параметров сооружений и отдельных их элементов при эксплуатации;
- релаксационные и усадочные процессы в материалах конструкций;
- обоснованность назначений коэффициентов надежности по нагрузке, безопасности, условий работы.

В качестве иллюстрации системного подхода к созданию мониторинга мостового сооружения ниже приведены соответствующие мероприятия на стадии разработки концептуальных соображений к программе, техническому заданию и проекту мониторинга вантово-арочного моста через реку Москва в Серебряном Бору г.Москвы.

Данное уникальное по назначению и ответственности сооружение значительно отличается от традиционных мостов:

- парадоксом спектра собственных частот пространственных колебаний системы «пролетное строение-арка-ресторан», состоящим в том, что в связи с отсутствием в пролетном строении неподвижных опорных частей низшей частоте соответствуют продольные колебания пролетного строения. Это, в свою очередь, потребовало установки специальных поглощающих устройств в торце пролетного строения, превращая инженерное сооружение в механизм, что принуждает к обязательному и постоянному вниманию службы эксплуатации сооружения;

- чувствительностью усилий в вантах к неравномерным осадкам опор арки и пролетного строения;

- наличием ресторана как объекта общественно-социального назначения со скоплением большого количества людей и возможным специфическим их поведением (танцы, пляски и т.п.), требующего постоянного внимания по допустимым уровням и дозам вибрации с точки зрения дискомфорта посетителей и обслуживающего персонала;

- необходимостью иметь непосредственно на мосту (или вблизи) помещений для службы эксплуатации, неснижаемого запаса материалов и оборудования, приборов и аппаратуры для обеспечения безопасной эксплуатации:

- пролетного строения;
- арки;
- опорных частей;
- поглощающих устройств;
- ресторана (в т.ч. для ликвидации снега и гололедо-изморозевых отложений);
- средств эвакуации посетителей и обслуживающего персонала ресторана;

- при плановых осмотрах ответственных узлов, стыков, швов и соединений, элементов несущих и ограждающих конструкций сооружения.

Отличительной особенностью современного аспекта мониторинга мостов является переход от требований обеспечения надежности к требованию обеспечения всей совокупности потребительских качеств мостового сооружения. Поэтому программа мониторинга включает следующие вопросы:

1. Фактическая работа всех опорных частей и деформативность опор и на этой основе уточнение расчетной схемы (модели) сооружения.

2. Изучение реального спектра частот и соответствующих им форм пространственных колебаний сооружения в целом и отдельных его составных частей (парциальных частот):

- пролетного строения;
- арки;
- вант;
- ресторана
- в системе «пролетное строение – арка – ресторан».

3. Измерение усилий в вантах.

4. Изучение продольного (по длине моста) и вертикального (по высоте арки) профилей скорости ветра.

5. Изучение реакции сооружения в целом и его отдельных элементов на реальные ветровые воздействия, в т.ч. вибрации вант; выявления динамической и аэроупругой неустойчивости.

6. Изучение влияния метеорологических параметров на образование гололедо-изморозевых отложений на вантах и других элементах сооружения.

7. Анализ уровня отложений снега на элементах конструкций сооружения, в том числе, на вантах и на внешней поверхности ресторана.

8. Изучение температурных деформаций конструкций.

9. Анализ работоспособности эксплуатационных качеств поглощающих устройств.

10. Геодезическая съемка пространственного положения пролетного строения (продольного и поперечного профилей) и арки.

11. Изучение динамического поведения платформы пола ресторана в горизонтальной и вертикальной плоскостях и кручения относительно главных осей инерции ресторана при действии ветра, подвижной нагрузки на мосту, посетителей ресторана, в том числе уровней вибрации, с целью оценки дискомфорта посетителей и обслуживающего персонала.

12. Создание динамического паспорта сооружения.
13. Сопоставление реального ресурса сооружения и его составных частей (пролетного строения, арки, вант, поглощающих устройств, опорных частей, ресторана) с расчетной (проектной) долговечностью – 100 лет.

