

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE OF UKRAINE

Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара
Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара
Dnepropetrovsk National University named after Oles Honchar

**ПРОБЛЕМИ
ОБЧИСЛЮВАЛЬНОЇ МЕХАНІКИ
І МІЦНОСТІ КОНСТРУКЦІЙ**

Збірник наукових праць

**ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ
И ПРОЧНОСТИ КОНСТРУКЦИЙ**

Сборник научных трудов

**PROBLEMS OF COMPUTATIONAL MECHANICS
AND STRENGTH OF STRUCTURES**

Collection of scientific articles

21

випуск

Видається
з 1997 р.

Дніпропетровськ
Літа
2013

УДК 539.3

Н. И. Ободан, д-р техн. наук, Г. М. Гавеля, М. Я. Киселев, канд. техн. наук

ВЛИЯНИЕ ПЕРЕМЕННОГО МОДУЛЯ УПРУГОСТИ НА НЕЛИНЕЙНОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

В зависимости от отношения модулей упругости рассматривается поведение анизотропной цилиндрической оболочки при неоднородном в радиальном направлении нагружении «ветрового» типа, исследуется влияние изменчивости внешней нагрузки и вида граничных условий на торцах оболочки на величину критической нагрузки.

Ключевые слова: анизотропная оболочка, критическая нагрузка, полный функционал, полиномы Эрмита, нагрузка «ветрового» типа.

Введение. Современные тенденции использования композиционных материалов, в частности разномодульных, в ракетостроении, машиностроении, медицине и др. обуславливает необходимость проведения широкомасштабного численного эксперимента с целью анализа влияния указанных свойств композиционного материала на критические нагрузки изготовленных из него тонкостенных оболочек, находящихся в условиях существенно неоднородного нагружения. Вышесказанное определяет актуальность рассматриваемой задачи.

В последнее время появилось большое количество публикаций, связанных с построением модели деформирования композиционных оболочек [1, 5], а также с учетом особенности их деформирования [2, 3, 6]. Между тем анализ влияния разномодульности материала в сочетании с учетом нелинейности деформирования остается неисследованным. В то же время анализ каждого из указанных факторов [3] показывает, что их влияние на критические нагрузки и нелинейное поведение велико. Настоящая работа посвящена исследованию указанного взаимодействия.

Постановка задачи и математическая модель. Рассматривается круговая цилиндрическая оболочка под действием неравномерного внешнего давления, произвольно изменяющегося в окружном направлении и мало изменяющегося по длине оболочки. Оболочка изготовлена из ортотропного материала, причем оси ортотропии совпадают с направлениями главных кривизн оболочки. Для рассматриваемого способа нагружения характерна малая изменчивость изгибных форм в продольном направлении и существенная нелинейность докритического состояния оболочки, поэтому необходимо воспользоваться соотношениями нелинейной теории тонких упругих оболочек.

С помощью вариационного подхода, изложенного в [3], который позволяет провести упрощения всех соотношений при построении приближенной модели, решение может быть получено как точка стационарности полного функционала

