

О. Распопов, д.т.н\*, Г. Сулим, д.т.н.\*\*, Й. Лучко, д.т.н\*

\*Дніпропетровський національний університет залізничного транспорту  
імені академіка В. Лазаряна,

\*\*Луцький національний технічний університет

## МЕТОДОЛОГІЯ АНАЛІЗУ ПОПЕРЕЧНИХ КОЛИВАНЬ ПРЯМОКУТНИХ БАГАТОПРОГОНОВИХ ПЛАСТИН ЗМІННОЇ ЗГИНАЛЬНОЇ ЖОРСТКОСТІ

*Резюме.* У праці викладена загальна методологія аналізу поперечних коливань прямокутних багатопрогонових ізотропних і трансверсально ізотропних пластин з дискретно змінюваною в одному паралельному до якоїсь пари сторін напрямі згинальною жорсткістю та при використанні перпендикулярних до цього напрямку пружних щодо вертикальних переміщень та кутів повертання лінійних опор з рівномірним розподілом уздовж них зосереджених мас (включень, накладок). Для побудови частотних характеристичних рівнянь розрахунку власних частот використовується метод початкових параметрів і асоційованих матриць, а також теорія скінченних автоматів з елементами математичної логіки. Розглянуто приклади застосування методу.

*Ключові слова:* пластина, коливання, частота, метод початкових параметрів, асоційована матриця, скінченний автомат.

O. Raspopov, G. Sulim, J. Luchko

## METHODOLOGY OF THE LATERAL OSCILLATIONS ANALYSIS OF THE ORTHOGONAL MULTISPAN PLATES WITH VARIABLE BENDING RIGIDITY

*Summary.* The paper briefly described the general methodology for the analysis of transverse vibrations of rectangular isotropic and transversely multispans isotropic plates with discrete variable in parallel towards to any pair of parties the flexural rigidity and using perpendicular to this direction of resilient vertical displacements and rotation angles of linear bearings with uniform distribution of the along them concentrated masses (inclusions, overlap).

Two opposite parallels in the direction of change the properties of the edge of the plate are hinged or sliding disadvantaged, and two others have meet the arbitrary fixing homogeneous conditions.

In the research basis the possibility of assumption divided plate perpendicular to the direction of change of properties of individual strip sections plot so that certain sections coincide with the beginning or the end of each of the runs, and that within each strip thickness and/or resilient modulus are constant or can so considered with sufficient accuracy. Each section is plate or beam loaded in joint-sections supporting the efforts and moments arising from the interaction of the considered strips with neighboring and hinged or sliding support their clamped (bear against too) to perpendicular to the cross sections in polar lands. As each section is described specific values component of the linear and angular displacements and components of internal efforts and moments that make up the state vector  $S$ , but with introduction of matrix effects in the consideration can be obtained relationship between the state vector of the extreme section of each of the plots. As a result of this calculation brings plate connection to the analysis of the single object loaded but given the efforts even more supporting. It gives the possibility to describe in binary form topological code the primary (PP) and the end values (KP) boundary parameters (conditions) of the graph elements investigated in the case of calculating the transverse to the plane of the plate vibrations using the same number (on two) random and fixed parameters.

To construct the frequency characteristic equation calculation of own frequencies using the method of initial pairs and meters and associated matrices, and finite automative theory with elements of mathematical logic are used.

For example indicated that if this analysis of the plate, one end of which is binding, and the second is hinged or built around two opposite edges of binding, and two others - support their hinged, obtained the same equation of frequency as well as when using other methods.

It is also considered the oscillations orthotropic plates subject to forces of inertia of rotation, displacement and longitudinal forces. Based on solving the problem of fluctuations in cross-beams systems are considered examples of calculating circular frequencies of orthotropic plates.

**Key words:** plate, oscillations, frequency, initial parameters method, associated matrix, finite automate.

Нерозрізні плити та пластини входять до складу багатьох інженерних і технічних споруд. Зокрема, можна відзначити їх використання при споруджуванні прогонових будов мостів чи корпусів суден, а також ефективному моделюванні пластинами або плитами складніших конструкцій. У цій роботі досліджуються поперечні коливання багатопрогонових прямокутних жорстких пластин або тонких плит змінюваних у напрямі однієї з осей симетрії товщини та/чи модуля пружності за умови малості відносно товщини прогинів із використанням припущень, які при цьому зазвичай вводяться [1, 2]. Розрахунок таких систем будемо проводити за допомогою методу початкових параметрів і асоційованих матриць [3], а побудову рівнянь частот – із використанням теорії скінченних автоматів і елементів математичної логіки [4].

