

Влияние модуля упругости материалов тела качения и плоскости на закон движения при плоскопараллельном движении

Бондаренко Л.Н., Колбун В.В.

Днепропетровский национальный университет железнодорожного транспорта им. ак. В. Лазаряна

Жаковский А.Д.

Днепропетровский орган по сертификации железнодорожного транспорта

Постановка задачи. Без учета сопротивления качению эта задача приводится в [1] как пример решения второй основной задачи динамики плоскопараллельного движения.

Задача ставится так. По наклонной плоскости AB катится вниз круглое тело радиуса r , массой m . Определить закон движения тела и найти условие, при котором оно будет катиться без проскальзывания, если коэффициент скольжения равен f (рис. 1).

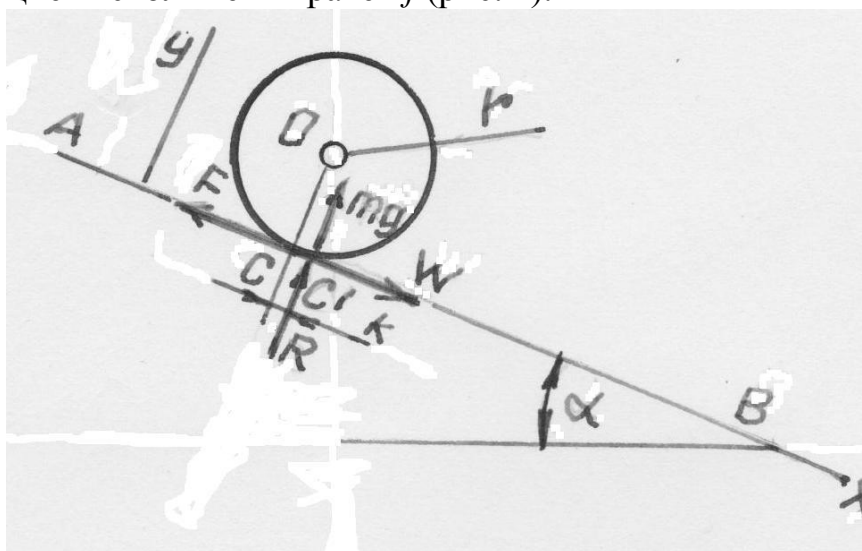


Рис. 1. Расчетная схема к условию задачи

Характерно, что в условии задачи даже не оговорено, что сопротивлением качения пренебрегается и очевидно для усвоения теории это допущение не существенно. Но в инженерной практике пренебрежение сопротивлением качению может привести к неточным результатам, а именно как к неточному закону движения, так и условию при котором качение будет происходить без проскальзывания.

Цель исследований. Определить влияние угла наклона плоскости на величину коэффициента трения качения и его влияние на закон движения.

Материал статьи. Исходя из дифференциальных уравнений движения свободного твердого тела, находим

$$m \cdot \ddot{x}_C = m \cdot g \cdot \sin \alpha - F;$$

$$m \cdot \ddot{y}_C = R - m \cdot g \cdot \cos \alpha = 0; \quad (1)$$

$$I_C \cdot \ddot{\varphi} = -F \cdot r + k \cdot m \cdot g \cdot \cos \alpha,$$

где k – коэффициент трения качения.

При неизвестных x_C , φ , R , и F положим, что

$$\ddot{x}_C = -r \cdot \ddot{\varphi} \quad (2)$$

Точка C тела качения контактирует с прямой AB и является мгновенным центром скоростей, но в более точной постановке за точку контакта необходимо принять точку C расположенную на расстоянии плеча трения качения k . Но, учитывая незначительность величины k , по сравнению с r , такое допущение возможно.

С учетом выражения (2) сила трения

$$F = m \cdot \ddot{x}_C \cdot \frac{\rho_C^2}{r^2} + \frac{k \cdot m \cdot g}{r} \cdot \cos \alpha, \quad (3)$$

где ρ_C – радиус инерции тела качения относительно оси проходящей через точку O перпендикулярно плоскости рисунка.

