

# ФАЗОВЫЕ ТРАЕКТОРИИ В МОНИТОРИНГЕ ТЕХНИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ И ИДЕНТИФИКАЦИИ МОДЕЛЕЙ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ

*д.т.н., проф. Волкова В. Е (Днепропетровский национальный университет железнодорожного транспорта имени академика В.Лазаряна)*

## **1. Анализ существующих методов технического состояния элементов конструкций**

Известные методы мониторинга технического состояния основаны на обнаружении повреждений в конструкциях зданий или сооружений в течение всего периода их эксплуатации. Методы, разработанные для обнаружения повреждений, могут быть классифицированы как частотные или временные [5-7,12]. Частотные методы обнаружения повреждений связывают возникающие дефекты с изменением жесткости конструкций. Эти методы используют конечноэлементные модели и линейные модальные параметры, такие, как собственные частоты и формы колебаний для идентификации повреждений, а в некоторых случаях, даже для определения местоположения повреждения. Модальные свойства, подобные собственным частотам форм колебаний конструкций, наблюдаются в неповрежденных конструкциях. Полагают, что если имеют место изменения в модальных параметрах конструкции в течение всего периода ее эксплуатации, то эти изменения связаны с возникновением повреждений. Эти методы успешно применяются для идентификации больших уровней повреждений в конструкциях, но они не способны установить момент возникновения повреждения. К тому же, по отношению к конструкциям зданий и сооружений окружающая среда или изменение режима эксплуатации могут также вызвать изменения в собственных частотах и формах колебаний, что затрудняет использование частотного метода в случаях возникновения значительных повреждений.

Временные алгоритмы основаны на вычислении определенных параметров через заранее установленный период времени. К этим параметрам относятся деформации (напряжения), прогиб конструкций, крен зданий, амплитуда колебаний, которые вычисляются и сравниваются с нормируемыми значениями. Нормируемые значения регламентированы в соответствующих строительных нормах.

Основным недостатком существующих методов [5-7,12], является то, что они применяют линейные динамические модели к анализу, как исходного объекта, так и объекта имеющего повреждения, что противоречит физической стороне процесса. Нелинейные эффекты, в данных методах усредняются и распределяются равномерно между параметрами отдельным мод.

Учет свойств реальной конструкции возможен лишь с определенной степенью приближения. В таких случаях одной из важных задач при создании математической модели несущей конструкции с использованием современных вычислительных комплексов является возможность ввода в модель параметров и свойств, позволяющих обосновать результаты натуральных экспериментов.

## **2. Нелинейные модели динамических систем**

Большинство механических систем проявляет нелинейные свойства при определенных параметрах внешнего возмущения. Нелинейность является общим свойством динамических систем [10, 11], а их линейное поведение - это исключение. В динамических системах, основными источниками нелинейности являются:

- геометрическая нелинейность, проявляющаяся (наблюдаемая) при значительных перемещениях исследуемой системы. Она является следствием нелинейности выражений потенциальной энергии. Примером таких систем являются гибкие стрелы, пологие арки, оболочки и тонкие пластинки;

- нелинейность по материалу, которая наблюдается при нелинейном законе зависимости между напряжениями и деформациями. Данный тип нелинейности часто встречается в задачах колебаний виброизоляторов, выполненных из полимерных материалов;

- нелинейность диссипативных характеристик. По существу диссипация энергии в механических системах является наименее изученным свойством. Модели вязкого трения являются весьма приближенным представлением физической действительности, и их применение часто вызвано удобством последующих вычислений. Удовлетворительное описание энергетических соотношений в диссипативных системах возможно только с помощью нелинейных моделей. Сухое трение, трение скольжения, гистерезисное трение, аэродинамическое сопротивление являются наиболее яркими примерами нелинейности диссипативных характеристик;

- конструктивная нелинейность, вызванная граничными условиями. Например, нелинейности упругих характеристик источником которых являются зазоры и податливость соединений, удары, возникающие при контакте с жесткими ограничителями;

- инерционная нелинейность, источником которой является нелинейность выражений кинетической энергии и которая отражается в появлении нелинейных членов, содержащих ускорения и (или) скорость, в уравнениях движения. Например, ускорения Кориолиса в уравнениях движения тел, относительно вращающейся оси .

