

## АНАЛІЗ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ ДЛЯ АПРОКСИМАЦІЇ УНІВЕРСАЛЬНОЇ МАГНІТНОЇ ХАРАКТЕРИСТИКИ ТЯГОВИХ ДВИГУНІВ ПОСТІЙНОГО ТА ПУЛЬСУЮЧОГО СТРУМУ

Розглянуто ряд функцій для апроксимації універсальної магнітної характеристики та її похідної, оцінено їх точність та відповідність висунутим вимогам.

*Ключові слова:* універсальна магнітна характеристика, тягові двигуни постійного та пульсуючого струму, похідна, апроксимація

Рассмотрен ряд функций для аппроксимации универсальной магнитной характеристики и ее производной, оценена их точность и соответствие выдвинутым требованиям.

*Ключевые слова:* универсальная магнитная характеристика, тяговые двигатели постоянного и пульсирующего тока, производная, аппроксимация

A number of functions for approximating the universal magnetic curve and its derivatives, their accuracy and conformity to the requirements put forward by the authors have been studied.

*Keywords:* universal magnetic curve, traction DC and AC motors, derivative, approximation

Універсальну магнітну характеристику, запропоновану М. Д. Находкіним та В. С. Хвостовим [1] використовують для розрахунку електромеханічних характеристик тягових двигунів постійного та пульсуючого струму. Вона являє собою залежність магнітного потоку головних полюсів від магніторушійної (намагнічуючої) сили  $\Phi^*$  ( $F^*$ ), виражених у відносних одиницях. Далі в тексті під позначенням  $\Phi^*$  ( $F^*$ ) будемо розуміти реальну універсальну характеристику, а під  $\Phi$  ( $F$ ) – функцію для її апроксимації.

Універсальна магнітна характеристика вра-

ховує розмагнічуючу дію реакції якоря, оскільки вона створена шляхом обробки експериментально визначених внутрішніх навантажувальних характеристик реальних тягових двигунів. Тому при використанні цієї характеристики не потрібно враховувати розмагнічуючу дію реакції якоря. Параметри універсальної магнітної характеристики наведено згідно [2] в табл. 1 та на рис. 1, де  $K_n$  – коефіцієнт насичення;  $\Phi^*$  та  $F^*$  – відповідно значення магнітного потоку та магніторушійної сили.

Таблиця 1

Універсальна магнітна характеристика

№ з/п	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$K_n$	0	1	1,01	1,015	1,02	1,027	1,03	1,035	1,044	1,052	1,061	1,068	1,076
$F^*$	0	0,145	0,15	0,155	0,16	0,165	0,17	0,175	0,18	0,185	0,19	0,195	0,2
$\Phi^*$	0	0,426	0,44	0,452	0,464	0,475	0,488	0,5	0,51	0,52	0,53	0,54	0,55
№ з/п	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
$K_n$	1,085	1,091	1,1	1,11	1,125	1,131	1,142	1,156	1,168	1,172	1,18	1,198	1,205
$F^*$	0,205	0,21	0,215	0,22	0,225	0,23	0,235	0,24	0,245	0,25	0,255	0,26	0,265
$\Phi^*$	0,56	0,57	0,578	0,585	0,592	0,6	0,608	0,615	0,622	0,63	0,639	0,641	0,65
№ з/п	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
$K_n$	1,22	1,235	1,24	1,255	1,265	1,28	1,285	1,415	1,543	1,67	1,79	1,91	2,04
$F^*$	0,27	0,275	0,28	0,285	0,29	0,295	0,3	0,35	0,4	0,45	0,5	0,55	0,6
$\Phi^*$	0,655	0,66	0,668	0,672	0,679	0,682	0,69	0,73	0,764	0,795	0,823	0,849	0,87
№ з/п	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49			
$K_n$	2,15	2,27	2,38	2,49	2,61	2,74	2,84	2,95	3,06	3,16			
$F^*$	0,65	0,7	0,75	0,8	0,85	0,9	0,95	1	1,05	1,1			
$\Phi^*$	0,89	0,91	0,928	0,945	0,96	0,971	0,988	1	1,014	1,026			

Інколи, при проведенні розрахунків виникає необхідність визначення похідної універсальної магнітної характеристики. Її можна визначити як:

$$\frac{d\Phi^*}{dF^*} = \frac{\Delta\Phi}{\Delta F} = \frac{\Phi_{i+1}^* - \Phi_i^*}{F_{i+1}^* - F_i^*}, \quad (1)$$

де індексами  $i$  та  $i+1$  позначено значення магнітного потоку  $\Phi^*$  та магніторушійної сили  $F^*$  на початку та в кінці відповідних інтервалів магніторушійної сили.

Похідну універсальної магнітної характеристики, у вигляді кусочно-постійної функції, зображено на рис. 1.