14. Разработка «Инструкции по эксплуатации» сооружения.

Особого внимания в процессе мониторинга заслуживает анализ эксплуатации ресторана и средств его жизнеобеспечения с точки зрения недружественного воздействия на окружающую среду. Кроме того, следует учитывать, что при эксплуатации мостового сооружения может возникнуть необходимость разработки и осуществления мероприятий по воспрепятствованию гнездования птиц в узлах конструкций арки. Многолетний опыт наблюдений за эксплуатацией мостов показывает, что это представляет реальную угрозу возникновения очагов ускоренной коррозии металла, а также иных неблагоприятных проявлений.

Технические средства мониторинга должны обеспечить выполнение цели во всех перечисленных выше аспектах и включают в себя:

- первичную аппаратуру и датчики;
- вторичную аппаратуру для регистрации информации;
- системы коммуникаций;
- микропроцессорную технику с современным программным обеспечением;
- энергетическое обеспечение функционирования измерительной и коммуникационной систем.

Функционирование технических средств мониторинга обусловливается наличием профессионально подготовленного персонала и специально оборудованного помещения.

Мониторинг впоследствии, в режиме длительной эксплуатации сооружения, должен стать составной и неотъемлемой частью функционирования службы эксплуатации с учетом постоянной модернизации всех технических средств мониторинга в связи с наиболее низким сроком их морального износа по сравнению с другими современными техническими средствами измерений и анализа.

### *Литература*

1. Казакевич М.И. Аэродинамическая устойчивость надземных и висячих трубопроводов. – М.: «Недра», 1977. – 200 с.
2. Казакевич М.И. Наблюдения за аэродинамическим поведением висячего перехода газопровода Афганистан – СССР Сб. ЦИНИС

Госстроя СССР, серия VIII, **Строительные конструкции. Строительная физика**, вып. 4, 1977. – М.: ЦНИИС Госстроя СССР, – с. 17–20.

3. Казакевич М.И. Диагностика металлических конструкций и ее роль в обеспечении надежности сооружений. В кн. «Развитие металлических конструкций: Работы школы Н.С. Стрелецкого». Под ред. В.В. Кузнецова, ЦНИИ проектстальконструкция. – М.: Стройиздат, 1987, с. 480–482.

4. Казакевич М.И. Аэродинамика мостов. – М.: «Транспорт», 1987. – 240 с.

5. Kazakevitch M.I., Kulyabko V.V. Stabilization of a Cable-Stayed Footbridge Proc. IABSE Symposium – 1995. San-Francisco, USA, 1995. – P. 1099-1104.

6. Kazakevitch M.I., Kulyabko V.V. Monitoring of Long-Span Steel Structures. IX Intern. Conf. on Metal Structures, Krakow, Poland, 26-30 June, 1995. – p. 245-250.

7. Казакевич М.И., Кулябко В.В. Введение в вибросэкологию зданий и сооружений. – Днепропетровск: ПГАСА, 1996. – 200 с.

8. Казакевич М.И. Динамическая интегральная диагностика металлоконструкций. Труды Международной конференции «Металлостроительство-96», Макеевка, 1996, т. 1. – с. 9–11.

9. Казакевич М.И., Кулябко В.В. Динамическая диагностика и мониторинг состояния строительных конструкций ответственных сооружений / Труды VI Украинской научно-технической конференции «Металлические конструкции». – Киев–Николаев, 1996, с. 84–86.

10. Казакевич М.И., Фукс Г.Б. Мониторинг мостов в процессе монтажа и при эксплуатации. Труды Международной конференции «Передовые технологии на пороге XXI века». ICAT'98. – М.: Часть 1, 1998. – с. 152–156.

11. Казакевич М.И., Кулябко В.В. Актуальные проблемы динамики сооружений. Металеві конструкції. УАМК, т. 1, № 1, 1998. – с. 65–74.

