

К ВОПРОСУ О РАСЧЕТЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК С ПОДКРЕПЛЕНИЯМИ И ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

У роботі розглядаються розрахунки циліндричних оболонок з підкріпленнями й змінною товщиною. Використання способу рішення диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами, запропонованого В. А. Лазаряном і С. Й. Конашенко, дозволяє істотно скоротити обчислювальну процедуру, а в ряді випадків, що мають велике практичне значення, знайти аналітичне рішення.

В работе рассматриваются расчеты цилиндрических оболочек с подкреплениями и переменной толщины. Использование способа решения дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, предложенного В. А. Лазаряном и С. И. Конашенко, позволяет существенно сократить вычислительную процедуру, а в ряде случаев, имеющих большое практическое значение, найти аналитическое решение.

In the article the calculations of cylindrical shells with reinforcements and variable thickness are considered. The use of method of solving the differential equations with variable factors offered by V. A. Lazaryan and S. I. Konashenko allows to shorten greatly the computing procedure but in a number of cases, having the big practical importance, to find the analytical decision.

В технической теории оболочек разрешающие уравнения равновесия цилиндрической оболочки имеют следующий вид [1]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} + q_x &= 0; \\ \frac{\partial N_2}{\partial y} + \frac{\partial S}{\partial x} + q_y &= 0; \\ \frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_2}{\partial y^2} + \\ + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (M_{12} + M_{21}) + N_2 + q_z &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь N_1 , N_2 – нормальные силы; S – сдвигающая сила; M_1 , M_2 – изгибающие моменты; M_{12} , M_{21} – крутящие моменты в сечении с нормальюми α и β соответственно; q_x , q_y , q_z – составляющие поверхностной нагрузки.

Рассмотрим подкрепленную перекрестным набором ребер цилиндрическую оболочку.

Ребра расположены в направлении координат α и β . В работе [2] известные соотношения теории гладких оболочек обобщены на ребристые оболочки путем использования обобщенных функций. С учетом ребер внутренние усилия представляются в следующем виде [2]:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{Eh}{1-\mu^2} (\varepsilon_1 + \mu\varepsilon_2); \\ N_2 &= \frac{Eh}{1-\mu^2} (\varepsilon_2 + \mu\varepsilon_1); \\ S &= \frac{Eh}{1-\mu^2} \gamma; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_1 &= D(\varphi_1 + \mu\varphi_2) + \\ + \sum_{j=0}^t (E_j J_j \varphi_1 + E_j S_j \varepsilon_1) \delta(\beta - \beta_j); \\ M_2 &= D(\varphi_2 + \mu\varphi_1) + \\ + \sum_{i=0}^d (E_i J_i \varphi_2 + E_i S_i \varepsilon_2) \delta(x - x_i); \\ M_{12} &= D(1-\mu)\chi + \sum_{j=0}^t G_j J_{jk} \chi \delta(y - y_j), \\ M_{21} &= D(1-\mu)\chi + \sum_{i=0}^d G_i J_{ik} \chi \delta(x - x_i). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь ε_1 , ε_2 , γ – относительные удлинения и сдвиг срединной поверхности оболочки; φ_1 , φ_2 – изменения кривизны срединной поверхности в направлениях x и y соответственно; χ – «кручение» срединной поверхности; E , μ – упругие постоянные материала обшивки; $E_i J_i$, $E_j J_j$ – жесткости ребер на изгиб; S_i , S_j – статические моменты сечений ребер относительно срединной поверхности (положительные при наружном креплении); $G_i J_{ik}$, $G_j J_{jk}$ – жесткости ребер на кручение; h – толщина, а $D = Eh^3 / 12(1 - \mu^2)$ – цилиндрическая жесткость обшивки оболочки; q_x , q_y , q_z – компоненты поверхностной нагрузки; $\delta(x - x_i)$, $\delta(y - y_j)$ – дельта-функции Дирака; t , d – количество подкрепляющих ребер в продольном и окружном направлениях соответственно.

В соотношениях (2) приняты во внимание дискретность расположения ребер, их упругое сопротивление изгибу (с учетом эксцентричности расположения) и кручению. Здесь используется схема взаимодействия ребра и обшивки по линии, что, как показано в работе [3], вполне допустимо.