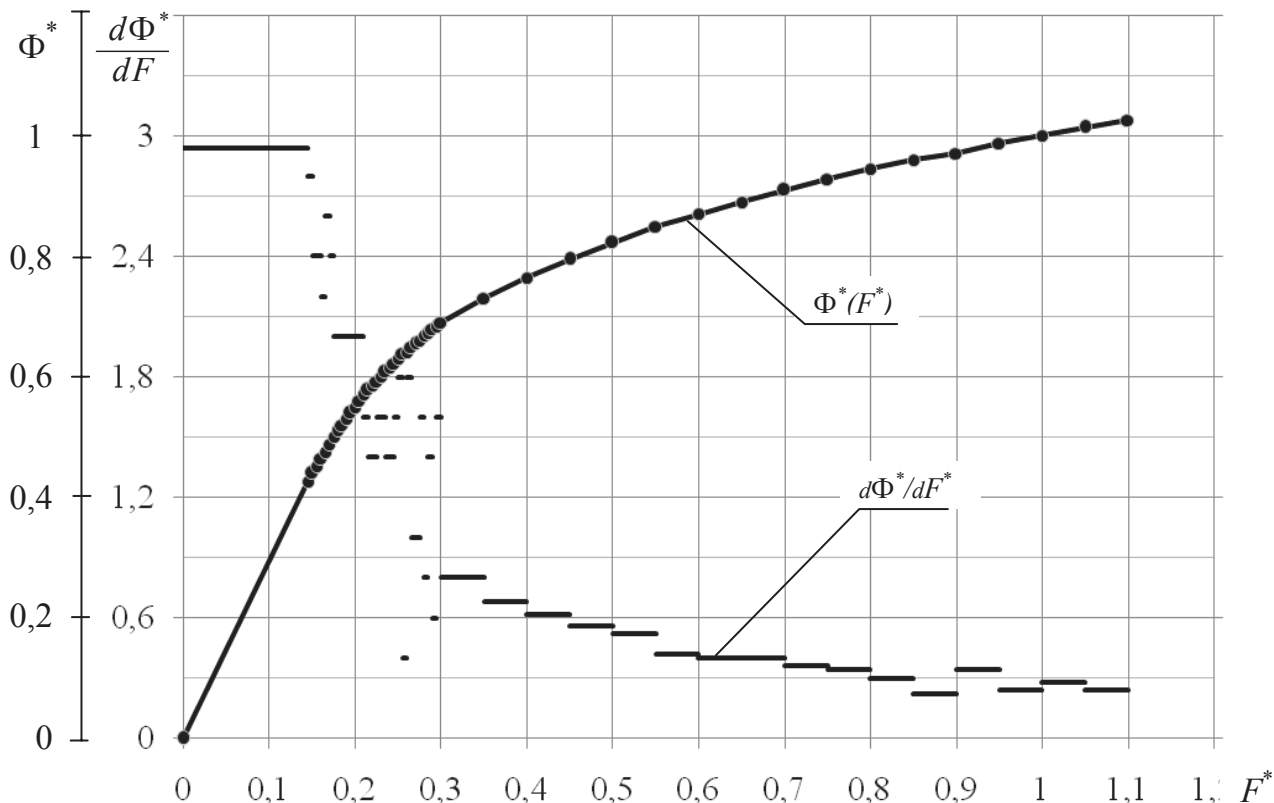


Рис. 1. Універсальна магнітна характеристика та її похідна

З наведеного рисунка видно, що користуватися універсальною магнітною характеристикою та її похідною не досить зручно, оскільки не встановлено чіткого взаємозв'язку між їхніми параметрами. Це призводить до того, що при проведенні розрахунків, основним способом визначення значень магнітного потоку  $\Phi^*$  та похідної  $d\Phi^*/dF^*$  є графічний спосіб, який вимагає значних затрат часу.

Питання аналітичного представлення як кривих намагнічування феромагнітних матеріалів, так і магнітних характеристик електричних машин досить повно висвітлене в технічній літературі. Що стосується апроксимації універсальної магнітної характеристики тягових двигунів, то на даний час існують лише дві відомі авторам пропозиції, викладені в [3, 4].

Приведені вище обставини, а також важливість цього питання для практичних розрахунків тягових електричних машин, спонукало авторів вивчити можливість представлення маг-

нітної характеристики та її похідної за допомогою ряду відомих аналітичних виразів.

Аналітичні вирази магнітної характеристики тягового двигуна можуть використовуватися при моделюванні як стаціонарних, так і перехідних електромеханічних процесів. Тому бажано, щоб вони задовольняли наступним вимогам:

- 1) апроксимуюча функція повинна якомога точно відобразити універсальну характеристику;
- 2) похідна функції повинна відобразити якомога близько похідну магнітної характеристики;
- 3) функція не повинна мати точок перегину;
- 4) похідна аналітичної функції повинна бути неперервною.
- 5) аналітична функція повинна бути однозначною непарною функцією, для якої:

$$\Phi(-F) \equiv -\Phi(F). \quad (2)$$

б) похідна функції  $\Phi(F)$  повинна бути позитивною парною функцією, для якої:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\Phi}{dF}(F) &\equiv \frac{d\Phi}{dF}(-F); \\ \frac{d\Phi}{dF} &\geq 0 \text{ при } -\infty < F < +\infty. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Останні дві вимоги відносяться лише до тягових двигунів послідовного збудження, які набули найбільшого розповсюдження на залізничному транспорті.

В якості аналітичних виразів для апроксимації універсальної магнітної характеристики розглянемо функції, наведені в табл. 2. Вирази 1...9 (див. табл. 2) взято з [5]; вираз 9' – з [6]; вираз 10 отримано на основі наведених у [4] виразів взаємозв'язку між магнітним потоком, магніторушійною силою та коефіцієнтом насичення:

$$\begin{aligned} \Phi^*(K_H) &= 0,94 + 0,14717(K_H - 2,5) - \\ &- 0,03417(K_H - 0,25)^2 - 0,035(K_H - 2,5)^3 - \\ &- 0,02333(K_H - 2,5)^4 + 0,02533(K_H - 0,25)^5; \quad (4) \end{aligned}$$

$$F^*(K_H) = 0,42K_H - 0,27. \quad (5)$$

При підстановці виразу (5) в (4) отримаємо формулу для апроксимації універсальної магнітної характеристики у вигляді поліному 5-ї степені, яка має наступний вигляд:

$$\begin{aligned} \Phi &= -0,0063 + 0,24 \cdot F^5 - 2,87 \cdot F^4 + \\ &+ 7,3 \cdot F^3 - 7,62 \cdot F^2 + 4,04 \cdot F. \end{aligned} \quad (6)$$

В табл. 3 наведено вирази для апроксимації похідної функції  $\Phi^*(F^*)$ . Їх отримано шляхом диференціювання функцій 1...10 табл. 2.