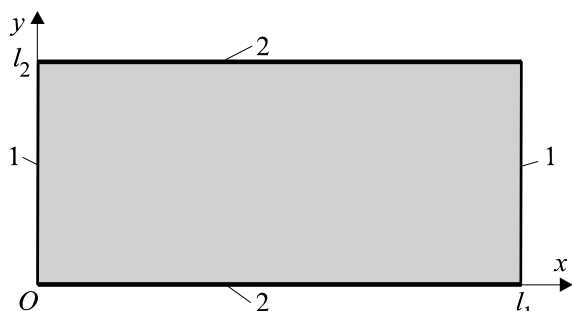


Рис. 1. Схема задачі (крайові умови: 1 – довільний тип; 2 – шарнірне обпирання або ковзне защемлення)

Уведемо у розгляд прямокутну систему координат  $xuz$ : осі  $x$  (уздовж напрямку зміни товщини і/чи модуля пружності) та  $y$  розташовані в серединній площині пластини; вісь  $z$  напрямлена вертикально вгору. Два протилежні паралельні до напрямку зміни товщини краї пластини (при  $y=0$  і  $y=l_2$ ) вважаються шарнірно обертими

або ковзно защемленими; два інші (при  $x=0$  і  $x=l_1$ ) – мають довільні однорідні умови закріплення, які дають можливість описувати топологічний код початкових (ПП) і кінцевих значень (КП) крайових параметрів (умов) графа, досліджуваних елементів у разі розрахунку поперечних коливань у напрямі осі  $z$  за допомогою однакової кількості (по два) довільних і фіксованих параметрів.

Поділимо умовно паралельними до площини  $yOz$  перерізами пластину на  $p$  смужок-ділянок так, щоб перерізи збігалися із початком чи кінцем кожного із прогонів, а також щоб у межах кожної смужки товщина та/чи модуль пружності були сталими або могли з достатньою мірою точності вважатися такими, і розглянемо одну із них (з номером  $k$ ) завдовжки  $l_k$ , обмежену перерізами  $k-1, k$ . Кожну таку смужку розглядаємо як оперту на прямолінійних краях  $y=0$  і  $y=l_2$  пластину чи балку і додатково навантажену опорними зусиллями і моментами у перерізах  $k-1, k$ , що постають внаслідок взаємодії розглядуваної смужки із сусідніми. В результаті чого розрахунок пластини буде зведений до аналізу цілісного об'єкту, навантаженого крім заданих зусиль ще й додатковими опорними.

У загальному випадку кожен переріз характеризується певними значеннями компонент лінійного та кутового переміщень і компонент внутрішніх зусиль та моментів, які разом утворюють вектор стану  $S$ , що включає узагальнені вектори переміщень  $u$  і зусиль  $q$  (складові векторів: переміщення  $u_z$ , кут повертання  $\varphi_y$  навколо осі  $Oy$ , згинальний момент  $m_y$  та поперечна сила  $q_z$ ). Позначимо через  $S_k$  значення вектора стану у перерізі  $k$  і подамо зв'язок між значеннями цього вектора у крайніх перерізах ділянки  $k$  пластини у вигляді

$$S_k = S_{k-1} B_{tk}, \quad (1)$$

де  $B_{tk}$  – транспонована матриця впливу або перехідна матриця  $k$ -ї ділянки пластини (індекс  $t$  означає операцію транспонування), у структурі якої вже враховано два згадані вище можливі типи однорідних крайових умов на  $y=0$  і  $y=l_2$ .

З урахуванням розв'язку диференціального рівняння власних коливань  $k$ -ї ділянки пластини [3] матрицю  $B_{tk}$  подамо у формі блочної матриці, запис елементів якої (підматриць) для спрощення не міститиме індексів  $t, k$ :

$$B_{tk} = \begin{array}{c|cc} & \begin{array}{c} \overbrace{k-1} \\ \underbrace{k} \end{array} & \begin{array}{c} u \\ q \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} u \\ q \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline B_{uu} & B_{uq} \\ \hline B_{qu} & B_{qq} \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array}. \quad (2)$$

Зазначимо, що записані у (2) за межами матриці по вертикалі та горизонталі позначення векторів  $u$ ,  $q$  стосуються відповідно початкового та кінцевого перерізів ділянки.