Подставим выражения (2) в уравнения равновесия оболочки, выразив деформации через функцию φ по следующим формулам [4]:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{1}{R} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\nabla^2 - \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2}) \varphi; \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{R} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\nabla^2 - \mu \frac{\partial^2}{\partial y^2}) \varphi; \\ \gamma &= -\frac{2\mu}{R} \frac{\partial^3}{\partial x^3} \frac{\partial}{\partial y} \varphi; \\ \wp_1 &= -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \nabla^2 \nabla^2 \varphi; \\ \wp_2 &= -\frac{\partial^2}{\partial y^2} \nabla^2 \nabla^2 \varphi; \\ \chi &= -\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \nabla^2 \nabla^2 \varphi,\end{aligned}\quad (3)$$

где $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

После преобразований приводим эту систему уравнений к одному линейному дифференциальному уравнению с сингулярными коэффициентами

$$\begin{aligned}D[\nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 + \frac{1-\mu^2}{c^2} \frac{\partial^4}{\partial x^4}] \varphi + \\ + \sum_{j=0}^t [E_j J_j \frac{\partial^4}{\partial x^4} \nabla^2 \nabla^2 + \frac{E_j S_j}{R} \frac{\partial^4}{\partial x^4} (\nabla^2 - \\ - \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2})] \varphi \delta(y - y_j) + \\ + \sum_{i=0}^d [E_i J_i \frac{\partial^4}{\partial y^4} \nabla^2 \nabla^2 + \\ + \frac{E_i S_i}{R} \frac{\partial^4}{\partial y^4} (\nabla^2 - \mu \frac{\partial^2}{\partial y^2})] \varphi \delta(x - x_i) + \\ + \sum_{i=0}^d G_i J_{ik} \frac{\partial}{\partial x} [\frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} \nabla^2 \nabla^2 \varphi \delta(x - x_i)] + \\ + \sum_{j=0}^t G_j J_j \frac{\partial}{\partial y} [\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} \nabla^2 \nabla^2 \varphi \delta(y - y_j)] = q.\end{aligned}\quad (4)$$

Здесь полагается, что действует только радиальная нагрузка, то есть

$$q_x = q_y = 0; \quad q_z = q.$$

Внутренние усилия определяются через основную функцию φ по следующим формулам [4]:

$$\begin{aligned}N_1 &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{Eh}{R} \varphi; \\ N_2 &= \frac{\partial^4}{\partial x^4} \frac{Eh}{R} \varphi; \\ M_1 &= -D(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2}{\partial y^2}) \nabla^2 \varphi; \\ M_2 &= -D(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2}) \nabla^2 \varphi; \\ S &= -\frac{\partial^3}{\partial x^3} \frac{\partial}{\partial y} \frac{Eh}{R} \varphi; \\ M_{12} &= -D(1 - \mu) \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 \varphi.\end{aligned}\quad (5)$$

Рассмотрим пологую цилиндрическую оболочку, подкрепленную перекрестным набором ребер. Положим, что края оболочки шарнирно оперты. В этом случае функция φ и нагрузка q могут быть разложены в ряды

$$\begin{aligned}\varphi &= \sum_{m=1}^{M \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{N \rightarrow \infty} A_{mn} \sin \lambda_m x \sin \lambda_n y; \\ q &= \sum_{m=1}^{M \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{N \rightarrow \infty} Q_{mn} \sin \lambda_m x \sin \lambda_n y; \\ \lambda_m &= \frac{m\pi}{l}; \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{b},\end{aligned}\quad (6)$$

где l и b – размеры оболочки в плане.