Величину \ddot{x}_C найдем, с учетом k , из выражения

$$\ddot{x}_C = \frac{g \cdot (\sin \alpha - \frac{k}{r} \cdot \cos \alpha)}{1 + \frac{\rho_C^2}{r^2}}, \quad (4)$$

а сила трения

$$F = \frac{m \cdot g \cdot \rho_C^2}{r^2 + \rho_C^2} \cdot (\sin \alpha - \frac{k}{r} \cdot \cos \alpha). \quad (5)$$

Тело будет катиться без проскальзывания, если сила трения скольжения при качении (5) будет меньше предельной величины силы трения скольжения $F_1 = f \cdot m \cdot g \cdot \cos \alpha$, т.е.

$$\frac{\rho_C^2 \cdot (\sin \alpha - \frac{k}{r} \cdot \cos \alpha)}{r^2 + \rho_C^2} \leq \mu \cdot \cos \alpha. \quad (6)$$

Сила трения скольжения будет равна нулю при $\operatorname{tg} \alpha = \frac{k}{r}$ или $\alpha \approx \frac{k}{r}$. Из выражения (6) можно сделать вывод, что качение без проскальзывания возможно только когда угол α наклона плоскости к горизонту будет составлять

$$\operatorname{tg} \alpha \leq \mu \cdot (1 + \frac{r^2}{\rho_C^2}) + \frac{k}{\rho_C}. \quad (7)$$

При $tg\alpha$ большем правой величины неравенства (7) тело будет скользить по наклонной плоскости.

Пренебрежение сопротивления качению в подобных задачах связан с тем, что отсутствуют аналитические зависимости для определения коэффициента трения качения для разных схем контакта, а ориентировочное принятие его величины может привести к неправильной оценке роли трения качения в подобных задачах.

Зависимости для определения коэффициента трения качения получены в [2], содержащие только общепринятые механические константы материалов и размеры контактируемых тел.

1. Рассмотрим задачу о качении цилиндра длиной $B=r=900$ мм по плоскости из Стали 50 (ГОСТ 1050-74) с модулем упругости $E_1=2,2 \cdot 10^6$ МПа; коэффициентом Пуассона $\mu_1=0,3$.

Материал цилиндров поварьируем:

А). Та же Сталь 50 с объемной массой $\gamma=7,81$ т/м³.

Б). Бронза АЖ9-4 (ГОСТ 493-75) с $E_2=1,12 \cdot 10^6$ МПа, $\mu_2=0,29$, $\gamma=7,5$ т/м³.

1.1 Полуширина пятна контакта цилиндра из Стали 50 с плоскостью [3] при равенствах модулей упругости и коэффициентов Пуассона

$$b = 1,526 \cdot \sqrt{\frac{P \cdot r \cdot \cos\alpha}{B \cdot E}}, \quad (8)$$

где $P=\pi \cdot r^2 \cdot B \cdot \gamma$ – масса цилиндра.

Коэффициент трения качения при первоначальном линейном контакте [2]

$$k = 0,225 \cdot b \cdot e^{-1,2 \cdot r}, \quad (9)$$

где r – в метрах.

При известной величине k находятся величины F (3), \ddot{x}_c (4), $tg\alpha$ (7).

Для цилиндра из бронзы формула (8) имеет вид

$$b = 1,131 \cdot \sqrt{\frac{P \cdot r \cdot \cos\alpha}{B} \cdot \left(\frac{1-\mu_1^2}{E_1} + \frac{1-\mu_2^2}{E_2} \right)}. \quad (10)$$

Зависимости k , F , \ddot{x}_c и $tg\alpha$ от угла наклона плоскости с учетом и без учета трения качения показаны на рис. 2.

1.2. В случае качения стального шара по плоскости полуширина пятна контакта

$$b = 1,109 \cdot \sqrt[3]{\frac{P \cdot r \cdot \cos\alpha}{E}}, \quad (11)$$

где $P=4 \cdot \pi \cdot r^3 \cdot \gamma/3$ – вес шара.