12. Горохов Е.В., Казакевич М.И., Шаповалов С.Н., Назим Я.В. Аэродинамика электросетевых конструкций / под ред. Е.В. Горохова, М.И. Казакевича. – Донецк, 2000. – с. 223–227.

13. Горохов Е.В., Казакевич М.И., Турбин С.В., Назим Я.В. Ветровые и гололедные воздействия на воздушные линии электропередач / под ред. Е.В. Горохова. – Донецк, 2005. – с. 278–282.

## ВИБРАЦИЯ И БЕРЕМЕННОСТЬ\*

*Памяти Владимира Александровича Пермякова, незабвенно-го друга и коллеги, посвящается эта короткая заметка. Именно эта проблема – влияние вибрации на человека – связана с нашей последней встречей в мае 1997 г. Я был в Киеве проездом, между поездом и самолетом. Он, как всегда, торопился на работу. И хотя наша встреча происходила на ходу, но как бы ни спешили мы оба, как много дел ни ждало нас в этот день, беседа наша была, как всегда, теплой, искренней и удивительно интересной, наполненной и грустью, и юмором, и высоким содержанием.*

*В.А. Пермяков был настоящим профессионалом, ему всегда были интересны научные проблемы самого широкого диапазона, поэтому для меня было неудивительно, что во время нашей беседы прозвучал его вопрос о вреде и пользе вибрации. Ему были интересны эти проблемы и он уговорил меня поделиться одной из них, весьма парадоксальной для нашего профессионального цеха. Ниже фрагментарно приведена эта статья как напоминание о незабываемом и столь рано ушедшем друге.*

Во взаимодействии двух важных явлений природы – вибрации и беременности – обнаруживается актуальный аспект экологической проблемы, который можно условно отнести к виброэкологии. На данном этапе обсуждения этой проблемы целесообразно более или менее четко очертить содержание этих понятий. Именно в контексте взаимодействия под вибрацией будем понимать колебательные возмущения окружающей человека среды техногенного происхождения, а под беременностью – развитие плода человека в околоплодном пространстве. Вибрация техногенной природы связана, как правило, с различными источниками достаточно длительного воздействия. Это различные транспортные средства, агрегаты и механизмы, передающие вибрацию через основания и фундаменты, ветровые воздействия, ветровые (поверхностные) волны и пр. Особый интерес представляет вибрация в спектре частот, охватывающем характерные значения частот для различных внутренних

---

\* Опубликовано в ж-ле «Металлические конструкции», УАМК, т. 14, № 3, 2008.

органов человеческого тела в положении «стоя», «сидя» и «лежа». Развитие плода человека в околоплодном пространстве отражается в существенном дополнении спектральной картины. Парциальные частоты плода характеризуются отрицательной эволюцией, т.е. снижением их до конечных значений, зависящих от:

- возраста плода;
- его пространственного положения в околоплодной среде;
- состояния околоплодной среды;
- направления вибрации.

Вместе с тем, начиная с 5-6 месяца беременности, когда появляются признаки формирования собственных внутренних органов плода, в спектре частот колебаний человека обнаруживаются значения, характерные для парциальных частот внутренних органов собственно плода. На этом этапе начинается формирование генетической памяти последнего уровня, в отличие от устойчивых генетических кодов наследственного происхождения. Именно этим можно объяснить издавна известные факты корреляции между воздействием вибрации в звуковом спектре частот («музыкальное воспитание») в процессе беременности и благоприобретенными музыкальными способностями родившегося человека \*.

Для количественных оценок воздействия вибрации на беременность чрезвычайно важными являются исследования спектра собственных частот человека на различных этапах беременности, а также собственно плода и развивающихся его внутренних органов. Современная виброизмерительная техника, компьютерная томография, ядерный магнитный резонанс и другие средства могут позволить не только получить такой спектр, но и проследить за количественными и качественными изменениями в развитии плода и отдельных его внутренних органов в вибрационном поле даже на молекулярном уровне.