При этом Q_{mn} определяется по известной формуле

$$Q_{mn} = \frac{4}{bl} \int_0^l \int_0^b q(x, y) \sin \lambda_m x \sin \lambda_n y dx dy.$$

В результате подстановки выражений (6) в уравнение (4) и выполнения процедуры Бубнова-Галеркина получаем разрешающую систему уравнений вида

$$\begin{aligned}\sum_r \sum_q A_{mn} \{D[(\lambda_m^2 + \lambda_n^2)^4 + \frac{1-\mu^2}{c^2} \lambda_m^4] \delta_{mq} \delta_{nr} + \\ + \frac{2}{b} \{E_j J_j \lambda_m^4 (\lambda_m^2 + \lambda_n^2)^2 - \frac{E_j S_j}{R} \lambda_m^4 [(\lambda_m^2 + \\ + \lambda_n^2) - \mu \lambda_m^2]\} S_{nr}^v \delta_{mq} + \frac{2}{l} \{E_i J_i \lambda_n^4 (\lambda_m^2 + \lambda_n^2)^2 - \\ - \frac{E_i S_i}{R} \lambda_m^2 \lambda_n^2 [(\lambda_m^2 + \lambda_n^2) - \mu \lambda_n^2]\} S_{mq}^v \delta_{nr} + \\ + \frac{2}{l} G_i J_i (\lambda_m^2 + \lambda_n^2)^2 \lambda_n^2 \lambda_m \lambda_q C_{mq}^v \delta_{nr} + \\ + \frac{2}{b} G_j J_j (\lambda_m^2 + \lambda_n^2) \lambda_m^2 \lambda_n \lambda_r C_{nr}^v \delta_{mq}\} = Q_{mn}.\end{aligned}$$

Здесь $\delta_{mq(nr)}$ - символ Кронекера; $S_{mq(nr)}^v$, $C_{mq(nr)}^v$ - зависящие от $m(n)$ и $q(r)$ значения интегралов вида

$$\int_0^d \sum_{i=0}^d \sin \lambda_m x \sin \lambda_q x \delta(x - x_i) dx; \quad (7)$$

$$\int_0^d \sum_{i=0}^d \cos \lambda_m x \cos \lambda_q x \delta(x - x_i) dx, \quad (8)$$

где x_i - i -й дискретный аргумент.

Используя фильтрующее свойство дельта-функции Дирака, интегралы (8) приводим к виду

$$\sum_{i=0}^d \sin \lambda x_i \sin \lambda x_i;$$

$$\sum_{i=0}^d \cos \lambda x_i \cos \lambda x_i. \quad (9)$$

Подставляя выражения (9) в уравнения (6), решение задачи сводим к решению систем линейных алгебраических уравнений.

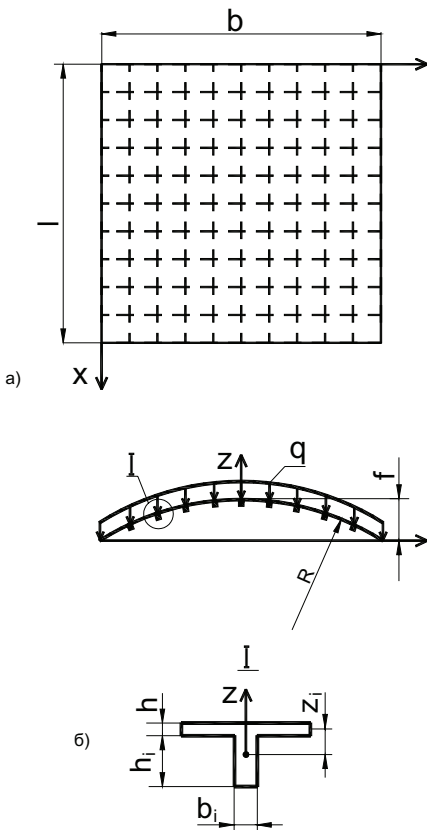


Рис. 1.

В качестве примера рассмотрим расчет полой железобетонной оболочки, подкрепленной в каждом направлении одинаковыми равноотстоящими ребрами ($d = 9$, $t = 9$) при следующих данных (рис. 1 а, б): $b = l = 24$ м; $R =$

$= 60$ м; $h = 0,06$ м; $h_i = h_j = 0,36$ м; $b_i = b_j = 0,2$ м; $E_i = E_j = 4 \times 10^4$ МПа; $\mu = 1/6$.

