

624.04/07  
187

И. И. Лучко, О. С. Распопов

# Будівельна механіка стержневих систем

Міністерство освіти і науки України  
Дніпропетровський національний університет  
залізничного транспорту  
імені академіка В. Лазаряна

**Й. Й. Лучко, О. С. Распопов**

# **Будівельна механіка стержневих систем**

**За редакцією д. т. н., проф. Й. Й. Лучка**

*Затверджено Міністерством освіти і науки України як підручник  
для студентів вищих навчальних закладів (лист Міністерства освіти і науки  
України №1/11-3789 від 19.03.2014 р.)*



Львів  
КАМЕНЯР  
2014

УДК 69.04  
ББК 38.112я73  
Л87



У виданні висвітлюються основні питання першої частини фундаментального курсу «Будівельна механіка» для університетів технічного (інженерного) спрямування, пов'язаної із методами розрахунку статично визначуваних та статично невизначуваних стержневих систем і методом скінченних елементів, який дає можливість числовими методами розраховувати практично довільні типи конструкцій.

Розраховане на студентів та викладачів вищих навчальних закладів, наукових, інженерно-технічних працівників і проєктувальників будівельних спеціальностей.

#### Рецензенти:

- Лізунов П. П.**, д. т. н., професор,  
проректор з наукової роботи,  
заступник директора НДІ будівельної механіки  
(Київський національний університет будівництва і архітектури);
- Піскунов В. Г.**, д. т. н., професор,  
завідувач кафедри опору матеріалів і машинознавства  
(Національний транспортний університет);
- Сулим Г. Т.**, д-р фіз.-мат. наук, професор,  
завідувач кафедри механіки  
(Львівський національний університет ім. Івана Франка);
- Ясній П. В.**, д. т. н., професор,  
завідувач кафедри будівельної механіки  
(Тернопільський національний технічний університет ім. І. Пулюя)

*Друкується за постановою вченої ради  
Дніпропетровського національного університету  
залізничного транспорту ім. академіка В. Лазаряна  
(протокол №3 від 28 жовтня 2013 р.)*

## ПЕРЕДМОВА

Питання розрахунку статично визначуваних та статично невизначуваних стержневих систем традиційно становить першу та другу частини загального курсу із дисципліни “Будівельна механіка”. Підручник написано відповідно до програми навчання студентів напряму “Будівництво” вищих навчальних закладів. Під час складання підручника ставилася мета – допомогти студентам освоїти основи будівельної механіки та методи розрахунку найпростіших статично визначуваних стержневих конструкцій, допомогти студентам зрозуміти роботу стержневих систем та навчитися інтуїтивно оцінювати розподіл зусиль у простих конструкціях.

Автори вважають, що під час вивчення цього предмета студент спочатку повинен оволодіти основними традиційними класичними методами і способами розрахунку конструкцій на прикладі ручних розрахунків найпростіших систем, а після отримання навиків оцінювання розподілу зусиль засвоїти застосування програмного забезпечення у розрахунках, універсальні методи будівельної механіки, метод скінчених елементів, граничних елементів тощо, що є предметом дослідження другої і третьої частин будівельної механіки і низки пов’язаних із нею спецкурсів.

Статично визначувані стержневі системи є класом простих задач, які розв’язуючи, їх нескладними методами, дають можливість зрозуміти і відчувати механізм розподілу внутрішніх зусиль і переміщень для різних типів стержневих систем від різноманітних типів навантаження. Саме на цьому етапі вивчення загального курсу студенти повинні навчитися відчувати роботу конструкції, що для інженерів є дуже важливо.

Теоретичні положення курсу по тексту ілюструються прикладами. Після вивчення кожного розділу студенту пропонуються питання для самоперевірки і додаткові завдання.

Матеріали, що містяться у підручнику, протягом багатьох років використовувалися під час викладання курсу на кафедрі рухомого складу і колії Дніпропетровського національного університету залізничного транспорту імені академіка В. Лазаряна.

Автори спільно працювали над усіма розділами підручника і одинаково відповідальні за його зміст.

## ВСТУП

Довгий час людство не мало у своєму розпорядженні ніяких методів розрахунку споруд. Не дивлячись на це, вдавалося споруджувати величезні (грандіозні) і довершені в конструктивному відношенні пам'ятники архітектури. Це залежало від особливого дару зодчих, котрі інтуїтивно відчували роботу споруд і вміли безпомилково знаходити потрібні розміри елементів будівель. Нездарма з давніх часів архітектура, яка включила будівельну справу, вважалася одним із видів мистецтва. Велике значення мало також накопичення досвіду будівництва, в окремих випадках дорогою ціною обвалених невдало збудованих споруд.

Успіхи механіки, починаючи з праць Г. Галілея, створили підвалини для розробки розрахунків на міцність. З часом наукові методи розрахунку стали все більше і більше задовольняти вимоги практики і в значній мірі потістили інтуїцію при проектуванні. Можна сказати, що всі сучасні споруди побудовані на підставі строгого математичного розрахунку, без такого розрахунку їх неможливо було б здійснити.

Потрібно відзначити, що будівельна механіка як наука виділилась із загальної механіки у другій половині XIX сторіччя. Головними об'єктами її вивчення були стержневі конструкції, зокрема ферми. Тоді і були запропоновані для статично визначуваних ферм різні способи розрахунку.

Отже, можна сказати, що будівельна механіка у широкому сенсі – це наука про методи розрахунку споруд на міцність, жорсткість і стійкість. До неї відносяться такі дисципліни, як опір матеріалів, будівельна механіка пластин і оболонок, теорія пружності, теорія пластичності і повзучості.

Сьогодні створило новий напрям будівельної механіки – теорію кінцевих елементів, в якій методи розрахунку дискретних і континуальних об'єктів об'єднуються на основі загального підходу до розрахунку різних будівельних споруд (систем).

Структурно підручник «Будівельна механіка стержневих систем» складається із трьох частин, які об'єднують 18 розділів.

**Перша частина** стосується розрахунку статично визначуваних стержневих систем і включає у себе 8 розділів (від першого до восьмого).



**Перший розділ** окреслює предмет курсу «Будівельна механіка», подає історію розвитку цієї інженерної науки і дає виклад основних положень (поняття розрахункової схеми, їхньої класифікації, опор та видів навантажень і основ кінематичного аналізу споруд).

**Другий розділ** висвітлює характерні особливості статично визначуваних систем. Тут йдеться про розподіл зусиль в основних та додаткових елементах таких систем, методах визначення опорних реакцій, внутрішніх зусиль у них, побудови епюр зусиль, згинальних моментів, поздовжніх і поперечних сил.

**Третій розділ** подає виклад загальних методів багатопрогонних шарнірних балок. Тут йдеться про основні характеристики багатопрогонних шарнірних балок, про розрахунок багато-прогону шарнірної балки у разі дії нерухомого навантаження та розрахунок статично визначуваних балок, осьова лінія якої має вигляд ламаної. Це питання рідко порушується у навчальній літературі, хоча такі елементи архітектори використовують щораз частіше.

**У четвертому розділі** висвітлюються методи визначення внутрішніх зусиль від рухомого навантаження. Тут подано класифікацію видів рухомого навантаження і викладено способи моделювання розміщення їхнього впливу на розрахунковій схемі споруди. Велику увагу приділено поясненню поняття лінії впливу, статичного методу побудови ліній впливу, ліній впливу опорних реакцій та внутрішніх зусиль у поперечних перерізах одно- і багатопрогонних балок. Продемонстровано методику визначення внутрішніх зусиль за лініями впливу, визначення розрахункового розташування рухомого навантаження на споруді, за яким треба здійснювати розрахунок споруди на міцність. Окрему увагу приділено кінематичному методу побудови ліній впливу.

**Розділ п'ятий** стосується аналізу тришарнірних арок і рам. Йдеться про основні поняття, які використовують при вивченні таких типів споруд, аналітичний спосіб визначення опорних реакцій та внутрішніх зусиль і побудову епюр внутрішніх зусиль у тришарнірних арках. Звернуто увагу на відмінності у «роботі» тришарнірних арок і балок, на поняття пошуку раціональної форми осі арки, споруд. Викладено схему розрахунку тришарнірних рам і побудову ліній впливу опорних реакцій та внутрішніх зусиль подібних спорудах.

**Шостий розділ** подає виклад методів силового аналізу балкових і плоских ферм. Йдеться не лише про основні поняття і означення, які використовують при описі таких структурних елементів, а й про умови, які гарантують статичну визначуваність і незмінюваність плоских ферм. Багато місця приділено способам побудови ліній впливу зусиль у стержнях балкових, шпренгельних і складених ферм.

**Сьомий розділ** містить виклад методів розрахунку розпірних ферм, а також комбінованих і вантових систем. Тут також вивчається як нерухоме, так і рухоме навантаження.

У **восьмому розділі** увагу зосереджено на визначенні переміщень у пружних стержневих системах. Тут подано виклад варіаційного принципу Лагранжа, теореми взаємності Бетгі–Максвелла, отримано загальну формулу для обчислення переміщень у плоских стержневих системах, звернуто увагу на формулу Мора і способи обчислення відповідних інтегралів. Тут же подано матричну форму виразу для обчислення переміщень, особливо корисну при аналізі складних структур і при застосуваннях комп'ютерної техніки.