$$\delta \mathfrak{D}(U, q) = 0, \quad (1)$$

который имеет вид

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}(U, q) = & \iint_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2} \left[C_{11} \epsilon_{11}^2 + 2C_{12} \epsilon_{11} \epsilon_{22} + C_{22} \epsilon_{22}^2 + G_{12} \epsilon_{12}^2 + G_{23} \epsilon_{23}^2 + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{t^2}{12} \left(C_{11} k_{11}^2 + 2C_{12} k_{11} k_{22} + C_{22} k_{22}^2 + G_{12} k_{12}^2 \right) \right] + \right. \\ & + q w - T_{11} \left(\epsilon_{11} - \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{t}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right)^2 \right) - T_{22} \left(\epsilon_{22} - \frac{\partial v}{\partial \eta} - w - \frac{t}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial \eta} \right)^2 \right) - \\ & - T_{12} \left(\epsilon_{12} - \frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{\partial w}{\partial \xi} \frac{\partial w}{\partial \eta} \right) - Q_{22} \left(\epsilon_{23} - \gamma - \frac{\partial w}{\partial \eta} + v \right) - \\ & \left. - t^2 \left[M_{11} \left(k_{11} + \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right) + M_{22} \left(k_{22} - \frac{\partial \gamma}{\partial \eta} \right) + M_{12} k_{12} + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial \gamma}{\partial \xi} \right) \right] \right\} d\xi d\eta - \\ & - \int_{\Gamma_1} \left[T_{11} (u - u^*) + T_{12} (v - v^*) + Q_{11} (w - w^*) - t^2 M_{11} \left(\frac{\partial w}{\partial \xi} - \frac{\partial w^*}{\partial \xi} \right) + \right. \\ & \left. + t^2 M_{12} (\gamma - \gamma^*) \right] d\eta - \int_{\Gamma_2} \left[T_{11}^* u + T_{12}^* v + Q_{11}^* w - t^2 M_{11}^* \frac{\partial w}{\partial \xi} + t^2 M_{12}^* \gamma \right] d\eta. \end{aligned}$$

Здесь Ω — поверхность оболочки; Γ_1 и Γ_2 — граничные контуры, на которых заданы соответственно перемещения и усилия.

Коэффициенты упругости выражаются через технические характеристики материала следующим образом:

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{\sqrt{E_1/E_2}}{1 - \mu_{12}\mu_{21}}, \quad C_{12} = \frac{\mu_{12}\sqrt{E_1/E_2}}{1 - \mu_{12}\mu_{21}}, \\ C_{22} &= \frac{\sqrt{E_2/E_1}}{1 - \mu_{12}\mu_{21}}, \quad G_{12} = \frac{G}{\sqrt{E_1 E_2}}, \quad G_{23} = \frac{G'}{\sqrt{E_1 E_2}}. \end{aligned}$$

Все безразмерные величины связаны с физическими следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} (T_{11}, T_{22}, T_{12}, Q_{11}, Q_{22}) &= \frac{(T_{11}^\Phi, T_{22}^\Phi, T_{12}^\Phi, Q_{11}^\Phi, Q_{22}^\Phi)}{ht\sqrt{E_1 E_2}}; \quad q = \frac{q^\Phi}{t^2\sqrt{E_1 E_2}}; \\ (M_{11}, M_{22}, M_{12}) &= \frac{(M_{11}^\Phi, M_{22}^\Phi, M_{12}^\Phi)}{h^2 t^2 \sqrt{E_1 E_2}}; \quad \xi = R^{-1}x, \quad \eta = R^{-1}y; \end{aligned}$$

$$(u, v, w) = h^{-1} (u^{\Phi}, v^{\Phi}, w^{\Phi}); (k_{11}, k_{22}, k_{12}) = R t^{-1} (k_{11}^{\Phi}, k_{22}^{\Phi}, k_{12}^{\Phi}),$$

где $t = h/R$, h, R — толщина и радиус оболочки; E_1, E_2 — коэффициенты упругости материала в продольном и поперечном направлениях.

Из условия стационарности функционала \mathcal{E} следуют физические и геометрические соотношения, уравнения равновесия и граничные условия рассматриваемой оболочки. Число неизвестных функций задачи уменьшается в функционале $\mathcal{E}(U, q)$, когда предварительно выполняются следующие зависимости, которые получены из физических и геометрических соотношений:

$$\epsilon_{11} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{t}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right)^2, \quad \epsilon_{12} = \frac{T_{12}}{G_{12}}, \quad \epsilon_{22} = \frac{T_{22}}{G_{22}} - \frac{C_{22}}{C_{22} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{t}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right)}, \quad \epsilon_{23} = \gamma + \frac{\partial w}{\partial \eta} - v;$$

$$k_{11} = -\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}, \quad k_{22} = 12 \frac{M_{22}}{C_{22}} + \frac{C_{12}}{C_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}}, \quad k_{12} = \frac{\partial \gamma}{\partial \xi} - \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta}.$$