З використанням припущення, що на межі між елементами вектор стану змінюється неперервно (вектор стану в кінці елемента такий самий, як на початку наступного), а також залежності (1) вдається обчислити значення вектора стану  $S_p$  на правому краї пластинки через значення вектора стану  $S_0$  на лівому краї пластинки за допомогою очевидного виразу  $S_p = S_0 B_{t1} B_{t2} \dots B_{t-1} B_{t1} \dots B_{tp-1} B_{tp}$ .

Підматриці блочної матриці  $B_{tk}$  визначаються виразами

$$\begin{aligned} B_{uu} &= \begin{vmatrix} S_1 & V_2 \\ T_3 & S_1 \end{vmatrix}; & B_{uq} &= \begin{vmatrix} U_2 & T_2 \\ V_2 & U_2 \end{vmatrix}; \\ B_{qu} &= \begin{vmatrix} U_1 & T_1 \\ V_1 & U_1 \end{vmatrix}; & B_{qq} &= \begin{vmatrix} S_2 & V_3 \\ T_1 & S_2 \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (3)$$

Елементами цих підматриць є функції [3, 5]:

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{\Delta^2} (a^2 \operatorname{ch} d + d^2 \cos a), & S_2 &= \frac{1}{\Delta^2} (d^2 \operatorname{ch} d + a^2 \cos a); & T_1 &= \frac{1}{\Delta^2} (d \operatorname{sh} d + a \sin a), \\ T_2 &= a^2 d^2 U_1, & T_3 &= \frac{1}{\Delta^2} \left( \frac{a^2}{d} \operatorname{sh} d + \frac{d^2}{a} \sin a \right); & U_1 &= \frac{1}{\Delta^2} (\operatorname{ch} d + \cos a), & U_2 &= a^2 d^2 U_1; \\ V_1 &= \frac{1}{\Delta^2} \left( \frac{1}{d} \operatorname{sh} d - \frac{1}{a} \sin a \right), & V_2 &= a^2 d^2 V_1, & V_3 &= \frac{1}{\Delta^2} (d^3 \operatorname{sh} d - a^3 \sin a), \end{aligned} \quad (4)$$

де  $\Delta^2 = a^2 + d^2$ ;  $a^2 = \lambda^2 - \beta_i^2$ ;  $d^2 = \lambda^2 + \beta_i^2$ ;  $\lambda^4 = \mu \omega^2 l^4 / D$  – частотний параметр;  $\beta_i = l \pi i / l_2$ ;  $i = 1, 2, 3, \dots$  – номер форми коливань пластини в площині  $yOz$ ;  $D = E h^3 / 12 (1 - \nu^2)$  – циліндрична жорсткість пластини;  $E$  – модуль пружності;  $\nu$  – коефіцієнт Пуассона;  $\mu = \rho h$  – маса пластини на одиницю площі;  $\rho$  – густина матеріалу;  $h$  – товщина пластини;  $\omega$  – кругова частота коливань (для спрощення запису індекс  $k$  упущений). Параметри  $a, d$  пов'язані очевидними залежностями

$$a^2 + d^2 = 2\lambda^2; \quad a^2 - d^2 = -2\beta_i^2; \quad ad = \lambda^4 - \beta_i^4. \quad (5)$$

Для розрахунку власних частот необхідно побудувати відповідні характеристичні рівняння. Оскільки розглядаються тільки поперечні коливання [4] (в напрямку осі  $Oz$ ), то параметрами на краях кожного перерізу будуть  $u_z, \varphi_y, m_y, q_z$ . Якщо значення якогось із цих параметрів на одній чи другій межі елемента фіксується (задається), то у відповідному топологічному коді послідовності параметрів ставиться символ «0», а коли він не задається (такий, який вже виходить), то «1». Таким чином топологічним кодом шарнірного опирання буде 0101, повного защемлення – 0011, ковзного защемлення – 1010, вільного краю – 1100, безповоротного шарнірного закріплення – 1001 і опирання без формування перерізуювальної сили – 0110. У цьому разі можливим станам елементів пластини при однорідних крайових умовах відповідають частотні визначники, складені із мінорів другого порядку матриці  $B_{tk}$ , які для кожної смужки формують так звану асоційовану матрицю  $M_k$ . Після доволі простих але тривалих перетворень із урахуванням співвідношень (5) вирази для

добутків компонент матриці  $M_k$  на  $1/\Delta^4$  подамо у табл. 1, де кожний елемент записаний у порядку логічного слідування кодів позначення тих чи інших початкових (ПП) і кінцевих (КП) крайових параметрів ділянки пластини.

