УДК 532.593

И.Т. Селезов[1], В.Н. Кузнецов[2], Д.О. Черников[1]

ВЛИЯНИЕ ОДНОВРЕМЕННЫХ ДОННЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ НА ФОРМИРОВАНИЕ ВОЛННЫ НА ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ

Исследуется распространение поверхностных гравитационных волн при их возбуждении несколькими разнесенными донными источниками. Задача рассматривается в потенциальной постановке для каждого источника и общее решение получается суперпозицией этих решений. Применяется интегральное преобразование Ханкеля по радиальной координате и преобразование Лапласа по времени с последующим численным обращением. Представлены и анализируются численные результаты. Показано, что при определенных условиях возможно как и усиление генерации волн, так и их ослабление, что существенно для генерации волн цунами подводными землетрясениями.
КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: волны на воде, генерация волн, разнесенные источники

Досліджуэться розповсюдження поверхневих хвиль при іхному збуренні декількома рознесеннеми донними джерелами.Задача розглядається в потенціальній постановці для кожного джерела і загальний розв’язок одержуетьсясуперпозиціэю цих розв’язків. Застосовується інтегральне перетворення Ханкеля по радіальній координаті та перетворення Лапласа за часом з наступним чисельним оберненням. Наведені та аналізуются чисельні результати. Показано, що при певних умовах можливе як посилення генерації хвиль, так і їх послаблення, що суттево для генерації хвиль цунамі підводними землетрусами.
КЛЮЧОВІ СЛОВА: хвилі на воді, генерація хвиль, разнесені джерела

Propagation of surface gravity waves under their excitation by some spaced sources is investigated. The problem is considered in potential statement for each source and a total solutions are obtained by superposition of these solutions. The integral Hankel transform in a radial coordinate and the Laplace transform in time with consequent numerical inverse are used. Numerical results are presented and analysed. It is shown that at certain conditions it is possible both enhance of wave generation and their mitigation that is essential for wave tsunami generation by underwater earthquakes.
KEY WORDS: water waves, bottom sourses, excitation

1. **Введение.** Задача о движении жидкости в слоях конечной глубины со свободной поверхностью представляют большой интерес в различных областях человеческой деятельности и прежде всего это течения в океанологии, вызванные землетрясениями и вулканической деятельностью. Проблема описания волновых движений в океанологии в настоящее время усиленно исследуется в основном с целью предсказания возникновения цунами, последствий и поиска путей смягчения их воздействий на береговую зону. Не вдаваясь в подробную библиографию по вопросам генерации океанических волн, которая насчитывает значительное количество наименований, укажем на монографию [1], содержащую систематические данные наблюдений за цунами и другими явлениями распространения волн в мировом океане, а также на работы [2-5], близкие по тематике к данной работе авторов.

Распространение неустановившихся волновых движений представляет собой значительно более сложную проблему, чем распространение регулярных волн. Известный метод решения этой задачи, основанный на построении функции Грина, позволяет получить решение только для простейших форм отклонения и мгновенной подвижки дна. В работе [6] рассматривается задача об определении формы свободной поверхности слоя жидкости в рамках классической постановки теории малых волн Коши-Пуассона для идеальной жидкости. Предложенный в этой работе метод сводит решение задачи к решению некоторого интегрального или интегрально-дифференциального уравнения для некоторой гидромеханической функции на свободной поверхности. В более общем случае решение может быть получено с помощью теории интегральных преобразований [7, 8].

