

МОДЕЛЮВАННЯ ПРОГОНОВИХ БУДОВ МОСТІВ ЗА ЇХ ФАКТИЧНИМИ МОДАЛЬНИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

В статті розглянуто моделі лінійних динамічних систем, запропоновано методику моделювання таких систем за їх фактичними модальними характеристиками.

Ключові слова: динамічні випробування, власна частота, розрахункова модель, ідентифікація

Вступ

Визначення та моніторинг технічного стану мостів за їх інтегральними характеристиками, які встановлюють за результатами динамічних випробувань, займає чинне місце серед інших методів діагностики та отримує все більше розповсюдження як у світовій так і у вітчизняній практиці. Знання динамічних параметрів конструкцій та споруд є необхідною умовою при визначенні їх сейсмостійкості. В наш час спостерігається тенденція до збільшення довжини прогонів мостів та широкого застосування гнучких конструкцій, що робить їх ще більш чутливими до динамічних навантажень. При проектуванні таких споруд доводиться вирішувати цілий ряд складних задач пов'язаних із забезпеченням їх динамічної стійкості при дії експлуатаційного, вітрового, сейсмічного та ін. динамічних навантажень. Перевірка правильності прийнятих рішень також виконується шляхом проведення натурних динамічних випробувань. Окрім цього, методи динамічних випробувань все більше застосовують для визначення та моніторингу технічного стану мостів і, в першу чергу, мостів великих, для яких проведення статичних випробувань є проблематичним завданням.

Аналіз публікацій

Відомо, що повністю ідентифікувати лінійну систему можна визначивши її імпульсну перехідну функцію [1], а застосовувши операційне числення лінійну стаціонарну систему можна з необхідною точністю представити за допомогою матриці передаточних функцій, яка встановлює зв'язок між вхідною силою збудження та реакцією системи. Передаточна функція є перетворенням Фур'є від реакції системи на навантаження у вигляді ідеального одиничного імпульсу. Реакція системи на такий імпульс називається імпульсною перехідною функцією (імпульсною характеристикою) або ж функцією Гріна. Найчастіше її позначають як $h(t)$. Якщо

комплексну передаточну функцію позначити як $K(\omega)$, то реакція лінійної системи описується як

$$S_{\text{вих}}(\omega) = S_{\text{вх}}(\omega)K(\omega), \quad (1)$$

де: $S_{\text{вх}}(\omega)$ та $S_{\text{вих}}(\omega)$ – відповідно спектральні функції навантаження на вході та реакції на виході системи.

Модуль комплексної передаточної функції називають амплітудно-частотним спектром (АЧХ), аргумент – фазо-частотним спектром (ФЧХ).

Метод функцій Гріна. Нехай є система з n ступенями свободи, яка описується лінійним диференціальним рівнянням другого ступеню. Якщо в k точках системи прикладені силові збудження $F(k)$, то реакцію системи в точці i – $y_i(t)$ можна представити наступним виразом [1]:

$$y_i(t) = \sum_{k=1}^n \int_0^t F_k(\tau)h_{ik}(t, \tau)d\tau. \quad (2)$$

Матрицю складену з функцій $h_{ik}(t, \tau)$ – імпульсних перехідних функцій між точками $i-k$, називають матрицею Гріна.

Метод розкладання за власними формами. В системі нормальних узагальнених координат реакція $y_i(t)$ може бути представлена як сума n ортогональних реакцій за власними (модальними) формами коливань [1, 4]

$$y_i(t) = \sum_{j=1}^n y_{ij}(t). \quad (3)$$

Для практичних цілей, найчастіше достатньо розглянути декілька перших власних форм (мод) коливань.

Результати досліджень

Об'єднуючи вирази (2) та (3) для лінійних стаціонарних систем, реакцію системи за j -ю власною формою можна представити як

$$y_{ij}(t) = \sum_{k=1}^n \int_0^t \sum_{j=1}^n F_k(\tau) h_{ikj}(t, \tau) d\tau, \quad (4)$$

де $h_{ikj}(t, \tau)$ – функція Гріна для пари точок $i - k$ за j -ю власною формою.