*Друга частина* книги стосується методів розрахунку статично невизначуваних стержневих систем (розділи 9–15). У **розділі дев'ятому** подано загальну схему застосування методу сил до розрахунку статично невизначуваних рам. Схема викладу цілком класична. Викладено також поняття ортогоналізації епюр та спосіб реалізації цього. У двох наступних розділах коротко викладено аналогічний метод розрахунку арок (**розд. 10**) і ферм (**розд. 11**).

Нерозрізні статично невизначувані арки докладно вивчаються у **розділі дванадцятому**. Тут основна увага приділена рівнянню трьох моментів, методу моментних фокусів, огинаючим епюрам згинальних моментів, урахуванню переміщення опорних в'язей і зовнішніх навантажень.

**Розділ тринадцятий** викладає застосування методу переміщень у розрахунку стержневих статично невизначуваних систем. **Розділ чотирнадцятий** висвітлює методи розрахунку критичного навантаження, яке приводить до втрати стійкості за Ейлером статично невизначуваних стержневих систем (окремих простих і складених стержнів, пружних рам, ферм).

У **розділі п'ятнадцятому** для розрахунку стержневих систем з матеріалів із яскраво вираженою площадкою пластичності за до-

помогою методу граничної рівноваги використано поняття пластичного шарніра. Тут цей метод пояснено на прикладах застосування до однопрогонової балки і опертої по контуру плити. Хоча останній приклад і дещо випадає із загальної тематики книги (у назві йдеться виключно про стержневі системи), однак цей приклад є дуже повчальним, дає можливість глибше зрозуміти поняття пластичного шарніра і разом із цим сутність методу граничної рівноваги, застосовуваного у теорії пластичності при знаходженні граничного навантаження тіл з ідеально пластичних матеріалів.

У *третьій частині* (розділи 16–18) йдеться про застосування методу скінченних елементів у будівельній механіці стержневих систем. У **шістнадцятому розділі** викладено загальні поняття та означення методу скінченних елементів (МСЕ) та методологію його застосування до аналізу стержневих систем. Потреба у цьому розділі обумовлена тим, що попередні розділи книги давали студентам можливість на прикладах застосування до найпростіших (базових) елементів будівельних конструкцій простих методів буквально у ручному режимі (з олівчиком у руках) зрозуміти сутність методів, отримати навички застосування таких методів і завдяки здобутому досвіду навчитися внутрішньо, вже на інтуїтивному рівні, відчувати «роботу» конструкції. У **розділах сімнадцятому та вісімнадцятому** продемонстровано технологію застосування МСЕ до побудови дискретних моделей, побудови матриць жорсткості, визначення вузлових переміщень та внутрішніх зусиль у стержневих системах.

Істотну роль у доведенні рукопису книги до рівня підручника відіграли зауваження рецензентів – докторів технічних наук, професорів П. П. Лізунова, В. Г. Піскунова, П. В. Яснія, доктора фізико-математичних наук, професора Г. Т. Сулима, яким автори висловлюють глибоку вдячність. Особлива подяка доктору технічних наук, професору М. І. Підгурському за його ретельну вичитку матеріалів книги.

Автори книжки врахували всі зауваження рецензентів і внесли необхідні корективи у текст видання. Висловлюємо вдячність видавничим працівникам, які разом з авторами доклали чимало праці, щоб зробити книгу сучасною, відповідною до потреб часу. Шановний читачу! Ми вкрай зацікавлені у ваших коментарях і пропозиціях. Надсилайте їх за електронною адресою: [vyd@kamenyar.com.ua](mailto:vyd@kamenyar.com.ua).



# Частина 1. РОЗРАХУНОК СТАТИЧНО ВИЗНАЧУВАНИХ СТЕРЖНЕВИХ СИСТЕМ

## 1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ І ЗАВДАННЯ БУДІВЕЛЬНОЇ МЕХАНІКИ ТА КІНЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ СПОРУД

### 1.1. Предмет і завдання будівельної механіки.

#### Короткий історичний нарис розвитку будівельної механіки

Будівельна механіка належить до загальноінженерних наук.

Отже, будівельна механіка – це наука про методи розрахунку зусиль і переміщень елементів споруд, що перебувають під впливом силових та деформаційних навантажень. Вона спирається на закони та положення курсів теоретичної механіки, опору матеріалів, теорії пружності, пластичності та повзучості, вивчає принципи і методи розрахунку споруд на міцність, жорсткість і стійкість.

Ще римський архітектор Марк Вітрувій (1 ст. до нашої ери) в своєму трактаті "Десять книг про архітектуру" – єдиному, античному трактаті з цього питання, – який дійшов до нас проголосив три найважливіші вимоги до будь-якої споруди: міцність, користь, краса. Ці вимоги залишилися незмінними і сьогодні. Будівельна механіка – наука про міцність конструкцій, як ніяка інша, слідувала вимогам практики і розвивалася разом з практикою – передусім будівництва, а потім і машинобудування.

Для побудови методів будівельної механіки використовуються деякі розробки вищої математики (наприклад, математична алгебра, аналітична та диференційна геометрії, диференціальні та інтегральні рівняння, математична статистика), фізики (статика та динаміка), нарисної геометрії та графіки.

Методи розрахунку споруд, що вивчаються в курсі будівельної механіки, на практиці застосовуються у спеціальних будівельних дисциплінах – таких, як металеві, дерев'яні, залізобетонні та кам'яні конструкції, основи і підвалини, технологія будівельного виробництва, техніка безпеки, архітектурне проектування тощо.

Коло питань, які входять у цю науку, достатньо широке, тому виникла необхідність поділити її на самостійні розділи: опір

матеріалів, теорія пружності і пластичності, будівельна механіка стержневих систем, будівельна механіка суцільних тонкостінних систем (пластин і оболонок). У цьому курсі під будівельною механікою розумімо будівельну механіку стержневих систем. Вивчення насамперед завдань будівельної механіки стержневих систем пояснюється тим, що досі основна кількість споруд являє собою стержневі системи або системи, які під час розрахунку можна розглядати як стержневі. Крім того, на прикладі стержневих систем можна простіше засвоїти основні положення будівельної механіки, легше уявити результати обчислень і остаточні результати розрахунку, а також порівняно просто їх проаналізувати.

На відміну від опору матеріалів будівельна механіка розглядає методи визначення внутрішніх зусиль, питання жорсткості і стійкості не для окремих елементів-стержнів, а для складних систем, утворених з деяких зв'язаних між собою стержнів. Вважається, що стержні, зв'язані між собою у систему, деформуються від прикладеного до них навантаження так само, як і ізольовані, не зв'язані між собою. Таке припущення дозволяє результати, отримані в опорі матеріалів для окремих стержнів, зберегти для складних систем. Необхідно тільки відшукати способи визначення зусиль і переміщень, яких зазнають стержні, з'єднані у систему, від сумісного деформування. Для вирішення цього завдання зберігаються всі наукові абстракції і спрощення, які використовувалися в опорі матеріалів, але належать до всієї споруди загалом, а саме:

1. **Гіпотеза суцільності** – тіло вважається таким, що неперервно заповнює об'єм. На цій підставі деформації і переміщення точок елемента можуть вважатися неперервними функціями координат.

2. **Гіпотеза однорідності та ізотропності** – властивості матеріалу однакові у всіх точках і за всіма напрямками.

3. **Гіпотеза ідеальної пружності** – матеріал конструкцій вважається ідеально пружним. Це означає, що після зняття навантаження деформація усувається, споруда сповна поновлює форму, яку мала до початку навантаження, і повертає енергію, яку було витрачено на її деформацію.

4. **Гіпотеза лінійної залежності між деформаціями і напруженнями** – вважається, що між напруженнями і деформаціями у всіх точках зберігається лінійна залежність (закон Гука). Завдяки цій гіпотезі, разом з попередніми, пружні властивості матеріалу у всіх

точках тіла характеризуються трьома параметрами: модулем пружності  $E$ , модулем зсуву  $G$  і коефіцієнтом Пуассона  $\nu$ , які пов'язані між собою залежністю  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ .

**5. Гіпотеза малих переміщень** – переміщення точок системи, які зумовлені пружними деформаціями, є малими, тобто такими, що допускають лінійну залежність між деформаціями і переміщеннями в рівняннях геометричного аспекту задачі, а також дозволяють складати рівняння рівноваги для недеформованого стану.

**6. Гіпотеза природного ненапруженого стану** – початкові напруження у тілі вважаються такими, що дорівнюють нулеві. Це означає, що напруження і зусилля, які визначаються в результаті розрахунку, становлять лише їхній приріст над тими, що були спочатку.

Із гіпотез впливає принцип незалежності дії сил (принцип суперпозиції або принцип накладання): у лінійнодеформованих системах сумарний ефект від дії кількох сил дорівнює сумі ефектів від дії кожної сили окремо, причому сумарний ефект не залежить від порядку їх прикладання. Під ефектом необхідно розуміти переміщення точок споруди, опорні реакції, зусилля, напруження тощо.

У теоріях пружності і пластичності розрахунок ведуть у точнішій постановці, з використанням складного математичного апарата. Будівельна механіка, яка лежить в основі підготовки інженера-будівельника, покликана об'єднати загальні розділи теорії пружності і пластичності з безпосереднім проектуванням інженерних споруд, створити зручні для практичного використання і до того ж достатньо точні методи визначення внутрішніх сил і переміщень складних систем і перевірки надійності цих систем щодо міцності, жорсткості і стійкості.