В данном сообщении рассматривается задача генерации волн на поверхности жидкости конечной глубины несколькими одновременными донными возмущениями, которые включаются в начальный момент времени $t = 0$. Задача решается в линейной постановке и поэтому применяется принцип суперпозиции решений. Предполагается, что в начальный момент времени $t = 0$ задается скорость локального подъема донной поверхности с амплитудой $\eta(r,t)$, нарастающая во времени до максимальной величины, а затем экпотенциально спадающая. Функция возбуждения дна $\psi(r)$ определена в бесконечной области $r > 0$ функцией $\psi(r) = \xi(\xi^2 + r^2)^{-\frac{3}{2}}, \xi > 0$. Эта функция асимптотически убывает с увеличением радиальной координаты r и поэтому при решении задачи логично применить интегральное преобразование Ханкеля по r. Преобразование Ханкеля обратно самому себе и поэтому для него не требуется специальных таблиц обратных преобразований.

Численное обращение преобразования Лапласа может проводится различными методами. В [9] исследуется алгоритм обращения с применением рядов Фурье по синусам. В работе [10] рассмотрены методы, основанные на обращении с помощью полиномов Лежандра и Чебышева, рядов Фурье, функций Лагера.

Здесь для вычисления оригинала применяется метод [11], согласно которому требуются только значения преобразования $F(s)$ при равностоящих значениях $s=(2n+1)\sigma$, где σ - произвольное число больше нуля, а $n=0,1,\ldots$ Переменная t заменяется на θ и функцию $\varphi(\theta)$, которая под интегралом разлагается в ряд Фурье по функциям $\sin(2n+1)\theta$. Параметр σ при малых t выбирается большим, при больших t - малым.

2. **Постановка задачи.** Рассматриваем в цилиндрической системе координат (r,θ,z) область D, заполненную невязкой несжимаемой жидкостью плотностью ρ. Предполагаем, что жидкость ограничена сверху свободной поверхностью $z=0$ и донной поверхностью $z=-H_0$. В начальный момент времени $t=0$ жидкость покоится и находится под действием гравитационных сил, направленных в отрицательном направлении оси oz. Также предполагаем, что начальное возмущение генерируется подъемом горизонтального дна одновременно не менее чем в двух местах. Представляет интерес исследовать, как эволюционирует свободная поверхность жидкости при действии такого типа возмущений.

Движение предполагается безвихревым, что позволяет ввести потенциал скорости φ, определяемой по формуле $\vec{V}=\vec{N}\varphi$, где $\vec{V}$ - вектор скорости, $\vec{N}$ - оператор градиента. Это вместе с условием несжимаемости приводит к уравнению Лапласа для φ. Для решения начально-краевой задачи необходимо также, чтобы при любом t величина $\vec{V}$ исчезала на бесконечности. Из уравнения Бернулли следуют кинематическое условие на свободной поверхности (поверхность должна быть материальной) и динамическое условие – давление на свободной поверхности постоянной.

Математическая постановка начально-краевой задачи сводится к определению потенциала скоростей $\varphi(r,\theta,z,t)$, удовлетворяющих уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)=0,$$
$$-H_0\le z\le 0, r>0, t>0, \tag{1}$$

а также следующим граничным и начальным условиям на свободной поверхности:

(2)

на донной поверхности:

$$\frac{\partial\varphi(r,\theta,z,t)}{\partial z}\bigg|_{z=-H_0}=\frac{\partial\eta^d}{\partial t}; \tag{3}$$

начальные условия:

$$\varphi(r,\theta,z,t)\big|_{t=0}=\frac{\partial\varphi(r,\theta,z,t)}{\partial t}\bigg|_{t=0}=\eta^d\big|_{t=0}=0, \tag{4}$$

где η^d - отклонение дна, η- отклонение свободной поверхности, g – ускорение свободного падения.

