

ИЗГИБ БАЛОК, СОЕДИНЕННЫХ УПРУГИМИ СВЯЗЯМИ И ЛЕЖАЩИХ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Розглядається згин балок на пружній основі, сполучених між собою пружними зв'язками. При розрахунку застосовується спосіб, запропонований в роботах В. А. Лазаряна і С. І. Конашенка. Він заснований на застосуванні узагальнених функцій.

Рассматривается изгиб балок, соединенных между собой упругими связями и лежащих на упругом основании. При расчете применяется способ, предложенный в работах В. А. Лазаряна и С. И. Конашенко. Он основан на применении обобщенных функций.

The bend of beams interconnected by resilient connections and lying on resilient foundation is considered. The method suggested in works by V. A. Lazaryan and S. I. Konashenko is used in the calculation. It is based on application of the generalized functions.

Рассматривается изгиб балок одинаковой жесткости, соединенных между собой узлами с упругими связями и лежащих на упругом основании.

В узлах возможны одна или две упругие связи. Одна связь сопротивляется повороту концов стержней в плоскости (типа упругий шарнир). На рис. 1, а показано подобное соединительное устройство между двумя стержнями, состоящее из цилиндрического шарнира и упругой связи с жесткостью k_M , препятствующей повороту концов стержней относительно друг друга. Другая, с жесткостью k_Q , препятствует вертикальному смещению (рис. 1, б) относительно друг друга примыкающих концов стержней.

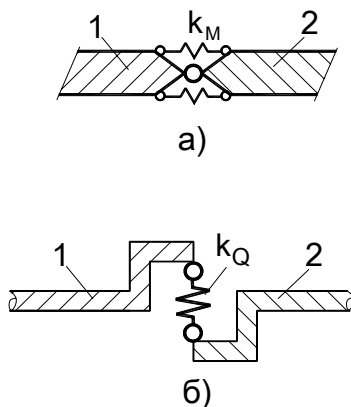


Рис. 1

В качестве упругих оснований в приведенных задачах рассматриваются однородное винклеровское и неоднородное основание, состоящее из однородного винклеровского осно-

вания, дополненного сосредоточенными включениями в жесткость в виде упругих связей, сопротивляющихся вертикальному перемещению и повороту сечения. Такие сосредоточенные включения в жесткость основания можно представить, как промежуточные опоры типа упругая заделка (рис. 2). Его можно рассматривать как частный случай основания Пастернака [1]. Конструкции подобного типа часто встречаются в машиностроении, мостостроении и строительстве.

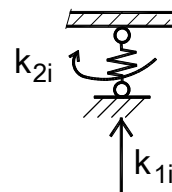


Рис. 2

Для решения этих задач в работе применяется способ, предложенный в работах В. А. Лазаряна и С. И. Конашенко [2], основанный на применении обобщенных функций. Упругие шарниры и опоры учитываются с помощью импульсивных функций. Получены аналитические решения справедливые при любой жесткости упругих связей, как между балками, так и упругих опор. Усилия и перемещения выражаются через начальные параметры и некоторые функции влияния, которые имеют разрывы непрерывности I-го рода. Для построения эпюр внутренних усилий и перемещений от действия различных нагрузок составлены MathCad-программы. В качестве примеров рассмотрены следующие задачи.

1. Рассмотрим изгиб балки на неоднородном упругом основании. Пусть в сечениях $x = s_i$ $i = 1, \dots, n$ имеются упругие опоры, жесткость которых на вертикальное перемещение k_{1i} , а на поворот k_{2i} . Включим в жесткость основания реакции упругих связей, сопротивляющихся как вертикальному перемещению i -й опоры так и ее повороту с помощью импульсивных функций первого и второго порядка. Тогда разрешающее уравнение примет следующий вид:

$$EIv^{IV}(x) = -kv(x) - \sum_{i=1}^n (k_{1i}v(x)\sigma_1(x-s_i) - k_{2i}v(x)\sigma_2(x-s_i)) + q(x) \quad (1.1)$$

$$v(s_i) = v_0 Y_1(\alpha \cdot s_j) + \frac{\theta_0}{\alpha} Y_2(\alpha \cdot s_j) - \frac{M_0}{\alpha^2 EI} Y_3(\alpha \cdot s_j) - \frac{Q_0}{\alpha^3 EI} Y_4(\alpha \cdot s_j) + v^*(s_j) - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{k_{1j}}{\alpha^3 EI} v(s_j) Y_4(\alpha(s_j - s_i)) \cdot (s_j > s_i) + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{k_{2j}}{\alpha^2 EI} v'(s_j) Y_3(\alpha(s_j - s_i)) \cdot (s_j > s_i).$$