Известные к настоящему времени реакции человека на вибрацию в различных диапазонах частот характеризуются самыми разнообразными физиологическими, механическими, психологическими проявлениями от дискомфорта и снижения производительности труда до близких к эпилептическим припадкам реакций. Важно отметить, что перечисленные реакции относятся к физически нормальным людям независимо от возраста, пола и профес-

---

\* Подтверждение этой мысли я недавно обнаружил в воспоминаниях гениального композитора С.С. Прокофьева. Со слов его матери, во время беременности она музицировала по 6 часов ежедневно, свои композиторские способности, раскрывшиеся в четырехлетнем возрасте, он связывал именно с этим фактом.

сии, в т.ч. к тренированным и высокоорганизованным спортсменам, летчикам, космонавтам.

Поэтому можно с уверенностью утверждать, что реакции человека с различными патологиями, в т.ч. и беременных отличаются значительно большей чувствительностью к вибрации. Мерой чувствительности при этом могут выступать пороговые значения виброускорения, виброускорения либо виброперемещения.

Существующие нормы и стандарты [1] распространяются, в основном, на человека при отсутствии патологии и содержат пороговые значения вибропараметров в зависимости от диапазонов частот вибрации, места пребывания человека и его положения, а также от характера вибрации (локальная или общая). Расширение существующих норм и стандартов для оценки вибрационного воздействия на беременных невозможно без проведения глубоких комплексных исследований, о которых было упомянуто выше. Однако можно перечислить ряд ограничений, которые призваны уменьшить вредное воздействие вибрации на развитие беременности и состояние плода:

- резко ограничить передвижение в транспортных средствах, оказывающих жесткое динамическое воздействие (езда по плохой дороге, по рельсовым стыкам и т.п.) или укачивания (самолет, автобус, корабль);

- родовспомогательные учреждения располагать вдали от предприятий с источниками вибрационного воздействия;

- родовспомогательные учреждения располагать только на нижних этажах высотных больничных комплексов;

- на период беременности воздерживаться от проживания и работы на верхних этажах жилых домов, учреждений, гостиниц и т.д.

Наряду с этим можно прогнозировать также и положительное влияние вибрации на процесс родов у беременных с некоторыми патологиями. В частности, современные достижения в области вибрационных технологий могут быть успешно применены для изменения положения плода в околоплодном пространстве, чтобы избежать хирургического или другого искусственного вмешательства.

### *Литература*

1. Казакевич М.И., Кулябко В.В. Введение в виброэкологию зданий и сооружений. – Днепропетровск, ПГАСА. 1996. – 200 с.

## **ПРИЛОЖЕНИЯ**

## ПЕРЕЧЕНЬ ОБЪЕКТОВ

участия в расчетах, конструировании, исследованиях по динамике, аэродинамике, стабилизации и в натурных испытаниях

1. Серия типовых проектов висячих трубопроводных переходов газопровода «Северное сияние».
2. Висячий мост через р. Амударья газопровода Афганистан-СССР пролетом 660 м.
3. Висячий мост через водохранилище Рогунской ГЭС пролетом 612 м (проект).
4. Вытяжная башня Норильского ГМК высотой 420 м (проект).
5. Пешеходный мост через р. Урал в г. Оренбурге.
6. Водонапорная башня большой емкости в г. Риге.
7. Пешеходный мост через р. Нерис в г. Вильнюсе.
8. Конкорс Казанского вокзала в г. Москве.
9. Висячее покрытие типа гипар летнего театра в г. Днепрпетровске.
10. Висячее покрытие типа гипар здания опытного производства ЦКБ «Нептун».
11. Лабораторно-вычислительный корпус предприятия п/я М-5769 в г. Москве.
12. Мембранное покрытие ангара в аэропорту г. Риге (108х60 м).
13. Главный монумент Победы на Поклонной горе в г. Москве.
14. **Висячие и вантовые мосты:**
  - серия типовых проектов висячих мостов для газопровода «Северное сияние» пролетами 100–300 м (проект);
  - вантовый мост теплотрассы в г. Гродно через р. Неман;
  - вантовый мост в г. Чапаевске через р. Урал;
  - вантовый мост в г. Риге через р. Даугаву пролетом 312 м;
  - вантовый мост в г. Тбилиси через р. Вере пролетом 85 м;
  - висячий мост в г. Бауска через р. Муса пролетом 85 м;
  - вантовый мост в г. Вильнюсе через р. Нерис;
  - висячий мост аммиакопровода через р. Днепр пролетом 720 м;
  - вантовый мост в г. Ульяновске через р. Волгу пролетом 2х407 м (проект);
  - вантовый мост в г. Днепрпетровске через р. Днепр пролетом 320 м (проект);