Фактично кожну функцію Гріна тут представлено як суму ортогональних функцій, які назвемо модальними імпульсними перехідними функціями (модальними функціями Гріна)

$$h_{ik}(t, \tau) = \sum_{j=1}^n h_{ikj}(t, \tau), \quad (5)$$

Відповідно до залежностей між імпульсною характеристикою та комплексною передаточною функцією, останню також можна представити як суму модальних передаточних функцій

$$K_{ik}(\omega) = \sum_{j=1}^n K_{ikj}(\omega), \quad (6)$$

Отже, вільні коливання лінійної стаціонарної системи розглядаємо як суму ортогональних реакцій за власними формами, ваговий вплив яких визначається модальними функціями Гріна або ж модальними передаточними функціями та початковими умовами, які передували вільним коливанням: швидкість (імпульсна складова) та зміщення (кінематична складова).

Враховуючи ортогональність модальних функцій Гріна, кожна модальна передаточна функція (перетворення Фур'є від модальної функції Гріна) може бути визначена (розрахована) як для лінійного осцилятора, вільні коливання якого описуються наступною функцією [4]

$$y(t) = e^{-\alpha t} \left[\frac{y'(0) + y(0)\alpha}{W_D} \sin(W_D t) + y(0) \cos(W_D t) \right], \quad (7)$$

де $y(0)$ та $y'(0)$ – початкові умови (зміщення та швидкість відповідно), α – коефіцієнтом демпфірування, W_D – циклічна частота коливань власної форми системи з врахуванням демпфірування.

Імпульсне збудження. Якщо прийняти, що початкове зміщення $y(0) = 0$ і система збуджується імпульсом p , а отже $y'(0) = p/m$ (m – маса системи), тоді

$$y(t) = e^{-\alpha t} \left[\frac{p}{m W_D} \sin(W_D t) \right], \quad (8)$$

Використавши відомі залежності, що: $W_D^2 \approx W^2 = k/m = 1/m A_1$, де W – частота власної

форми, k – жорсткість, A_1 – реакція від одиначної статичної сили; маємо

$$y(t) = e^{-\alpha t} [p A_1 W \sin(W t)], \quad (9)$$

На рис. 1 представлено графік імпульсної перехідної функції за виразом (9) при $W = 2$, $p A_1 = 5$, $\alpha = 0,159$ (декремент коливань $\delta = 0,5$).

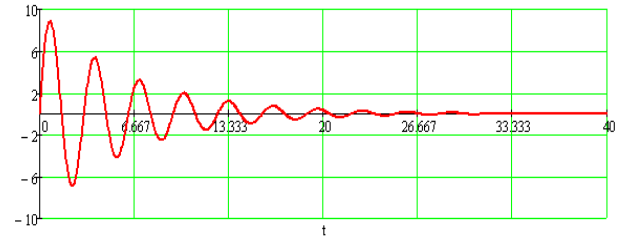


Рис. 1. Графік імпульсної перехідної функції лінійного осцилятора

Отже, модальна функція Гріна має форму синуса з циклічною частотою W , а її початкова амплітуда пропорційна величині імпульсу p , циклічній частоті та статичному коефіцієнту впливу A_1 .

Модальна передаточна функція є перетворенням Фур'є від виразу (8) та з врахуванням властивостей вказаного перетворення може бути визначена як сума двох комплексних функцій

$$K(\omega) = \frac{1}{2} (e^{-j\pi/2} \cdot Y(\omega - W) + e^{j\pi/2} \cdot Y(\omega + W)), \quad (10)$$

де

$$Y(\omega) = \frac{p W A_1}{\alpha + j\omega}.$$

Доданки у виразі (10) є копіями перетворення Фур'є від експоненціальної функції, які зміщені від нуля в область від'ємних та додатних частот. Їх фазові складові повернуті на $(-\pi/2)$ та на $\pi/2$ відповідно, завдяки чому при $\omega = 0$ їх фази співпадають та рівні 0, модулі доданків складаються, тому, знехтувавши α у порівнянні з W , маємо наступний вираз для модуля комплексного коефіцієнту на нульовій частоті:

$$K(0) = p \frac{A_1 W}{\sqrt{\alpha^2 + W^2}} \approx p A_1. \quad (11)$$

Фазове положення на нульовій частоті, в залежності від знаку при коефіцієнті впливу A_1 , може бути 0 або ж π .