Крім розробки методів розрахунку, будівельна механіка готує багато даних для утворення нових ефективних споруд.

У будівельній механіці широко використовують методи не тільки опору матеріалів, але і теоретичної механіки. З іншого боку, будівельна механіка тісно пов'язана з дисциплінами будівельного циклу (архітектурні конструкції, будівельні конструкції, інженерні споруди), оскільки в основі всіх технічних розрахунків і рішень під час проектування та зведення будинків і споруд лежать закони

будівельної механіки. Це дозволяє будівельну механіку деякою мірою зарахувати до прикладних наук для інженера-будівельника.

Правильний розрахунок конструкцій, створення ефективних споруд дають велику економію матеріалів і трудовитрат, враховуючи, що будівництво є найбільш ресурсоємкою галуззю народного господарства.

За статистикою, щорічно на будівництво витрачається 1/5 металопрокату, 2/5 лісоматеріалів, основна частина цементу, цегли і багато інших матеріалів. Зменшення витрат матеріалів на будівельні споруди дає значний економічний ефект. Економія матеріалів закладається на стадії проектування. Створення прогресивних конструкцій і точний розрахунок конструкцій неможливі без ґрунтового знання будівельної механіки. Тільки спираючись на закони і положення будівельної механіки, можна будувати швидко, міцно, надійно і дешево.

Будівельна механіка на початку свого розвитку не була самостійною наукою, а зливалася із загальною механікою. Самостійно як наука будівельна механіка почала розвиватись тільки в першій половині XIX ст., у зв'язку з посиленням будівництвом мостів, залізниць, плотин, кораблів та великих споруд. Відсутність методів розрахунку таких споруд не дозволяло здійснювати достатньо легкі і надійні конструкції.

Розглянемо коротко історію розвитку та сучасний стан будівельної механіки як науки. Будівництво – одна із стародавніх галузей господарства, але тривалий час будівельники не були оснащені теорією розрахунку споруд і керувалися тільки досвідом та інтуїцією. Перші спроби зрозуміти роботу споруд пов'язані з ім'ям геніального Леонардо да Вінчі (1452–1519). З того часу і аж до XIX століття будівельна механіка розвивалася у складі загальної механіки. Перші спроби розрахунку будівельних конструкцій належать видатним математикам, фізикам і механікам, починаючи з Галілео Галілея (1564–1642). Над проблемою проектування і розрахунку споруд працювали Р. Гук (1635–1703), Я. Бернуллі (1654–1705), М. В. Ломоносов (1711–1765), Л. Ейлер (1707–1783), І. П. Кулібін (1733–1818), Ш. Кулон (1736–1806), Ж.-Л. Лагранж (1736–1813), К. Кульман (1821–1881), Б. Сен-Венан (1797–1886), Б. П. Клапейрон (1799–1864), Д. К. Максвелл (1831–1879), О. Мор (1835–1918), А. Кастільяно (1847–1884) та інші. Починаючи з XIX ст., і особ-

ливо з другої половини ХІХ ст., коли розпочалося будівництво таких складних споруд, як залізничні мости, будівельна механіка стала окремою наукою. Природно великий вклад у розвиток будівельної механіки зробили інженери-мостобудівельники Д. І. Журавський (1821–1891), Ф. С. Ясинський (1856–1899), М. А. Белелюбський (1845–1922), Л. Д. Проскураков (1858–1926).

Варто відзначити заслуги у розвитку будівельної механіки проф. В. Л. Кірпічова (1845–1913), інж. В. Г. Щухова (1853–1939). У працях П. Л. Пастернака, І. П. Прокоф'єва, О. О. Гвоздєва, Б. М. Жемочкіна, М. І. Безухова, Б. М. Горбунова (1901–1944), І. М. Рабіновича (1886–1977), О. А. Уманського, П. Ф. Папковича, М. С. Стрелецького, В. О. Кисельова, М. К. Снітко значного розвитку набула теорія розрахунку складних статичноневизначених систем. Визначний внесок у створення і розвиток теорії стійкості і теорії коливань зробили І. Г. Бубнов (1872–1919), О. М. Діннік (1876–1950), М. В. Корноухов, А. Ф. Смірнов, О. Р. Ржаніцин, М. К. Снітко, Ю. Н. Роботнов, Р. Р. Метевосян, О. П. Сініцин, О. В. Лужин, В. В. Болотін.

У розвиток будівельної механіки назавжди вписалися імена вчених України (В. Л. Кірпічов, М. В. Корноухов, С. П. Тимошенко (1878–1972), Є. О. Патон, О. А. Уманський). Один із ефективних методів розрахунку нерозрізних балок та рам був розроблений завідувачем кафедри будівельної механіки Львівського політехнічного інституту професором Ю. І. Лозовим, чия методика викладання курсу з будівельної механіки частково використана при написанні цього підручника.

Необхідно згадати й відомих учених – академіків В. А. Лазаряна та Н. Г. Бондаря. В. А. Лазарян створив новий напрям механіки і механіки деформівного твердого тіла. Основна його робота присвячена питанням динамічних сил у міжвагонних з'єднаннях поїздів та методам степенів стійкості руху існуючих видів рухомого складу. Н. Г. Бондарь розробив спецкурси «Динаміка мостів», «Розрахунок оболонок», «Динаміка промислових споруд», які вивчаються у ВНЗ.

Варто відзначити, що сьогодні поширюється використання ПК і матричних алгоритмів й під час розрахунку конструкцій, розробляється теорія оптимізації у будівельній механіці, з'являються нові методи розрахунку конструкцій для ефективного використання ПК (О. О. Чірас, А. Ф. Смірнов, А. П. Філін,



О. М. Масленіков). Будівельна механіка дедалі більше пов'язується з прикладною і обчислювальною математикою, системним програмуванням, проектуванням конструкцій.

Отже, важко оцінити практичне значення сучасної будівельної механіки. Озброєний знанням її законів і правил проектування одержує можливість створювати споруди не тільки надійні і міцні в експлуатації, але також і економічні. У формулюванні цієї дисципліни у минулому і особливо на її сучасному розвитку дуже значне місце займає досвід. Сталі способи розрахунку інженерних споруд, які базуються на багаточисленних умовностях і допущеннях, уступають місце новим методам, які впливають з експериментів, із всебічного вивчення роботи інженерних споруд в умовах довготривалої експлуатації.

Будівельна механіка завжди, зокрема і у наш час, постійно модернізується. Використовуються, зазвичай, матричні методи розрахунку та метод скінченних елементів, пристосовані до розрахунків на ПК за стандартними програмами. У сучасних наукових дослідженнях на основі розвитку варіаційних принципів і методів дискретизації значного розвитку набув метод скінченних елементів (МСЕ), на базі якого створені і постійно удосконалюються універсальні обчислювальні програмні комплекси з розрахунку широкого класу конструкцій. У розвитку МСЕ значну роль відіграли праці Дж. Аргіріса, О. Зінкевича, Бате і Вілсона, Одена, Р. Клафа, Л. О. Розіна, А. П. Філіна, А. В. Александрова, М. М. Шапошнікова, І. Ф. Образцова та ін. Їхні методи відображено, і у сучасних навчальних посібниках з будівельної механіки [1, 10, 11].

Наприкінці 60-х років XX століття на основі розвитку широкого класу числових методів, які об'єднані під загальною назвою "теорія скінченних елементів", Карлом Бреббія і Стефаном Уокером був розроблений метод граничних елементів. Серед вчених, праці яких зробили вклад у створення МГЕ, можна виділити П. К. Бенерджі, Р. Батерфілда, А. Г. Угоднікова, Н. М. Хуторянского та інших. Застосування цього методу до задач будівельної механіки стержневих систем відображено у посібнику [2]. Нині розвиток і модернізація різних варіантів МСЕ і МГЕ є актуальною науковою проблемою, за якою захищають багато кандидатських і докторських дисертацій у різних країнах світу.

Будівельна механіка завжди відповідала на практичні запити будівництва та машинобудування, тому історія її розвитку тісно пов'язана із загальним розвитком цивілізації, зокрема техніки.

## 1.2. Розрахункова схема споруд і класифікація розрахункових схем

**Реальна споруда** – це складне з'єднання багатьох, різних за призначенням, елементів. Серед них важливу роль відіграють елементи, які утримують споруду у стані опору дії навантажень. Ці елементи утворюють **несучу конструкцію споруди**. Наприклад, коли у промисловому будинку відкинути вікна, двері, перегородки, самонесучі цегляні чи панельні стіни, панелі перекриття, то залишиться несуча конструкція у вигляді просторового каркасу. Вона приймає на себе всі навантаження, які діятимуть під час експлуатації будинку. Інженерне проектування повинно забезпечити надійність несучої конструкції. Під час розрахунку переходять до **розрахункової конструкції**, яка отримується, коли у несучій конструкції є тільки елементи, які відіграють основну роль у опорі дії навантаження. У результаті часто замість просторової отримуємо плоску конструкцію. Розрахункова конструкція залишається ще складною для розрахунку, і подальше спрощення приводить до **розрахункової схеми конструкції** (рис. 1.1).