- вантовый мост у г. Сургуте через р. Обь пролетом 408 м (экспертиза);
- висячий мост в г. Атырау через р. Урал;
- вантовый метромост в г. Киеве через р. Днепр пролетом 271 м;
- вантовый мост в г. Салехарде через р. Шайтанка пролетом 100м;
- вантовый мост в г. С.-Петербурге через р. Неву пролетом 330м;
- вантово-арочный мост в г. Москве через р. Москву пролетом 409 м;
- вантовый мост на остров Русский через пролив Босфор Восточный в г. Владивостоке пролетом 1104 м.

## ПЕРЕЧЕНЬ ОБЪЕКТОВ

научного и/или экспертно-консультационного сопровождения

1. Главный корпус предприятия п/я Р-6511.
2. Купол Храма Христа Спасителя в г. Москве на стадии монтажа.
3. Трансформируемое перекрытие чаши Большой спортивной арены в Лужниках в г. Москве.
4. Филиал Большого театра в г. Москве.
5. Мембранное покрытие Универсального Зрелищно-Спортивного Комплекса на проспекте Мира в г. Москве.
6. Гидроизоляция покрытия стилобата Храма Христа Спасителя.
7. Типовой проект стальных трубчатых опор рекламных щитов в г. Москве.
8. Обрушение навеса автостоянки супермаркета METRO в г. Москве.

## ПЕРЕЧЕНЬ МОНОГРАФИЙ

1. Аэродинамическая устойчивость надземных и висячих трубопроводов. – М.: Недра, 200 с. – **1977**.
2. Проектирование металлических конструкций надземных промышленных трубопроводов. – К.: Будівельник, 144 с. – **1980**.  
(совместно с Любиным А.Е.); второе издание – **1989**.
3. Аэродинамика висячих покрытий. – К.: Будівельник, 104 с. – **1983**.  
(совместно с Мелашвили Ю.К., Сулаберидзе О.Г.)
4. Аэродинамика плохобтекаемых тел. – Днепропетровск, ДГУ. – 116 с. – **1983**. (совместно с Графским И.Ю. )
5. Гашение колебаний мостовых конструкций. – М.: Транспорт, 134 с. – **1983**. (совместно с Закорой А.Л.)
6. Аэродинамика мостов. – М.: Транспорт, 240 с. – **1987**.
7. Aerodynamika dachów wiszących. – Warszawa, Arkady, 96 с. – **1988**.  
(совместно с Мелашвили Ю.К., Сулаберидзе О.Г.)
8. Введение в виброэкологию зданий и сооружений. – Днепропетровск, ПГАСА – **1996**. (совместно с Кулябко В.В.)
9. Problemy Interferencji Aerodynamicznej Dwóch Walców Kołowych. – Warszawa, 100 s. – **1997**. (Ewa Błazik-Borowa, Andrzej Flaga).
10. Динамика систем с двумя потенциальными ямами. – Днепропетровск, ГИД, Арт-Пресс, 160 с. – **2000**. (совместно с Волковой В.Е.)
11. Аэродинамика электросетевых конструкций. – Донецк, ДГАСА, 336 с. – **2000**. (совместно с Гороховым Е.В., Шаповаловым С.Н., Назимом Я.В.)
12. Фазовые траектории нелинейных динамических систем. Атлас. – Днепропетровск, Наука и образование, 94 с. – **2002**.  
(совместно с Волковой В.Е.)
13. Расчет пирамидально-призматических бункеров методом конечных элементов. – Днепропетровск. Наука и образование, 150 с. – **2003**.  
(совместно с Банниковым Д.О.)
14. Ветровые и гололедные воздействия на воздушные линии электропередачи. – Донецк, ДГАСА, 348 с. – **2005**. (совместно с Гороховым Е.В., Турбиным С.В., Назимом Я.В.)