Точність апроксимації універсальної магнітної характеристики та її похідної за допомогою аналітичних виразів, приведених в табл. 2 та 3, оцінено на проміжку  $0 \leq F^* \leq 1,1$ .

З метою зменшення похибки апроксимації функції  $d\Phi^*/dF^*$  не враховано проміжок  $0 \leq F^* < 0,145$ , оскільки його проміжні точки нам не відомі. У випадку необхідності розрахунку похідної при  $0 \leq F^* < 0,145$  рекомендуємо приймати її рівною похідній у точці  $F^* = 0,145$ .

Таблиця 2

#### Порівняльний аналіз аналітичних виразів для апроксимації універсальної магнітної характеристики

№	Вираз	Коефіцієнти			Максимальне відхилення	Середня відносна похибка апроксимації	Коефіцієнт детермінації
		a	b	c			
1	$\Phi = a\sqrt{F}$	1,129403	–	–	15,85	7,6	0,8963
2	$\Phi = a^3\sqrt{F}$	0,990962	–	–	9,46	4,9	0,9664
3	$\Phi = a^b\sqrt{F}$	1,030286	2,642764	–	7,02	4,1	0,9777
4	$\Phi = a\sqrt{F} - bF$	1,443911	0,430729	–	6,14	3,1	0,9866
5	$\Phi = \frac{F}{a + bF}$	0,204252	0,796878	–	2,74	1,4	0,9973
6	$\Phi = \frac{1+a}{1+aF} F$	3,886580	–	–	2,72	1,4	0,9973
7	$\Phi = a \cdot (1 - e^{-bF})$	0,994567	3,938335	–	4,45	1,4	0,9940
8	$\Phi = a \operatorname{th}(bF)$	0,956957	3,152187	–	7,09	2,9	0,9817
9	$\Phi = a \operatorname{arctg}(bF)$	0,722791	4,699688	–	2,88	0,9	0,9975
9'	$\Phi = a \operatorname{arctg}(bF) + cF$	0,634174	5,451962	0,116353	1,51	0,8	0,9991
10	$\Phi = \sum_{i=0}^5 a_i F^i$	–	–	–	1,26	0,6	0,9997

Коефіцієнти аналітичних виразів 1...10 (див. табл. 2 та 3), розраховано згідно методу найменших квадратів, з використанням програмного забезпечення «STATISTICA 6.0». Їх

розраховано окремо, для функції, апроксимуючої магнітну характеристику, і окремо для функції, апроксимуючої її похідну. Оскільки, при спільних коефіцієнтах, знайдених для функції

$\Phi(F)$ , аналітичні вирази для апроксимації похідної мали досить низьку точність.

Наочне уявлення про якість апроксимації універсальної магнітної характеристики та її

похідної виразами 1...10 (див. табл. 2 та 3), дають графіки, наведені на рис. 2 та 3.

Таблиця 3

**Порівняльний аналіз аналітичних виразів для апроксимації похідної магнітної характеристики**

№	Вираз	Коефіцієнти			Середня відносна похибка апроксимації %	Коефіцієнт детермінації $R^2$
		$a$	$b$	$c$		
1	$\Phi' = \frac{a}{2F^{1/2}}$	1,514351	–	–	66,6	0,6391
2	$\Phi' = \frac{a}{3F^{2/3}}$	1,813531	–	–	52,6	0,7521
3	$\Phi' = \frac{aF^{1/b}}{bF}$	284323	768293	–	28,9	0,8744
4	$\Phi' = \frac{a}{2F^{1/2}} - b$	0,573434	0,572998	–	27,4	0,8895
5	$\Phi' = \frac{1}{a+bF} - \frac{bF}{(a+bF)^2}$	0,072422	0,614944	–	23,0	0,8999
6	$\Phi' = \frac{1+a}{1+aF} - \frac{F \cdot (1+a)}{(1+aF)^2}$	1,795216	–	–	61,6	0,6485
7	$\Phi' = abe^{-bF}$	1,056059	5,509757	–	35,6	0,8722
8	$\Phi' = ab \cdot (1 - (\text{th}(bF))^2)$	0,879387	4,060004	–	40,5	0,8531
9	$\Phi' = \frac{ab}{1+(bF)^2}$	0,793926	6,488805	–	26,4	0,8949
9'	$\Phi' = \frac{ab}{1+(bF)^2} + c$	0,778187	8,515138	0,188524	17,1	0,9046
10	$\Phi' = 5bF^4 - 4cF^3 + 3dF^2 - 2eF + k$	–	–	–	19,0	0,9019

Критеріями точності апроксимації, були обрані: максимальне відхилення, середня відносна похибка апроксимації та коефіцієнт детермінації. Результати оцінок зведено до табл. 2 та 3 відповідно.