Отже, у розрахунковій схемі спрощуються геометричні форми конструкції приведенням їх до ліній, що проходять по осях стержнів, чи серединних площин, або серединних поверхонь плит та оболонок.

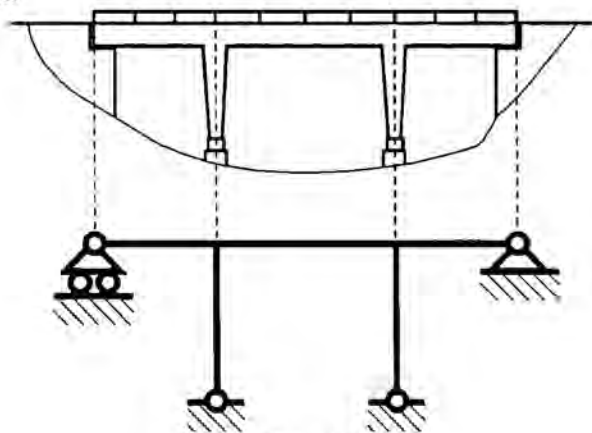


Рис. 1.1

У розрахунковій схемі відображена максимально можлива ідеалізація споруди. Наприклад, балки, колони і інші елементи, які можуть бути зараховані до стержнів, зображаються однією лінією – віссю елемента, ідеалізуються вузлові і опорні зв'язки і навантаження. **Розрахункова схема**, отже, є спрощене, ідеалізоване зображення дійсної споруди і навантаження. У будівельній механіці матимемо справу тільки з розрахунковими схемами дійсних споруд. Нерухомість дійсних споруд відносно основи, на яку вона спирається, забезпечується підпорними (опорними) зв'язками, що називаються опорами.

Розрахункова схема повинна бути простою, доступною для практичного розрахунку на конкретному рівні розвитку будівельної механіки, але, з іншого боку, вона повинна якнайточніше відобразити роботу конструкції. На вибір розрахункової схеми впливає і рівень обчислювальної техніки. З її розвитком розрахункова схема може уточнюватися і ускладнюватися. Вибір розрахункової схеми – дуже відповідальна і важлива частина розрахунку. Правильний вибір може зробити інженер, котрий добре розуміє роботу конструкції і має знання у галузі будівельної механіки.

Для багатьох типових конструкцій розроблені варіанти розрахункових схем. Усі розрахункові схеми можна класифікувати за різними ознаками.

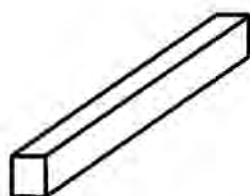
Залежно від розташування елементів системи у просторі маємо плоскі і просторові системи. До плоских належать системи, у яких осі всіх елементів (а також опорні) і лінії дії зовнішнього навантаження розташовані в одній площині. Всі інші належать до просторових.

З геометричної точки зору споруди поділяються на три основні групи:

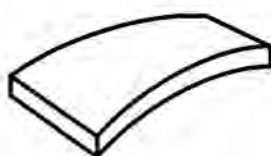
1. Стержневі системи – системи, утворені зв'язаними між собою елементами, у яких довжина значно перевищує розміри поперечного перетину (*рис.1.2, а*).

2. Плити, пластини, оболонки характерні тим, що два розміри елемента значно перевищують третій (товщину) (*рис.1.2, б*).

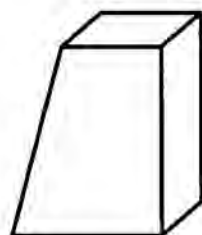
3. Масивні (блокові) системи – це системи з елементів, які мають всі розміри одного порядку (*рис.1.2, в*).



*a* – стержень



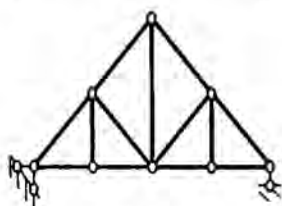
*b* – пластина



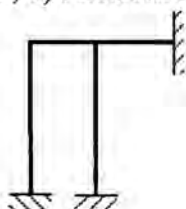
*c* – масив

Рис. 1.2

Здебільшого стержневі системи споруд складаються з дисків, що з'єднуються між собою шарнірами і за допомогою опор опираються на підвалини. Залежно від характеру з'єднання елементів між собою розрізняють системи з шарнірними вузлами (рис. 1.3, *a*), з жорсткими вузлами (рис. 1.3, *b*) і комбіновані (рис. 1.3, *c*).



*a*



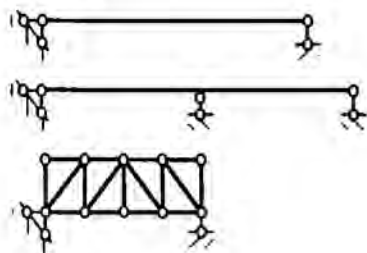
*b*



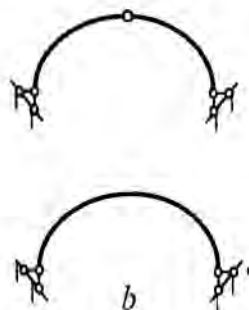
*c*

Рис. 1.3

За напрямом опорних реакцій системи можуть бути безрозпирні і розпирні. **Безрозпирними** називають системи, у яких при вертикальному навантаженні виникають тільки вертикальні реакції (рис. 1.4, *a*). У **розпирних** системах при вертикальному навантаженні виникають горизонтальні складові опорних реакцій (рис. 1.4, *b*).



*a*



*b*

Рис. 1.4

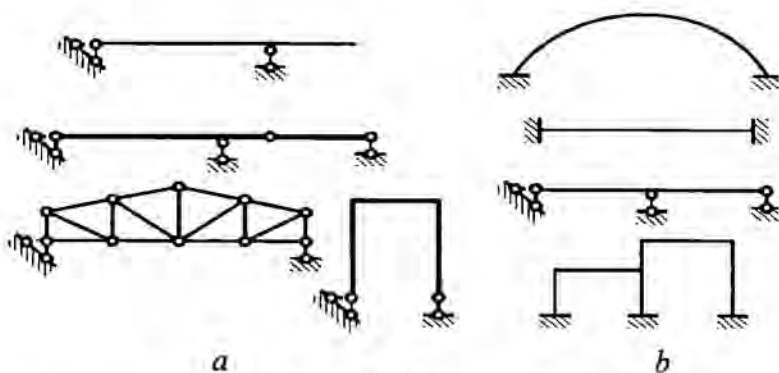


Рис. 1.5

Залежно від кінематичної ознаки маємо статично-визначувані (рис. 1.5, а) і статично-невизначувані (рис. 1.5, б) системи. До перших належать стержневі геометрично-незмінні системи з мінімально необхідною кількістю в'язів, до інших – геометрично-незмінні системи з зайвими в'язями (кількість в'язів більша, ніж це необхідно для забезпечення геометричної незмінності).

### 1.3. Опори плоских споруд

Будь-яка споруда повинна бути зв'язана з основою (землею). Цей зв'язок здійснюється за допомогою опор. **Опори** – це пристрої для передавання навантаження від споруди чи конструкції на основу. Основою не обов'язково є земля. Основою для споруди може бути і інша незмінна споруда. Звичайно, опора це сукупність декількох в'язів. В'язі, які утворюють опори, називаються опорними. Опори плоских споруд теж плоскі, і складові опорних реакцій лежать у одній площині. Основними типами опор плоских споруд є шарнірно-рухома, шарнірно-нерухома, плоска зацімлююча рухома опора і повне защемлення. На рис. 1.6 показані конструктивні і розрахункові схеми цих опор.

**Шарнірно-рухома опора** (рис. 1.6, а) забезпечує вільний поворот системи навколо осі циліндричного шарніру і лінійне зміщення вздовж опорної площини, вона не допускає лінійного зміщення за нормаллю до опорної площини. Опорна реакція проходить через центр циліндричного шарніру „С” перпендикулярно до верхньої площини опорної плити. Розрахункова схема опори – це стержень з двома ідеальними шарнірами, у яких відсутні сили тертя. Опорний стержень перпендикулярний до опорної плити і



дозволяє поворот системи навколо шарніру „B” і зміщення по дузі кола внаслідок повороту стержня  $AB$  навколо шарніру „A”. Оскільки лінійні зміщення дуже малі, то безмежно малий елемент кола можна розглядати як пряму. Прийнята розрахункова схема буде відображати умови, в яких є дійсна опора.

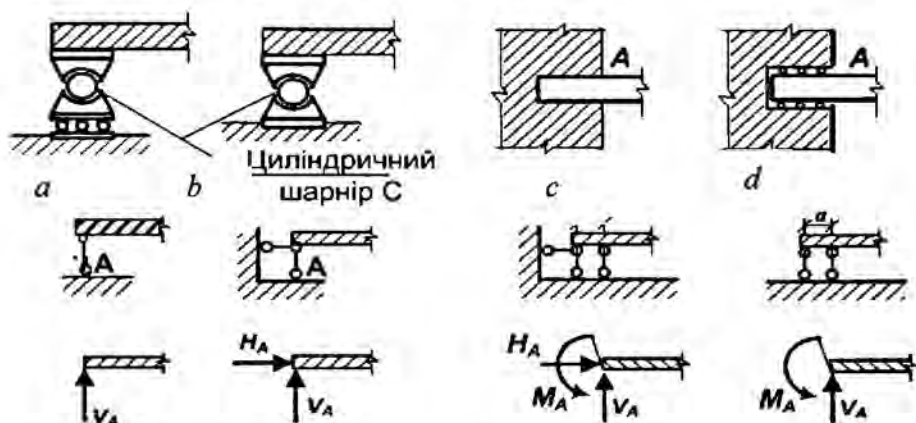


Рис. 1.6. Опори плоских споруд:  
 а – шарнірно-рухома; б – шарнірно-нерухома;  
 с – повне защемлення; d – плоска зацімлююча рухома опора

**Шарнірно-нерухома опора** (рис. 1.6, б) відрізняється від рухомої тим, що не допускає лінійних переміщень і вздовж, і за нормаллю до опорної площини і тільки забезпечує поворот системи навколо циліндричного шарніру „C”. Опорна реакція проходить через центр шарніру і може мати будь-який напрям.