# СОДЕРЖАНИЕ

<b>ПРЕДИСЛОВИЕ .....</b>	<b>4</b>
 <b>РАЗДЕЛ 1. ТЕОРИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА</b>	
К ВОПРОСУ О БИГАРМОНИЧЕСКОМ ВОЗМУЩЕНИИ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ.....	9
ЧАСТОТЫ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ СИСТЕМ С ПЕРЕСКОКОМ.....	21
ГАРМОНИЧЕСКОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ СИСТЕМ С ПЕРЕСКОКОМ.....	25
БИГАРМОНИЧЕСКОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ СИСТЕМ С ПЕРЕСКОКОМ.....	36
ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ХЛОПАЮЩИХ МЕМБРАН.....	43
ВЛИЯНИЕ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ НА ХАРАКТЕР УСТАНОВИВШИХСЯ КОЛЕБАНИЙ СИСТЕМ С НЕЛИНЕЙНОЙ ВОССТАНАВЛИВАЮЩЕЙ СИЛОЙ.....	49
ПРЕДСКАЗУЕМЫЕ АТТРАКТОРЫ В НЕЛИНЕЙНЫХ НЕСИММЕТРИЧНЫХ СИСТЕМАХ.....	54
ЭВОЛЮЦИИ ОБЛАСТЕЙ ПРИТЯЖЕНИЯ В НЕЛИНЕЙНОЙ НЕСИММЕТРИЧНОЙ СИСТЕМЕ ДУФФИНГА.....	59
ОБЛАСТИ ПРИТЯЖЕНИЯ УСТОЙЧИВЫХ РЕЖИМОВ КОЛЕБАНИЙ СИММЕТРИЧНЫХ СИСТЕМ С ПЕРЕСКОКОМ.....	63
MODELLING OF THE FORCED OSCILLATIONS ON THE HYBRID COMPUTING COMPLEXES.....	68
THE APPLICATION OF HYBRID MODELLING TO INVESTIGATION OF NON-LINEAR OSCILLATIONS.....	75
ПРЕДИСЛОВИЕ.....	84
ПРИЛОЖЕНИЕ. КРАТКИЙ АНАЛИЗ РАБОТ ПО ДИНАМИКЕ ГИБКИХ ЭЛЕМЕНТОВ.....	87
IDENTIFICATION OF NON-LINEAR DYNAMIC SYSTEMS.....	102
APPLICATION OF QUALITATIVE METHODS TO RESEARCH OF POLYHARMONIC OSCILLATIONS.....	111
ОТОБРАЖЕНИЯ ФАЗОВЫХ ТРАЕКТОРИЙ В АНАЛИЗЕ ДИНАМИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ХАОТИЧЕСКИХ СИСТЕМ.....	121
PHASE TRAJECTORY VARIATIONS IN DYNAMIC SYSTEMS IN AN EXPANDED PHASE SPACE.....	128
APPLICATION OF THE EXTENDED PHASE TRAJECTORIES TO IDENTIFICATION OF CHAOTIC SYSTEMS.....	139