Максимальне відхилення розраховано за наступною формулою:

$$\Delta_{\text{макс}} = \max \left| \Phi_i - \hat{\Phi}_i \right| \cdot 100\%, \quad i = \overline{1, n}, \quad (7)$$

де  $\Phi_i$  – табличне значення функції;

$\hat{\Phi}_i$  – значення функції згідно аналітичного виразу.

Середню відносну похибку апроксимації та коефіцієнт детермінації розраховано згідно з [7] за наступними формулами:

– Середня відносна похибка апроксимації:

$$\bar{e}_{\text{відн.}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left| \frac{\Phi_i - \hat{\Phi}_i}{\Phi_i} \right| \cdot 100\%, \quad (8)$$

де  $n$  – загальна кількість досліджуваних точок.

– Коефіцієнт детермінації:

$$R^2 = 1 - \phi^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (\Phi_i - \hat{\Phi}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (\Phi_i - \bar{\Phi}_i)^2}, \quad (9)$$

де  $\bar{\Phi}_i$  – середнє арифметичне значення функції

$$(\bar{\Phi}_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Phi_i).$$

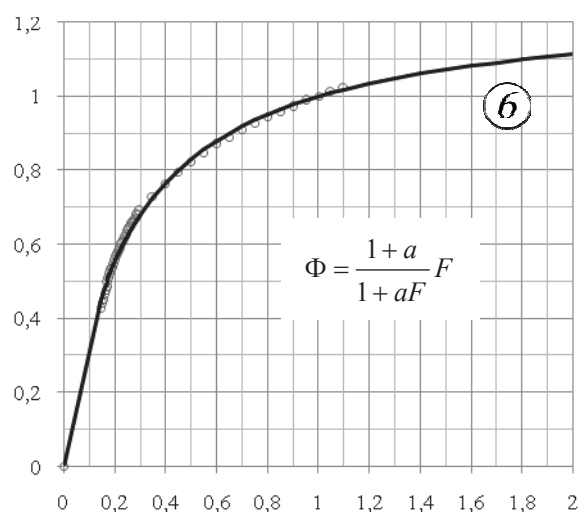
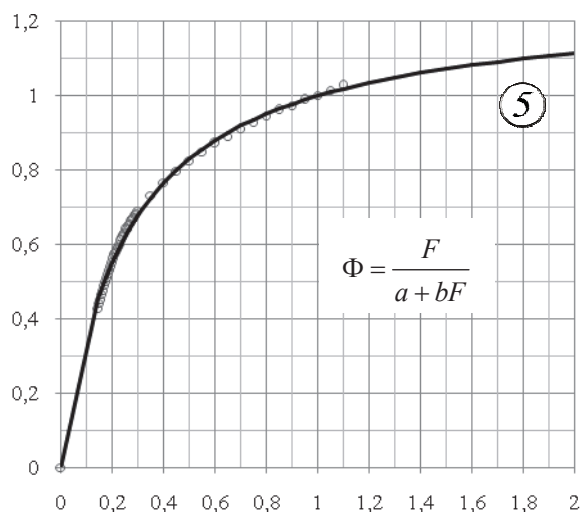
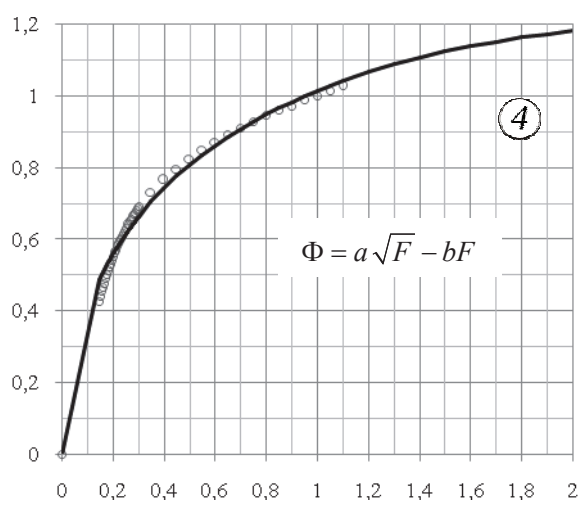
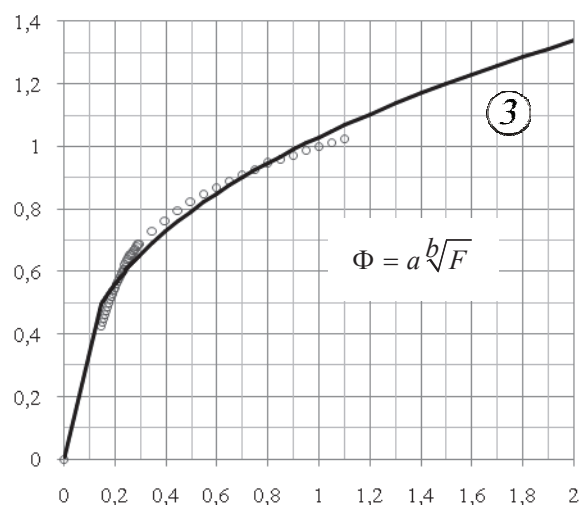
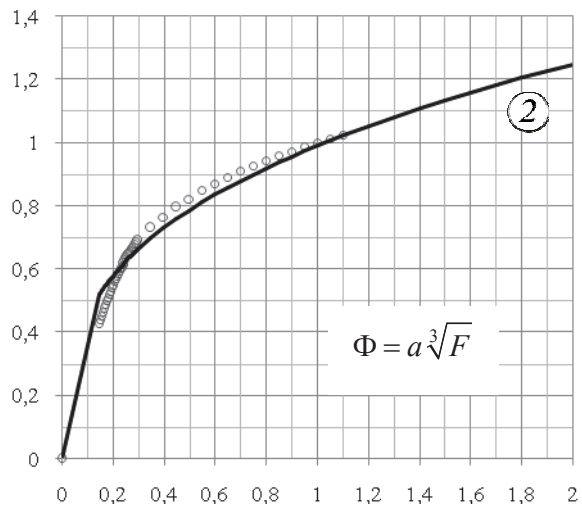
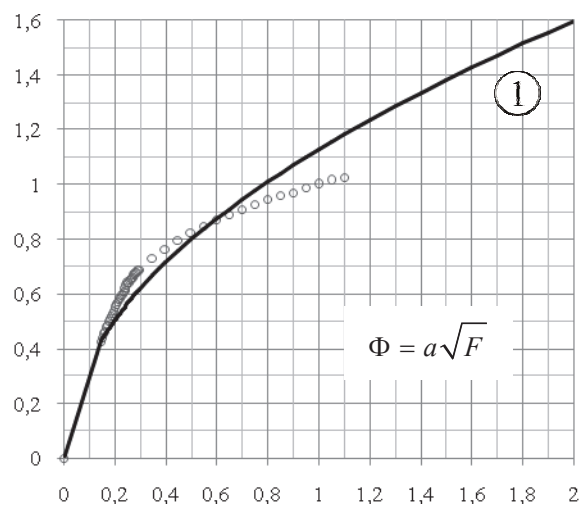