Оболочка находится под действием равномерной нагрузки $q = 10$ кН/м². Удерживая в разложениях (6) 20 членов ряда по m и 18 членов по n (при $m = 3, \dots, 39$; $n = 1, \dots, 35$), задачу в общем случае сводим к решению системы 360 уравнений вида (7). Вследствие ортогональности тригонометрических функций дискретного аргумента [5] структура матриц допускает приведение их к клеточно-диагональному виду, и указанная система распадается на 6 групп по 48 уравнений и 3 группы по 24 уравнения.

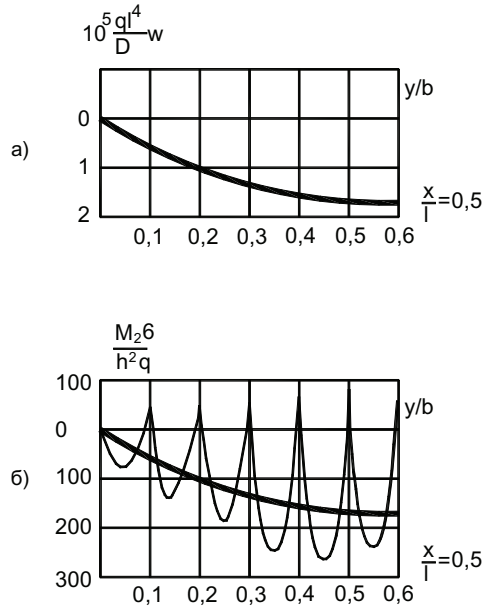


Рис. 2.

Графики окончательных значений перемещения w и момента $M_2 = M_2^0 + M_{2\Delta}$ приведены на рис. 2, а, б. Здесь M_2^0 - значение M_2 , полученное по ортотропной теории, а $M_{2\Delta}$ - поправка, учитывающая дискретность размещения ребер. Если поправка для перемещения w составляет 0,39 %, то для M_2 она составляет 158 %. Результаты расчетов хорошо согласуются с данными, полученными с помощью программы Scad.

Приведенные результаты подтверждают вывод, полученный в работе [5], что при отыскании напряжений в подкрепленной оболочке необходимо учитывать дискретное расположение ребер даже при сравнительно большом их числе.

Рассмотрим цилиндрическую оболочку средней длины, нагруженную плавно изменяющейся в окружном направлении нагрузкой. В этом случае в качестве напряженного состоя-

ния можно использовать полубезмоментное, которое соответствует гипотезам $M_1 = Q_1 = \xi_2 = \gamma = \mu = 0$ и описывается следующим разрешающим уравнением [4]

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial^8}{\partial \varphi^8} + 2 \frac{\partial^6}{\partial \varphi^6} + \frac{\partial^4}{\partial \varphi^4} \right) \Phi + \\ & + \frac{R^2}{J} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left(h \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \Phi \right) = \\ & = \frac{R^4}{EJ} \int_0^\varphi \int_0^\varphi \left(-\frac{\partial X}{\partial \xi} + \frac{\partial Y}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 Z}{\partial \varphi^2} \right) d\varphi d\varphi, \end{aligned} \quad (10)$$

где φ, ξ – безразмерные окружная и продольная координаты; X, Y, Z – компоненты поверхностной нагрузки; h и J – толщина и момент инерции, зависящие от переменной ξ ; $\Phi(\xi, \varphi)$ – разрешающая функция, которая связана с усилиями и перемещениями посредством следующих зависимостей:

$$\begin{aligned} M_2 &= \frac{EJ}{R^2} \left(\frac{\partial^6 \Phi}{\partial \varphi^6} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \varphi^4} \right); \\ Q_2 &= \frac{EJ}{R^2} \left(\frac{\partial^6 \Phi}{\partial \varphi^6} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \varphi^4} \right); \\ S &= -\frac{E}{R} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(h \frac{\partial \Phi}{\partial \xi^2 \partial \varphi} \right) - R \int_0^\varphi X d\varphi; \\ N_1 &= \frac{Eh}{R} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \xi^2 \partial \varphi^2}; \quad u = \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \xi \partial \varphi^2}; \\ v &= -\frac{\partial^3 \Phi}{\partial \varphi^3}; \quad w = \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \varphi^4}. \end{aligned} \quad (11)$$

Представим функцию $\Phi(\xi, \varphi)$ в форме ряда

$$\Phi(\xi, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(\xi) Y_n(\varphi), \quad (12)$$

где Y_n удовлетворяют уравнению

$$Y_n^{VIII} + 2Y_n^{VI} + Y_n^{IV} = \rho_n^8 Y_n.$$

При любых однородных граничных условиях на продольных краях; ρ_n – собственное число, зависящее от граничных условий.