Таблиця 1 – Асоційована матриця  $M_k$  (без урахування спільного множника  $1/\Delta^4$ )

КП ПП	0011	0101	0110	1001	1010	1100
1100	$E_1$	$A_3$	$H_2$	$F_2$	$C_3$	$G_4$
1010	$C_1$	$D_1$	$A_2$	$A_3$	$B_2$	$C_3$
1001	$F_1$	$C_1$	$E_2$	$G_3$	$A_3$	$F_2$
0110	$H_1$	$C_2$	$G_2$	$E_2$	$A_2$	$H_2$
0101	$A_1$	$B_1$	$C_2$	$C_1$	$D_1$	$A_3$
0011	$G_1$	$A_1$	$H_1$	$F_1$	$C_1$	$E_1$

Елементи, які входять до складу асоційованої матриці  $M_k$ , визначаються такими формулами:

$$A_s = \Delta^2 (k_s \operatorname{ch} d \sin a - f_s \operatorname{sh} d \cos a) \quad (s = 1, 2); \quad (6)$$

$$A_3 = -a^2 d^2 A_1,$$

де при  $s = 1 - k_1 = \frac{1}{a}$ ,  $f_1 = \frac{1}{d}$ ; при  $s = 2 - k_2 = -d^3$ ,  $f_2 = -a^3$ ;

$$C_s = \Delta^2 (k_s \operatorname{ch} d \sin a + f_s \operatorname{sh} d \cos a) \quad (s = 1, 2); \quad (7)$$

$$C_3 = -a^2 d^2 C_1,$$

де при  $s = 1 - k_1 = d$ ,  $f_1 = a$ ; при  $s = 2 - k_2 = \frac{d^2}{a}$ ,  $f_2 = \frac{a^2}{d}$ .

Для функцій  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $D_1$  можна записати вирази

$$B_1 = \frac{\Delta^4}{ad} \operatorname{sh} d \sin a; \quad B_2 = -a^2 d^2 B_1; \quad (8)$$

$$D_1 = \Delta^4 \operatorname{ch} d \cos a. \quad (9)$$

У свою чергу, функції  $F_1$ ,  $F_2$  і  $H_1$ ,  $H_2$  дорівнюють

$$F_1 = 2ad \operatorname{sh} d \sin a + \gamma; \quad F_2 = -a^2 d^2 F_1; \quad (10)$$

$$H_1 = \frac{\Delta^4}{ad} \operatorname{sh} d \sin a - \gamma; \quad H_2 = -a^2 d^2 H_1, \quad (11)$$

де  $\gamma = (a^2 - d^2)(1 - \operatorname{ch} d \cos a)$ .

Функції ж  $G_s$  і  $E_s$  мають вигляд

$$G_s = k_s (1 - \operatorname{ch} d \cos a) + f_s \operatorname{sh} d \sin a \quad (s = 1, 2); \quad (12)$$

$$G_3 = -a^2 d^2 G_1; \quad G_4 = -a^2 d^2 G_3,$$

де при  $s = 1 - k_1 = 2$ ,  $f_1 = \frac{d}{a} - \frac{a}{d}$ ; при  $s = 2 - k_2 = -2a^2 d^2$ ,  $f_2 = a^2 d^2 \left( \frac{d^3}{a^3} - \frac{a^3}{d^3} \right)$ ;

$$E_s = \gamma_s + k_s \operatorname{ch} d \cos a + f_s \operatorname{sh} d \sin a, \quad (13)$$

де при  $s = 1 - \gamma_1 = a^4 + d^4$ ,  $k_1 = 2ad$ ,  $f_1 = ad(a^2 - d^2)$ ; при  $s = 2 - \gamma_2 = k_1$ ,  $k_2 = \gamma_1$ ,  $f_2 = f_1$ .

Таким чином, матриця  $M_k$  містить в ролі елементів визначники частот вільних коливань окремої пластини сталої згинальної жорсткості та характеризує 36 можливих її станів і комбінацій крайових умов при  $x=0$  і  $x=l_1$  для перелічених способів закріплення сторін при  $y=0$  і  $y=l_2$ .