Используя свойства импульсивных функций $\sigma_1(x-s_i)$ и $\sigma_2(x-s_i)$, приводим уравнение (1.1) к следующему виду:

$$v^{IV} + 4\alpha^4 v(x) = \frac{q(x)}{EI} - \sum_{i=1}^n \frac{k_{1i}}{EI} v(s_i) \sigma_1(x-s_i) + \sum_{i=1}^n \frac{k_{2i}}{EI} v'(s_i) \sigma_2(x-s_i), \quad (1.2)$$

где $4\alpha^4 = \frac{k}{EI}$.

Его решение, найденное операционным способом, имеет вид:

$$v(x) = v_0 Y_1(\alpha \cdot x) + \frac{\theta_0}{\alpha} Y_2(\alpha \cdot x) - \frac{M_0}{\alpha^2 EI} Y_3(\alpha \cdot x) - \frac{Q_0}{\alpha^3 EI} Y_4(\alpha \cdot x) + v^*(x) - \sum_{i=1}^n \frac{k_{1i}}{\alpha^3 EI} v(s_i) Y_4(\alpha \cdot (x-s_i)) \cdot \sigma_0(x-s_i) + \sum_{i=1}^n \frac{k_{2i}}{\alpha^2 EI} v'(s_i) Y_3(\alpha \cdot (x-s_i)) \cdot \sigma_0(x-s_i). \quad (1.3)$$

Здесь $v^*(x)$ – грузовое слагаемое, $\sigma_0(x-s_i)$ – функция Хевисайда.

Подставляя $x = s_i$ в выражение (1.3) и ее производную $v'(x)$, получаем рекуррентные формулы для нахождения промежуточных параметров:

$$v'(s_i) = -4\alpha v_0 Y_4(\alpha s_j) + \theta_0 Y_1(\alpha s_j) - \frac{M_0}{\alpha EI} Y_2(\alpha s_j) - \frac{Q_0}{\alpha^2 EI} Y_3(\alpha s_j) + v^*(s_j) - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{k_{1j}}{\alpha^2 EI} v(s_j) Y_3(\alpha(s_j - s_i)) \cdot (s_j > s_i) + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{k_{2j}}{\alpha EI} v'(s_j) Y_2(\alpha(s_j - s_i)) \cdot (s_j > s_i),$$

где $(s_j > s_i)$ – булев оператор.

Причем $v(s_i)$ и $v'(s_i)$ будут выражаться только через начальные параметры и грузовое слагаемое.

В качестве примера рассмотрен расчет шарнирно опертой балки с тремя упруго податливыми опорами, нагруженной распределенной нагрузкой, сосредоточенной силой и моментом (рис. 3)..

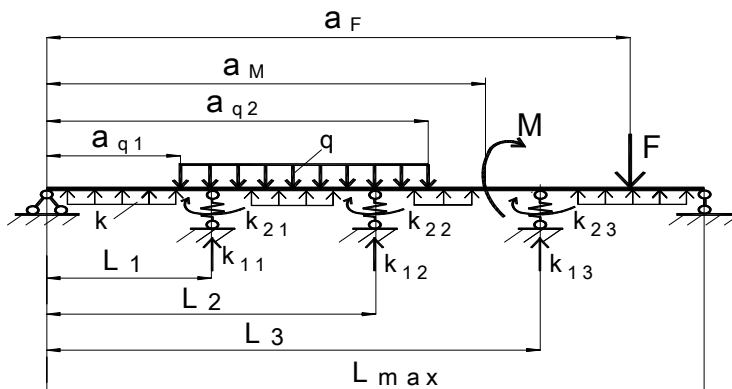


Рис. 3

Ниже приведено решение, найденное с помощью MathCad-программы.