Частный функционал принимает вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^1 = \iint_{\Omega} & \left\{ \frac{1}{2} \left(C_{11} - \frac{C_{12}^2}{C_{22}} \right) \left(\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right)^2 + t \frac{\partial u}{\partial \xi} \left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{t^2}{4} \left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right)^4 \right) - \frac{1}{2C_{22}} T_{22}^2 + \right. \\ & + \frac{C_{12}}{C_{22}} T_{22} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{t}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right)^2 \right) + T_{22} \left(\frac{\partial v}{\partial \eta} + w + \frac{t}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial \eta} \right)^2 \right) + T_{12} \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} + \right. \\ & + \left. \frac{\partial w}{\partial \xi} \frac{\partial w}{\partial \eta} \right) - \frac{1}{2G_{12}} T_{12}^2 + G_{23} \left(\frac{1}{2} \gamma^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial \eta} \right)^2 + \frac{1}{2} v^2 + \gamma \frac{\partial w}{\partial \eta} - \gamma v - \frac{\partial w}{\partial \eta} v \right) + \\ & + t^2 \left[\frac{1}{24} \left(C_{11} - \frac{C_{12}^2}{C_{22}} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right)^2 - \frac{C_{12}}{C_{22}} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} M_{22} + M_{22} \frac{\partial \gamma}{\partial \eta} - \right. \\ & \left. - \frac{6}{C_{22}} M_{22}^2 + \frac{G_{12}}{6} \left(\left(\frac{\partial \gamma}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} - 2 \frac{\partial \gamma}{\partial \xi} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} \right) \right] + q w \Bigg\} d\xi d\eta - \mathcal{E}_\Gamma, \end{aligned} \quad (2)$$

где \mathcal{E}_Γ — контурные интегралы.

Неизвестными функциями задачи являются $u, v, w, \gamma, T_{22}, T_{12}, M_{22}$. Для названных функций, удовлетворяющих граничным условиям, например шарнирного опирания

$$T_{11} = M_{11} = w = v = \gamma = 0 \quad \text{при} \quad \xi = 0, \quad (3)$$

из условия стационарности функционала \mathcal{E}^1 можно получить следующие разрешающие уравнения в частных производных:

$$\begin{aligned} & \left(\tilde{C}_{11} - \frac{C_{12}^2}{C_{22}} \right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + t \frac{\partial w}{\partial \xi} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right) + \frac{C_{12}}{C_{22}} \frac{\partial T_{22}}{\partial \xi} + \frac{\partial T_{12}}{\partial \eta} = 0 ; \\ & \frac{\partial T_{22}}{\partial \eta} + \frac{\partial T_{12}}{\partial \xi} + G_{23} \left(v - \gamma - \frac{\partial w}{\partial \eta} \right) = 0 ; \\ & t \left(\tilde{C}_{11} - \frac{C_{12}^2}{C_{22}} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{t}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right) + t \frac{C_{12}}{C_{22}} T_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + t T_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + \\ & + 2t T_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \eta} + G_{23} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + \frac{\partial \gamma}{\partial \eta} - \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) - t^2 \left[\frac{1}{12} \left(\tilde{C}_{11} - \frac{C_{12}^2}{C_{22}} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} - \right. \\ & \left. - \frac{C_{12}}{C_{22}} \frac{\partial^2 M_{22}}{\partial \xi^2} + \frac{G_{12}}{12} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial \xi^2 \eta^2} - 2 \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^2 \eta} \right) \right] - T_{22} - q = 0 ; \\ & G_{23} \left(\gamma - v + \frac{\partial w}{\partial \eta} \right) - t^2 \left[\frac{\partial M_{22}}{\partial \eta} + \frac{G_{12}}{12} \left(\frac{\partial^2 \gamma}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^2 \eta} \right) \right] = 0 ; \\ & \frac{C_{12}}{C_{22}} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{t}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right) + \frac{\partial w}{\partial \xi} + w + \frac{t}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} - \frac{1}{C_{22}} T_{22} = 0 ; \\ & \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} + t \frac{\partial w}{\partial \xi} \frac{\partial w}{\partial \eta} - \frac{1}{G_{12}} T_{12} = 0 ; \quad \frac{\partial \gamma}{\partial \eta} - \frac{C_{12}}{C_{22}} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} - \frac{12}{C_{22}} M_{22} = 0 . \end{aligned}$$

