

ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ПОТОКОВ НА ГРАФЕ

В якості математичної моделі задачі визначення раціональних потоків на графі була розглянута задача векторної оптимізації на графах. Розглянуто приклад її вирішення.

В качестве математической модели задачи определения рациональных потоков на графе была рассмотрена задача векторной оптимизации на графах. Рассмотрен пример ее решения.

As mathematical model the definition of rational streams on the column the problem of vector optimization on columns has been considered. The example of its decision is considered.

Задача построения графа минимальной длины широко рассмотрена в литературе и имеет множество алгоритмов ее решений [1-2]. Задача рационального распределения потоков между станциями также широко представлена в литературе. В данной работе задача определения рациональных потоков на сети минимальной суммарной длины впервые представлена как задача векторной оптимизации.

Пусть $G(V, E)$ – неориентированный граф с перечнем вершин V и ребер E . Каждому ребру сопоставлено число $R(e)$.

На графе $G(V, E)$ заданы потоки P_{ij} , $i, j \in V$.

Пусть W_{ij} – набор простых путей из i в j , а ω – некоторый простой путь из W_{ij} .

Обозначим через $X_{ij\omega}$ часть потока P_{ij} , который реализуется на пути ω , тогда имеет место

$$\sum_{\omega \in W_{ij}} X_{ij\omega} = P_{ij} \quad (1)$$

Введем индикатор ребра e на пути ω , т. е.

$$I_{\omega}(e) = \begin{cases} 1, & \text{если } e \in \omega; \\ 0, & \text{если } e \notin \omega, \end{cases}$$

тогда суммарный поток по ребру e для набора путей W_{ij} составит

$$\sum_{\omega \in W_{ij}} X_{ij\omega} \cdot I_{\omega}(e),$$

а общий поток по данному ребру e будет равен

$$\sum_{i, j \in V} \sum_{\omega \in W_{ij}} X_{ij\omega} \cdot I_{\omega}(e); \quad e \in E.$$

Если $N(e)$ – максимально допустимый поток для ребра e , то должно выполняться ограничение по пропускной способности

$$\sum_{i, j \in V} \sum_{\omega \in W_{ij}} X_{ij\omega} \cdot I_{\omega}(e) \leq N(e). \quad (2)$$

Если положить $l(\omega)$ – длина пути ω , $l(\omega) = \sum_{e \in \omega} R(e)$, то величина

$$Pr = \sum_{i, j \in V} \sum_{\omega \in W_{ij}} X_{ij\omega} \cdot l(\omega) \quad (3)$$

может служить оценкой рациональности распределения заданных потоков P_{ij} , $i, j \in V$ на графе $G(V, E)$.

Обозначим E_* – набор ребер, которые были использованы для построения набора простых путей между всеми вершинами, тогда величина

$$L(E_*) = \sum_{e \in E_*} R(e) \quad (4)$$

отображает длину сети $G(V, E_*)$.

Т. е. имеет место задача: определить такое распределение потоков $X_{ij\omega}$, чтобы показатели Pr и $L(E_*)$ были минимальными, и выполнялись условия (1) и (2).

Другими словами приходим к задаче векторной оптимизации

$$\begin{pmatrix} L(E_*) \\ Pr \end{pmatrix} \rightarrow \min \quad (5)$$

при условиях (1), (2).

Заметим, что в суммировании $\sum_{i, j \in V}$ должно быть $i < j$, это означает, что будет определено распределение потоков в одном направлении (туда), если $i > j$, то получим распределение в другом направлении (обратно).

Пример. Рассмотрим граф G (рис. 1), отображающий сеть имеющихся дорог между восьмью городами. Зададим названия ребер: $e1 = \{1, 2\}$, $e2 = \{1, 6\}$, $e3 = \{2, 3\}$, $e4 = \{2, 5\}$, $e5 = \{3, 4\}$, $e6 = \{4, 5\}$, $e7 = \{4, 8\}$, $e8 = \{5, 6\}$, $e9 = \{5, 7\}$, $e10 = \{7, 8\}$.