Будем предполагать, что возмущение дна осесимметрично, причем при $t=0$ включается возмущение заданное в виде $\eta^d(r,t)=\eta_0\psi(r)f(t)$. Если при $t=0$ включается одновременно два возмущения, то функция η_1^d и η_2^d задаются в виде

$$\eta_1^d=\eta_{01}\psi_1(r)f_1(t),\qquad \eta_2^d=\eta_{02}\psi_2(r)f_2(t), \tag{5}$$

В дальнейшем вводится безразмерные переменные по формулам (далее черточки опущены)

$$\bar{r}=\frac{r}{r_0},\bar{r_0}=1,\bar{z}=\frac{z}{H_0},\tau=t\frac{C_{sh}}{r_0},\bar{\eta}=\frac{\eta}{\eta_0},\bar{\varphi}=\frac{\varphi}{r_0C_{sh}},\beta=\frac{r_0}{H_0}, \tag{6}$$

где H_0 - глубина жидкости, r_0 - радиус возмущения отклонения дна (характерная величина); C_{sh} - скорость волн на мелкой воде (предельное значение длинноволнового приближения), $C_{sh}=\sqrt{gH_0}$.

Постановка задачи (1)-(4) в безразмерной форме в соответствии с (6) примет вид

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}+\beta^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0, -1\le z\le 0, r>0, t>0. \tag{7}$$

$$\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}+\beta^2\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\bigg|_{z=0}=0, \eta=-\frac{1}{g}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\bigg|_{z=0}, \beta^2\frac{\partial\varphi}{\partial t}\bigg|_{z=-1}=\frac{\partial\eta^d}{\partial t}. \tag{8}$$

Начальные условия (4) в безразмерной форме в соответствии с (6) остаются без изменения.

3. **Построение и анализ решения.** Для решения задачи применяем интегральное преобразование Лапласа по времени t [9]

$$\varphi^L(r,z,s)=\int_0^\infty\varphi(r,z,t)e^{-st}dt \tag{9}$$

где s– параметр преобразования Лапласа.

После применения (9) к (7)-(8) с учетом начальных условий (3) получаем постановку задачи в пространстве изображений Лапласа

$$\frac{\partial^2\varphi^L}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi^L}{\partial r}+\beta^2\frac{\partial^2\varphi^L}{\partial z^2}=0,-1\le z\le 0,r>0, \tag{10}$$

$$\left(s^2\varphi^L+\beta^2\frac{\partial\varphi^L}{\partial z}\right)\Big|_{z=0}=0;\quad \beta^2\frac{\partial\varphi^L}{\partial z}\Big|_{z=0}=s\eta_0\psi^d(r)f^{dL}(s). \tag{11}$$

Применим интегральное преобразование Ханкеля по радиальной координате r:

$$\varphi^{LH}(k,z,s)=\int_0^\infty\varphi^L(r,z,s)rJ_0(kr)dr, \tag{12}$$

где k - параметр преобразования Ханкеля.

После применения преобразования (12) к задаче (10), (11), получаем в пространстве изображений Лапласа и Ханкеля следующую задачу:

$$\frac{\partial^2\varphi^{LH}}{\partial z^2}-\left(\frac{k}{\beta}\right)^2\varphi^{LH}=0,-1\le z\le 0, \tag{13}$$

$$s^2\varphi^{LH}+\beta^2\frac{d\varphi^{LH}}{dz}\Big|_{z=0}=0, \tag{14}$$

$$\beta^2\frac{d\varphi^{LH}}{dz}\Big|_{z=0}=s\eta_0\psi^{dH}(k)f^{dL}(s). \tag{15}$$

Из решения задачи (11)-(13) получаем выражение для потенциала скоростей

$$\varphi^{LH}(k,z,s)=-\frac{1}{2}\frac{s}{\beta k}\eta_0\psi^{dH}(k)f^{dL}(s)\frac{(s^2+\beta k)e^{-\frac{k}{\beta}z}-(s^2-\beta k)e^{\frac{k}{\beta}z}}{s^2ch\frac{k}{\beta}+\beta k sh\frac{k}{\beta}}. \tag{16}$$

В данном сообщении рассматривается задача генерации волн на воде в жидкости конечной глубины несколькими одновременными донными возбуждениями, которые могут отличаться между собой как силой, так и быстротой нарастания и спада.