Наприклад, для пластини, один край якої ( $x=0$  чи  $x=l_1$ ) защемлений, а другий – шарнірно опертий, рівняння частот визначається безпосередньо елементом матриці  $M_k$  (табл. 1) із кодами 0011/0101, які задовольняють крайові умови на кінцях пластини:

$$\frac{A_1}{\Delta^4} \equiv \frac{1}{\Delta^2} \left( \frac{1}{a} \operatorname{ch} d \sin a - \frac{1}{d} \operatorname{sh} d \cos a \right) = 0, \quad (14)$$

або

$$\frac{1}{a} \operatorname{tg} a - \frac{1}{d} \operatorname{th} d = 0. \quad (15)$$

Для пластини, у якої два протилежних краї ( $y=0$  чи  $y=l_2$ ) защемлені (коди 0011/0011), а два інші – шарнірно оперті, рівняння частот набуде вигляду:

$$\frac{G_1}{\Delta^4} \equiv \frac{1}{\Delta^4} \left[ 2(1 - \operatorname{ch} d \cos a) - \frac{a^2 - d^2}{ad} \operatorname{sh} d \sin a \right] = 0, \quad (16)$$

або для розщеплюваних у даному випадку симетричних і косиметричних форм коливань

$$\left( d \operatorname{th} \frac{d}{2} + a \operatorname{tg} \frac{a}{2} \right) \left( d \operatorname{cth} \frac{d}{2} - a \operatorname{ctg} \frac{a}{2} \right) = 0. \quad (17)$$

Рівняння (14) – (17) повністю збігаються із отриманими у роботах [2, 5].

Інші можливі стани пластини, які визначаються вхідними послідовностями всіх значень булевих функцій початкових та кінцевих крайових умов, що реалізуються на множинах  $\{0,0,0,1\}$  та  $\{1,1,1,0\}$ , тобто визначаються комбінаціями крайових умов із трьох довільних або фіксованих і, відповідно, одним фіксованим або довільним ПП і КП (всього 16 станів), будуть характеризуватися частотними визначниками із мінорів третього порядку матриці  $B_{ik}$ . Вхідні послідовності такого типу можуть бути реалізовані при скінченно-автоматному моделюванні вимушених коливань пластин або визначенні їх власних форм. Аналізуючи всі отримані мінори, можна прийти до висновку, що кожний із них тотожний певному елементу матриці впливу, побудованій за технічною теорією згинальних коливань. Ця ж властивість характерна і для мінорів першого порядку матриці  $B_{ik}$ . Розміщуючи елементи матриці (2) відповідно із кодами ПП/КП, отримаємо асоційовану матрицю  $R_k$  (табл. 2) із функціями (4).

Таблиця 2 – Асоційована матриця  $R_k$

КП \ ПП	0111	1011	1101	1110
ПП \ КП	0001	0010	0100	1000
1000 1110	$S_1(\lambda)$	$V_2(\lambda)$	$U_2(\lambda)$	$T_2(\lambda)$
0100 1101	$T_3(\lambda)$	$S_1(\lambda)$	$V_2(\lambda)$	$U_2(\lambda)$
0010 1011	$U_1(\lambda)$	$T_1(\lambda)$	$S_2(\lambda)$	$V_3(\lambda)$
0001 0111	$V_1(\lambda)$	$U_1(\lambda)$	$T_1(\lambda)$	$S_2(\lambda)$

Для  $p$ -прогонової нерозрізної пластини змінної товщини в напрямку осі  $x$  рівняння частот можна виразити у вигляді послідовного добутку асоційованих матриць [6] кожної із  $p$  ділянок системи

$$V_1 \prod_{k=2}^{p-1} M_k \tilde{V}_p = 0, \quad (18)$$

де  $V_1$  і  $\tilde{V}_p$  – матриця-рядок і матриця-стовпець відповідно першої та  $p$ -ї ділянок.

Для побудови рівнянь частот у багатопрогонових стрижневих балкових конструкціях з використанням теорії скінченних автоматів і елементів математичної логіки [4] будуються належні таблиці переходу скінченного автомата. Однак у разі простих випадків необхідності у побудові таблиць переходів автомата немає – достатньо скористатися тільки аналізом графа системи. Наприклад, якщо у перерізах пластини  $1, 2, \dots, p-1$  (вздовж осі  $y$ ) поставлені абсолютно жорсткі опори, то підграф  $k$ -ї ділянки пластини набуде зображеного на рис. 1 вигляду.