Рис. 2. Апроксимація універсальної магнітної характеристики аналітичними виразами,  
де  $\circ$  – координати універсальної магнітної характеристики (табл. 1);  
— – графіки апроксимуючих функцій (табл. 2)

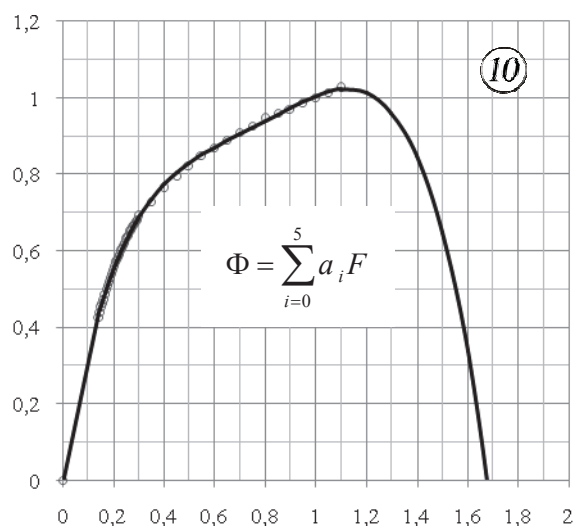
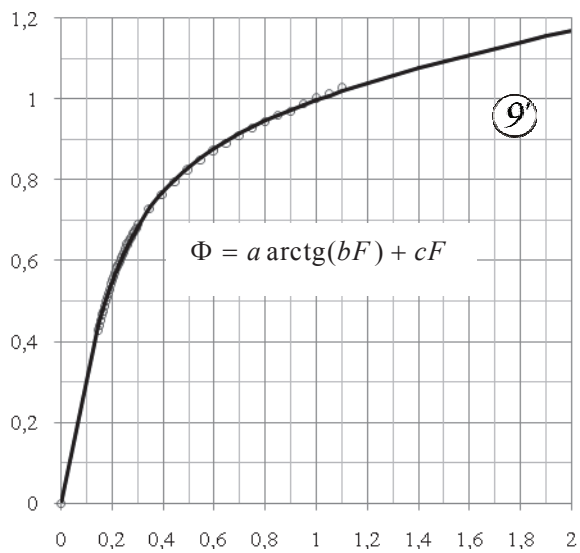
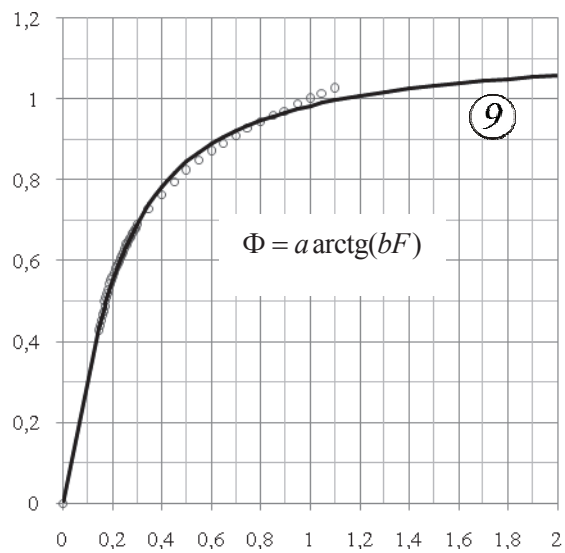
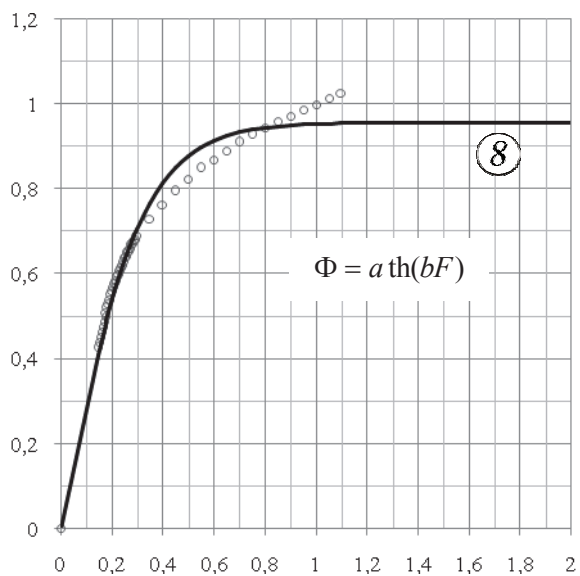
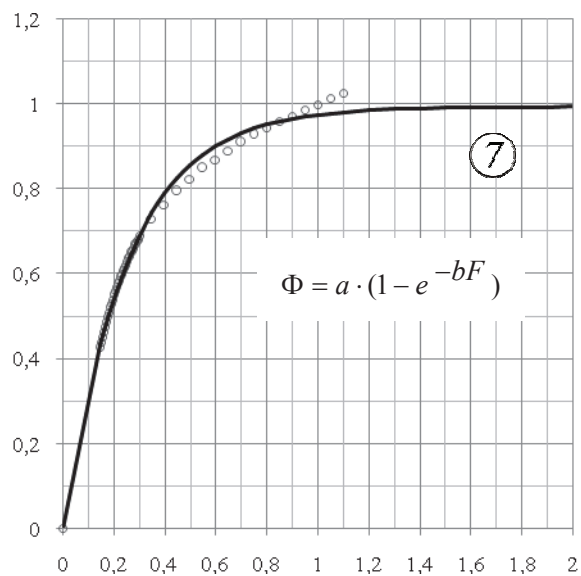