<b>РАЗДЕЛ 2. ГИДРОАЭРОДИНАМИКА. ТЕОРИЯ. ЭКСПЕРИМЕНТ. ПРАКТИКА</b>	
АЭРОУПРУГИЕ КОЛЕБАНИЯ ТЕЛА КРУГЛОЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ	
В ПОТОКЕ ВОЗДУХА.....	152
ГАШЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ НАДЗЕМНЫХ ТРУБОПРОВОДОВ	
В ВЕТРОВОМ ПОТОКЕ.....	163
АЭРОДИНАМИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ МОДЕЛИ	
ОТСЕКА ВАНТОВОГО ПЕРЕХОДА ГАЗОПРОВОДА ЧЕРЕЗ АМУДАРЬЮ.....	168
К МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ СИНХРОНИЗАЦИИ	
АЭРОУПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ КРУГЛОЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ТЕЛ	
В ВЕТРОВОМ ПОТОКЕ.....	175
ОБЕСПЕЧЕНИЕ АЭРОДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ	
СТАЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ И МОСТОВ.....	183
АЭРОДИНАМИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ	
ОДНОСТОЕЧНОГО ПИЛОНА В РАВНОМЕРНОМ ПОТОКЕ.....	189
ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ	
АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИИ	
СОВРЕМЕННЫХ ВАНТОВЫХ МОСТОВ.....	197
АЭРОДИНАМИЧЕСКАЯ ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ	
ДВУХ КРУГОВЫХ ЦИЛИНДРОВ.....	205
СУБГАРМОНИЧЕСКИЙ ЗАХВАТ АЭРОУПРУГИХ АВТОКОЛЕБАНИЙ	
КРУГОВОГО ЦИЛИНДРА.....	213
ИДЕНТИФИКАЦИЯ УЛЬТРАГАРМОНИЧЕСКИХ АВТОКОЛЕБАНИЙ	
ПРИ АЭРОДИНАМИЧЕСКОЙ ИНТЕРФЕРЕНЦИИ ТАНДЕМА	
КРУГОВЫХ ЦИЛИНДРОВ В СКОШЕННОМ ПОТОКЕ.....	217
АЭРОУПРУГИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЭЛЕМЕНТОВ МОСТОВЫХ КОНСТРУКЦИЙ.....	222
АЭРОДИНАМИЧЕСКОЕ ДЕМПФИРОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ	
ПЛОХООБТЕКАЕМЫХ ТЕЛ, ОБУСЛОВЛЕННЫХ ВИХРЕВЫМ ВОЗБУЖДЕНИЕМ.....	231
THE AERODYNAMIC PROBLEMS OF CABLE-STAYED BRIDGES	
UNDER ERECTION.....	236
ANALYTICAL SOLUTION FOR GALLOPING OSCILLATIONS.....	257
THE PROBLEMATIC TASKS OF AERODYNAMICS OF STRUCTURES ABSTRACT.....	266
THE ADMISSIBLE FLEXIBILITY OF STRUCTURE ELEMENTS IN THE FLOW.....	277
THE AERODYNAMICS OF A HANGAR MEMBRANE ROOF.....	282
THE INTERACTION OF WIND WITH THE ICE-COVERED	
STRUCTURAL ELEMENTS.....	296
СТАБИЛИЗАЦИЯ ВАНТ ПРИ ДЕЙСТВИИ ВЕТРА И ПОДВИЖНЫХ НАГРУЗОК.....	304
THE OFFSHORE STRUCTURES STABILIZATION UNDER	
THE SURFACE WAVE EFFECTS.....	316
СТАБІЛІЗАЦІЯ КОНСТРУКЦІЙ У ВІТРОВОМУ ПОТОЦІ.....	322
АЭРОДИНАМИЧЕСКАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ КОРОБЧАТЫХ МОСТОВ.....	342
ГЕНЕРИРОВАНИЕ ВЕТРОВЫМ ПОТОКОМ ИНФРАЗВУКОВЫХ ВОЛН	
В ПРИЗЕМНОМ СЛОЕ АТМОСФЕРЫ.....	347
АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ АЭРОДИНАМИКИ ВЫСОТНЫХ ЗДАНИЙ.....	353
ХАОС В АЭРОУПРУГИХ СИСТЕМАХ.....	367