Розрахункову схему шарнірно-нерухомої опори приймають у вигляді двох опорних стержнів, які не допускають лінійних переміщень системи і дозволяють поворот системи навколо центра шарніра „A”.

**Повне защемлення** (рис. 1.6, с) – це щільне защемлення опорної частини конструкції, воно не допускає ні лінійних переміщень, ні повороту.

Розрахункова схема зображається у вигляді трьох стержнів, які відповідають трьом невідомим складовим реакції  $V_A$ ,  $H_A$  і  $M_A$ .

**Плоска зацімлююча рухома опора** (рис. 1.6, d) дозволяє лінійне переміщення вздовж зацімлюючих площин і не допускає ні повороту, ні лінійного переміщення у напрямку, нормальному до зацімлюючих площин.

Розрахункова схема опори може бути подана у вигляді двох паралельних стержнів. Для практичних розрахунків зручно за невідомі реакції приймати зосереджений момент і зосереджену силу. Треба зазначити, що така опора рідко зустрічається у практиці будівництва. Зауважемо, що число стержнів у схеметичному зображенні будь-якої опори завжди дорівнює числу параметрів, які визначають повну реакцію цієї опори.

#### 1.4. Види навантажень

Споруди призначені для сприймання навантаження. Залежно від часу дії розрізняють постійне і тимчасове навантаження.

**Постійним навантаженням** є власна вага всіх конструкцій споруди.

**Тимчасовим навантаженням** є навантаження, яке діє протягом певного періоду часу (обладнання і інше корисне навантаження, сніг, вітер тощо).

За характером дії розрізняють статичне і динамічне навантаження. Статичне навантаження прикладають на конструкцію спокійно, поступово збільшуючи від нуля до остаточного навантаження. Силами інерції при такому навантаженні можна нехтувати. Динамічне навантаження характеризується швидкою зміною величини, напрямку і місця розташування, внаслідок чого виникають коливання і сили інерції, які треба враховувати під час розрахунку конструкцій.

#### 1.5. Кінематичний аналіз споруд

Будівельні споруди повинні бути нерухомими, тобто геометрично незмінювальними, тому вони складаються з нерухомих систем. Для визначення нерухомості системи виконують її кінематичний аналіз.

Отже, для того, щоб споруда могла сприймати навантаження, вона повинна зберігати ту геометричну форму і положення, які були задані під час спорудження. Перш ніж починати розрахунок, потрібно переконатися, що система правильно утворена і може бути спорудою.

Окремими елементами стержневих систем є стержні. Окремі стержні або системи, незмінність яких встановлена, будемо називати **дисками**.

**Вільністю системи** вважаємо спроможність системи чи окремих елементів змінювати своє розташування. **Ступінь вільності** системи чи окремого тіла — це кількість незалежних параметрів, що визначають їхнє положення на площині (для плоских систем) чи у просторі (для просторових систем) у будь-який момент часу.

Оскільки розташування матеріальної точки на площині визначається двома параметрами (ординатами  $X$  та  $Y$ ), то ступінь свободи точки на площині дорівнює двом (у просторі — трьом). Ступінь свободи твердого тіла (диска) на площині дорівнює трьом (ординати  $X$ ,  $Y$  та кут  $\alpha$ ) (рис. 1.7), у просторі — шести.

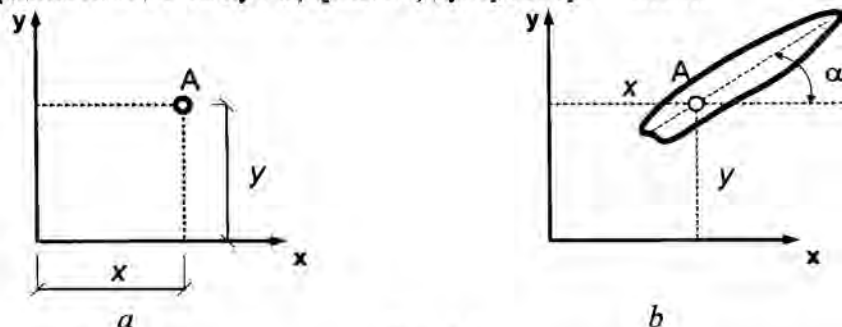


Рис. 1.7

**Кінематичні в'язі** — це пристрої, які ліквідовують одну ступінь свободи. Розрізняють два види кінематичних в'язів: стержневі і шарнірні. Стержневі в'язі являють собою жорсткий стержень з шарнірами на кінцях. Такі в'язі ліквідовують одну вільність — спроможність зміщуватися вздовж цього стержня. Справді, ступінь свободи двох матеріальних точок на площині дорівнює чотирьом. Після з'єднання цих точок стержнем отримуємо систему, яка має три свободи (рис. 1.8, а). Отже, стержневі в'язі ліквідовують одну вільність.

**Шарнір** — це з'єднання окремих дисків між собою, яке допускає абсолютно вільне обертання з'єднаних дисків навколо певної точки, яка є центром шарніру. Один шарнір може з'єднувати між собою два або більше дисків. У першому випадку маємо простий шарнір, у другому — складний шарнір. Простий шарнір, з'єднуючи між собою два диски, ліквідує дві свободи (рис. 1.8, б). Два окремі диски на площині мають  $2 \cdot 3 = 6$  свобод. Після з'єднання дисків шарніром отримуємо систему з чотирма

свободами. Отже, простий шарнір накладає дві в'язі, які являють собою дві кінематичні в'язі.

Складний шарнір еквівалентний  $n-1$  простим шарнірам, де  $n$  – кількість стержнів (дисків), з'єднаних складним шарніром. Складний шарнір можна розглядати як послідовне приєднування до диску інших дисків за допомогою простих шарнірів. Насправді, якщо, наприклад, чотири окремі стержні мають 12 свобод, то після з'єднання їх у точці  $A$  одним складним шарніром отримуємо систему, яка має 6 свобод. Це означає, що створення чотириланкового шарніру рівноцінне введенню шести кінематичних в'язів, а це, своєю чергою, еквівалентне встановленню трьох простих шарнірів (рис.1.8, с). З другого боку, введення простого шарніру у систему додає системі одну свободу. Якщо один стержень на площині має три свободи, то після введення у цей стержень шарніру система буде мати чотири свободи.

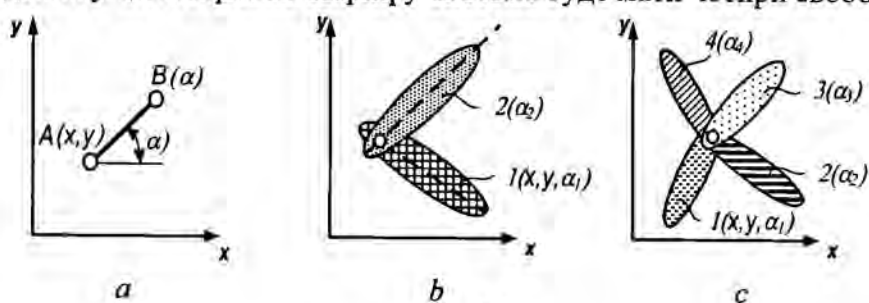


Рис. 1.8

Розглядаючи системи, утворені з окремих стержнів, зв'язаних між собою, можна виділити три типи систем:

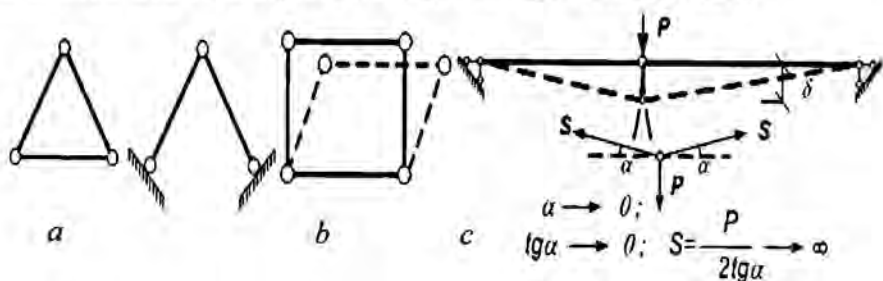


Рис. 1.9

**1. Геометрично-незмінні системи** – це системи зв'язаних між собою твердих тіл, у яких не може бути відносних зміщень

без деформацій матеріалу. Найпростішою геометрично-незмінною системою є шарнірний трикутник (або діада) (рис. 1.9, а).