Максимальні значення функції є при $\omega = \pm W$, тут один з доданків є набагато меншим за інший, а його фаза повернута на $\pi/2$, тому нехтуючи одним з доданків, та використавши залежність $\alpha = \delta W / 2\pi$, маємо вираз для

модуля комплексного коефіцієнту на власній частоті системи W

$$K(W) \approx 0,5p \frac{A_1 W}{\sqrt{\alpha^2}} = pA_1 \frac{\pi}{\delta}. \quad (12)$$

Відношення $K(W)/K(0) = \pi/\delta$, як це і має бути для резонансної кривої (ще одна назва АЧХ) лінійного осцилятора.

Кінематичне збудження. Якщо прийняти, що початкове зміщення $y(0) = A$, швидкість $y'(0) = 0$, а система збуджується відпусканням, то використавши залежності $a = \delta W / 2\pi$ та $W_D \approx W$, вираз (7) записується, як

$$y(t) = Ae^{-\alpha t} \left[\frac{\delta}{2\pi} \sin(Wt) + \cos(Wt) \right]. \quad (13)$$

Нехтуючи першим доданком в дужках (для будівельних конструкцій $\delta/2\pi < 0,1$), та виразивши початкове відхилення через силу відтяжки $A = PA_1$, маємо

$$y(t) = PA_1 e^{-\alpha t} \cos(Wt). \quad (14)$$

Перетворення Фур'є від виразу (14) має наступний вид:

$$C(\omega) = \frac{1}{2}(Y(\omega - W) + Y(\omega + W)), \quad (15)$$

де

$$Y(\omega) = \frac{PA_1}{\alpha + j\omega}.$$

Доданки у виразі (15) є копіями перетворення Фур'є від експоненціальної функції, які зміщені від нуля в область від'ємних та додатних частот. При $\omega = 0$ їх фази протилежні, отже модуль суми рівний нулю $C(0) = 0$. Максимальні значення функції є при $\omega = \pm W$, тому подібно до виразу (12), маємо

$$C(W) \approx 0,5 \frac{PA_1}{\sqrt{\alpha^2}} = \frac{PA_1 \pi}{W \delta}. \quad (16)$$

Можна показати, що при рівності затраченої енергії при імпульсному та кінематичному збудженнях амплітудні коефіцієнти у виразах (12) та (16) є рівними, тобто $pA_1 = \frac{PA_1}{W}$. Близькими є і амплітудні спектри реакцій на імпульсне та кінематичне збудження, найбільш подібні вони в зонах біля $\omega = \pm W$, а найбільш відрізняються при наближенні до $\omega = 0$.

З врахуванням першого доданку у виразі (13), та при умові рівності енергій в обох випадках збудження, маємо наступне співвідношення

$$C(0) = \frac{PA_1 \delta}{W 2\pi} = K(0) \frac{\delta}{2\pi}. \quad (17)$$

Якщо розглянути імпульсну характеристику (9) зміщену на чверть періоду (фазове положення $-\pi/2$), то при обумовлених вище спрощеннях вона буде подібною реакції на кінематичне збудження. Подібність буде тим більшою чим меншим є декремент коливаний, відповідно подібними будуть і амплітудні спектри – рис. 2.