Предполагалось, что возмущение генерируется подъемом горизонтального дна

$$f^d(t)=te^{-\alpha t},\qquad \text{при } t\ge 0 \tag{17}$$

и одновременным включением нескольких возмущений. В частности, если рассматривается два возмущения, расположенных на расстоянии l, то

$$\psi_1^d(r)=\xi(\xi^2+r^2)^{-\frac{3}{2}},\qquad \psi_2^d=\xi(\xi^2+r^2)^{-\frac{3}{2}}H(r-l),\qquad \xi>0, \tag{18}$$

где $H(r)$ функция Хэвисайда.

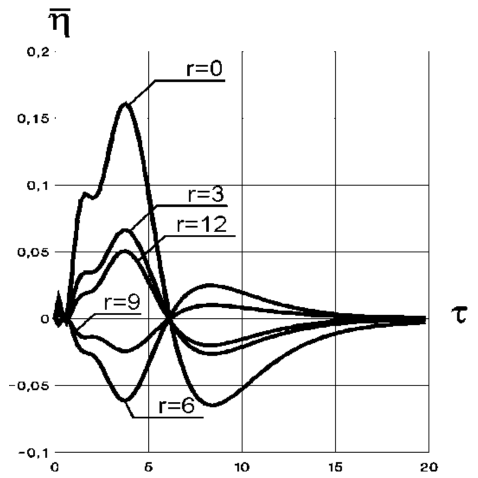
Переход в пространство оригиналов для отклонения свободной поверхности η_n после обращения преобразования Ханкеля в пространстве изображений Лапласа имеет вид

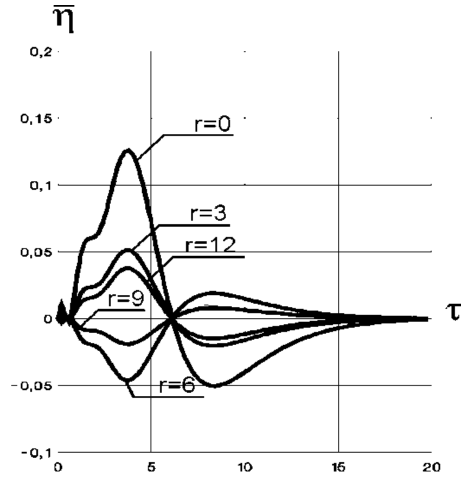
$$\eta_n^L=s^2\eta_0 f_n^{dL}\int_0^\infty\frac{e^{-\xi\lambda}\lambda J_0(\lambda kr)}{s^2ch(k\lambda)+\lambda k sh(\lambda k)}d\lambda \tag{19}$$

Переход в пространство оригиналов η_n в формуле (19) осуществляется численным методом на основе рядов Фурье [11] при следующих параметрах: $\alpha=2.5,\ \xi=0.5$ и $\alpha=2.5,\ \xi=1.0$. Как видно из (19), для перехода от преобразования Лапласа к оригиналам необходимо вычислить интеграл в (19), варьируя параметр преобразования Лапласа s с соответствующим подбором корректирующего параметра σ, входящего в алгоритм обращения.

Исследовалось отклонение свободной поверхности η/η_0 для различных удалений от эпицентра $r=0$. На рис. 1, 2 показаны кривые, соответствующие одному возмущению ($r=0$) для параметров (рис.1) и $\alpha=2.5,\ \xi=1.0$ (рис.2). На рис.3,4 показаны кривые при тех же параметрах, но для двух одновременных возмущениях дна. Причем первое возмущение расположено в эпицентре($r=0$),а второе возмущение - на расстоянии $l=4$ от эпицентра. На рис.5,6 показаны отклонения свободной поверхности при трех одновременных возмущениях $(r=0,\ l_1=4,\ l_2=6)$.