Исходные данные (кН, м):

$$L_{\max} := 10; \quad L := (1 \quad 2 \quad 3) \cdot 0,25L_{\max}$$

$$L := L^T \quad EI := 100 \quad k := 50$$

$$M := 0 \quad F := 0 \quad a_F := \frac{2L_{\max}}{5} \quad q := 2$$

$$a_{q1} := 0 \quad a_{q2} := L_{\max} \quad a_M := \frac{L_{\max}}{3}$$

Жесткости опор задаем в векторном виде:

$$k_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 100 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot EI \quad k_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix} \cdot EI.$$

Ниже на рис. 4 и 5 приведены упругая линия балки $v(x)$ и эпюры внутренних усилий.

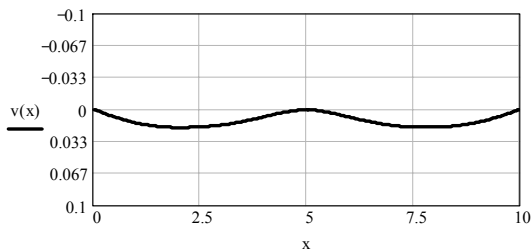


Рис. 4

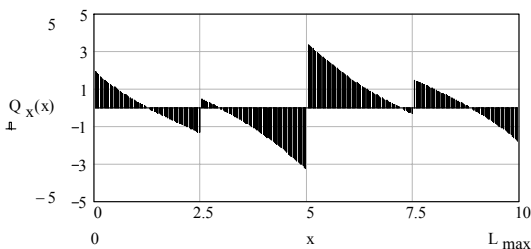
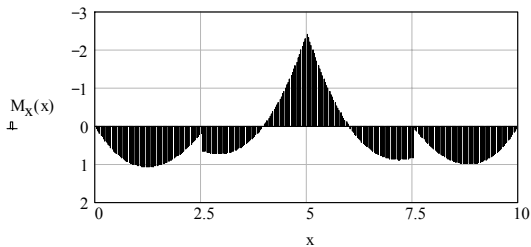


Рис. 5

Из полученных результатов видно, что скачки на эпюре моментов появляются в сечениях, где расположены упругие связи. Опора типа «упругая заделка» пытается удержать стержень от угловых перемещений.

При очень большой жесткости опоры k_1 и неравномерной нагрузке на балку, отсутствие

поворота на упругой опоре увеличивает изгибающий момент на опоре на 30 % и не передает усилий на соседний участок.

2. В качестве другого примера исследовано напряженно-деформированное состояние рельсов в зоне стыка. В одной из известных работ по расчетам в зоне стыка [3] стык рассмотрен в виде двух полубесконечных рельсовых нитей, соединенных идеальным шарниром. В данной работе расчетная схема стыка рельсов принята в виде двух стержней конечной длины, лежащих на винклеровском основании и соединенных между собой узлом с двумя упругими связями, сопротивляющимися как повороту, так и вертикальному смещению относительно друг друга примыкающих к нему концов стержней (рис. 6).

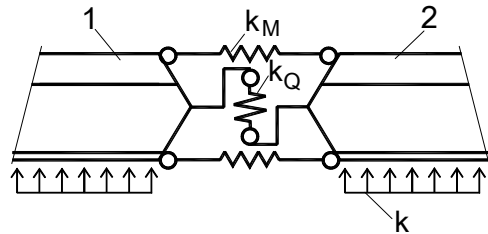


Рис. 6

Рассмотрен расчет рельсов в зоне стыка при действии одной сосредоточенной силы.

Для общего случая упругих связей в узле (рис. 6) с упругими постоянными k_{Mi} и k_{Qi} будем иметь уравнение, аналогичное (1.2):

$$v^{IV} + 4\alpha^4 v(x) = \frac{q(x)}{EI_0} + \sum_{i=1}^n \Delta v'(x_i) \sigma_3(x - x_i) + \sum_{i=1}^n \Delta v(x_i) \sigma_4(x - x_i), \quad (2.1)$$

$$\text{где } \Delta v(x_i) = v(x_i + 0) - v(x_i - 0) = \frac{Q(x_i)}{k_{Qi}}.$$

Его решение имеет следующий вид:

$$v(x) = v_0 Y_1(\alpha \cdot x) + \frac{\theta_0}{\alpha} Y_2(\alpha \cdot x) - \frac{M_0}{\alpha^2 EI} Y_3(\alpha \cdot x) - \frac{Q_0}{\alpha^3 EI} Y_4(\alpha \cdot x) + v^*(x) + \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^n \Delta v'(x_i) Y_2(\alpha(x - x_i)) \cdot \sigma_0(x - x_i) + \sum_{i=1}^n \Delta v(x_i) Y_1(\alpha(x - x_i)) \cdot \sigma_0(x - x_i).$$

Исключив затем промежуточные параметры $\Delta v'(x_i)$ и $\Delta v(x_i)$, получим выражение для перемещений $v(x)$, зависящее только от начальных параметров и некоторых функций влияния, которые будут иметь разрывы непрерывности I-го рода.