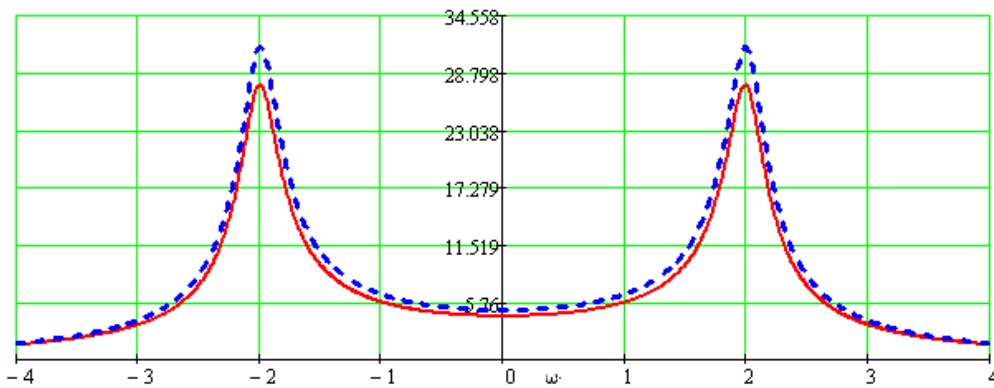


Рис. 2. Амплітудні спектри реакції: на кінематичне збудження зі зміщенням на чверть періоду – суцільною лінією; на імпульсне збудження – пунктиром

Якщо ж врахувати зменшення амплітуди за чверть періоду у вигляді коефіцієнту подібності k_1 , оберненого до згасання

$$k_1 = e^{\delta/4}, \quad (18)$$

то графіки амплітудних спектрів за обома варіантами повністю співпадуть. Якщо не виконується умова про рівність енергії, то слід також врахувати коефіцієнт приведення до одинично-

го імпульсу $k_2 = W/P$, який впливає з виразу

$$pA_1 = \frac{PA_1}{W}.$$

Таким чином передаточну функцію осцилятора можна визначити як спектральну функцію реакції на його збудження як імпульсом так і відтяжкою силою P . В останньому випадку перетворення Фур'є розраховується починаючи з часу рівного чверті періоду власних коливань, а значення амплітудного спектру коригуються (множаться) на коефіцієнти k_1 та k_2 .

Практичне застосування

Для практичної реалізації результатів досліджень запропоновано модель лінійної динамічної системи, яка формується за її модальними характеристиками та описується наступним виразом

$$K(\omega) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \left(e^{-j\pi/2} \cdot \frac{W_i A_i}{\delta_i W_i / 2\pi + j(\omega - W_i)} + e^{j\pi/2} \cdot \frac{W_i A_i}{\delta_i W_i / 2\pi + j(\omega + W_i)} \right). \quad (19)$$

Як бачимо, для визначення передаточної функції необхідно мати наступні параметри:

- кутова частота коливань за власною формою (W_i);
- декремент коливань даної форми (δ_i);
- ваговий коефіцієнт впливу (A_i).

Саме визначення цих параметрів і має бути метою динамічних випробувань за даною моделлю. Для практичних завдань, як правило, достатньо мати їх значення для декількох перших форм. Добуток передаточної функції та спектральної функції навантаження дає спектральну функцію реакції, за якою виконавши зворотне перетворення Фур'є можна отримати реакцію конструкції в часовій області.

Для виконання дій із комплексними функціями було створено програмний комплекс, який дозволяє за результатами динамічних випробувань прогонової будови мосту формувати її модель за виразом (19) та розраховувати її відгук на рухоме навантаження. Комплекс дозволяє розраховувати динамічну реакцію прогонової будови на проїзд колони автомобілів з різним інтервалом та різними швидкостями. На рис. 3 представлено робоче вікно програмного комплексу з результатами розрахунків реакції прогонової будови на проїзд колони з двох автомобілів.