Различие между линейными и нелинейными системами весьма существенно. Нелинейные системы могут демонстрировать сложное хаотическое поведение при действии внешнего гармонического возмущения, в то время как, реакция линейных систем всегда представляет собою периодический процесс на частоте внешнего возмущения. Нелинейные системы склонны к двум противоположным тенденциям, к хаотическому поведению и самоорганизации. Кроме того, даже слабо нелинейные системы могут проявлять чрезвычайно интересные и сложные явления, такие как перескоки, бифуркации, суб – и ультрагармонические колебания, предельные циклы и хаос.

### **3. Графические представления колебательных процессов**

Основным представлением колебательного процесса является его изображение в координатах  $y, t$ . Это объясняется прежде всего тем, что почти все приборы, регистрирующие колебания, такие как самописцы и осциллографы, воспроизводят данное изображение. Они выполняют запись колебаний либо на движущейся с постоянной скоростью полосе бумаги или пленки, либо на вращающемся барабане. Изображение в координатах  $y, t$  не только позволяет найти амплитуду, положение центра колебаний и спектральный состав, но и дает возможность судить о характере колебаний и их форме.

Для изображения гармонических колебаний применяют также их векторное представление в комплексной области. При его построении используют связь между синусоидальными колебаниями и равномерным вращением. С векторным представлением тесно связаны представление в фазовой плоскости и фигуры Лиссажу.

Изображение на фазовой плоскости «скорость- перемещение» более наглядно и особенно хорошо представляет негармонические колебания. Отдельная фазовая траектория отражает одно вполне определенное движение. Общее представление о всех возможных типах движений дает семейство фазовых траекторий, называемое фазовым портретом. Недостатком фазовых траекторий является невозможность непосредственного представления колебательного процесса во времени, но он компенсируется большим преимуществом: из геометрического представления фазовой траектории или семейства траекторий можно сделать важные заключения о свойствах колебаний. Это прежде всего относится к колебаниям, которые описываются нелинейными дифференциальными уравнениями. Для таких систем может оказаться, что единственно

возможным методом исследования является метод фазовой плоскости. Существуют также иные графические изображения для определения динамических свойств изучаемой системы.

## **2. Применение фазовых диаграмм к исследованию колебательных процессов**

Качественное исследование поведения динамической системы сводится к изучению поведения траекторий в фазовом пространстве. Основы качественной теории исследования динамических процессов были созданы Пуанкаре. Исключительная роль в развитии качественных методов исследования динамических систем принадлежит А.А. Андронову [1], Е.А. Леонтовичу [1,2], И.И. Гордону, А.М. Ляпунову, Дж. Биркгофу. Основной задачей классической теории качественного исследования является определение динамических свойств систем без получения замкнутого аналитического решения. С этой целью широко использовались фазовые траектории на плоскости  $(y, \dot{y})$ .

Наибольший интерес представляет фазовая траектория на плоскости  $(y, \ddot{y})$ . Это связано с тем, что энергетические критерии на ней интерпретируются наиболее наглядно. Кроме того, зависимость  $\ddot{y}(y)$  обратно симметрична относительно оси  $y$  графику изменения упругих свойств. Именно фазовые траектории  $\ddot{y}(y)$  позволяют установить вид и уровень нелинейности системы. Известно, что ускорений точек более чувствительны к отклонениям колебаний от гармонических. Сопоставим линейную систему с нелинейной симметричной системой с двумя потенциальными ямами. Заметим, что при некоторых режимах колебаний на частоте возмущения осциллограммы этих систем подобны, а акселерограммы различны. Так, акселерограммы линейной системы имеют вид гармонического процесса, а несимметричной системы с двумя потенциальными ямами – пилообразный вид [4].

## **3. Средства идентификации временных процессов**

В арсенале прикладного анализа дискретных временных процессов при решении задач идентификации находится огромное количество методов и алгоритмов. Многие из них, по сути, являются приложением или обобщением ранее разработанных на конкретную предметную область, поэтому целесообразно классифицировать их не по использованию в конкретных предметных областях, а по основным подходам к анализу временного ряда: статистический; спектральный; вейвлет; фрактальный; нелинейно-динамический и другие [5-7, 9,12].