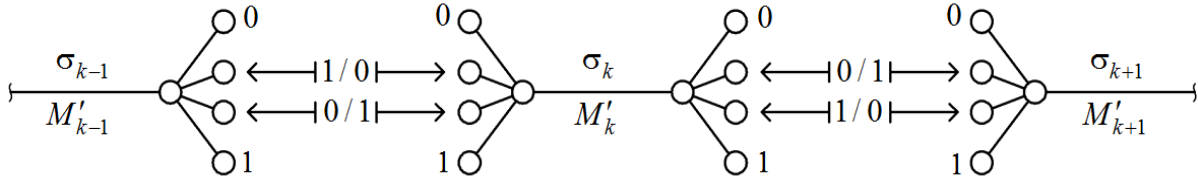


Рисунок 1 – Підграф  $k$ -ї ділянки нерозрізної пластини на жорстких опорах

Легко помітити, що в кожному перерізі між сусідніми ділянками пластини можливі два лише варіанти крайових умов і, як наслідок, чотири стани будь-якого із підавтоматів  $A_2, A_3, \dots, A_{p-1}$ , що описують перехід крайових умов від одної ділянки до наступної. Топологічний код  $k$ -го підавтомата для відповідного графа  $G_k$  ділянок пластини можна в загальному випадку подати квадратною матрицею  $\sigma_k$  кодів другого порядку

$$C(G_k) = \|\sigma_k\|_1^2, \quad (19)$$

де елементи цієї матриці –  $\sigma_{11} = [0101/0011]$ ,  $\sigma_{12} = [0101/0101]$ ,  $\sigma_{21} = [0011/0011]$ ,  $\sigma_{22} = [0011/0101]$ .

Відповідна асоційована матриця  $M'_k$  із урахуванням кодів елементів матриці  $\sigma_k$  (див. табл. 1) має вигляд

$$M'_k = \begin{array}{c|cc|c} & \begin{array}{c} \text{КП} \\ \text{НП} \end{array} & \begin{array}{c} 0011 \\ 0101 \end{array} & \begin{array}{c} 0101 \\ 0011 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} 0101 \\ 0011 \end{array} & \begin{array}{c} A_1(\lambda_k) \\ G_1(\lambda_k) \end{array} & \begin{array}{c} B_1(\lambda_k) \\ A_1(\lambda_k) \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ \Delta_k^4 \end{array} \end{array}. \quad (20)$$

Залежно від умов закріплення першої й останньої ділянок пластини визначаються функції векторів  $V_1$  і  $\tilde{V}_p$  у рівнянні (18). Наприклад, якщо лівий край пластини (при  $x=0$ ) защемлений (матриця-рядок  $\sigma_1 = \|\|0011/0011 \ 0011/0101\|\|$ ), а правий (при  $x = \sum_{k=1}^p l_k$ ) – вільний (матриця-стовпчик  $\sigma_p = \{0101/1100 \ 0011/1100\}$ ), то

$$V_1 = \frac{1}{\Delta_1^4} \|G_1(\lambda_1) \ A_1(\lambda_1)\|; \quad \tilde{V}_p = \frac{1}{\Delta_p^4} \left\| \begin{array}{c} A_3(\lambda_p) \\ E_1(\lambda_p) \end{array} \right\|. \quad (21)$$

Припустимо тепер, що в  $k$ -му перерізі пластини розміщені пружні опори віднесеної до одиниці довжини перерізу жорсткості  $c_k$  (ребро жорсткості), які впливають на поперечні переміщення, а також прикладена рівномірно розподілена уздовж перерізу зосереджена маса інтенсивності  $m_k$ . У цьому разі розв'язки будуть аналогічними до отриманих для пружно опертих балок, які окрім континуально

розподілених параметрів мають ще й точкові маси (включення) та різного типу опори [6]. Скажімо, вираз для асоційованої матриці  $M_k$  (позначимо її для цього випадку через  $Y_k^c$ ) ділянки пластини, яка враховує наявність пружних опор на лівому краї, з урахуванням позначень [6] можна подати у вигляді

$$Y_k^c = M_k + \tilde{c}_k M_k^c, \quad (22)$$

де  $M_k^c = M_{0101}^{(1)} + M_{0011}^{(2)}$ ;  $\tilde{c}_k = c_k - m_k \omega^2$ .

Для ділянки пластини із пружними стосовно повороту перерізу опорами жорсткості  $q_k$  аналогічна матриця  $Y_k^q$  набуде вигляду

$$Y_k^q = M_k + \tilde{q}_k M_k^q, \quad (23)$$

де  $M_k^q = M_{1010}^{(1)} + M_{0011}^{(5)}$ ;  $\tilde{q}_k = q_k - J_{km} \omega^2$ .