Получено аналитическое решение справедливо при различных коэффициентах жесткости упругого основания и упругих связей узла.

Ниже приведено решение при следующих исходных данных (кН, м):

$$\begin{aligned} L_F &:= (10 \ 12,1 \ 14,2 \ 18,6 \ 20,7 \ 22,8) & L_F &:= L_F^T \\ F &:= (0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0) \cdot 100 & F &:= F^T \\ L_{\max} &:= 30 & EI &:= 3,127 \cdot 10^3 & k &:= 2 \cdot 10^3 \\ L_H &:= 15 & k_M &:= ,3 \cdot EI & k_Q &:= ,0001 \cdot EI \end{aligned}$$

На рис. 7 и 8 построены эпюры внутренних усилий и перемещений, возникающих в зоне стыка.

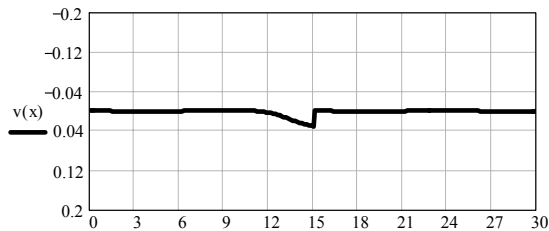


Рис. 7

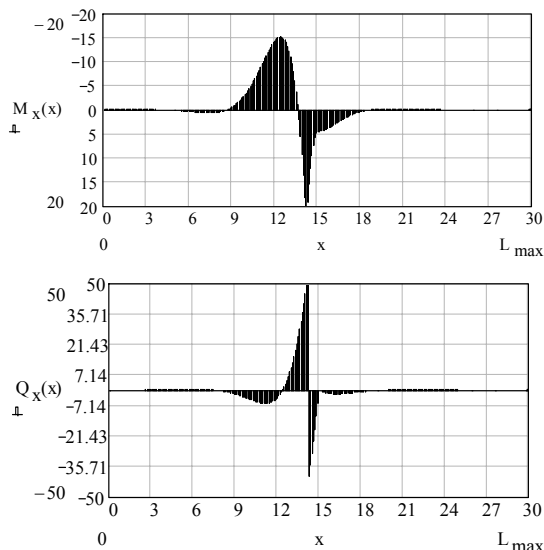


Рис. 8

При учете только связи, сопротивляющейся повороту концов стержней относительно друг друга (узел типа упругий шарнир), величина изгибающего момента в стыке уменьшается

пропорционально жесткости упругого шарнира, а поперечная сила не изменяется.

При малой жесткости упругого шарнира, через стык передается только поперечная сила. Величины максимальных изгибающих моментов снижаются на 30 % при повышении коэффициента жесткости упругого основания в два раза.

При малых жесткостях обеих связей, через стык не передается не только изгибающий момент, но и поперечная сила.

При малой жесткости упругой связи, сопротивляющейся только вертикальному перемещению концов рельсов относительно друг друга, разница в вертикальных перемещениях рельсов по обе стороны стыка достигает нескольких сантиметров, в зависимости от жесткости основания.

3. В качестве последнего примера рассмотрен расчет четырех стержней соединенных упругими шарнирами и лежащих на упругом основании (рис. 9). Составная балка закреплена по краям и нагружена симметричной нагрузкой.

Исходные данные (кН, м) следующие: $L_{\max} = 10$, $L = (1 \ 2 \ 3)0,25L_{\max}$, $q = 5$, $F = 4$, $\alpha_F = L_{\max} / 2$, $\alpha_{q1} = 1$, $\alpha_{q2} = L_{\max} - 1$. Жесткости упругих шарниров имеют следующие значения

$$k_M := \begin{pmatrix} ,01 \\ 1 \\ ,01 \end{pmatrix} \cdot EI.$$

На рис. 10 сплошной линией показана упругая линия составной балки, а штриховой — линия изменения углов поворота.

