

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ ВАНТ ПРИ КИНЕМАТИЧЕСКОМ ВОЗМУЩЕНИИ

Досліджено вплив кінематичного збурення на динамічну поведінку вант. Кінематичне збурення подано у вигляді коливань вершини пілона. Побудовано математичну модель коливань вант. Як основний метод дослідження був прийнятий метод гармонійного балансу. Були отримані й оцінені вирази для визначення амплітуди і частоти змушених коливань.

Исследовано влияние кинематического возмущения на динамическое поведение вант. Кинематическое возмущение представлено в виде колебаний вершины пилон. Построена математическая модель колебаний ванты. В качестве основного метода исследования принят метод гармонического баланса. Получены и оценены выражения для определения амплитуды и частоты вынужденных колебаний.

The article examines the questions of improving supervision and diagnostic techniques of facilities. Natural frequency of superstructure is selected as a primary diagnostic parameter. Modeling of dynamic behavior of a span superstructure has been based on the finite-element method.

Введение

Исследованию статического и динамического поведения вантовых мостов посвящен широкий ряд работ как зарубежных, так и отечественных авторов.

В частности, в работах [1; 2] рассматриваются статические и динамические расчеты висячих мостов, приведены наиболее удачные примеры конструктивных схем.

В работе [3] исследуются собственные и вынужденные колебания гибких нитей.

Данная статья посвящена исследованию динамического поведения вант под действием кинематического возмущения.

Ранее, в работе [4] рассматривались поперечные колебания струны, вызываемые периодическим смещением опор. Точки крепления струны были размещены на одном уровне. Для решения дифференциального уравнения колебаний струны оно было приведено к дифференциальному уравнению Матье, дополненному членом, учитывающим демпфирование, и кубическим членом.

В данной работе в качестве основного метода исследования принят метод гармонического баланса.

1. Постановка задачи

Рассмотрим ванту, точки которой расположены на разных уровнях. Предположим, что нагрузка, действующая на ванту, является равномерно распределенной по длине ванты. В качестве кинематического возмущения примем колебания вершины пилона.

Необходимо исследовать динамическое поведение ванты под действие кинематического возмущения.

2. Дифференциальное уравнение колебания ванты под действием кинематического возмущения

Исследуем поперечные колебания ванты, расчетная схема которой представлена на рис. 1, а происхождение можно представить в виде уравнения второго порядка в частных производных:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\langle T_0 \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{EA}{l} \left(\frac{dy}{dx} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right\rangle \times \left\langle \int_0^l \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{dy}{dx} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] dx \right\rangle = m \ddot{v}, \quad (1)$$

где T_0 – максимальное растягивающее усилие в сечении нити; l – расстояние между опорами в направлении ванты (рис. 1); E – модуль упругости материала ванты; m – масса единицы длины ванты; $y(x)$ – уравнение кривой провисания нити; $v(x, t)$ – вертикальные перемещения местной координаты системы, u – составляющая вдоль оси x горизонтального смещения пилона.

В данном случае предполагалось, что вершины пилона совершают горизонтальные колебания и, учитывалась только их составляющая вдоль оси.

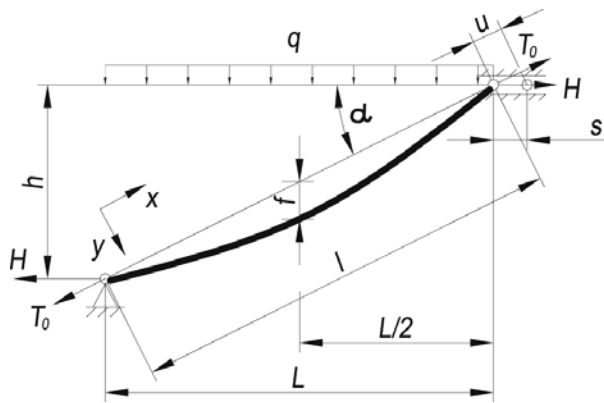


Рис. 1. Расчетная схема ванты

Проинтегрировав $\frac{\partial u}{\partial x}$ по x при неизменном t по всей длине ванты при $0 \dots l$, получим

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\langle T_0 \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{EA}{l} \left(\frac{dy}{dx} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \left\{ u(l, t) - u(0, t) + \int_0^l \left[\frac{dy}{dx} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] dx \right\} \right\rangle = m \ddot{v},$$

где $u(x, t)$ – перемещение точек ванты вдоль оси x . Расчетная схема ванты принята такой, что нижняя опора ванты – шарнирно-неподвижная, а верхняя – шарнирно-подвижная.

Выразим продольные колебания верхней опоры ванты $u(t)$ через горизонтальные колебания вершины пилона:

$$u(t) = s(t) \cos \alpha.$$

Примем уравнение горизонтальных колебаний вершины пилона в виде

$$s(t) = S \cos(\omega t + \theta), \quad (2)$$

где S – амплитуда колебаний; ω – частота колебаний, θ – фазовый угол.