Одной из важнейших проблем является оценка информации, заложенной во временном процессе. Необходимость обработки и распознавания графических представлений временных процессов в технике, производственном контроле, радиолокации, медицинской диагностике, астрономических и биологических исследованиях часто сталкиваются с необходимостью обработки зашумленных изображений. Основными источниками шума являются как процесс обработки временных процессов, так и процесс их получения. Работа датчиков зависит от их качества и от различных внешних факторов имеющих место в эксперименте. Диапазон шумов, встречающихся при обработке временных процессов, достаточно широк. Для подавления шумов существуют ряд методов предварительной обработки временных процессов. Однако в каждом отдельном случае, уровень оценивает специалист в области распознавания изображений в неавтоматизированном режиме. Очевидно, что идентификация шума требует от исследователя квалификации эксперта.

## **4. Применение фазовых траекторий к исследованию динамических процессов**

Основы качественной теории исследования динамических процессов были созданы Пуанкаре. Предложенные им графики, на которых движение точки представляется некоторой траекторией на фазовой плоскости  $(y, \dot{y})$ , широко используются для изучения автономных систем с одной степенью свободы. Структура фазовых траекторий  $(y, \dot{y})$  позволяет судить о периодичности

динамических процессов и существовании особых точек, соответствующих устойчивым или неустойчивым положениям равновесия.

Область применения данных методов не ограничивалась задачами автономных колебаний. Фершингом в монографии [8] фазовые траектории на плоскости  $(y, \dot{y})$  были использованы для нахождения периода аэроупругих колебаний пластины. Известны также попытки применить данные траектории в решении обратной задачи механики – идентификации. Так, в работе [5] автор, используя метод Шеффера, получил численные оценки диссипативных характеристик в отдельных точках фазовых пространства. В отличие от указанных выше работ, целью данного исследования является получение не численных оценок параметров диссипативных характеристик, а их обобщенного графического образа, который более удобен для последующей обработки.

Фазовое пространство динамических систем многомерно. Каждая его точка характеризуется не менее чем четырьмя координатами, а именно: перемещением, скоростью, ускорением и временем. Реальное пространство трехмерно. Оно более удобно для анализа. Рассмотрим фазовое пространство, ограниченное тремя координатными осями – перемещения, скорости и ускорения.

## 5 Отображения фазовых траекторий в расширенном пространстве

Предположим, что нам неизвестны функции, описывающие диссипативную и восстанавливающую силы. Первый вопрос состоит в том, чтобы установить линейна система или нет.

Обозначим  $\Pi_k = \{y_k, \dot{y}_k, \ddot{y}_k\}$ ,  $k = 1, \dots, n$ , множество точек, описывающих измеренные значения перемещений, скоростей и ускорений исследуемой системы в моменты времени  $t_k = t_0 + kT$ , где  $T$  – период внешнего возмущения. Если мы представим эти точки в расширенном фазовом пространстве  $(y, \dot{y}, \ddot{y})$ , то получим набор точек, параметрически связанных по времени  $t_k$  (рис. 1).

Предположим, что ошибка измерений отсутствует, тогда

$$m \ddot{y}_k + H(\dot{y}_k, y_k) + R(y_k) = c \quad \text{для } , \quad (1)$$

где  $c = F(t_0) = F(t_k)$  – постоянная величина для всех значений  $k$ .

Это означает, что все точки находятся на поверхности, которая может быть описана уравнением  $mw + h(u, v) + r(u) = 0$  в  $(u, v, w)$  -пространстве. Если функции, описывающие диссипативную и упругую характеристики механической системы  $H(y, \dot{y})$  и  $R(y)$ , линейны, то поверхность в расширенном фазовом пространстве вырождается в плоскость, т. е. все точки множества  $\Pi_k$  должны лежать на плоскости  $E$ . Тогда, существуют два действительных числа –  $a_1$  и  $a_2$ , такие, что все точки множества  $\Pi_k$  должны удовлетворять условию,

$$m \ddot{y}_k + a_1 \dot{y}_k + a_2 y_k = c, \quad \text{для } k = 1, \dots, n, \quad (2)$$

которое является признаком линейности системы. Изменим амплитуду вынуждающей силы  $F(t)$  на  $a_3 F(t)$ , где действительное положительное число  $a_3 > 0$ , то соответствующее

множество результатов измерений  $\Pi_k^{(a_3)}$  удовлетворяет условию  $\Pi_k^{(a_3)} = a_3 \Pi_k$ , что является вторым признаком линейности системы.