Как видно из приведенных результатов, в местах шарнирного соединения участков непрерывность обеспечивается только по прогибам, а углы поворотов терпят разрывы.

Эпюры внутренних усилий приведены на рис. 11 и 12.

Значения перемещений в характерных сечениях приведены ниже:

$$\begin{aligned} v(L_1) &= 0,017 & \theta(L_1) &= 4,759 \cdot 10^{-3} \\ v(L_2) &= 0,024 & \theta(L_2) &= 1,707 \cdot 10^{-14} \\ v(L_3) &= 0,017 & \theta(L_2 - 0,01) &= 2,277 \cdot 10^{-3} \\ & & \theta(L_2 + 0,01) &= -2,277 \cdot 10^{-3} \\ & & \theta(L_3) &= -4,759 \cdot 10^{-3} \end{aligned}$$

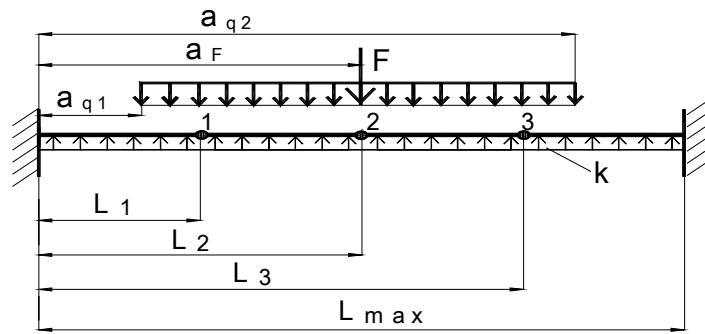


Рис. 9

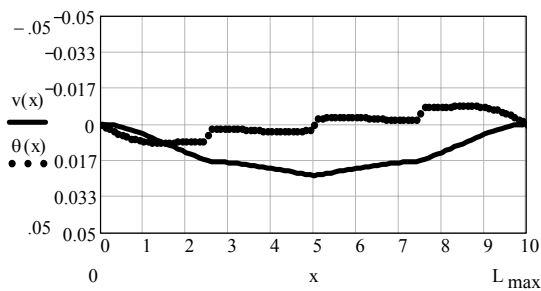


Рис. 10

Изгибающие моменты в характерных сечениях принимают следующие значения:

$$M_x(0) = -2,447;$$

$$M_x(L_1) = 0,012;$$

$$M_x(L_2) = 0,893;$$

$$M_x(L_3) = 0,012;$$

$$M_x(L_{\max}) = -2,447.$$

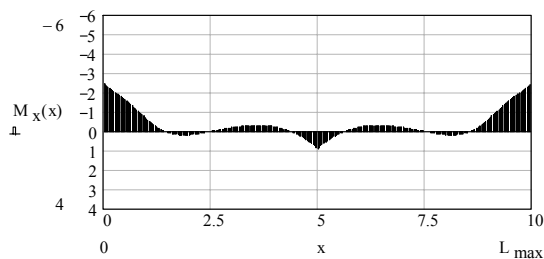


Рис. 11

Из приведенных результатов видно, что погрешность вычислений при расчете не накапливается. Это является одним из достоинств этого способа решения.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Ржаницын, А. Р. Строительная механика [Текст] / А. Р. Ржаницын. – М.: Высш. шк., 1982. – 400 с.
2. Лазарян, В. А. Обобщенные функции в задачах механики [Текст] / В. А. Лазарян, С. И. Конашенко. – К.: Наук. думка, 1974. – 192 с.
3. Коломиец, В. П. Расчеты в зоне стыков [Текст] / В. П. Коломиец // Путь и путевое хозяйство. – 2005. – № 7. – С. 22-26.

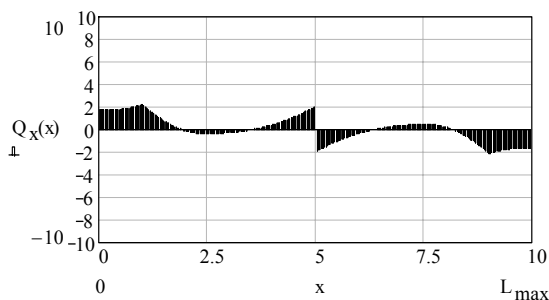


Рис. 12

Поступила в редколлегию 25.03.2010.

Принята к печати 02.04.2010.