Нагрузку также разлагаем в ряды

$$\begin{aligned} X &= \sum_{n=1}^{\infty} X_n(\xi) Y_n^{II}; \quad Y = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(\xi) Y_n^I; \\ Z &= \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(\xi) Y_n. \end{aligned}$$

Из уравнения (10) после деления переменных получим

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{d\xi^2} \left(Eh \frac{d^2 X_n}{d\xi^2} \right) + \frac{\rho_n^8 EJ}{R^2} X_n = \\ & = R^2 \left(-\frac{dX_n}{d\xi} + Y_n + Z_n \right). \end{aligned} \quad (13)$$

Полагая в общем случае, что толщина или жесткость оболочки могут меняться вдоль образующей по любому закону, приближенно представим эти параметры кусочно-постоянными. При этом если число участников разбиения системы неограниченно растет, решение задачи стремится к точному. В связи с этим параметры оболочки представим в следующем виде:

$$\begin{aligned} EJ(\xi) &= EJ_0 \left[1 + \sum_{i=1}^m \alpha_i \theta(\xi - \xi_i) \right]; \\ Eh(\xi) &= Eh_0 \left[1 + \sum_{i=1}^m \beta_i \theta(\xi - \xi_i) \right], \end{aligned} \quad (14)$$

где EJ_0, Eh_0 – значения $EJ(\xi)$ и $Eh(\xi)$ при $0 < \xi < \xi_1$, принимаемые за базисные; α_i и β_i – параметры скачков $EJ(\xi)$ и $Eh(\xi)$ в сечении $\xi = \xi_i$.

Подставляем выражения (14) в исходное уравнение (13). Тогда оно принимает вид

$$\begin{aligned} & \left\{ \left[1 + \sum_{i=1}^m \beta_i \theta(\xi - \xi_i) \right] X^{II} \right\}^{II} + \\ & 4k^4 \left[1 + \sum_{i=1}^m \alpha_i \theta(\xi - \xi_i) \right] X = \\ & = \frac{R^2}{Eh_0} \left(-\frac{dX}{d\xi} + Y + Z \right), \end{aligned} \quad (15)$$

где $4k^4 = \frac{\rho_n^8 EJ_0}{R^2 Eh_0}$.

Здесь и в дальнейшем индекс n опускается.

Для решения уравнения (15) используем способ сплайн-преобразования аргумента, предложенный В. А. Лазаряном и С. И. Конащенко [6].

Введем вспомогательную функцию $z(\xi) = \frac{Eh(\xi)}{Eh_0} X^{II}$. Тогда однородному уравнению

$[Eh(\xi) X^{II}]^{II} + \frac{\rho_n^8}{R^2} EJ(\xi) X = 0$, соответствующему неоднородному уравнению (13), будет эквивалентна система дифференциальных уравнений второго порядка

$$Eh(\xi) X^{II} = Eh_0 z;$$

$$Ehz^{II} = -\frac{\rho_n^8}{R^2} EJ(\xi) X. \quad (16)$$

Система уравнений (16) после подстановки соотношений (14) получит вид

$$\begin{aligned} X'' &= [1 + \sum_{i=1}^m \beta_i \theta(\xi - \xi_i)]^{-1} Z; \\ Z'' &= -4k^4 [1 + \\ &+ \sum_{i=1}^m \alpha_i \theta(\xi - \xi_i)]^{-1} X. \end{aligned} \quad (17)$$

Переходим к новому аргументу u с помощью полиномиального сплайна первой степени

$$x = \gamma_0 u + \sum_{i=1}^n (u - u_i) \theta(u - u_i) \gamma_i,$$

где u – новый аргумент, равный u_i $x = x_i$, а γ_i ($i=0, 1, \dots, n$) – параметры сплайн-преобразования.