Предполагая, что нижняя точка кривой провисания нити находится вне пролета ванты (на значительном расстоянии от левой опоры), примем уравнение кривой провисания нити в виде

$$y(x) = Y \sin \frac{\pi x}{l}, \quad (3)$$

где Y – максимальное значение провисания нити.

Так как оба конца ванты шарнирно оперты, представляем функцию $v(x, t)$ в виде

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) \sin \frac{\pi n x}{l}. \quad (4)$$

Подставив вышеприведенные зависимости в выражение (1) и выполнив необходимые преобразования, получаем при $n = 1$

$$\ddot{q} + \alpha q + \gamma q^2 + \beta q^3 + c q \cos(\omega t + \theta) + c Y \cos(\omega t + \theta) = 0, \quad (5)$$

где

$$\alpha = \left(T_0 \frac{\pi^2}{l^2} + \frac{1}{2} EAY^2 \frac{\pi^4}{l^4} \right) / m;$$

$$\gamma = \frac{3 EA \pi^4}{4 m l^4}; \quad \beta = \frac{1 EA \pi^4}{4 m l^4};$$

$$c = \frac{S}{m} \cos(\alpha) EA \frac{\pi^2}{l^3}.$$

Перепишем уравнение, добавив в него вязкое сопротивление

$$\ddot{q} + \varepsilon \dot{q} + \alpha q + \gamma q^2 + \beta q^3 + c q \cos(\omega t + \theta) + c Y \cos(\omega t + \theta) = 0. \quad (6)$$

3. Аналитическое исследование колебаний ванты

Для решения уравнения (6) воспользуемся заменой

$$q = \psi + \Delta,$$

где Δ – статическое смещение.

Выполнив подстановку новой переменной в уравнение (6) и выполнив математические преобразования, получим

$$\ddot{\psi} + \varepsilon \dot{\psi} + \mu \psi + \vartheta \psi^2 + \beta \psi^3 + \eta + c \psi \cos(\omega t + \theta) + c(\Delta + Y) \cos(\omega t + \theta) = 0, \quad (7)$$

где

$$\mu = \alpha + 2\gamma\Delta + 3\beta\Delta^2,$$

$$\vartheta = \gamma + 3\beta\Delta,$$

$$\eta = \alpha\Delta + \gamma\Delta^2 + \beta\Delta^3.$$

Решение уравнения (7) будем искать в виде гармонического колебания на основной частоте возмущения:

$$\psi = A \cos \omega t. \quad (8)$$

Приближенное решение будем искать используя метод гармонического баланса.

Подставим выражение (8) в уравнение (7):

$$\begin{aligned}
& -\omega^2 A \cos \omega t - \varepsilon \omega A \sin \omega t + \mu A \cos \omega t + \\
& \quad + 9A^2 \cos^2 \omega t + \beta A^3 \cos^3 \omega t + \\
& + cA \cos \omega t \cos(\omega t + \theta) + \\
& \quad + c(Y + \Delta) \cos(\omega t + \theta) + \eta = 0. \quad (9)
\end{aligned}$$

Вспользуемся известными тригонометрическими соотношениями:

$$\cos^3 \omega t = \frac{1}{4} \cos 3\omega t + \frac{3}{4} \cos \omega t;$$

$$\cos^2 \omega t = \frac{1}{2} \cos 2\omega t + 2;$$

$$\cos(\omega t + \theta) = \cos \omega t \cos \theta - \sin \omega t \sin \theta.$$

Пренебрегая комбинационными тонами и свободными членами уравнения и, приравнявая члены при $\cos \omega t$ и $\sin \omega t$ в левой части уравнения (9) к нулю, получим систему уравнений:

$$\begin{cases}
-\omega^2 A \cos \omega t + \mu A \cos \omega t + \\
+ \frac{3}{4} \beta A^3 \cos^3 \omega t = -c(Y + \Delta) \cos \omega t \cos \theta, \\
-\varepsilon \omega A \sin \omega t = c(Y + \Delta) \sin \omega t \sin \theta.
\end{cases} \quad (10)$$

Преобразуя систему уравнений (10), получим выражения для определения фазового угла и частоты вынужденных колебаний системы:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\varepsilon \omega}{\mu + \frac{3}{4} \beta A^2 - \omega^2}, \quad (11)$$

$$\omega^2 = \mu + \frac{3}{4} \beta A^2 - \frac{\varepsilon^2}{2} \pm$$

$$\pm \sqrt{\frac{\varepsilon^4}{4} - \varepsilon^2 \left(\mu + \frac{3}{4} \beta A^2 \right) + \frac{c^2 (Y + \Delta)^2}{A^2}}. \quad (12)$$

Выражения для кривых, ограничивающих области неустойчивости колебаний:

$$\omega_1 = \sqrt{\mu + \frac{3}{4} \beta A^2 - \frac{\varepsilon^2}{2}}, \quad (13)$$

$$\omega_2 = \sqrt{\mu + \frac{3}{4} \beta A^2 + \frac{2c^2 (Y + \Delta)^2}{3\beta A^4}}. \quad (14)$$

В качестве примера рассмотрим систему со следующими параметрами:

- пролет ванты $L = 70$ м;
- угол наклона $\alpha = 45^\circ$;

- диаметр ванты $d = 140$ мм;
- прогиб посередине пролета $f = \frac{1}{100} L$;
- максимальное значение провисания нити $Y = f \cos \alpha$;
- материал ванты – сталь класса С345 ($\gamma = 7850$ кг/м³, $E = 2,1 \cdot 10^{10}$ кг/м²);
- коэффициент вязкого демпфирования $\varepsilon = 0,1$.