Відповідна асоційована матриця  $Y_k^{cq}$  для ділянки пластини з пружними стосовно поперечних і кутових переміщень опорами, а також рівномірно розподіленою уздовж перерізу на лівому кінці масою запишеться так:

$$Y_k^{cq} = M_k + \tilde{c}_k M_k^c + \tilde{q}_k M_k^q + \tilde{c}_k \tilde{q}_k M_k^{cq}, \quad (24)$$

де  $M_k^{cq} = M_{0011}^{(1)}$ .

Той же результат отримується шляхом розкриття мінорів другого порядку матриці  $R_k^{cq}$ , елементи якої також використовуються в розрахунках вимушених коливань і побудові форм власних коливань нерозрізних плит [7]:

$$R_k^{cq} = R_k + \tilde{c}_k R_{0001}^{(1)} + \tilde{q}_k R_{0010}^{(2)}, \quad (25)$$

де  $R_k$  – асоційована матриця четвертого порядку звичайної ділянки пластини (табл. 2);

$$R_{0001}^{(1)} = R_{1110}^{(1)}; \quad R_{0010}^{(2)} = R_{1011}^{(2)}.$$

Загалом, коли є зосереджені включення різних типів [6], з огляду на лінійність задачі асоційовані матриці ділянок можуть бути отримані, користуючись принципом суперпозиції. При цьому рівняння частот, які описують ту чи іншу систему, будуть мати один і той же вигляд (18). Для складніших випадків необхідно укладати інші таблиці переходів із кодами ПП, КП кожної ділянки пластини.

Для ще одного прикладу розглянемо власні коливання ортотропної плити з урахуванням сили інерції обертання, зсувів і поздовжніх сил. Для цього використаємо зв'язки [8] для покладеної на суцільну пружну основу сукупності з двох систем шарнірно опертих балок однакової довжини  $l_1$  і  $l_2$ , які між собою перетинаються:

$$\frac{\sigma_1 + 2\beta_i^2 q_1}{\lambda_{1i}^4 \sigma_1 + 2\beta_i^2 \nu_1 - \beta_i^4} + \frac{B_2}{B_1} \left[ \frac{\sigma_2 + 2\beta_j^2 q_2}{\lambda_{2j}^4 \sigma_2 + 2\beta_j^2 \nu_2 - \beta_j^4} \right] = 0, \quad (26)$$

де  $B_1 = l_1^3 / E_1 J_1$ ,  $B_2 = l_2^3 / E_2 J_2$  – коефіцієнти, які характеризують жорсткості на згин поздовжніх і поперечних балок;  $\sigma_s, \nu_s, q_s$  – параметри, що враховують інерцію обертання, зсуви і поздовжні сили [8].

Для створення механічної моделі ортотропної плити подамо систему взаємно перпендикулярних регулярних балок [8] як набір взаємно ортогональних балочок-смужок прямокутного перерізу висоти  $h$ , зв'язаних між собою розподіленими пружними зв'язками у вигляді звичайної вінклерівської основи. Частотний параметр  $\lambda_{se}^4$  містить, крім коефіцієнта зв'язку  $\mu_s \omega_{ij}^2$ , що при вільних коливаннях виникає від сил інерції і надає поштовху, ще й коефіцієнт  $k_n$  пружної основи [9], який набуває того чи іншого знака залежно від того, який із напрямків балок буде таким, що підтримує балки іншого напрямку.

Після переходу від жорсткості балки при згині до циліндричної жорсткості пластини  $D_s = E_s h^3 / 12 (1 - \nu_1' \nu_2')$ , а також з урахуванням того, що  $\mu_s = h\rho/2$ ,  $l_2 = l_1 = l$ , рівняння (26) при  $\sigma_s = 1$ ,  $\nu_s = 0$ ,  $q_s = 0$  набуде вигляду

$$\frac{\beta_j^4 - \frac{h\rho\omega_{ij}^2 l_1^4}{2D_2} + \beta_{1i}^2 \beta_{2j}^2 \frac{D_3 l_1^4}{D_2}}{\frac{h\rho\omega_{ij}^2 l_2^4}{2D_1} - \beta_{1i}^2 \beta_{2j}^2 \frac{D_3 l_2^4}{D_1} - \beta_i^4} = \frac{B_2}{B_1}, \quad (27)$$

де  $\nu_1'$ ,  $\nu_2'$  – коефіцієнти Пуассона в осевих напрямках плити,  $\rho$  – густина матеріалу плити;  $D_3 = D_1 \nu_2' + 2D_k$ ,  $D_k = Gh^3/12$ ;  $G$  – модуль пружності при зсуві;  $\beta_{1i} = \pi i/ml$ ,  $\beta_{2j} = \pi j/nl$ .