Рис. 2 (закінчення)

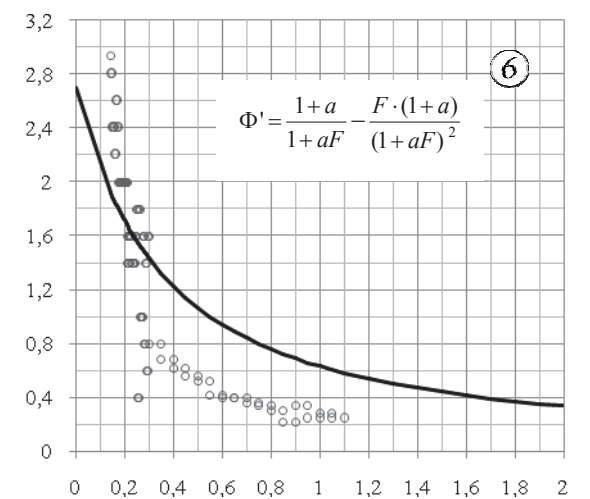
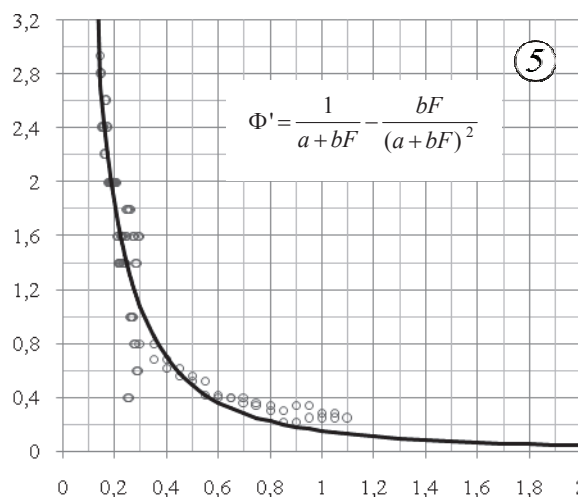
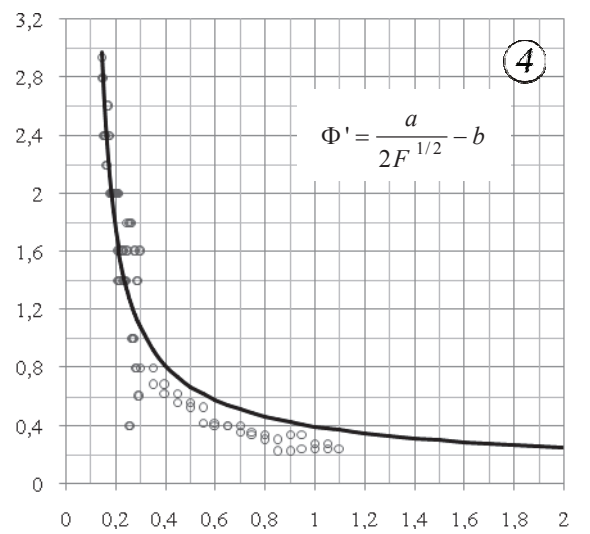
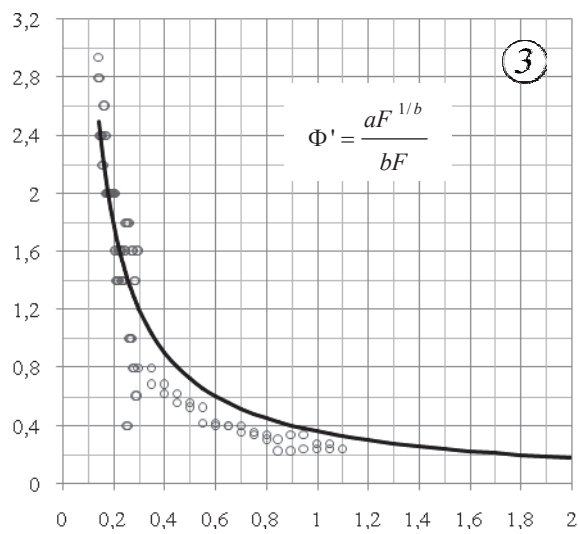
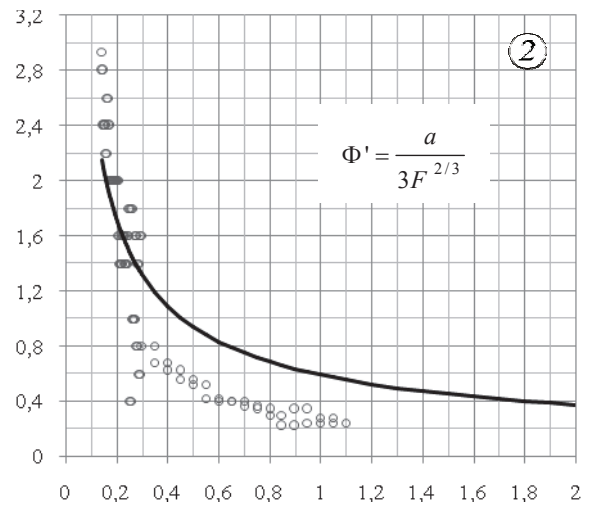
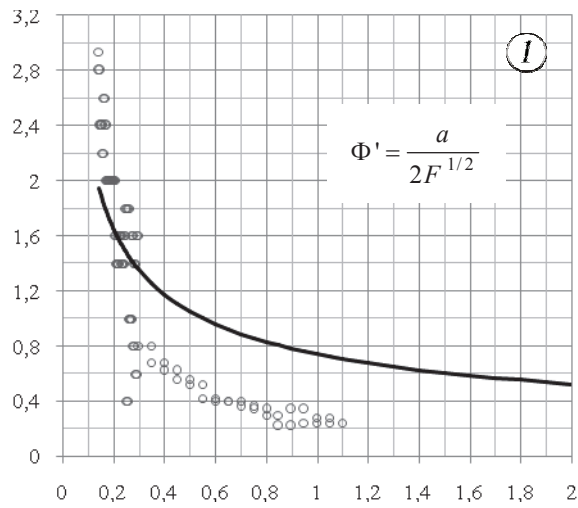


