

## **МЕТОДИКА АПРОКСИМАЦІЇ ПЕРЕМІЩЕНЬ ЗАЛІЗНИЧНИХ СПОРУД**

к.т.н., доцент Ковальов В.В. (ДНУЗТ)

Наведено методику апроксимації переміщень транспортних ґрунтових споруд.

Ковалев В.В.

## **МЕТОДИКА АПРОКСИМАЦИИ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНЫХ СООРУЖЕНИЙ**

Изложена методика аппроксимации перемещений транспортных ґрунтовых сооружений.

Kovalov V.V.

## **METHODS APPROXIMATION DISPLACEMENTS OF RAILWAY CONSTRUCTIONS**

The method of approximation displacements ground transportation constructions.

*Ключові слова:* сплайн, залізнична споруда, апроксимація

*Ключевые слова:* сплайн, железнодорожное сооружение, аппроксимация

*Keywords:* spline, railway constructions, approximation

### **ВСТУП**

В даний час вирішення проблеми математичного моделювання залізничних ґрунтових споруд, що деформуються є актуальним, оскільки експлуатація земляного полотна в результаті деформацій основи ускладнюється. Зміна плану і профілю протяжних ґрунтових споруд впливає на ефективність використання залізничного транспорту, а саме приводить до зниження швидкостей руху транспортних засобів, до порушення безпечної і безперебійної роботи транспорту, а також веде до підвищених грошових витрат на експлуатацію [1, 2].

Проблема переміщень основ і вплив їх на ґрунтові конструкції споруд пов'язана із зміною деформацій у часі. Урахування часового фактора на практиці робиться спеціальними геодезичними службами шляхом зняття планово-висотного положення характерних точок рельєфу автоматичною системою зйомки, системою GPS навігації у визначені інтервали часу, що залежать від швидкості осідання основи, що деформується. Практично як вузли використовують сітку реперів, що характеризують вертикальні та горизонтальні переміщення поверхні. Забезпечення надійної експлуатації споруд у зоні деформування неможливо без системного аналізу деформацій і математичної апроксимації процесів переміщення основ. Таким чином, для

автоматизованої обробки спостережень і екстраполяції результатів на заданий період часу необхідна математична модель поверхні.

### МЕТА РОБОТИ

Мета роботи – знайти функціональну залежність деформацій залізничної споруди і основи від часу при застосуванні сплайн-функцій другого степеня з урахуванням граничної умови –  $P'_{2,1}(t_0) = \eta'_0$ , що дасть можливість за результатами натурних спостережень і отриманої сплайн-функції оцінювати напружено-деформований стан залізничних споруд та прогнозувати їх подальші деформації.

### РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Розглянемо залежність від часу вертикальних переміщень поверхні залізничної ділянки, котрі фіксувалися шляхом геодезичних вимірів через визначені проміжки часу в період з червня 2002 р. по травень 2012 р на Донецькій залізниці. Результати виконаних геодезичних вимірів наведені в таблиці 1.

На підставі таблиці 1 змодельємо зміну вертикальних переміщень для кожного місяця у період з червня 2002 р. по травень 2012 р. за допомогою сплайнів другого степеня дефектів 1 –  $S_2(t)$  [3, 4].

Таблиця 1

Результати вимірів реальних вертикальних переміщень ( $\eta$ ) ділянки по пікету 140

Дата, $t$	$\eta$ , мм	Дата, $t$	$\eta$ , мм	Дата, $t$	$\eta$ , мм	Дата, $t$	$\eta$ , мм	Дата, $t$	$\eta$ , мм	Дата, $t$	$\eta$ , мм
Червень 2002	31	Червень 2004	312	Листоп. 2006	483	Листоп. 2008	585	Червень 2010	742	Трав. 2012	844
Червень 2003	130	Червень 2005	384	Червень 2007	535	Верес. 2009	671	Серпень 2011	774		

Для цього необхідно розбити відрізок глобальної інтерполяції  $[t_0, t_n]$  (тобто відрізок часу з червня 2002 року ( $t_0$ ) по травень 2012 року ( $t_n$ )) на часткові часові відрізки –  $t_{i-1}, t_i$   $i = 1, 2, \dots, n$ .