**2. Геометрично-змінні системи** – це системи зв’язаних між собою твердих тіл, у яких можуть виникати відносні зміщення з’єднаних тіл без деформацій матеріалу. Прикладом такої системи є шарнірний чотирикутник (рис. 1.9, б).

Геометрично-змінні системи не можуть бути спорудами, тому що не забезпечують сприйняття навантаження і передавання його на основу.

**3. Миттєво-змінні системи** – це системи твердих тіл, у яких можуть виникнути тільки нескінченно малі, відносні зміщення з’єднаних тіл без деформацій матеріалу. У елементах таких систем виникають невизначені чи нескінченно великі зусилля. На рис. 1.9, с наведений приклад такої системи.

Зовнішніми ознаками миттєво-змінних систем є:

- 1) розташування на одній прямій трьох шарнірів, які з’єднують між собою три диски (рис. 1.10, а);
- 2) з’єднання двох дисків за допомогою трьох стержнів, які перетинаються у одній точці (рис. 1.10, б) або паралельні (рис. 1.10, с).

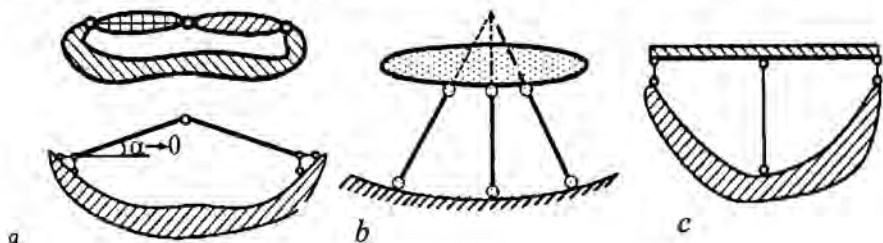


Рис. 1.10

Ступінь вільності довільної системи, утвореної будь-якою кількістю стержнів (дисків), можна підрахувати як різницю між загальною кількістю ступенів свободи усіх елементів системи і загальною кількістю кінематичних зв’язків у системі у вигляді формули для визначення ступеня свободи системи  $W$ .

$$W = 3D - (2Ш_e + C_o), \quad (1.1)$$

де:  $D$  – кількість дисків (стержнів) у системі;  $Ш_e$  – кількість простих (елементарних) шарнірів;  $C_o$  – кількість опорних стержневих зв’язків.

Під час аналізу системи з шарнірними вузлами ця формула не дуже зручна, оскільки потрібно всі багатоланкові шарніри заміню-



вати відповідною кількістю простих шарнірів. Розглядаючи вузли такої системи як матеріальні точки, з'єднані стержневими в'язями, отримуємо для шарнірно-стержневих систем формулу:

$$W = 2B - C, \quad (1.2)$$

де:  $B$  – кількість вузлів;  $C$  – кількість стержнів внутрішніх і опорних

$$(C = C_{\text{вн.}} + C_{\text{о.}}).$$

Підраховавши ступінь вільності, виділимо три випадки:

1)  $W > 0$ ; 2)  $W = 0$ ; 3)  $W < 0$ .

У першому випадку можна категорично стверджувати, що система геометрично змінна і спорудою бути не може. У другому і третьому випадках, коли кількість в'язів достатня, система може бути спорудою, але для категоричного ствердження потрібно виконувати подальший аналіз системи, оскільки система може мати недопустиму структуру або бути миттєво-змінною. Для остаточного висновку про можливість використання системи як споруди потрібно виконати не тільки „кількісний”, але і якісний аналіз системи. Для цього потрібно знати правила утворення незмінних систем:

а) геометрично незмінну систему можна утворити послідовним приєднанням кожної матеріальної точки до диска двома стержнями, які не лежать на одній прямій (рис.1.11, а);

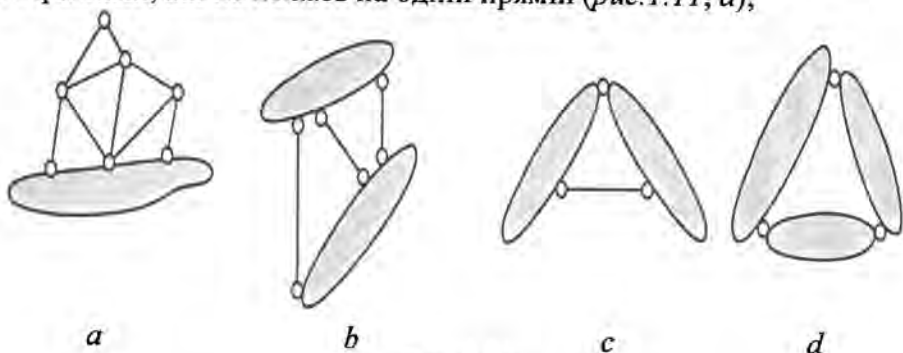


Рис. 1.11

б) два диски створюють незмінну систему, якщо зв'язати їх трьома стержневими в'язями, які не перетинаються у одній точці (і не паралельні), або шарніром і стержнем, який не проходить через центр цього шарніру (рис.1.11, b, c);

в) три диски утворюють незмінну систему, якщо їх зв'язати трьома шарнірами, що не лежать на одній прямій (рис.1.11, д);

г) для забезпечення зовнішньої незмінності кожна споруда повинна мати не менше трьох опорних зв'язків, які не перетинаються в одній точці і не є паралельні.

Під час аналізу геометричної структури системи можна застосовувати такі прийоми (рис.1.12) :

а) якщо система має три опорні в'язі, правильно розташовані, то достатньо довести, що система внутрішньо-незмінна і являє собою один диск. Опорні в'язі відкидають і аналізують саму систему (рис. 1.12, а);

б) якщо система має більше ніж три опорних в'язі, то під час аналізу в'язі долучають у систему як внутрішні. Для цього основу (землю) розглядають як один із дисків системи (рис.1.12, б);

в) частини системи, про які наперед відомо, що вони незмінні, розглядають як диски (рис. 1.12, с, диск II і диск III).

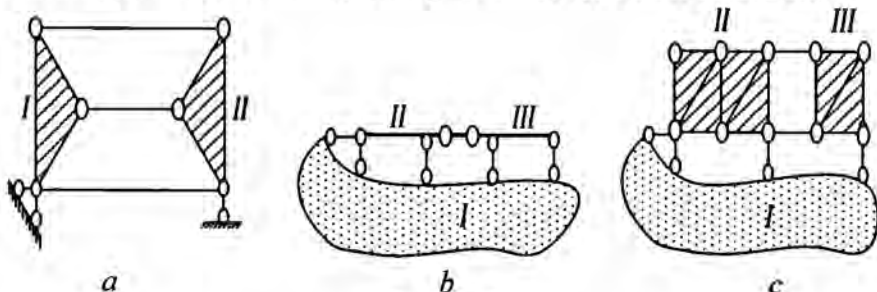


Рис. 1.12

а – миттєво змінна система; б, с – геометрично незмінні системи

### Приклади до розділу 1

**Приклад 1.** Виконати кінематичний аналіз системи, наведеної на рис.1.13.

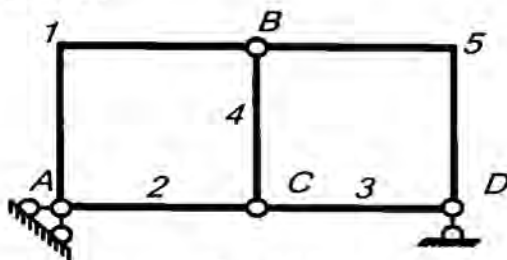


Рис. 1.13

**Приклад 2.** Виконати кінематичний аналіз шарнірно-стержневої системи, показаної на *рис. 1.14, а*.



25

що лежать на одній прямій. Система миттєво змінна і не може бути спорудою.

### Приклад 3. Виконати кінематичний аналіз балки.

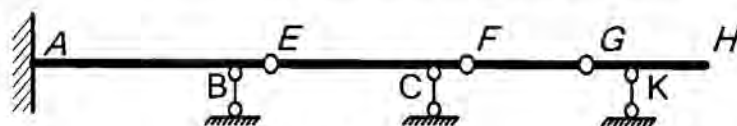


Рис. 1.15

$$W = 3D - (2Ш + C); D = 4; Ш = 3; W = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 3 - 6 = 0.$$

Опорних в'язей більше ніж три. Під час аналізу утворення системи вважаємо землю диском. До нього жорстко закріплений диск  $AE$  (опорні в'язі  $B$  зайві). До новоутвореного диска приєднаний диск  $EF$  за допомогою шарніру  $E$  і опорного стержня  $C$ . Диск  $GH$  зв'язаний з незмінною частиною системи тільки двома стержнями ( $FG$  і опорним  $K$ ). Значить, система має непридатну структуру і є геометрично змінною, хоча  $W=0$ .