Метод решения. Учитывая малую изменяемость изгибных форм в продольном направлении, решение задачи можно аппроксимировать по продольной координате небольшим числом гладких функций. Воспользуемся конечно-элементной аппроксимацией полиномами Эрмита третьей степени, которая обеспечивает непрерывность функций и их первых производных. Ограничимся расчленением оболочки в продольном направлении на два элемента. Используя симметрию конструкции и решения относительно сечения $\xi = L/(2R)$, можно рассмотреть только один элемент, удовлетворив условиям симметрии

$$T_{12} = \frac{\partial T_{22}}{\partial \xi} = \frac{\partial M_{22}}{\partial \xi} = u = \frac{\partial v}{\partial \xi} = \frac{\partial w}{\partial \xi} = \frac{\partial \gamma}{\partial \xi} = 0 \quad \text{при } \xi = L/(2R) .$$

Тогда решение задачи можно представить в виде

$$U(\xi, \eta) = U_1(\eta) H_1 + U_2(\eta) H_2 + U_3(\eta) H_3 + U_4(\eta) H_4 , \quad (4)$$

где $H_1 = 2s^3 - 3s^2 + 1$, $H_2 = s^3 - 2s^2 + s$, $H_3 = -2s^3 + 3s^2$, $H_4 = s^3 - s$, $s = 2\xi/l$, $l = L/R$ – безразмерная длина оболочки.

На граничном контуре аппроксимация (4) должна удовлетворять условиям шарнирного опирания (3). Представим решение U в виде:

$$\begin{aligned} u &= u_1 H_1 + u_2 H_2 + u_4 H_4; u_2 = -(l/l) w_2^2; v = v_2 H_2 + v_3 H_3; \\ w &= w_2 H_2 + w_3 H_3; \gamma = \gamma_2 H_2 + \gamma_3 H_3; \\ T_{22} &= T_2 H_2 + T_3 H_3; T_{12} = T_1 H_1 + T_4 H_4; M_{22} = M_2 H_2 + M_3 H_3. \end{aligned} \quad (5)$$

В этом случае все граничные условия, кроме условия $M_{11}=0$, удовлетворяются выбором амплитуд аппроксимации. Условие для M_{11} остается естественным для функционала \mathcal{E}^1 . Интеграл в выражении (2) примет вид

$$\mathcal{E}^1 = \frac{l^2}{12} \int_0^1 \left(C_{11} - \frac{C_{12}^2}{C_{22}} \right) \frac{\partial w}{\partial \xi} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} d\eta.$$

Подставим соотношения (5) в функционал (2), тогда все функции, зависящие от переменной ξ , будут известны, и по этой переменной можно выполнить интегрирование. Полученный функционал проварьируем по неизвестным независимым функциям $u_1, u_4, u_2, v_3, w_2, w_3, \gamma_2, \gamma_3, T_2, T_3, T_1, T_4, M_2, M_3$ и приравняем выражение при независимых вариациях нулю, выполнив, таким образом, условие стационарности функционала. Получим следующие уравнения:

$$\begin{aligned} T_j' P_{ij} &= \left(C_{11} - \frac{C_{12}^2}{C_{22}} \right) \left(u_j P_{i+4, j+4} + l w_j w_k P_{i+4, j+k, k+4} \right) + \frac{C_{12}}{C_{22}} T_j P_{i+4, j}; \\ T_j P_{ij} &= S_j P_{i+4, j} + G_{23} \left(v_j P_{ij} - \gamma_j P_{ij} - w_j' P_{ij} \right) \\ w_j'' &\left(P_{ij} G_{23} + \frac{l^2}{12} G_{12} P_{i+4, j+4} + l T_k P_{ijk} \right) = l \left(C_{11} - \frac{C_{12}^2}{C_{22}} \right) \left(u_j w_k P_{i+4, j+4, k+4} + \right. \\ &+ \frac{l}{2} w_j w_k w_l P_{i+4, j+4, k+4, l+4} \left. \right) + l \frac{C_{12}}{C_{22}} w_j T_k P_{i+4, j+4, k} - l w_j T_k' P_{ijk} + T_j P_{ij} + \\ &+ l w_j' S_k P_{i+4, jk} - l w_j' S_k P_{ij+4k} - l w_j' S_k P_{ij, 4k} - G_{23} \left(\gamma_j' P_{ij} - v_j' P_{ij} \right) + \\ &+ \left[\frac{1}{12} \left(C_{11} - \frac{C_{12}^2}{C_{22}} \right) w_j P_{i+8, j+8} - \frac{C_{12}}{C_{22}} M_j P_{i+8, j} + \frac{G_{12}}{12} \gamma_j' P_{i+4, j+4} \right] + q_j P_{ij}; \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned}
M_j' P_{ij} &= \frac{G_{12}}{12} (\gamma_j P_{i+4,j+4} - w_j' P_{i+4,j+4}) + \frac{G_{23}}{12} (\gamma_j P_{ij} + w_j' P_{ij} - v_j P_{ij}); \\
v_j' P_{ij} &= \frac{1}{C_{22}} T_j P_{ij} - w_j P_{ij} - \frac{t}{2} w_j' w_k' P_{ijk} - \frac{C_{12}}{C_{22}} \left(u_j P_{ij+4} + \frac{t}{2} w_j' w_k' P_{ij+4,k+4} \right); \\
u_j' P_{ij} &= \frac{1}{G_{12}} S_j P_{ij} - v_j P_{ij+4} - u_j' P_{ij} - t w_j' w_k' P_{ij+4k}; \\
\gamma_j' P_{ij} &= \frac{12}{C_{22}} M_j P_{ij} + \frac{C_{12}}{C_{22}} w_j P_{ij+8}.
\end{aligned}$$

Полученная система дополняется граничными условиями по координате η .

В данной работе рассматривались несколько вариантов граничных условий на торцах оболочки и соответственно систем уравнений, аналогичных (6):

- 1) $T_{11} = 0, \quad T_{12} = 0, \quad w = 0, \quad M_x = 0$;
- 2) $u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad w' = 0$;
- 3) $u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad M_x = 0$;
- 4) $T_{11} = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad w' = 0$;
- 5) $T_{11} = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad M_x = 0$.

Задача решается путем сведения краевой задачи (6) с соответствующими граничными условиями к задаче Коши методом Ньютона в сочетании с методом движения по параметру нагрузки [3].

Численный анализ. При численном расчете рассматривалось нелинейное деформирование цилиндрической оболочки под действием нагрузки "ветрового" типа

$$q = q_0 (\alpha + \beta \cos \eta)^m. \quad (8)$$

На рис. 1 представлены графики зависимостей критической нагрузки от соотношения модулей упругости в продольном и окружном направлениях для оболочки с геометрией $L/R = 2, \quad R/h = 100$ под нагрузкой с параметрами $\alpha = \beta = 0,5$ и $m = 6$ при разном закреплении торцов (7). Значение критической нагрузки $q_{кр}$ отнесено к критической нагрузке для изотропной оболочки q_H [1].