Таким чином сплайн  $S_2(t)$  представлений поліномом другого степеня:

$$S_2(t) = \begin{cases} P_{2,1}(t) = a_1 + b_1t + c_1^2t, & t \in [t_0, t_1] \\ P_{2,2}(t) = a_2 + b_2t + c_2^2t, & t \in [t_1, t_2] \\ \dots \\ P_{2,n}(t) = a_n + b_nt + c_n^2t, & t \in [t_{n-1}, t_n] \end{cases} \quad (1)$$

де  $n$  – кількість часових інтервалів між натурними замірами реальних вертикальних переміщень залізничної ґрунтової споруди з червня 2002 року по травень 2012 року,  $n = 10$  (табл. 1);

Для рішення сплайну маємо визначити  $3n = 30$  невідомих коефіцієнтів  $(a_i, b_i, c_i, i = 1, 2, \dots, n)$ . Функція  $S_2(t)$  повинна задовольняти таким умовам:

1) умова інтерполяції

$$S_2(t_i) = \eta_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2)$$

де  $\eta$  – реальні вертикальні переміщення залізничної споруди (табл. 1).

2) умова безперервності похідної

$$P'_{2,i}(t_i) = P'_{2,i+1}(t_i), \quad i = 1, 2, \dots, n-1. \quad (3)$$

Згідно першої умови (2): у підсумку група співвідношень (2) у силу (1) дає  $2n=20$  рівнянь:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 + b_1 t_0 + c_1 t_0^2 = \eta_0 \\ a_1 + b_1 t_1 + c_1 t_1^2 = \eta_1 \\ a_2 + b_2 t_1 + c_2 t_1^2 = \eta_1 \\ a_2 + b_2 t_2 + c_2 t_2^2 = \eta_2 \\ \dots \\ a_n + b_n t_{n-1} + c_n t_{n-1}^2 = \eta_{n-1} \\ a_n + b_n t_n + c_n t_n^2 = \eta_n \end{array} \right. \quad (4)$$

Так як  $P'_{2,i}(t_i) = b_i t + 2c_i t$ , то згідно умови безперервності похідної група співвідношень (3) дає  $n-1=9$  рівнянь:

$$\left\{ \begin{array}{l} b_1 + 2c_1 t_1 - b_2 - 2c_2 t_1 = 0 \\ b_2 + 2c_2 t_2 - b_3 - 2c_3 t_2 = 0 \\ \dots \\ b_{n-1} + 2c_{n-1} t_{n-1} - b_n - 2c_n t_{n-1} = 0 \end{array} \right. \quad (5)$$

Співвідношення (4) і (5) дають у сумі  $3n-1$  рівнянь для визначення  $3n$  невідомих коефіцієнтів, тобто не вистачає ще одного рівняння. Це рівняння може бути отримане з граничної умови –  $P'_{2,1}(t_0) = \eta'_0$ :

$$b_1 + 2c_1 t_0 = \eta'_0 = 0. \quad (6)$$

де  $\eta'_0 = 0$  – перша похідна реальних вертикальних переміщень ґрунтової споруди, що були зафіксовані в червні 2002 року (табл. 1);  
 $t_0$  – червень 2002 року.

Таким чином, співвідношення (4), (5) і (6) складають повну систему  $3n$  рівнянь з  $3n$  невідомими. Вирішивши її знайдемо коефіцієнти сплайну  $a_i, b_i, c_i, i = 1, 2, \dots, n$  для інтерполяції реальних вертикальних переміщень ділянки ґрунтової споруди, що деформується.

Розраховані коефіцієнти сплайну другого степеня представлені в табл. 2.

Таким чином, розрахувавши значення коефіцієнтів сплайну другого степеня, одержимо рівняння по яким можливо для кожного місяця кожного з

інтервалів часу  $n$  (табл. 1) розрахувати значення вертикальних переміщень ( $\eta$ ) ділянки. Рівняння для кожного інтервалу часу наведені в табл. 3.

Таблиця 2

Значення коефіцієнтів сплайну другого степеня									
Коефіцієнти сплайну другого степеня									
$a_1$	31	$a_3$	-396,00	$a_5$	-2717,3	$a_7$	2395,43	$a_9$	-383,35
$b_1$	$6,1^{-14}$	$b_3$	45,17	$b_5$	107,29	$b_7$	-51,93	$b_9$	19,96
$c_1$	0,69	$c_3$	-0,65	$c_5$	-0,88	$c_7$	0,37	$c_9$	-0,09
$a_2$	-84	$a_4$	1033,72	$a_6$	872,79	$a_8$	-4100,53	$a_{10}$	9653,17
$b_2$	19,17	$b_4$	-34,26	$b_6$	-12,38	$b_8$	97,40	$b_{10}$	-162,52
$c_2$	-0,11	$c_4$	0,45	$c_6$	0,11	$c_8$	-0,49	$c_{10}$	0,74