А при качении шара из бронзы

$$b = 0,91 \cdot \sqrt[3]{P \cdot r \cdot \cos\alpha \cdot \left(\frac{1-\mu_1^2}{E_1} + \frac{1-\mu_2^2}{E_2} \right)}. \quad (12)$$

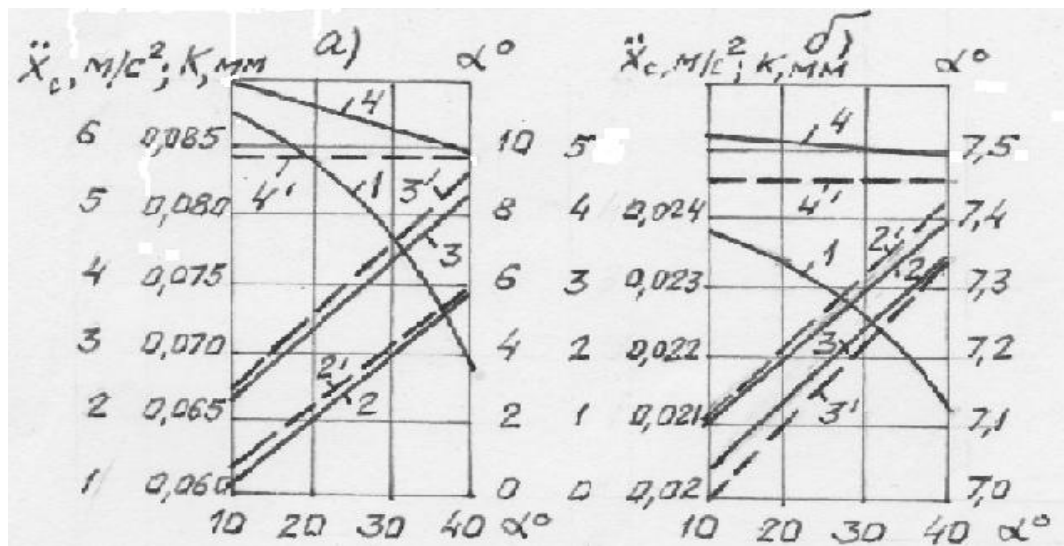


Рис. 2. Зависимости от угла наклона плоскости: 1 – коэффициента трения качения; 2 – ускорения цилиндра; 3 – силы трения; 4 – угла, определяющего качение без скольжения (а – стальной цилиндр; б – то же для цилиндра из бронзы) штрихами обозначены зависимости без учета трения качения.

Коэффициент трения качения для случая контакта шар – плоскость (первоначальный точечный контакт) [2]

$$k = 0,16 \cdot b \cdot e^{0,2 \cdot r}. \quad (13)$$

Отметим, что все зависимости для контакта шар – плоскость аналогичны зависимостям для контакта цилиндр – плоскость, отличаясь только величиной.

Анализ вычислений и графиков на рис.2 позволяет сделать выводы:

- коэффициент трения качения существенно (более 20% при $\alpha=10^\circ$ и $\alpha=40^\circ$) уменьшается с увеличением угла наклона плоскости;
- сила трения с учетом и без учета коэффициента трения качения отличается незначительно, причем с увеличением наклона разница в значениях уменьшается для стального цилиндра и увеличивается для цилиндра из бронзы; это касается и ускорений цилиндра и шара.

Литература

1. Кильчевский Н.А. Курс теоретической механики: В 2 т. Т. 2 – М.: Наука, 1977. – 544 с.
2. Бондаренко Л.М. Аналітичні залежності для визначення коефіцієнта тертя кочення для найбільш вживаних схем дотику / Техніка будівництва, № 11, 2002. – С. 36 – 38.
3. Справочник по сопротивлению материалов / Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В. – Киев: Наук. думка, 1988. – 736 с.