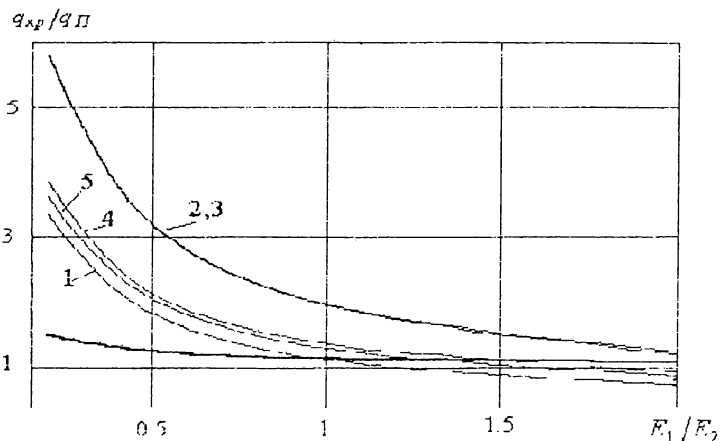


Рис. 1 – Зависимость критической нагрузки от соотношения модулей упругости

Номер кривой соответствует номеру граничных условий в формулах (7), жирной линией приведена кривая для равномерного внешнего давления при шарнирном опирании [3]. Из графика видно, что для всех видов граничных условий критическая нагрузка значительно выше для более "жесткой" в окружном направлении оболочки. Для граничных условий вида 2 и 3 из (7) значение критической нагрузки практически совпадает при любом соотношении модулей упругости. Для более "мягкой" в окружном направлении оболочки вид граничных условий слабо влияет на значение критической нагрузки. Из графиков (рис. 1) также видно, что наличие асимметрии в нагрузке значительно усиливает влияние анизотропии на значение критической нагрузки. Следует отметить, что для оболочек с граничными условиями вида 1, 4 и 5 из (7) соотношение жесткостей не влияет на форму волнообразования, деформирование оболочки носит локальный характер, причем максимальный прогиб направлен внутрь оболочки, аналогично случаю деформирования изотропной оболочки [3]. Так же ведет себя оболочка с граничными условиями 2 и 3 при $E_1/E_2 < 1$, а при $E_1/E_2 \geq 1$ деформирование оболочки носит локальный характер, в то время как максимальный прогиб направлен наружу.

На рис. 2–3 приведены графики зависимости критической нагрузки от ее изменяемости (параметра m в (11)) при шарнирном (кривая 1) и жестком (кривая 2) закреплении торцов для $E_1/E_2 = 0,2$ (рис. 2) и $E_1/E_2 = 2$ (рис. 3). Для более "жесткой" в окружном направлении оболочки (рис. 1) значение критической нагрузки значительно выше, чем для более "мягкой" (рис. 2). В обоих случаях критическая нагрузка значительно выше при жестком заземлении по отношению к шарнирному опиранию.

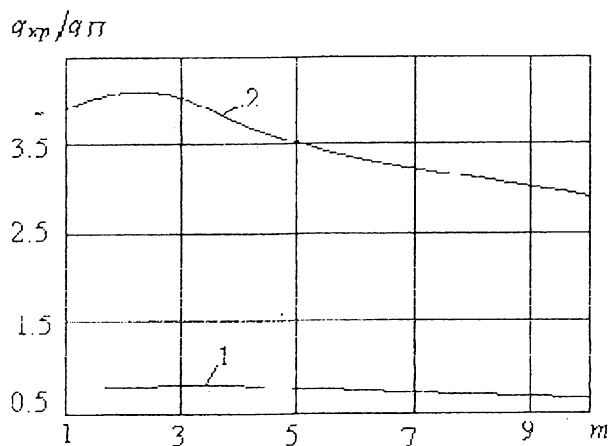


Рис. 2 – Зависимость критической нагрузки от ее изменяемости при $E_1/E_2 = 0,2$

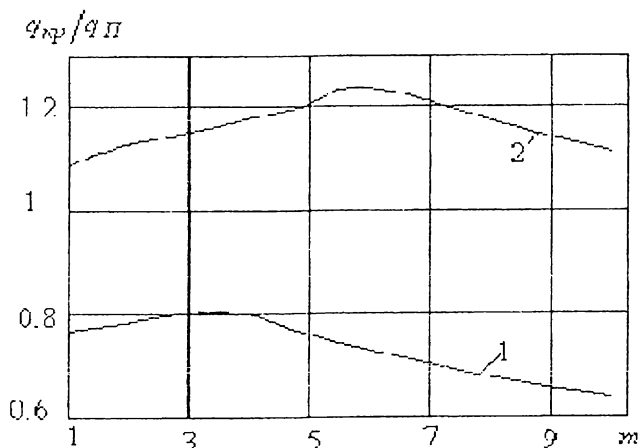


Рис. 3 – Зависимость критической нагрузки от ее изменяемости при $E_1/E_2 = 2$

Из сравнения рис. 2 и рис. 3 видно, что характер влияния граничных условий в зависимости от соотношения модулей упругости сохраняется при различных параметрах изменяемости действующей нагрузки.