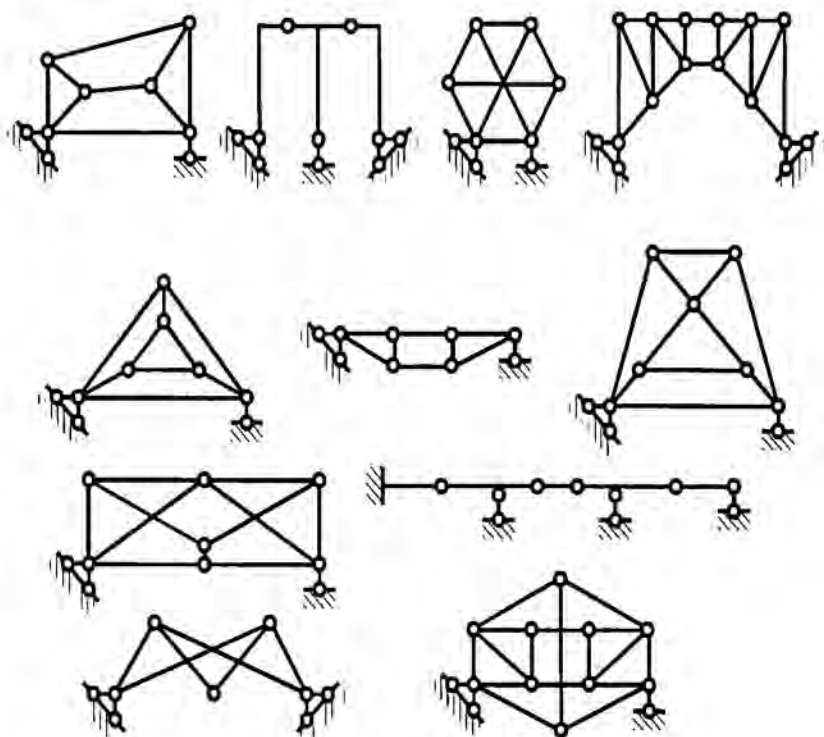


Рис. 1.16

### Запитання і задачі для самопідготовки

1. Що називаємо розрахунковою схемою споруди?
2. Що називаємо вільністю системи. Як визначається ступінь вільності системи?
3. Дайте визначення геометрично незмінних, геометрично змінних і миттєво змінних систем.
4. Виконати кінематичний аналіз систем, зображених на *рис. 1.16*.



## ЗМІСТ

Передмова.....	3
Вступ.....	4
<b>Частина 1. РОЗРАХУНОК СТАТИЧНО ВИЗНАЧУВАНИХ СТЕРЖНЕВИХ СИСТЕМ.....</b>	<b>8</b>
1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ І ЗАВДАННЯ БУДІВЕЛЬНОЇ МЕХАНІКИ ТА КІНЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ СПОРУД.....	8
1.1. Предмет і завдання будівельної механіки. Короткий історичний нарис розвитку будівельної механіки.....	8
1.2. Розрахункова схема споруд і класифікація розрахункових схем.....	14
1.3. Опори плоских споруд.....	17
1.4. Види навантажень.....	19
1.5. Кінематичний аналіз споруд.....	19
<i>Запитання і задачі для самопідготовки.....</i>	<i>27</i>
2. ОСОБЛИВОСТІ СТАТИЧНО ВИЗНАЧУВАНИХ СИСТЕМ.....	28
2.1. Властивості статично визначуваних систем.....	28
2.2. Розподіл зусиль в основних і додаткових елементах системи.....	28
2.3. Методи визначення зусиль у статично визначуваних системах.....	30
2.4. Епюри зусиль у статично визначуваних системах, їхні характерні особливості.....	33
2.4.1. Згинальні моменти, поперечні та поздовжні сили у перерізах стержневих систем.....	33
2.4.2. Визначення опорних реакцій.....	35
2.4.3. Побудова еюр згинальних моментів, поперечних та поздовжніх сил.....	35
<i>Запитання і задачі для самопідготовки.....</i>	<i>43</i>
3. БАГАТОПРОГОНОВІ ШАРНІРНІ БАЛКИ.....	44
3.1. Характеристика багатопрогонних шарнірних балок.....	44
3.2. Розрахунок багатопрогонної шарнірної балки на нерухоме навантаження.....	46
3.3. Розрахунок статично визначуваних балок з ламаними осями.....	49
<i>Запитання і задачі для самопідготовки.....</i>	<i>51</i>

4. ВИЗНАЧЕННЯ СИЛ ВІД РУХОМОГО НАВАНТАЖЕННЯ .....	52
4.1. Види рухомих навантажень і їхнє розрахункове розташування на споруді .....	52
4.2. Лінії впливу і статичний метод побудови ліній впливу .....	53
4.3. Лінії впливу опорних реакцій і внутрішніх зусиль у перерізах однопрогонових і багатопрогонових статично визначуваних балок .....	54
4.4. Визначення зусиль за лініями впливу .....	59
4.5. Лінії впливу під час вузлового навантаження .....	61
4.6. Визначення найбільш невідгідного (розрахункового) розташування рухомого навантаження на споруді .....	62
4.7. Кінематичний метод побудови ліній впливу .....	68
<i>Запитання і задачі для самопідготовки .....</i>	<i>72</i>
5. ТРИШАРНІРНІ АРКИ І РАМИ .....	73
5.1. Основні поняття про арки .....	73
5.2. Аналітичний спосіб визначення опорних реакцій і внутрішніх зусиль. Побудова епюр зусиль у тришарнірних арках .....	75
5.3. Порівняльний аналіз роботи тришарнірної арки і балки ...	81
5.4. Раціональна вісь арки .....	81
5.5. Розрахунок тришарнірних рам .....	83
5.6. Побудова ліній впливу опорних реакцій і зусиль .....	86
<i>Запитання і задачі для самопідготовки .....</i>	<i>88</i>
6. БАЛКОВІ ПЛОСКІ ФЕРМИ .....	89
6.1. Поняття про ферми і класифікація ферм .....	89
6.2. Умови статичної визначуваності і незмінюваності плоских ферм .....	93
6.3. Способи визначення зусиль у стержнях балкових ферм .....	96
6.4. Побудова ліній впливу зусиль у стержнях балкових ферм .....	110
6.5. Побудова ліній впливу зусиль у стержнях шпренгельних ферм .....	119
6.6. Побудова ліній впливу зусиль у стержнях складених ферм .....	124
<i>Запитання і задачі для самопідготовки .....</i>	<i>126</i>

<b>7. РОЗПІРНІ ФЕРМИ, КОМБІНОВАНІ І ВАНТОВІ СИСТЕМИ</b> .....	128
7.1. Розпірні ферми і їхній розрахунок на рухоме і нерухоме навантаження .....	128
7.2. Комбіновані системи та їхній розрахунок .....	134
7.3. Вантові системи .....	140
<i>Запитання і задачі для самопідготовки</i> .....	144
<b>8. ВИЗНАЧЕННЯ ПЕРЕМІЩЕНЬ У ПРУЖНИХ СТЕРЖНЕВИХ СИСТЕМАХ</b> .....	146
8.1. Основні поняття .....	146
8.2. Дійсна робота зовнішніх і внутрішніх сил .....	148
8.3. Можлива робота зовнішніх і внутрішніх сил .....	154
8.4. Принцип можливих переміщень та його застосування до пружних систем .....	156
8.5. Теореми взаємності .....	157
8.6. Загальна формула для визначення переміщень плоских стержневих систем .....	162
8.7. Формула Мора для окремих випадків .....	165
8.8. Обчислення інтегралів у формулі Мора .....	167
8.9. Матрична форма обчислення переміщень .....	172
8.10. Приклади задач .....	173
<i>Запитання і задачі для самопідготовки</i> .....	181
<b>Частина 2. РОЗРАХУНОК СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧУВАНИХ СТЕРЖНЕВИХ СИСТЕМ</b> .....	182
Загальні поняття та особливості статично невизначуваних систем .....	182
<b>9. РОЗРАХУНОК СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧУВАНИХ РАМ МЕТОДОМ СИЛ</b> .....	185
9.1. Ступінь статичної невизначуваності. Основна система та невідомі методу сил .....	185
9.1.1. Ступінь статичної невизначуваності .....	185
9.1.2. Основна система та невідомі методу сил .....	185
9.2. Умови еквівалентності основної та заданої систем. Канонічні рівняння методу сил .....	189
9.3. Визначення та перевірка коефіцієнтів і вільних членів канонічних рівнянь .....	192

9.4. Побудова та перевірка епюр сил .....	193
9.5. Вибір раціональних основних систем при розрахунку рам методом сил.....	194
9.6. Ортогоналізація основних епюр.....	198
<i>Запитання для самопідготовки.....</i>	<i>199</i>
<b>10. РОЗРАХУНОК СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧУВАНИХ АРОК МЕТОДОМ СИЛ.....</b>	<b>200</b>
10.1. Особливості розрахунку статично невизначуваних арок .....	200
10.2. Застосування методу сил до розрахунку двошарнірних арок .....	203
10.3. Приклад визначення зусиль у двошарнірній арці.....	205
<i>Запитання для самопідготовки.....</i>	<i>210</i>
<b>11. РОЗРАХУНОК СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧУВАНИХ ФЕРМ МЕТОДОМ СИЛ.....</b>	<b>211</b>
11.1. Особливості розрахунку статично невизначуваних ферм .....	211
11.2. Застосування методу сил до розрахунку ферм .....	213
11.3. Розрахунок статично невизначуваної шпренгельної балки.....	214
11.4. Приклади визначення зусиль у фермі методом сил .....	216
<i>Запитання для самопідготовки.....</i>	<i>220</i>
<b>12. РОЗРАХУНОК НЕРОЗРІЗНИХ БАЛОК.....</b>	<b>221</b>
12.1. Загальні положення .....	221
12.2. Рівняння трьох моментів.....	221
12.2.1. Рівняння трьох моментів як реалізація методу сил для нерозрізних балок .....	221
12.2.2. Рівняння трьох моментів при завантаженні силами нерозрізної балки ступінчасто-змінного перерізу .....	224
12.2.3. Рівняння трьох моментів для завантаженої силами нерозрізної балки з постійною жорсткістю.....	226
12.2.4. Рівняння трьох моментів при заданому зміщенні опор нерозрізної балки сталої жорсткості.....	227
12.2.5. Застосування рівняння трьох моментів до розрахунку нерозрізних балок .....	229
12.2.6. Визначення зусиль у нерозрізній балці з однаковими прогонами .....	231
12.2.7. Приклад визначення зусиль у нерозрізній балці	