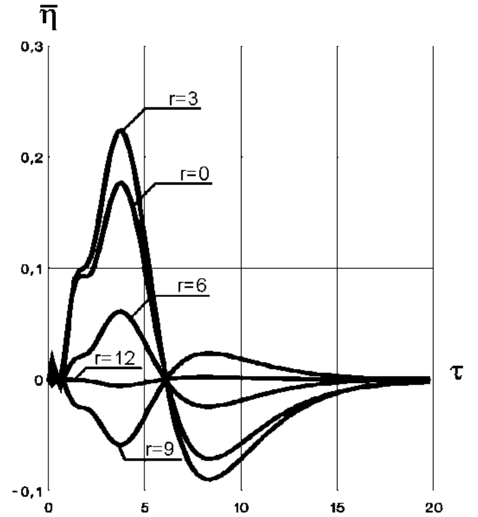
$\bar{\eta}$ $\alpha=25,$ $\xi=0.5$ $\bar{\eta}$ $\alpha=2.5,\ \xi=1.0$

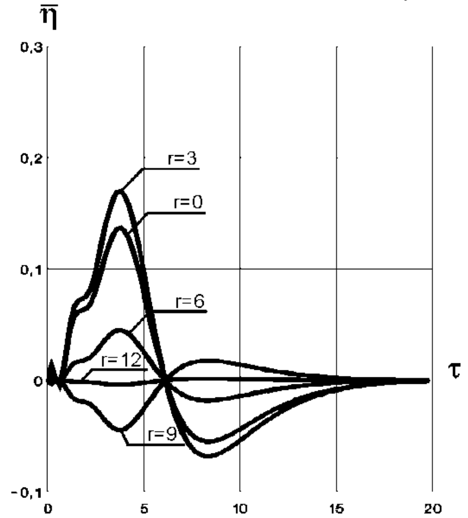




$\bar{\eta}$ $\alpha = 25,$ $\xi = 0.5$

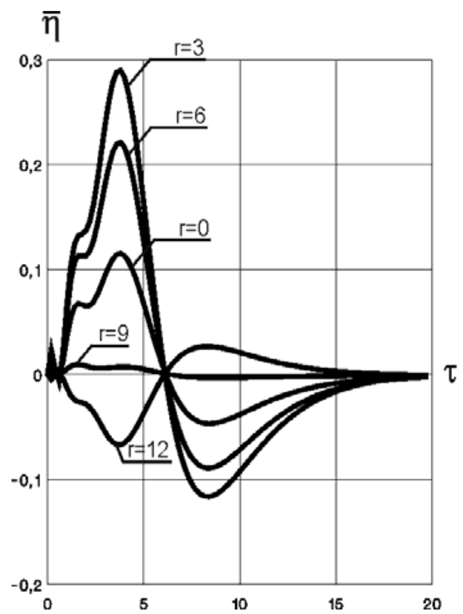
$\bar{\eta}$ $\alpha = 2.5,$ $\xi = 1.0$

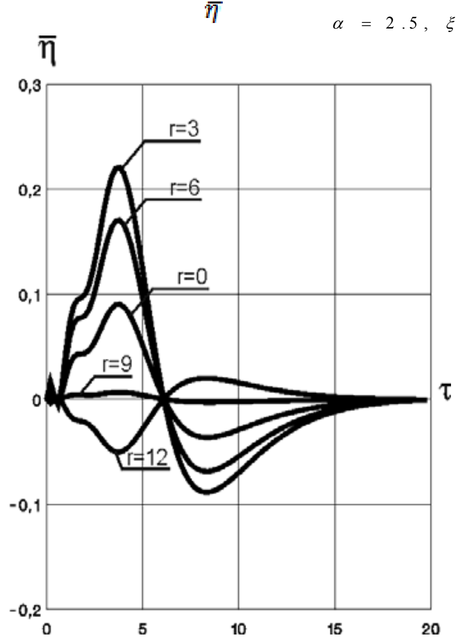




$\bar{\eta}$ $\alpha = 25,$ $\xi = 0.5$

$\bar{\eta}$ $\alpha = 2.5,$ $\xi = 1.0$





ВЫВОДЫ

Из сравнения отклонения свободной поверхности жидкости при при параметра (увеличение ξ приводит к более резкому спаду импуьса) видно, что при увеличении этого параметра амплитуда отклонения уменьшается.