Выводы. Проведенный анализ показывает, что анизотропия механических свойств тонкостенных оболочек существенно влияет на значения критических нагрузок при неосесимметричной деформации и на их зависимость от граничных условий. Относительное уменьшение жесткости в окружающем направлении влечет за собой резкое снижение критических нагрузок при неосесимметричной деформации.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. **Вольмир А. С.** Устойчивость деформируемых систем / А. С. Вольмир. – М. : Наука, 1967. – 984 с.
2. **Li Z. M.** Postbuckling of a shear-deformable anisotropic laminated cylindrical shell under external pressure in thermal environments/ Z. M. Li // Mech. of Composite Materials. – 2007. -- 43, 6. – P. 535–560.
3. **Li Z. M.** Nonlinear buckling and postbuckling of a shear-deformable anisotropic laminated cylindrical panel under axial compression / Z. M. Li, Y. X. Zhao, X. D. Chen, W. D. Wang // Mech. of Composite Materials. – 2011. – 46, 6. – P. 599–626.
4. **Obodan N. I.** Nonlinear behavior and stability of thin-walled shells / N. I. Obodan, O. G. Lebedevyev, V. A. Gromov. – Springer, 2013. – 180 p.
5. **Reddy J. N.** Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells / J. N. Reddy. – N.-Y. : CRC Press. – 2004. – 855 p.
6. **Zhang T.** The Secondary Buckling and Design Criterion of Composite Laminated Cylindrical Shells / T. Zhang, W. Gu // Appl. Composite Materials. – 2011. – 19. – P. 203–217.

H. I. Ободан, д-р техн. наук, Г. М. Гавеля, М. Я. Кисельов, канд. техн. наук

ВПЛИВ ЗМІННОГО МОДУЛЯ ПРУЖНОСТІ НА НЕЛІНІЙНЕ ДЕФОРМУВАННЯ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ

В залежності від відношення модулів пружності розглядається поведінка анізотропної циліндричної оболонки під дією неоднорідного в радіальному напрямку навантаження “вітрового” типу, досліджується вплив змінності зовнішнього навантаження і типу граничних умов на торцях оболонки на величину критичного навантаження.

Ключові слова: анізотропна оболонка, критичне навантаження, повний функціонал, поліноми Ерміта, навантаження “вітрового” типу.

N. I. Obodan, Professor, G. M. Gavelya, M. J. Kiselev, Associate Professor

INFLUENCE OF VARIABLE ELASTIC MODULUS ON CYLINDRICAL SHELL NON-LINEAR DEFORMATION

Anisotropic cylindrical shell subjected to a non-uniform “wind”-type load is considered. Critical loads are presented against external load variability and boundary conditions types.

Keywords: anisotropic shell, critical load, complete functional, Hermitian polynomials, “wind”-type load.

Problem statement and numerical method. The circular cylindrical shell under non-uniform external pressure is considered. Pressure is changing in a radial direction and almost does not vary along the length of the shell. The shell is made from orthotropic material, and axes of orthotropy coincide with directions of main curvatures of the shell. For this way of loading under consideration little variability of bending forms in a longitudinal direction and essential nonlinearity of subcritical conditions of the shell are typical, therefore it is necessary to use relationships of the nonlinear theory of thin elastic shells.

With the help of the variational approach stated in [5], which simplifies of all relations during creation of the approximate model, the solution can be received as a station point of full functional.