Конечно, на практике измерения имеют некоторую погрешность. Если существуют константы  $a_1$  и  $a_2$ , такие что все измеренные точки лежат на плоскости или в окрестности плоскости определяемой  $a_1$  и  $a_2$  и  $c$ , то мы можем сделать заключение о том, что система (1) линейная или слабо нелинейная.

## 6 Анализ экспериментальных записей временных процессов колебаний железобетонной балки

Проиллюстрируем применение фазовых траекторий и их отображений на примере обработки результатов экспериментального исследования динамического поведения мостовой балки. В эксперименте были определены частоты и формы колебаний моста в загруженном и разгруженном состоянии. Регистрирующая аппаратура фиксировала перемещения, напряжения, а также ускорения средней по длине балки точки нижнего пояса.

Из генеральной совокупности экспериментальных записей, были выделены временные процессы свободных колебаний и построены фазовые траектории и их отображения в расширенном фазовом пространстве (рис.1, 2).

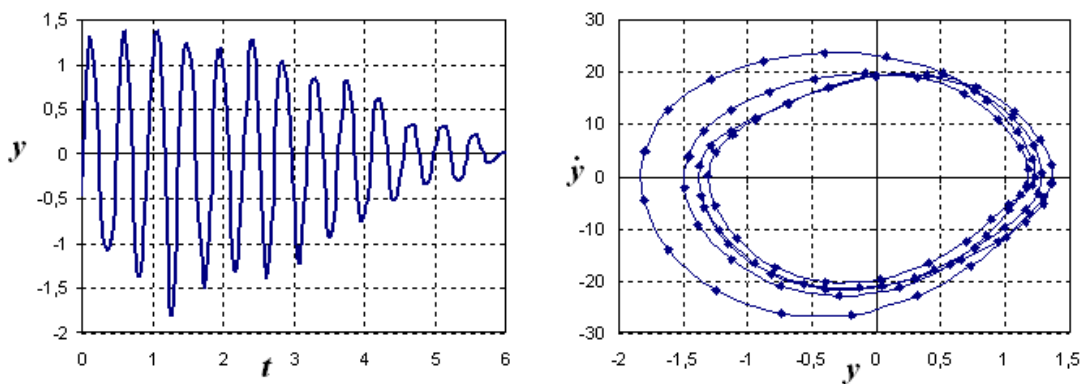


Рис.1. Экспериментальные записи временных процессов и фазовых траекторий Пуанкаре свободных колебаний железобетонной балки

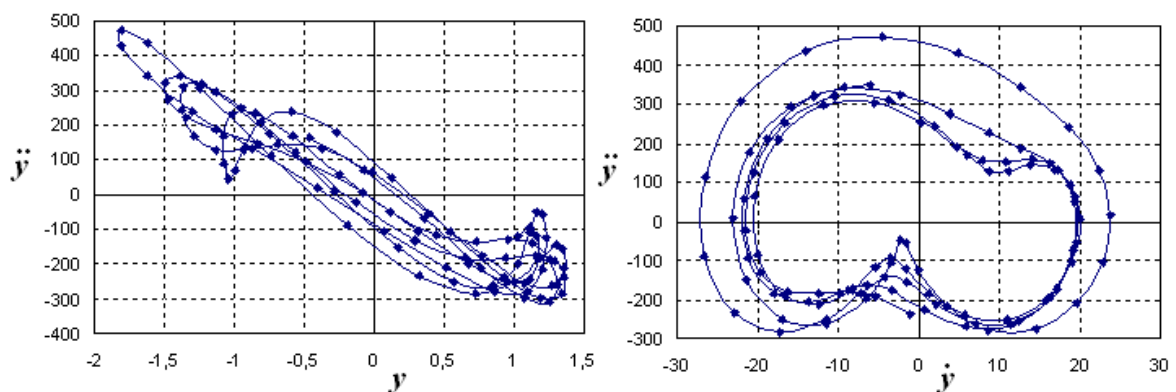


Рис. 2. Фазовые траектории колебаний железобетонной балки

Временные процессы свободных колебаний представляют собой затухающий процесс с незначительным вкладом высших гармоник. Длина петель фазовых траекторий и угол наклона