Таблиця 3

**Рівняння для розрахунку вертикальних переміщень ( $\eta_i$ ) ділянки залізниці для кожного інтервалу часу.**

Інтервал часу	Рівняння для розрахунку вертикальних переміщень в даному інтервалі часу
червень 2002 – червень 2003	$31+6,1^{-14} \cdot t_0 + 0,69 \cdot t_0^2 = \eta_i$
липень 2003 – червень 2004	$-84+19,17 \cdot t_0 - 0,11 \cdot t_0^2 = \eta_i$
липень 2004 – червень 2005	$-396,00+45,17 \cdot t_0 - 0,65 \cdot t_0^2 = \eta_i$
липень 2005 – листопад 2006	$1033,72-34,26 \cdot t_0 + 0,45 \cdot t_0^2 = \eta_i$
грудень 2006 – червень 2007	$-2717,30+107,29 \cdot t_0 - 0,88 \cdot t_0^2 = \eta_i$
липень 2007 – листопад 2008	$872,79-12,38 \cdot t_0 + 0,11 \cdot t_0^2 = \eta_i$
грудень 2008 – вересень 2009	$2395,43-51,93 \cdot t_0 + 0,37 \cdot t_0^2 = \eta_i$
жовтень 2009 – червень 2010	$-4100,53+97,40 \cdot t_0 - 0,49 \cdot t_0^2 = \eta_i$
липень 2010 – серпень 2011	$-383,35+19,96 \cdot t_0 - 0,09 \cdot t_0^2 = \eta_i$
вересень 2011 – травень 2012	$9653,17-162,52 \cdot t_0 + 0,74 \cdot t_0^2 = \eta_i$

Таким чином для кожного інтервалу часу (табл. 1) отримано своє інтерполяційне рівняння (табл. 3) по яким ведеться розрахунок вертикальних переміщень ґрунтової споруди.

Отримавши систему рівнянь, зробимо інтерполяцію реальних вертикальних переміщень деформованої ділянки ґрунтової споруди для кожного місяця в період з червня 2002 р. по травень 2012 р.

Результати інтерполяції реальних натурних спостережень за допомогою сплайну другого степеня дефекту 1 наведені в таблиці 4.

Таким чином розроблена методика дає можливість при наявності лише одинадцяти натурних геодезичних спостережень (вимірів вертикальних просідань) з червня 2002 р. по травень 2012 р. змоделювати вертикальні деформації для кожного місяця для цього проміжку часу.