Рис. 3. Апроксимація похідної універсальної магнітної характеристики за допомогою аналітичних виразів, де  $\circ$  – координати похідної універсальної магнітної характеристики (рис. 1); — – графіки апроксимуючих функцій (табл. 3)

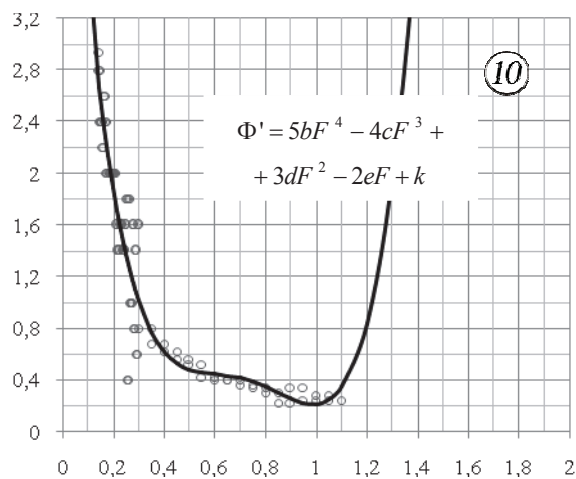
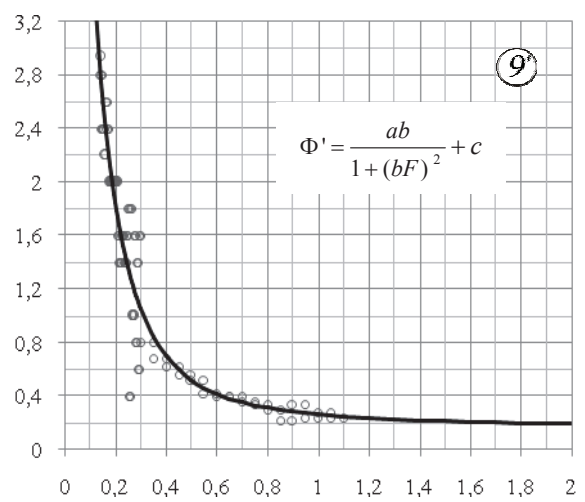
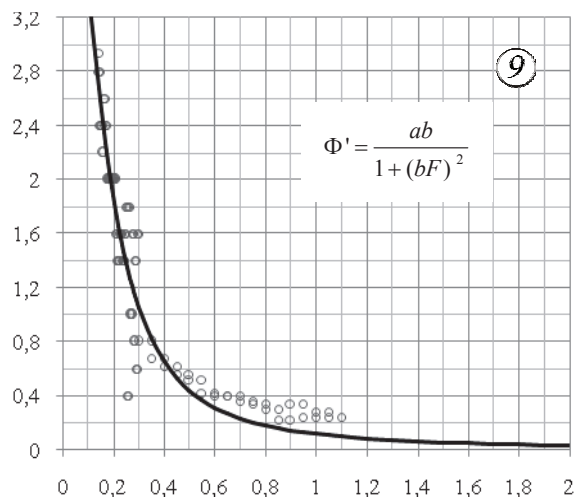
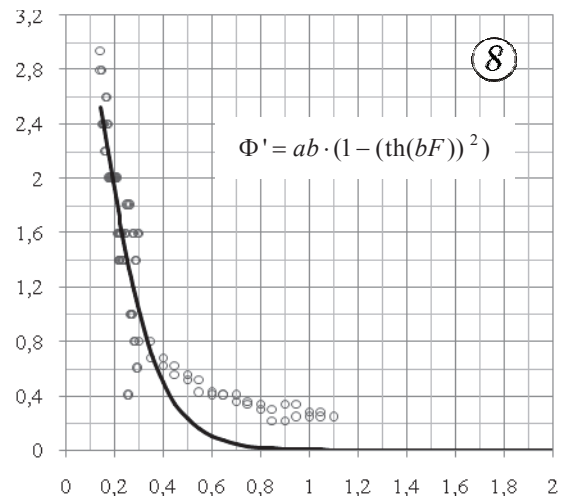
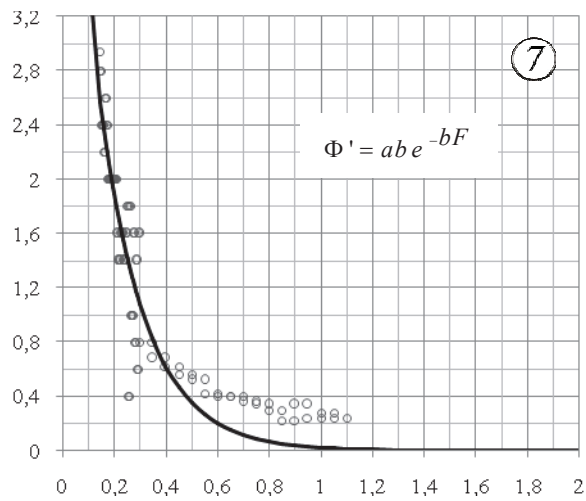