As long as functional U is stationary, physical and geometrical relations and equations of balance and boundary conditions of the considered shell follow. The number of unknown functions of the problem decreases in functional U , when dependences which are obtained from physical and geometrical relations, stand.

Taking into account small variability of bend forms in longitudinal direction, the solution of the problem can be approximated on longitudinal coordinate by small number of smooth functions. For this purpose finite-element approximation by Hermite third degree polynomials was used, which provides a continuity of functions and their first derivatives.

In the given work some variants of boundary conditions at end faces of shell were analyzed:

- 1) $T_{11} = 0, \quad T_{12} = 0, \quad w = 0, \quad M_x = 0$;
- 2) $u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad w' = 0$;
- 3) $u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad M_x = 0$;
- 4) $T_{11} = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad w' = 0$;
- 5) $T_{11} = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad M_x = 0$.

The problem was solved by transformation of boundary value problem with corresponding boundary conditions into Cauchy problem using Newton method in combination with load parameter movement method [5].

Numerical analysis. Numerical calculation considered nonlinear deformation of a cylindrical shell with parameters $L/R=2$, $R/h=100$, where L, h, R – length, thickness and radius of the shell, E_1, E_2 – factors of elasticity of a material in longitudinal and cross directions under action of loading of "wind" type $q = q_0(\alpha + \beta \cos \eta)^m$ with parameters $\alpha = \beta = 0,5$ and $m = 6$ at different fastening of end faces (1).

Numerical data assures that for all kinds of boundary conditions critical loading is much higher for shell which is more "rigid" in radial direction. For boundary conditions of kind 2 and 3 from (1) value of critical loading practically coincides at any value of elasticity modules. For a shell which is "softer" in radial direction the kind of boundary conditions almost do not affect value of critical loading. It is also evident from calculations, that presence of asymmetry in loading considerably strengthens influence of anisotropy on value of critical loading. It is necessary to note, that for environments with boundary conditions of kind 1, 4 and 5 from (1) rigidity relation does not influence the form of wave formation. Deformation of the shell has local character, and the maximal deflection is directed inside of the shell, similar to the case of isotropic shell deformations [1]. The shell with boundary conditions

of kind 2 and 3 behaves similarly with $E_1/E_2 < 1$, and with $E_1/E_2 \geq 1$ deformation is local, but maximum deflection is directed outside.

Conclusions. The analysis shows that anisotropy of mechanical properties of thin-walled shells essentially influences values of critical load under non-asymmetrical deformations and on their dependence on boundary conditions. Relative reduction of rigidity in radial direction leads to significant drop of critical loads at non-asymmetrical deformations.

REFERENCES

1. **Volmir A.S.** Buckling of deformable systems / A. S. Volmir. – M.: Hayka, 1967. – 984 p. (in Russian).
2. **Li Z. M.** Postbuckling of a shear-deformable anisotropic laminated cylindrical shell under external pressure in thermal environments/ Z. M. Li // Mech. of Composite Materials. – 2007. – Vol. 43, Is 6. – P. 535–560.
3. **Li Z. M.** Nonlinear buckling and postbuckling of a shear-deformable anisotropic laminated cylindrical panel under axial compression / Z. M. Li, Y. X. Zhao, X. D. Chen, W. D. Wang // Mech. of Composite Materials. – 2011. – Vol. 46, Is 6. – P. 599–626.
4. **Obodan N. I.** Nonlinear behavior and stability of thin-walled shells / N. I. Obodan, O. G. Lebedeyev, V. A. Gromov. – Springer 2013. – 180 p.
5. **Reddy J. N.** Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells / J. N. Reddy. – N.-Y.: CRC Press. – 2004. – 855 p.
6. **Zhang T.** The Secondary Buckling and Design Criterion of Composite Laminated Cylindrical Shells / T. Zhang, W. Gu // Appl. Composite Materials. – 2011. – 19. – P. 203–217.

Днепропетровский национальный университет
им. Олеся Гончара,
Днепропетровск, Украина

Поступила в редколлегию 06.12.2012