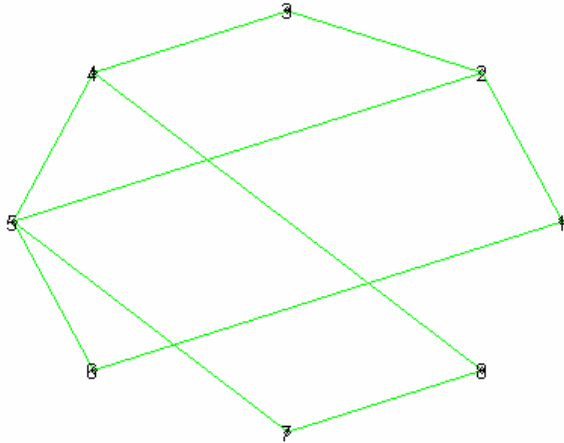


Рис. 1. Исходный граф

Заданная матрица расстояний $R(e)$ и пассажиропотоков P_{ij} имеют вид:

$$R(e) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 11 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & 0 & 1 & 0 & 0 & 17 \\ 0 & 6 & 0 & 1 & 0 & 31 & 21 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 31 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 21 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 17 & 0 & 0 & 15 & 0 \end{bmatrix},$$

$$P_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 20 & 10 & 23 & 21 & 5 & 7 & 9 \\ 20 & 0 & 8 & 16 & 17 & 6 & 4 & 8 \\ 10 & 8 & 0 & 5 & 40 & 23 & 16 & 17 \\ 3 & 6 & 5 & 0 & 11 & 21 & 17 & 40 \\ 1 & 2 & 4 & 11 & 0 & 5 & 6 & 3 \\ 20 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 23 & 12 & 0 & 24 & 0 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 11 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ограничения по пропускной способности для каждого ребра примем одинаковым, и будет равным $N(e) = 209$.

Используя пакет символьных вычислений Maple [3], получим решение по распределению

пассажиропотоков на простых путях с учетом пропускных способностей ребер.

На первом этапе решения задачи построим остоновый граф минимальной суммарной длины [1] $H(V, E_{\min})$ (рис. 2).

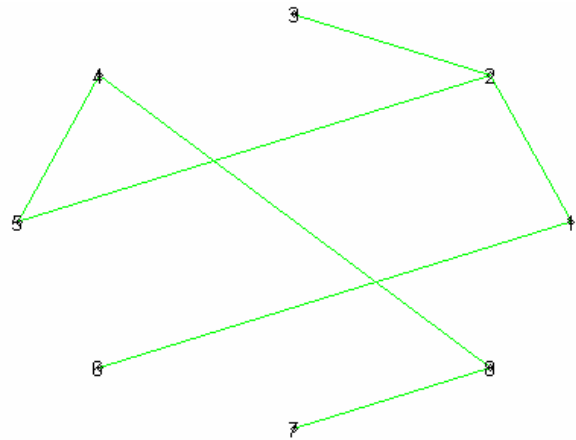


Рис. 2. Остоновый граф минимальной суммарной длины

Суммарная длина построенного графа $H(V, E_{\min})$ составляет $R_{ij}(E_{\min}) = 45$, набор ребер данного графа – $E_* = \{e1, e2, e3, e4, e6, e7, e10\}$.

Построенное множество всех простых путей из i в j , при чем $i < j$, т. е. рассматривается одно направление (туда), для графа $H(V, E_{\min})$ представлено в табл. 1.

Распределение пассажиропотока на множестве простых путей осуществляется следующим образом:

- из вершины 3 в вершину 6 по пути $[e3, e1, e2]$ реализуется пассажиропоток – 23;
- из вершины 2 в вершину 7 по пути $[e4, e6, e7, e10]$ реализуется пассажиропоток – 4;
- из вершины 3 в вершину 7 по пути $[e3, e4, e6, e7, e10]$ реализуется пассажиропоток – 16;
- из вершины 1 в вершину 3 по пути $[e1, e3]$ реализуется пассажиропоток – 10;
- из вершины 2 в вершину 6 по пути $[e1, e2]$ реализуется пассажиропоток – 6;
- из вершины 3 в вершину 5 по пути $[e3, e4]$ реализуется пассажиропоток – 40;
- из вершины 1 в вершину 2 по пути $[e1]$ реализуется пассажиропоток – 20;
- из вершины 5 в вершину 8 по пути $[e6, e7]$ реализуется пассажиропоток – 3;
- из вершины 1 в вершину 7 по пути $[e1, e4, e6, e7, e10]$ реализуется пассажиропоток – 7;

- из вершины 5 в вершину 7 по пути $[e6, e7, e10]$ реализуется пассажиропоток – 6;
- из вершины 7 в вершину 8 по пути $[e10]$ реализуется пассажиропоток – 15;
- из вершины 4 в вершину 5 по пути $[e6]$ реализуется пассажиропоток – 11;
- из вершины 1 в вершину 5 по пути $[e1, e4]$ реализуется пассажиропоток – 21;
- из вершины 4 в вершину 7 по пути $[e7, e10]$ реализуется пассажиропоток – 17;
- из вершины 1 в вершину 6 по пути $[e2]$ реализуется пассажиропоток – 5;
- из вершины 2 в вершину 3 по пути $[e3]$ реализуется пассажиропоток – 8;
- из вершины 2 в вершину 5 по пути $[e4]$ реализуется пассажиропоток – 17;
- из вершины 4 в вершину 8 по пути $[e7]$ реализуется пассажиропоток – 40;