Выявлен эффект взаимного погашения возмущений, т.е. появление так называемых «зон спокойствия» - $r = 12$ при двух возмущениях и $r = 9$ при трех одновременных возмущениях донной поверхности.

Список литературы

1. Мурти Т.С. Сейсмические морские волны цунами/ Т.С.Мурти пер. с англ. [под. ред. проф. А.В. Некрасова].- Л. 1981. – 448с
2. Пелиновский Е.Н. Гидродинамика волн цунами / Е.Н.Пелиновский – Нижний Новгород: Ин-т прикл. физики РАН. 1996. – 276с.
3. Вейль П. Популярная океанография / П.Вейль.-Л., 1977.-504 с.
4. Selezov I.T. Modeling of tsunami wave generation and propagation // Int. J. Fluid Mech. Research. 2006.- 33.№.1.-p.44-54.
5. Geist E.L., Titov V.V., Synolakis C.E. Tsunami: Wave of change // Scientific Amer. December. 2005.
6. Гоман О.Г. Об одном подходе к решению задачи Коши-Пуассона для слоя жидкости конечной глубины /О.Г.Гоман, Е.А.Тихая // Вісник Дніпропетр. Ун-ту. Серія : Механіка. – 2011. – Вин. 15,т.1.- С. 91-97.
7. Селезов И.Т. Генерация поверхностных гравитационных волн донным повторяющимся во времени импульсом /И.Т.Селезов, В.Н.Кузнецов, Д.О.Черников// Мат. методы та физико-мех. поля. – 2009. – 52, №3. – с. 140-145.
8. Черников Д.О. Генерация волн подвижками донной поверхности / Д.О.Черников // Вісник Дніпропетр. Ун-ту. Серія: Механіка. – 2011.- Вин. 15, т.1. – с. 89-93.
9. Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и z-преобразования. / Г.Деч - М. 1971.-228с.
10. Ланцош К. Практические методы прикладного анализа / К. Ланцош.-М., 1981.-524с.
11. Крылов В.Н. Методы приближенного преобразования Лапласа / В.Н.Крылов, Н.С.Скобля. – М., 1974. – 224с.

ВПЛИВ ОДНОЧАСНИХ ДОННИХ ЗБУРЕНЬ НА ФОРМУВАННЯ ХВИЛЬ НА ПОВЕРХНІ РІДИНИ

Досліджується відхилення вільної поверхні при декількох одночасних збуреннях донної поверхні, в рамках моделі рідини кінцевої глибини. Рідина вважається нестислива і нев'язка, що дозволяє розглядати задачу потенційній постановці. Завдання вирішується на основі інтегрального перетворення Ханкеля по радіальної координаті та інтегрального перетворення Лапласа за часом з наступним чисельним зверненням. Представленій аналізуються чисельні результати для осесиметричного збудження горизонтальної донної поверхні (підводні землетруси). Отримано результати для кількох одночасних випадків переміщення дна.

IMPACT OF SAME TIME MOMENTUM BOTTOM IMPULSES ON SURFACE WAVE FORMATION

Deviation research of the free surface for multiple simultaneous perturbations of the bottom surface, model of finite depth fluid .The fluid is assumed incompressible and in viscid, which can be considered a potential problem in the formulation .The problem is solved on the basis of the Hankel integral transform along the radial coordinate and the integral Laplace transform in time followed by numerical inversion. We present and analyze numerical results for axisymmetric perturbations of the horizontal bottom surface (under water earthquake).

[1] Институт гидромеханики НАН Украины. Киев

[2] Днепропетровский Национальный Университет ж-д транспорта. Днепропетровск