изменяются со временем. Фазовые траектории на плоскости  $(y, \ddot{y})$  явно указывают на наличие нелинейной несимметричной характеристики упругой силы. Самопересечения на фазовых траекториях вызвано наличием гармоник порядка  $\omega/3$  в записях временных процессов.

Для оценки параметров упругой характеристики автодорожного моста было использовано соотношение

$$r(\bar{y}_k) = c - m\ddot{y}_k \quad t = t_k = k T \quad (3)$$

$T$  - где условный период затухающих колебаний.

Отображения фазовых траекторий на плоскости  $(y, \ddot{y})$  (рис3.), позволяют отнести исследуемую систему к несимметричным системам с «мягкой» характеристикой упругой силы.

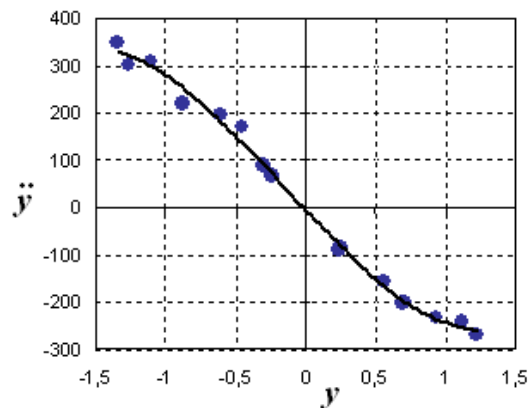


Рис. 3 Отображения фазовых траекторий на плоскости «ускорение – перемещение» колебаний балки.

Нелинейный характер упругой силы автодорожного моста объясняется наличием дефектов и повреждений пролетного строения. В частности, при колебаниях трещины мостового полотна попеременно открываются и закрываются, что приводит к изменению жесткости. Другим фактором, объясняющим несимметрию упругой характеристики, является наличие односторонних связей между стальными балками и мостовым полотном.

### Литература

1. Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г. Качественная теория динамических систем второго порядка.— М.: Наука, 1966.
2. Баутин Н. Н., Леонтович Е. А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости.— М.: Наука, 1976.
3. Биркгоф Дж. Д. Динамические системы.— М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002. (переизд. 1941).
4. Казакевич М. И., Волкова В. Е. Фазовые траектории нелинейных динамических систем. Атлас. – Днепропетровск: Наука и образование, 2002. – 94 с
5. Кононенко В. О., Плахтиенко Н.П. Методы идентификации механических нелинейных колебательных систем– К.: Наук, думка, 1976. – 114 с.
6. Меньшиков Ю.Л., Поляков Н.В. Идентификация внешних воздействий. – Днепропетровск.: Наука и образование, 2009. – 188с.

7. Никульчев Е. В. Геометрический подход к моделированию нелинейных систем по экспериментальным данным: — М.: МГУП, 2007.— 162 с. ISBN 978-5-8122-0926-1
8. Фершинг Г. Основы аэроупругости. – М.: Машиностроение, 1984. – 600 с.
9. Тихонов А. Л., Арсенин В. Я . Методы решения некорректных задач– М.: Наука, 1979. – 285 с.
10. Kerschen G., Worden K., Vakakis A.F., Golinval J.-C., Past, present and future of nonlinear system identification in structural dynamics// Mechanical Systems. Signal Process.-vol. 20 (3)- 2006.-p 505–592.
11. Volkova V. E., Schneider K. Qualitative theory and identification of dynamic system with one degree of freedom // Прикладная механика. т – 2005. – Т. 41, № 6. – С. 134–139.
12. Worden K., Tomlinson G.R. (2001) Nonlinearity in Structural Dynamics: Detection, Identification and Modelling.-New-York: Institute of Physics Publications, 2001 -678p.