на основі рівняння трьох моментів.....	232
12.3. Метод моментних фокусів .....	235
12.3.1. Загальні положення методу .....	235
12.3.2. Визначення фокусних відношень .....	237
12.3.3. Застосування методу моментних фокусів.....	241
12.4. Огинаючі епюри згинальних моментів .....	242
12.5. Приклад побудови огинаючої епюри згинальних моментів та розрахунку на короткочасне навантаження з використанням методу моментних фокусів.....	243
12.6. Огинаюча епюра згинальних моментів трипрогонової балки з рівними прогонами .....	246
12.7. Розрахунок статично невизначуваних стержнів на переміщення опорних в'язей і зовнішні навантаження ..	249
<i>Запитання для самопідготовки</i> .....	254
<b>13. РОЗРАХУНОК СТЕРЖНЕВИХ СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧУВАНИХ СИСТЕМ МЕТОДОМ ПЕРЕМІЩЕНЬ</b> .....	255
13.1. Параметри переміщень плоских стержневих систем.....	255
13.2. Системи та невідомі методу переміщень .....	256
13.3. Канонічні рівняння методу переміщень.....	258
13.4. Визначення коефіцієнтів та вільних членів канонічних рівнянь .....	260
13.5. Побудова епюр зусиль .....	262
13.6. Багаторазово кінематично невизначувані системи.....	262
13.7. Побудова основних епюр та визначення реакцій у рамах з нахиленими стояками.....	263
13.8. Обчислення переміщень статично невизначуваних систем.....	265
<i>Запитання для самопідготовки</i> .....	266
<b>14. РОЗРАХУНОК НА СТІЙКІСТЬ СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧУВАНИХ СТЕРЖНЕВИХ СИСТЕМ</b> .....	268
14.1. Загальні положення стосовно розв'язування задач на стійкість стержневих систем.....	268
14.2. Аналіз способів та методів аналізу стійкості стержнів і пружних стержневих систем.....	271
14.2.1. Точні методи аналізу стійкості стержневих систем .....	271
14.2.2. Наближенні способи аналізу стійкості стержневих систем.....	275
14.2.3. Стійкість стержнів.....	276



14.3. Основи розрахунків на стійкість статично невизначуваних рам за допомогою методу переміщень.	279
14.3.1. Приклади визначення критичного навантаження в рамках методом переміщень.....	286
14.4. Стійкість арок .....	289
14.5. Стійкість стержневих систем зі скінченною кількістю ступенів вільності.....	292
14.5.1. Стійкість систем з одним ступенем вільності .....	292
14.5.2. Стійкість системи з багатьма ступенями вільності.....	296
14.6. Стійкість стержневих систем з нескінченною кількістю ступенів вільності .....	297
14.7. Стійкість пружних стержнів і стержневих систем .....	303
14.7.1. Стійкість прямолінійних стержнів. Стійкість центрально-стиснутих стержнів .....	303
14.7.2. Стійкість пружних рам.....	307
14.7.3. Стійкість пружних складених стержнів. Врахування впливу поперечної сили.....	309
14.7.4. Стійкість плоскої форми вигину .....	311
<i>Запитання для самопідготовки.....</i>	<i>314</i>
<b>15. РОЗРАХУНОК СИСТЕМ МЕТОДОМ ГРАНИЧНОЇ РІВНОВАГИ.....</b>	<b>315</b>
15.1. Деякі попередні зауваження .....	315
15.2. Діаграма роботи сталі та її урахування при обчисленні передруйнівних зусиль.....	315
15.3. Обчислення пластичних моментів у пластичних шарнірах однопрогонових статично невизначених балок	317
15.4. Обчислення пластичних моментів плит, що опираються по контуру .....	319
<i>Запитання для самопідготовки.....</i>	<i>324</i>
<b>Частина 3. МЕТОД СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ ДЛЯ РОЗРАХУНКУ ПРУЖНИХ СТЕРЖНЕВИХ СИСТЕМ.....</b>	<b>325</b>
<b>16. ЗАГАЛЬНІ ПОНЯТТЯ ТА ВИЗНАЧЕННЯ МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ ДЛЯ РОЗРАХУНКУ СТЕРЖНЕВИХ СИСТЕМ.....</b>	<b>325</b>
16.1. Основні положення методу скінченних елементів.....	325
16.1.1. Метод скінченних елементів у формі методу переміщень .....	327
16.1.2. Метод скінченних елементів у формі методу сил .....	331

16.2. Розрахунок стержневих систем методом скінченних елементів у формі методу переміщень.....	334
16.2.1. Дискретна модель розрахункової стержневої системи.....	334
16.2.2. Характеристики на початку і кінцях стержнів .....	337
16.2.3. Матриця перетворення .....	339
<i>Запитання для самопідготовки</i> .....	341
<b>17. ОБЧИСЛЕННЯ РОЗРАХУНКОВИХ ХАРАКТЕРИСТИК СТЕРЖНЕВИХ СИСТЕМ У МЕТОДІ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ.....</b>	<b>342</b>
17.1. Побудова матриці жорсткості стержня в локальній системі координат .....	342
17.2. Матриці жорсткості стержневих елементів у локальній системі координат .....	347
17.3. Матриці жорсткості стержня в глобальній системі координат.....	352
17.4. Вузлові характеристики дискретної моделі.....	359
17.5. Матриця жорсткості дискретної моделі.....	362
17.6. Визначення зусиль у стержнях .....	367
<i>Запитання для самопідготовки</i> .....	370
<b>18. РОЗРАХУНОК ПЛОСКИХ СТЕРЖНЕВИХ СИСТЕМ МЕТОДОМ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ .....</b>	<b>371</b>
18.1. Геометричні характеристики стержневої системи.....	371
18.2. Вузлові характеристики дискретної моделі.....	371
18.3. Розв'язувальне рівняння методу скінченних елементів .....	373
18.4. Обчислення елементів матриці жорсткості .....	373
18.5. Визначення вузлових переміщень .....	376
18.6. Обчислення зусиль у стержнях .....	376
<i>Запитання для самопідготовки</i> .....	377
<b>Список літератури.....</b>	<b>378</b>
<b>Коротко про авторів .....</b>	<b>380</b>

Навчальне видання  
Міністерство освіти і науки України  
Дніпропетровський національний університет  
залізничного транспорту імені академіка В. Лазаряна

**Л у ч к о** Йосип Йосипович,  
**Р а с п о п о в** Олександр Сергійович

## БУДІВЕЛЬНА МЕХАНІКА СТЕРЖНЕВИХ СИСТЕМ

За редакцією д. т. н., проф. **Л у ч к а** Йосипа Йосиповича

Редактор *Оксана Лутчин*  
Технічний редактор *Леся Пелехата*  
Коректор *Олександр Хміль*  
Макетування *Віталій Ковальчук*

Здано на складання 12. 10. 2013. Підписано до друку 15. 02. 2014. Формат 60х90 1/16.  
Папір офсет. Гарнітура Times. Офсетний друк. Умов. друк. арк. 24,25.  
Обл.-вид. арк.. 19,88. Тираж 500 прим.

Видавництво "Каменяр" 79008, Львів, Підвальна, 3,  
Свідомство Держ. реєстру: серія ДК, №462.  
Тел./факс: (032)235-59-49, ел. адреса: [vyd@kamenyar.com.ua](mailto:vyd@kamenyar.com.ua)

Виготовлено з готових діапозитивів у друкарні ТзОВ "Простір М"  
79000, Львів, Чайковського, 27

Лучко Й. Й., Распопов О. С.

- Л87 Будівельна механіка стержневих систем [Текст]: За ред. д. т. н., проф. Й. Й. Лучка / Й. Й. Лучко, О. С. Распопов; М-во освіти і науки України; Дніпропетров. нац. ун-т залізнич. транспорту ім. акад. В. Лазаряна. – Львів: Каменяр, 2014. – 388 с.: рис. 261, табл. 18.  
ISBN 978-966-607-279-0

У виданні висвітлюються основні питання першої частини фундаментального курсу «Будівельна механіка» для університетів технічного (інженерного) спрямування, пов'язаної із методами розрахунку статично визначуваних та статично невизначуваних стержневих систем і методом скінченних елементів, який дає можливість числовими методами розраховувати практично довільні типи конструкцій.

Розраховане на студентів та викладачів вищих навчальних закладів, наукових, інженерно-технічних працівників і проєктувальників будівельних спеціальностей.

УДК 69.04  
ББК 38.112я73