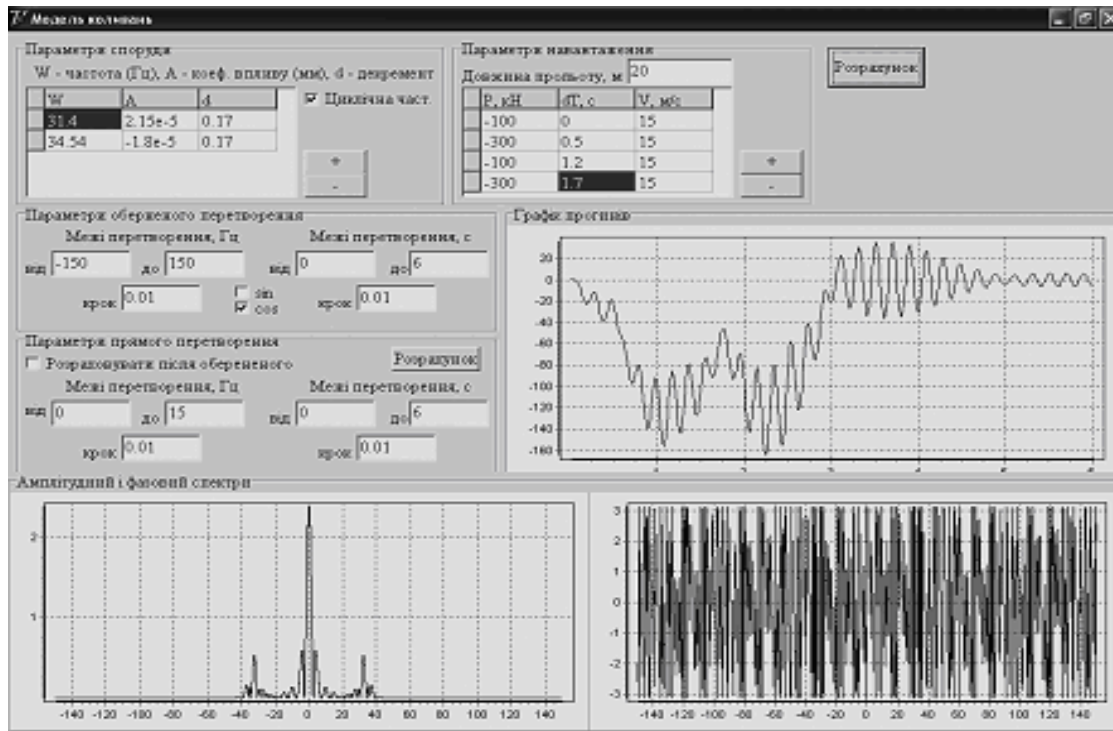


Рис. 3. Робоче вікно програмного комплексу

Висновки

На основі виконаних досліджень запропонована модель лінійної динамічної системи, яка формується за фактичними модальними харак-

теристиками конструкції. Для розрахунків динамічної реакції прогонових будов мостів на рухоме навантаження створено програмний комплекс, який дозволяє отримувати результати

для рухомого навантаження у вигляді колони автомобілів з різними інтервалами та різними швидкостями.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Вибрации в технике [Текст]: справочник в 6 т. – М.: Машиностроение, 1978–1981.
2. Методические рекомендации по вибродиагностике автодорожных мостов. [Текст] – М.: Росавтодор, 2001 – 24 с.

3. РВ.2.3-218-00018112-521:2006. Рекомендації з динамічних випробувань мостів та шляхопроводів. [Текст] – К.: Укравтодор, 2006. – 34 с.
4. Клаф, Р., Динамика сооружений. [Текст] / Р. Клаф, Дж. Пензин, пер. с англ. – М.: Стройиздат, 1979 – 320 с.

Надійшла до редколегії 05.07.2012.

Прийнята до друку 19.07.2012.

В. П. РЕДЧЕНКО (Днепропетровский филиал ГосдорНИИ), В. Н. КОСЯК (ДИИТ)

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЛЕТНЫХ СТРОЕНИЙ МОСТОВ ПО ИХ ФАКТИЧЕСКИМ МОДАЛЬНЫМ ХАРАКТЕРИСТИКАМ

Рассмотрены модели линейных динамических систем, предложено методику моделирования таких систем используя их фактические модальные характеристики.

Ключевые слова: динамические испытания, собственная частота, расчетная модель, идентификация

V. P. REDCHENKO (Dnipropetrovsk branch of State of Road Scientific Institute),
V. N. KOSYAK (Dnipropetrovsk National University of Railway Transport)

MODELLING OF SPAN STRUCTURES OF BRIDGES ON THEIR ACTUAL MODAL PARAMETERS

In the article the models of linear dynamic systems are considered, it is offered a technique of modelling of such systems using their actual modal performances.

Keywords: dynamic tests, natural frequency, computational model, identification