Дифференцируем уравнения (17). Далее, потребовав выполнения условия

$$\begin{aligned} &[1 + \sum_{i=1}^m \gamma_i \theta(u - u_i)]^4 [1 + \\ &+ \sum_{i=1}^m \beta_i \theta(\xi - \xi_i)]^{-1} \times \\ &\times [1 + \sum_{i=1}^m \alpha_i \theta(\xi - \xi_i)] = 1, \end{aligned}$$

получаем для $Z(u)$ и $X(u)$ следующие дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами и сингулярной правой частью:

$$\begin{aligned} Z_u^{IV} + 4k^4 Z(u) &= \\ &= \sum_{r=2}^4 \sum_{i=1}^m C_{ri} \delta^{4-r}(u - u_i), \end{aligned} \quad (18)$$

где $C_{ri} = \Xi_{ri} X_u^{r-1}(u_i - 0)$ ($r = 2, 3, 4$);

$$\Xi_{2i} = \gamma_i (1 + \sum_{j=1}^{i-1} \gamma_j)^{-1};$$

$$\Xi_{3i} = \eta_i (1 + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_j)^{-1} (1 + \sum_{j=1}^{i-1} \gamma_j)^{-2};$$

$$\Xi_{4i} = \psi_i (1 + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_j)^{-1} (1 + \sum_{j=1}^{i-1} \gamma_j)^{-3};$$

$$\eta_i = (1 + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_j) (1 + \sum_{j=1}^{i-1} \gamma_j)^2 -$$

$$- (1 + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_j) (1 + \sum_{j=1}^{i-1} \gamma_j)^2;$$

$$\psi_i = (1 + \sum_{j=1}^i \eta_j) (1 + \sum_{j=1}^i \gamma_j)^2 -$$

$$- (1 + \sum_{j=1}^{i-1} \eta_j) (1 + \sum_{j=1}^{i-1} \gamma_j);$$

$$\begin{aligned} \gamma_i &= (1 + \sum_{j=1}^i \beta_j)^{\frac{1}{4}} (1 + \sum_{j=1}^i \gamma_j)^{-\frac{1}{4}} - \\ &- (1 + \sum_{j=1}^{i-1} \beta_j)^{\frac{1}{4}} (1 + \sum_{j=1}^{i-1} \gamma_j)^{-\frac{1}{4}}, \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} X_u^{IV} + 4k^4 X(u) &= \\ &= \sum_{r=2}^4 \sum_{i=1}^m C_{ri}^* \delta^{4-r}(u - u_i). \end{aligned} \quad (19)$$

При этом $C_{ri}^* = \Xi_u^r X_u^{r-1}(u_i - 0)$ ($r = 2, 3, 4$);

$$\Xi_{2i}^* = \Xi_{2i};$$

$$\Xi_{3i}^* = \eta_i^* (1 + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_j)^{-1} (1 + \sum_{j=1}^{i-1} \gamma_j)^{-2};$$

$$\Xi_{4i}^* = \psi_i^* (1 + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_j)^{-1} (1 + \sum_{j=1}^{i-1} \gamma_j)^{-3};$$

$$\eta_i^* = (1 + \sum_{j=1}^i \beta_j)^{-\frac{1}{2}} (1 + \sum_{j=1}^i \alpha_j)^{-\frac{1}{2}} -$$

$$- (1 + \sum_{j=1}^{i-1} \beta_j)^{-\frac{1}{2}} (1 + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_j)^{-\frac{1}{2}};$$

$$\psi_i^* = (1 + \sum_{j=1}^i \beta_j)^{-\frac{1}{4}} (1 + \sum_{j=1}^i \alpha_j)^{-\frac{3}{4}} -$$

$$- (1 + \sum_{j=1}^{i-1} \beta_j)^{-\frac{1}{4}} (1 + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_j)^{-\frac{3}{4}}.$$

Решение уравнения (19), найденное с помощью преобразования Лапласа, после исключения промежуточных параметров имеет вид

$$X(u) = \sum_{t=1}^4 \frac{X^{t-1}(0)}{k^{t-1}} S_t(u), \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned} S_t(u) &= Y_t(u) + \\ &+ \sum_{r=2}^4 \sum_{i=1}^m \Xi_{ri}^* A Y(u - u_i) \theta(u - u_i), \end{aligned} \quad (t = 1, 2, 3, 4),$$

есть гиперголо-тригонометрические сплайны, непрерывные, но негладкие в точках $u = u_i$ ($i = 1, 2, \dots, m$).