Розв'язуючи рівняння (27) відносно  $\omega_{ij}^2$ , приходимо до відомого результату [9] для власних коливань ортотропної плити

$$\omega_{ij}^2 = \frac{1}{\rho h} \left( \beta_{1i}^4 D_1 + 2\beta_{1i}^2 \beta_{2j}^2 D_3 + \beta_{2j}^4 D_2 \right). \quad (28)$$

Якщо в серединній площині плити діють поздовжні сили, то

$$\omega_{ij}^2 = \frac{1}{\rho h} \left[ \beta_{1i}^4 D_1 + \beta_{2j}^4 D_2 + \beta_{1i}^2 \left( \beta_{2j}^2 D_3 \pm N_1 \right) + \beta_{2j}^2 \left( \beta_{1i}^2 D_3 \pm N_2 \right) \right]. \quad (29)$$

Аналогічно із рівняння (26) отримаємо вирази (30), (31) для визначення кругової частоти  $\omega_{ij}$  з урахуванням відповідно інерції обертання та деформації зсуву:

$$\omega_{ij}^2 = \frac{1}{\rho h} \left[ \frac{\beta_{1i}^4 D_1 + \beta_{2i}^4 D_2}{1 + \frac{r^2}{2} (\beta_{1i}^2 + \beta_{2j}^2)} + 2\beta_{1i}^2 \beta_{2j}^2 D_3 \right]; \quad (30)$$

$$\omega_{ij}^2 = \frac{1}{\rho h} \left[ \frac{\beta_{1i}^4 D_1}{1 + \beta_{1i}^2 \frac{D_1 k h^2}{12 D_k}} + \frac{\beta_{2i}^4 D_2}{1 + \beta_{2j}^2 \frac{D_2 k h^2}{12 D_k}} + 2\beta_{1i}^2 \beta_{2j}^2 D_3 \right], \quad (31)$$

де  $k$  – коефіцієнт, залежний від форми поперечного перерізу.

Оскільки подані результати отримані шляхом граничного переходу для двох систем взаємно перпендикулярних балочок-смужок, то за допомогою такого ж підходу можна розв'язати і деякі інші окремі задачі комбінацій нерозрізних балок: плит, підкріплених регулярною сіткою ребер, нерозрізних плит або пакетів плит, з'єднаних між собою лінійно-пружними безінерційними зв'язками однакової жорсткості.

#### Список використаної літератури

1. Корнев, Б. Г. *Справочник по динамике сооружений [Текст]* / Б. Г. Корнев, И. М. Рабинович. – М.: Стройиздат, 1972. – 511 с.
2. *Справочник по строительной механике корабля: в 3 т. [Текст]* / под ред. Г. В. Бойцова. – Л.: Судостроение, 1982. – 320 с.
3. Ивович, В. А. *Переходные матрицы в динамике упругих систем : Справочник [Текст]* / В. А. Ивович. – М.: Машиностроение, 1981. – 183 с.
4. Распопов, А. С. *Конечно-автоматное моделирование пространственных колебаний стержневых и балочных конструкций [Текст]* / А. С. Распопов // Вісн. Дніпр. нац. ун-ту заліз. трансп. ім. акад. В. Лазаряна. – 2007. – Вип. 19. – С. 125–133.
5. Новацкий, В. *Динамика сооружений [Текст]* / В. Новацкий. – М.: Гостройиздат, 1963. – 376 с.
6. Распопов, О. С. *Поперечні коливання континуально-дискретних балок на суцільній пружній основі [Текст]* / О. С. Распопов // *Діагностика, довговічність та реконструкція мостів і будівельних*



- конструкцій. Зб. наук. пр. / Фіз.-мех. ін-т. ім. Г. В. Карпенка НАН України. – 2008. – Вип. 10. – С. 183–193.
7. Распопов, О. С. Особливості моделювання вимушених коливань нерозрізних конструкцій в системі скінченних автоматів [Текст] / О. С. Распопов // Дороги і мости: Зб. наук. пр. / – К. : ДерждорНДІ, 2008. – Вип. 8. – С. 229–236.
  8. Распопов, А. С. К расчету поперечных колебаний пересекающихся балок с распределенными параметрами [Текст] / А. С. Распопов // Вопросы динамики мостов и теории колебаний: Межвуз. сб. науч. тр. – ДИИТ. 1993. – С. 90–94.
  9. Варвак, П. М. Справочник по теории упругости [Текст] / П. М. Варвак, А. Ф. Рябов. – К.: Будівельник. – 1971. – 418 с.