### **РАЗДЕЛ 3. МОСТЫ И КОНСТРУКЦИИ. ДИНАМИКА. ВИБРОЭКОЛОГИЯ**

НАТУРНЫЕ ИСПЫТАНИЯ ВИСЯЧЕГО ТРУБОПРОВОДНОГО МОСТА ЧЕРЕЗ р. ДНЕПР ПРОЛЕТОМ 720 МЕТРОВ.....	380
РЕАКЦИЯ ВИСЯЧЕГО ПЕРЕХОДА ПРОЛЕТОМ 720 М НА РЕАЛЬНОЕ ВЕТРОВОЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ.....	390
К НОРМИРОВАНИЮ УРОВНЯ ДОПУСТИМЫХ ВИБРАЦИЙ В СИСТЕМЕ «ПЕШЕХОД–МОСТ».....	401
ИНСТРУМЕНТАЛЬНЫЕ НАБЛЮДЕНИЯ ЗА РАБОТОЙ ВАНТОВЫХ ТРУБОПРОВОДНЫХ МОСТОВ БОЛЬШИХ ПРОЛЁТОВ.....	415
ДИАГНОСТИКА МЕТАЛЛИЧЕСКИХ КОНСТРУКЦИЙ И ЕЕ РОЛЬ В ОБЕСПЕЧЕНИИ НАДЕЖНОСТИ СООРУЖЕНИЙ.....	423
STABILIZATION OF A CABLE-STAYED FOOTBRIDGE.....	427
АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ ДИНАМИКИ СООРУЖЕНИЙ.....	433
ДИНАМИЧЕСКАЯ ДИАГНОСТИКА КОНСТРУКЦИИ СТАЛЬНОГО БУНКЕРА.....	453
IMPROVEMENT OF STEEL BUNKER DESIGNING METHOD.....	460
DYNAMIC PROPERTIES OF STEEL BUNKERS.....	471
ОСНОВНЫЕ ПРИЧИНЫ АВАРИЙ ЖЕСТКИХ СТАЛЬНЫХ БУНКЕРОВ И НИЗКИХ СИЛОСОВ.....	478
НОВАЯ КОНСТРУКЦИЯ БУНКЕРНОЙ ЕМКОСТИ ИЗ СТАЛЬНЫХ ПАНЕЛЕЙ.....	492
СОВРЕМЕННЫЕ АСПЕКТЫ МОНИТОРИНГА МОСТОВ.....	502
ВИБРАЦИЯ И БЕРЕМЕННОСТЬ.....	512
 <b>ПРИЛОЖЕНИЯ.....</b>	 515

**Казакевич М.И.**

**К 14** Избранное: монография / М.И. Казакевич. – Днепропетровск, 2009. – 524 с.

ISBN 978-966-8050-58-9

Сборник избранных статей и докладов составлен автором на основе собственных предпочтений, отражая объективную оценку приоритетов в его многолетней научной деятельности. Монография охватывает довольно широкий круг вопросов, включая как фундаментальные работы автора по теории нелинейных колебаний, так и работы по ряду актуальных прикладных задач, затрагивающие теоретические и практические вопросы аэроупругой неустойчивости гибких конструкций в ветровом потоке. Кроме этого, в сборник вошли ряд работ по смежным проблемам – стабилизация морских платформ, инфранизкочастотные ветровые колебания.

УДК 024.01+624.04+533.6  
ББК 38.112+38.5+22.253.3

Наукове видання

**Казакевич Міхаїл Ісаакович**

**ИЗБРАННОЕ**

Монографія

(російською, українською та англійською мовами)

Комп'ютерна верстка Г.М. Хомич

---

Підписано до друку 25.04.2009. Формат 60×84/16. Папір офсетний. Ум. друк.  
арк. 28,42. Тираж 100 пр. Зам. № .

---

Віддруковано у видавництві «Нова ідеологія».  
49044, м. Дніпропетровськ, вул. Гоголя, 15а.  
Свідоцтво ДК № 191 від 20.09.2000 р.