Аналогично записывается решение уравнения (18).

Постоянные интегрирования находим используя граничные условия задачи. Далее, пользуясь формулой обращения сплайна [6], можно перейти от аргумента u к аргументу ξ .

Зависимости между постоянными интегрирования и начальными параметрами можно получить на основании равенств (11) и (18) с учетом свойств обобщенных функций А.Н. Крылова

$$\begin{aligned}
X(0) &= -v(0); & X^I(0) &= u(0); \\
X^{II}(0) &= \frac{N_1(0)R}{Eh_0}; \\
X^{III}(0) &= \frac{S(0)R}{Eh_0}.
\end{aligned}$$

Частное решения неоднородного уравнения (13) будем искать при помощи метода Коши. Сначала необходимо найти реакцию (отклик) системы, поведение которой определяется уравнением

$$\frac{d^2}{d\xi^2} \left(Eh \frac{d^2 X_n}{d\xi^2} \right) + \frac{\rho_n^8 EJ}{R^2} X_n = 0,$$

на единичное импульсное воздействие при нулевых начальных условиях [6]:

$$\begin{aligned}
X_*(\xi) &= \frac{1}{k^3 Eh(\bar{\xi})} S_4^*(\xi - \bar{\xi}, \bar{\xi}) \times \\
&\times \theta(\xi - \bar{\xi}).
\end{aligned}$$

Используя принцип наложения, составляем общее решение уравнения (13):

$$\begin{aligned}
X(\xi) &= \sum_{i=1}^4 \frac{X^{i-1}(0)}{k^{i-1}} S_i(\xi) + \\
&+ \frac{R^2}{k^3} \int_0^{\xi} \left[-\frac{dX(\bar{\xi})}{d\bar{\xi}} + Y(\bar{\xi}) + Z(\bar{\xi}) \right] \times \\
&\times \frac{1}{Eh(\bar{\xi})} S_4^*(\xi - \bar{\xi}, \bar{\xi}) d\bar{\xi}.
\end{aligned} \quad (21)$$

Аналогично можно найти частное решение уравнения (15), преобразованного относительно функции $Z(u)$. Надо отметить, что для нахождения функций X и Z , необходимых для определения внутренних усилий и перемещений, можно не переходить к аргументу x , а воспользоваться решениями с аргументом u .

В качестве примера выполним расчет консольной оболочки (рис. 3).

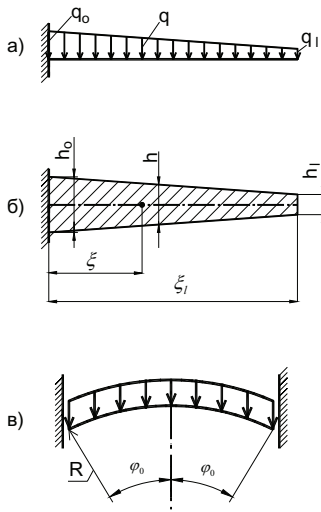


Рис. 3.

Закрепления продольных краев можно представить в соответствии с рис. 4, а.

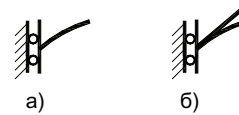


Рис. 4.

В тех случаях, когда оболочка достаточно полого, с целью упрощения расчета горизонтальные связи заменяются касательными (рис. 4, б).

Итак, запишем следующие граничные условия:

$$\text{при } \varphi = \pm\varphi_0, \quad v = \psi = s = Q_2 = 0.$$

Здесь $\psi = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial w}{\partial \varphi} - v \right)$ – угол поворота касательной к дуге относительно продольной оси.

Можно показать, что таким условиям соответствуют функции $Y_n = \cos \rho_n \varphi$,

$$\text{где } \rho_n = \frac{n\pi}{\varphi_0}.$$

Нагрузку при этом считаем вертикальной и распределенной равномерно по дуге (рис. 3, в), т.е.

$$Y = -q \sin \varphi; \quad Z = q \cos \varphi.$$

Разлагая эти компоненты нагрузки в ряды, находим

$$Y_n = Z_n = 2q(-1)^n \frac{\sin \varphi_0}{\rho_n^2 \varphi_0}.$$

Ряды в данном случае сходятся достаточно быстро, поэтому можно ограничиться тремя их членами.