Площадь поперечного сечения ванты

$$F = 0,0154 \text{ м}^2,$$

момент инерции сечения

$$I = 1,89 \cdot 10^{-5} \text{ м}^4.$$

Нагрузка от собственного веса, действующая на ванту: $p_1 = \gamma F$. Статически эквивалентная нагрузка, распределенная вдоль пролета: $p_2 = p_1 / \cos(\alpha)$. Высота крепления ванты $h = L \operatorname{tg}(\alpha)$. Расстояние между опорами в направлении ванты $l = L / \cos(\alpha)$. Горизонтальная составляющая растягивающего усилия

$$H = \frac{p_2 L^2}{8f}.$$

Максимальное растягивающее усилие

$$T_0 = \sqrt{H^2 + \left(H \frac{h}{L} + p_2 \frac{L}{2} \right)^2}.$$

Амплитуду горизонтальных колебаний вершины пилона принимаем равной максимальному нормативному значению отклонения вершины пилона от вертикали [1]:

$$S = \frac{h}{500}.$$

Амплитудно-частотная зависимость системы, полученная методом гармонического баланса, приведена на рис. 2. Также на рис. 2 приведена амплитудно-частотная зависимость, полученная в результате численного моделирования колебаний ванты под действием кинематического возмущения.

Анализ зависимостей показывает, что частота срыва при аналитическом исследовании составила $\omega_{\text{ср}} = 12,05$ рад/с, а при численном моделировании частота срыва составила $\omega_{\text{ср}} = 11,5$ рад/с. Сравнивая полученные значения частот, следует отметить, что их отличие составляет 5 %.

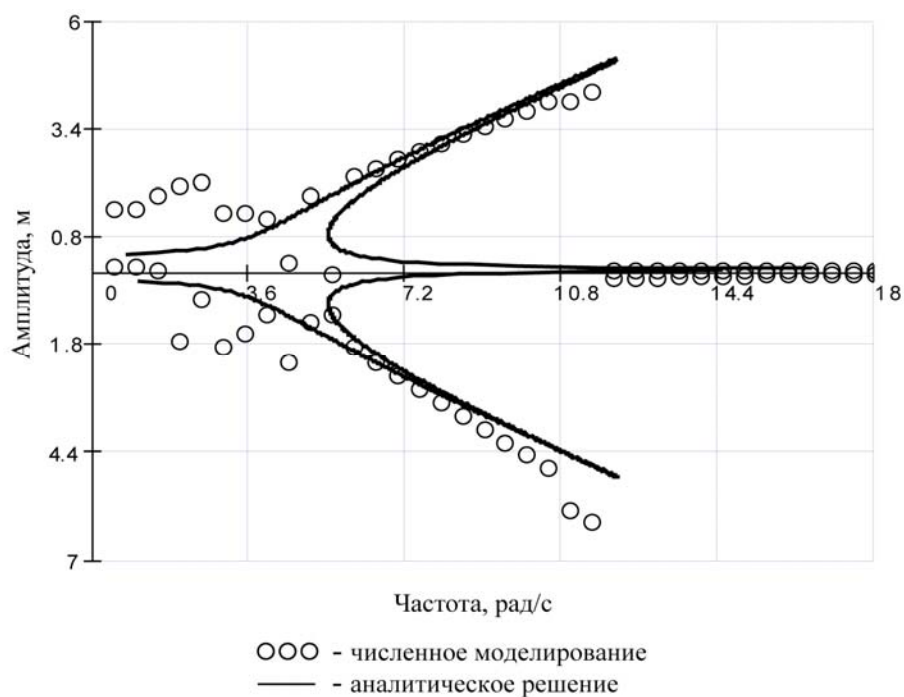


Рис. 2. Амплитудно-частотные зависимости системы:
 $\alpha = 20,899 \text{ с}^{-2}$; $\gamma = 9,881 \text{ мс}^{-2}$; $\beta = 6,654 \text{ м}^{-2}\text{с}^{-2}$; $\varepsilon = 0,1 \text{ с}^{-1}$; $S = 0,14 \text{ м}$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Петропавловский А. А. Вантовые мосты. – М.: Транспорт, 1985. – 224 с.
2. Смирнов В. А. Висячие мосты больших пролетов. – М.: Высшая школа, 1975. – 368 с.
3. Ивович В. А. Динамический расчет висячих конструкций. – М.: Стройиздат, 1975. – 384 с.
4. Каудерер Г. Нелинейная механика. – М.: Изд-во иностранной литературы, 1961. – 778 с.

Поступила в редколлегию 23.05.2005.