Рис. 3 (закінчення)

З виконаного аналізу видно, що всі з розглянутих аналітичних виразів, по точності апроксимації, умовно можна поділити на три групи:

- I група – вирази, котрі дають середню відносну похибку апроксимації в межах 1 %. До них відносяться вирази 9, 9' та 10 (див. табл. 2).



Криві цієї групи найбільш точно описують універсальну магнітну характеристику.

- II група – вирази, котрі дають середню відносну похибку апроксимації в межах 3 %. До них відносяться вирази 5, 6, 7 та 8 (див. табл. 2).

- III група – вирази, котрі дають середню відносну похибку апроксимації більше 3 %. До них відносяться вирази 1, 2, 3 та 4 (див. табл. 2).

Порівняльний аналіз відповідності похідних аналітичних виразів похідній універсальної магнітної характеристики (див. табл. 3) показує, що найбільш точно відповідає другій вимозі вираз 9' (середня відносна похибка апроксимації складає 17,1 %), менш точні вирази 5, 9 та 10.

Іншим вимогам, котрим повинні відповідати аналітичні вирази апроксимуючих функцій, найбільш повно відповідають вирази 9 та 9'. Вираз 10 даним вимогам не відповідає взагалі.

### Висновки

В даній роботі викладено результати порівняльного аналізу різних аналітичних виразів для апроксимації універсальної магнітної характеристики та її похідної.

В якості показників точності апроксимуючих виразів використано максимальне відхилення, середня відносна похибка апроксимації та коефіцієнт детермінації.

Як показали дослідження, практично всі аналітичні вирази в більшій чи меншій мірі, описують реальну магнітну характеристику. Найбільш точними з них є 5, 6, 9, 9' та 10. Але крім точності до апроксимуючих виразів були висунуті певні вимоги, яким найбільш повно відповідають вирази 9 та 9'.

Таким чином, для апроксимації універсальної магнітної характеристики та її похідної можна рекомендувати використовувати вирази 9 та 9'.

### БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Находкин, М. Д. Универсальная магнитная характеристика тяговых электродвигателей постоянного тока [Текст] / М. Д. Находкин, В. С. Хвостов // Вестник электропромышленности. – 1958. – № 1. – С. 44-48.
2. Магистральные электровозы. Тяговые электрические машины [Текст] / В. И. Бочаров [и др.]. – М.: Энергоатомиздат, 1992. – 464 с.
3. Гетьман, Г. К. Об использовании универсальной магнитной характеристики для расчета электромеханических характеристик тяговых двигателей [Текст] / Г. К. Гетьман, С. Н. Голик // Вісник Дніпропетр. нац. ун-ту заліз. трансп. ім. акад. В. Лазаряна. – 2007. – Вип. 16. – Д.: Вид-во ДНУЗТ, 2007 – С. 21-25.
4. Безрученко, В. М. Тягові електричні машини електрорухомого складу [Текст] / В. М. Безрученко, В. К. Варченко, В. В. Чумак. – Д.: Вид-во ДНУЗТ, 2003. – 252 с.
5. Архангельский, Б. И. Аналитическое выражение кривой намагничивания электрических машин [Текст] / Б. И. Архангельский // Электричество. – 1950. – № 3. – С. 30-32.
6. Макаров, А. В. Разработка и исследование системы управления межсистемной несинхронной связи на основе ферромагнитных элементов [Текст] : дис. ... канд. техн. наук: 05.14.02 / А. В. Макаров. – ЛПИ, 1985. – 217 с.
7. Присенко, Г. В. Прогнозування соціально-економічних процесів [Текст] : навч. посібник / Г. В. Присенко, Є. І. Равікович. – К.: КНЕУ, 2005. – 378 с.

Надійшла до редколегії 12.01.2011.

Прийнята до друку 18.01.2011.