- из вершины 3 в вершину 8 по пути $[e3, e4, e6, e7]$ реализуется пассажиропоток – 17;
- из вершины 4 в вершину 6 по пути $[e6, e4, e1, e2]$ реализуется пассажиропоток – 21;
- из вершины 5 в вершину 6 по пути $[e4, e1, e2]$ реализуется пассажиропоток – 5;
- из вершины 1 в вершину 4 по пути $[e1, e4, e6]$ реализуется пассажиропоток – 23;
- из вершины 1 в вершину 8 по пути $[e1, e4, e6, e7]$ реализуется пассажиропоток – 9;
- из вершины 2 в вершину 4 по пути $[e4, e6]$ реализуется пассажиропоток – 16;
- из вершины 2 в вершину 8 по пути $[e4, e6, e7]$ реализуется пассажиропоток – 8;
- из вершины 3 в вершину 4 по пути $[e3, e4, e6]$ реализуется пассажиропоток – 5.

Таблица 1

Простые пути остовного графа

	В 2	В 3	В 4	В 5	В 6	В 7	В 8
Из 1	$[e1]$	$[e1, e3]$	$[e1, e4, e6]$	$[e1, e4]$	$[e2]$	$[e1, e4, e6, e7, e10]$	$[e1, e4, e6, e7]$
Из 2	–	$[e3]$	$[e4, e6]$	$[e4]$	$[e1, e2]$	$[e4, e6, e7, e10]$	$[e4, e6, e7]$
Из 3	–	–	$[e3, e4, e6]$	$[e3, e4]$	$[e3, e1, e2]$	$[e3, e4, e6, e7]$	$[e3, e4, e6, e7]$
Из 4	–	–	–	$[e6]$	$[e6, e4, e1, e2]$	$[e7, e10]$	$[e7]$
Из 5	–	–	–	–	$[e4, e1, e2]$	$[e6, e7, e10]$	$[e6, e7]$
Из 6	–	–	–	–	–	$[e2, e1, e4, e6, e7, e10]$	$[e2, e1, e4, e6, e7]$
Из 7	–	–	–	–	–	–	$[e10]$

При данном распределении нагрузка на каждое ребро по пассажиропотоку отображена в табл. 2: что удовлетворяет ограничению на пропускную способность.

А значение показателя рациональности распределения потоков составит 5241.

Множество ребер, которые не вошли в граф $H(V, E_{\min})$ представляет собой:

$$\{e5, e8, e9\}.$$

Построим всевозможные комбинации из элементов данного множества:

$$QE = \{ \{e5, e8, e9\}, \{e5, e9\}, \{e5, e8\}, \{e8, e9\}, \{e5\}, \{e8\}, \{e9\} \}.$$

Выбирая из построенного множества комбинацию ребер, поочередно добавляем их к графу $H(V, E_{\min})$ и производим распределение пассажиропотока на полученном графе для всех простых путей данного графа, при чем начинаем выбор комбинации ребер с минимального веса.

Т. е. следующим шагом для распределения пассажиропотока будет добавление к графу $H(V, E_{\min})$ ребра $\{e5\}$, вес которого равен 11. Распределение потока для данного графа будет таким же, как и для графа минимального веса, следовательно, нагрузка на ребра такая же, как представлено в табл. 2 и значение показателя рациональности распределения не измениться.

Нагрузка ребер по пассажиропотоку

Ребро	e_1	e_2	e_3	e_4	e_6	e_7	e_{10}
Пассажиропоток	60	119	209	146	127	65	145

На следующем этапе к графу $H(V, E_{\min})$ добавим ребро $\{e_9\}$, вес которого равен 21. Распределение потока на данном графе осуществляется следующим образом:

- из вершины 3 в вершину 6 по пути $[e_3, e_1, e_2]$ реализуется пассажиропоток – 23;
- из вершины 2 в вершину 7 по пути $[e_4, e_9]$ реализуется пассажиропоток – 4;
- из вершины 3 в вершину 7 по пути $[e_3, e_4, e_9]$ реализуется пассажиропоток – 16;
- из вершины 1 в вершину 3 по пути $[e_1, e_3]$ реализуется пассажиропоток – 10;
- из вершины 2 в вершину 6 по пути $[e_1, e_2]$ реализуется пассажиропоток – 6;
- из вершины 3 в вершину 5 по пути $[e_3, e_4]$ реализуется пассажиропоток – 40;
- из вершины 1 в вершину 2 по пути $[e_1]$ реализуется пассажиропоток – 20;
- из вершины 5 в вершину 8 по пути $[e_6, e_7]$ реализуется пассажиропоток – 3;
- из вершины 1 в вершину 7 по пути $[e_1, e_4, e_9]$ реализуется пассажиропоток – 7;
- из вершины 5 в вершину 7 по пути $[e_9]$ реализуется пассажиропоток – 6;
- из вершины 7 в вершину 8 по пути $[e_{10}]$ реализуется пассажиропоток – 15;
- из вершины 4 в вершину 5 по пути $[e_6]$ реализуется пассажиропоток – 11;
- из вершины 1 в вершину 5 по пути $[e_1, e_4]$ реализуется пассажиропоток – 21;
- из вершины 4 в вершину 7 по пути $[e_6, e_9]$ реализуется пассажиропоток – 17;

- из вершины 1 в вершину 6 по пути $[e_2]$ реализуется пассажиропоток – 5;
- из вершины 2 в вершину 3 по пути $[e_3]$ реализуется пассажиропоток – 8;
- из вершины 2 в вершину 5 по пути $[e_4]$ реализуется пассажиропоток – 17;
- из вершины 4 в вершину 8 по пути $[e_7]$ реализуется пассажиропоток – 40;
- из вершины 3 в вершину 8 по пути $[e_3, e_4, e_6, e_7]$ реализуется пассажиропоток – 17;
- из вершины 4 в вершину 6 по пути $[e_6, e_4, e_1, e_2]$ реализуется пассажиропоток – 21;
- из вершины 5 в вершину 6 по пути $[e_4, e_1, e_2]$ реализуется пассажиропоток – 5;
- из вершины 1 в вершину 4 по пути $[e_1, e_4, e_6]$ реализуется пассажиропоток – 23;
- из вершины 1 в вершину 8 по пути $[e_1, e_4, e_6, e_7]$ реализуется пассажиропоток – 9;
- из вершины 2 в вершину 4 по пути $[e_4, e_6]$ реализуется пассажиропоток – 16;
- из вершины 2 в вершину 8 по пути $[e_4, e_6, e_7]$ реализуется пассажиропоток – 8;
- из вершины 3 в вершину 4 по пути $[e_3, e_4, e_6]$ реализуется пассажиропоток – 5.

При данном распределении нагрузка на каждое ребро по пассажиропотоку отображена в табл. 3: что удовлетворяет ограничению на пропускную способность.

Таблица 3

Нагрузка ребер по пассажиропотоку

Ребро	e_1	e_2	e_3	e_4	e_6	e_7	e_9	e_{10}
Пассажиропоток	60	119	209	130	77	50	15	145

Значение показателя рациональности распределения потоков составит 4675.

Проводя дальнейшее распределение пассажиропотоков, добавляем в граф $H(V, E_{\min})$

комбинации ребер из множества QE . Значения показателей рациональности для данных графов сведем в табл. 4.

Значения показателей рациональности при добавлении в граф $H(V, E_{\min})$ комбинации ребер, начиная с минимального веса

Номер варианта	Добавляемые ребра в граф $H(V, E_{\min})$	Вес добавляемых ребер	Значение показателя рациональности	Суммарная длина пути
1	–	–	5241	45
2	{e5}	11	5241	56
3	{e9}	21	4675	66
4	{e8}	31	5241	76
5	{e5, e9}	32	4675	77
6	{e5, e8}	42	5241	87
7	{e8, e9}	52	4675	97
8	{e5, e8, e9}	63	4675	108

Таким образом, решением задачи векторной оптимизации (6) при условиях (1), (3) для рассматриваемого примера является вариант 1 и вариант 3 из табл. 4.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Ахо А., Хопкрофт Дж., Ульман Дж. Структуры данных и алгоритмы. – М.: Издательство Вильямс, 2001. – 384 с.
2. Дж. Андерсон. Дискретная математика и комбинаторика.: Пер. с англ. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2004. – 960 с.
3. Говорухин В., Цибулин В. Компьютер в математическом исследовании. Учебный курс. – СПб.: Питер, 2001. – 624 с.
4. Босов А. А. О Парето оптимальных решениях задач векторной оптимизации. / Босов А. А., Скалозуб В. В. // Диференціальні рівняння та їх застосування. – Д.: ДДУ, 1998. – С. 66–70.

Поступила в редколлегию 20.11.2006.