Таблиця 4

**Результати інтерполяції натурних спостережень за допомогою сплайну другого степеня дефекту 1.**

Дата	η, мм	Дата	η, мм	Дата	η, мм	Дата	η, мм	Дата	η, мм	Дата	η, мм
<b>Черв.</b> <b>2002</b>	<b>31</b>	Лютий 2004	255	Жовт. 2005	384	<b>Черв.</b> <b>2007</b>	<b>535</b>	Лютий 2009	604	Жовт. 2010	755
Липень 2002	32	Берез. 2004	270	Листоп. 2005	387	Липень 2007	536	Берез. 2009	611	Листоп. 2010	758
Серпень 2002	34	Квітень 2004	284	Грудень 2005	390	Серпень 2007	537	Квітень 2009	619	Грудень 2010	760
Верес. 2002	38	Травень 2004	299	Січень 2006	394	Верес. 2007	539	Травень 2009	628	Січень 2011	763
Жовт. 2002	43	<b>Черв.</b> <b>2004</b>	<b>312</b>	Лютий 2006	399	Жовт. 2007	541	Черв. 2009	638	Лютий 2011	765
Листоп. 2002	49	Липень 2004	326	Берез. 2006	404	Листоп. 2007	543	Липень 2009	648	Берез. 2011	767
Грудень 2002	56	Серпень 2004	338	Квітень 2006	411	Грудень 2007	545	Серпень 2009	660	Квітень 2011	769
Січень 2003	65	Верес. 2004	348	Травень 2006	419	Січень 2008	548	<b>Верес.</b> <b>2009</b>	<b>671</b>	Травень 2011	770
Лютий 2003	76	Жовт. 2004	357	Черв. 2006	427	Лютий 2008	550	Жовт. 2009	683	Черв. 2011	772
Берез. 2003	87	Листоп. 2004	365	Липень 2006	437	Берез. 2008	553	Листоп. 2009	694	Липень 2011	773
Квітень 2003	100	Грудень 2004	372	Серпень 2006	447	Квітень 2008	557	Грудень 2009	704	<b>Серпень</b> <b>2011</b>	<b>774</b>
Травень 2003	115	Січень 2005	377	Верес. 2006	458	Травень 2008	560	Січень 2010	713	Верес. 2011	776
<b>Черв.</b> <b>2003</b>	<b>130</b>	Лютий 2005	381	Жовт. 2006	470	Черв. 2008	564	Лютий 2010	721	Жовт. 2011	780
Липень 2003	147	Берез. 2005	384	<b>Листоп.</b> <b>2006</b>	<b>483</b>	Липень 2008	568	Берез. 2010	728	Листоп. 2011	784
Серпень 2003	163	Квітень 2005	386	Грудень 2006	496	Серпень 2008	572	Квітень 2010	734	Грудень 2011	791
Верес. 2003	179	Травень 2005	386	Січень 2007	507	Верес. 2008	576	Травень 2010	739	Січень 2012	799
Жовт. 2003	195	<b>Черв.</b> <b>2005</b>	<b>384</b>	Лютий 2007	516	Жовт. 2008	581	<b>Черв.</b> <b>2010</b>	<b>742</b>	Лютий 2012	808
Листоп. 2003	210	Липень 2005	383	Берез. 2007	523	<b>Листоп.</b> <b>2008</b>	<b>585</b>	Липень 2010	746	Берез. 2012	819
Грудень 2003	225	Серпень 2005	383	Квітень 2007	529	Грудень 2008	591	Серпень 2010	749	Квітень 2012	831
Січень 2004	241	Верес. 2005	383	Травень 2007	533	Січень 2009	597	Верес. 2010	752	<b>Травень</b> <b>2012</b>	<b>844</b>

*Примітки:* 1) η – реальні вертикальні переміщення ділянки залізничної ґрунтової споруди, що деформується;

2) напівжирним шрифтом виділені зафіксовані реальні вертикальні деформації залізничної ґрунтової споруди.

## ВИСНОВКИ

1. Розроблену методику можливо застосовувати для побудовання математичної інтерполяційної моделі залежності деформацій поверхні ґрунтової споруди від часу. При цьому немає необхідності проводити геодезичні заміри ґрунтової споруди через короткі проміжки часу (наприклад, кожного місяця), достатньо лише вибіркової кількості натурних спостережень, що приводить до економії часу дослідних організацій та коштів.

2. На відміну від інших методів апроксимації, що дають одне інтерполяційне рівняння для всього проміжку часу, апроксимація сплайн-функціями дає можливість підібрати окреме рівняння для кожного окремого інтервалу з всього проміжку часу, що приводить до більш детальної апроксимації натурних спостережень.

3. Можливо проводити інтерполяцію сплайн-функціями різного степеня для кожного окремого інтервалу з всього проміжку часу, потім визначити збіжність результатів з натурними спостереженнями та вибрати для апроксимації оптимальну степінь сплайн-функції. Таким чином на різних окремих інтервалах з всього проміжку часу можлива різна (найбільш оптимальна) степінь апроксимації сплайн-функціями.

4. Математична інтерполяційна модель дає результати прогнозування в часі деформацій земляного полотна залізниці. Застосування сплайнів при визначенні геометричних параметрів ґрунтової споруди дає можливість врахувати зміни розрахункової схеми у разі деформування основи з наступним врахуванням інерційних зусиль.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Шахунянц Г.М. Железнодорожный путь [Текст] / Шахунянц Г.М. – М.: Транспорт, 1969. – 536 с.
2. Дяченко Л.І. Інструкція з утримання земляного полотна залізниць України [Текст] / Л.І. Дяченко, Г.П. Кислий, В.О. Курач. – Д.: Вид-во АТЗТ ВКФ "Арт-прес", 2001. – 104 с.
3. Данилова Н.И. Численные методы [Текст] / Н.И. Данилова, Н.С Дубровская, О.П. Кваша. – М.: Высшая шк., 1976. – 368 с.
4. Бронштейн И.Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов [Текст] / Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. – 13-е изд., испр. – М. Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. – 544 с.