Для рассматриваемого примера примем: $l = 8$ м; $h_0 = 0.08$ м; $h_1 = 0.05$ м; $\varphi_0 = \pi/5$; $R = 7,66$ м; $q_0 = 4$ кПа; $q_1 = 3$ кПа.

На рис. 5а и 5б приведены эпюры изгибающих моментов и продольных нормальных усилий соответственно. Там же для сопоставления пунктирной линией показаны результаты, полученные в работе [7]. Полученные решения показывают хорошую сходимость результатов. Так как по предлагаемой методике производится расчет оболочки с любым законом изменения толщины (жесткости) в направлении образующей, можно считать, что она достаточно эффективна при решении данного класса задач.

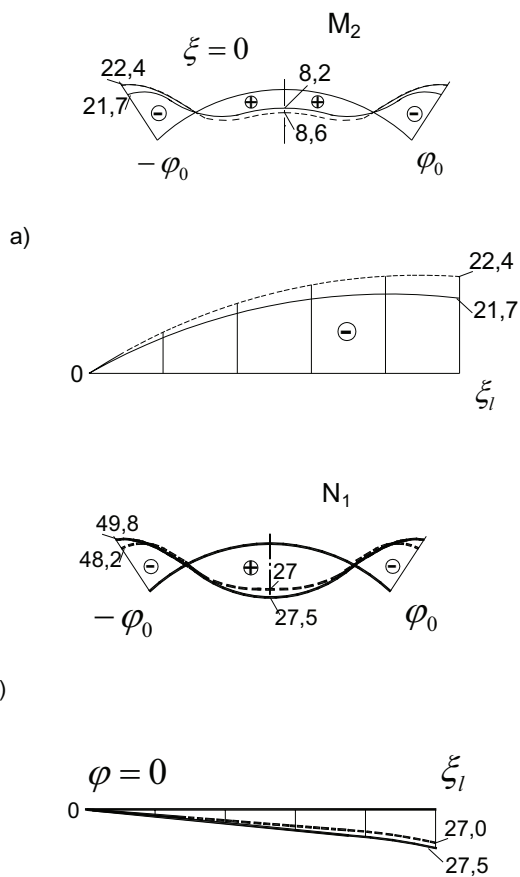


Рис. 5.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Власов, В. З. Избранные труды. – Т. 1. Общая теория оболочек [Текст] / В. З. Власов – М.: Изд. АН СССР, 1962. – 528 с.
2. Вайнберг, Д. В. Расчет пластин и оболочек с разрывными параметрами [Текст] / Д. В. Вайнберг, И. З. Ройтфарб // Расчет пространственных конструкций. – Вып. 10. – М.: Стройиздат, 1965. – С. 39-80.
3. Лурье, А. И. Статика тонкостенных упругих оболочек [Текст] / А. И. Лурье. – М.: ОГИЗ, Гостехиздат, 1947. – 252 с.
4. Гребень, Е. С. Основные соотношения технической теории ребристых оболочек [Текст] / Е. С. Гребень // Изв. АН СССР ОТН. Механика и машиностроение. – М., 1965. – № 3. – С. 82-93.
5. Золотов, О. Н. Использование свойства ортогональности тригонометрических функций дискретного аргумента при расчете пространственных систем [Текст] / О. Н. Золотов, И. Е. Милейковский // Тр. IX Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин. – Л., 1975. – С. 117-120.
6. Лазарян, В. А. Обобщенные функции в задачах механики [Текст] / В. А. Лазарян, С. И. Конашенко. – К.: Наук. думка, 1974. – 192 с.
7. Штейнберг, М. В. Расчет круговых цилиндрических оболочек с толщиной переменной в направлении образующей [Текст] / М. В. Штейнберг // Прикладная механика, т. 1. – 1965. – Вып. 7. – С. 28-36.

Поступила в редколлегию 30.07.2009