УДК 517.5

С. А. Пичугов

(Днепропетровский национальный университет железнодорожного транспорта им. акад. В. Лазаряна, Днепропетровск)

Обратные теоремы Джексона в пространствах с интегральной метрикой

У просторах $L_\psi(\mathrm{T})$ періодичних функцій з метрикою $\rho(f,0)_\psi = \int\limits_{\mathrm{T}} \psi(|f(x)|)dx$, де ψ - функція типу модуля неперервності, досліджуються обернені теореми Джексона у випадку апроксимації тригонометричними поліномами. Доведено, що обернена теорема Джексона має місце тоді і тільки тоді, коли нижній показник розтягнення функції ψ не дорівнює нулеві.

1.Введение. Для действительнозначных функций $f(x)$, $x \in R$, имеющих период 1, $L_0 \equiv L_0(T)$ - множество измеримых и почти всюду конечных функций на основном торе периодов $T = [0,1]$; Ω-множество функций $\psi : R_+^1 \to R_+^1$, являющихся модулем непрерывности;

$$L_\psi \equiv L_\psi(T) = \left\{ f \in L_\psi : \|f\|_\psi := \int\limits_T \psi(|f(x)|)dx < \infty \right\}$$

-метрические пространства (в случае $\psi \in \Omega$). В частности, для $0 < p < 1$ $\|f\|_p := \int\limits_T |f(x)|^p \, dx$.

Через $T_n(x)$ будем обозначать тригонометрические полиномы периода 1, а через $\omega_k(f,h)_\psi$ - k-й модуль непрерывности f, то есть

$$\omega_k(f,h)_\psi = \sup_{|s|\le h} \left\| \Delta_s^k f \right\|_\psi, \quad k \in N,$$

$$\Delta_s^k f = \Delta_s\left(\Delta_s^{k-1}\right), \quad \Delta_s^1 f(x) := \Delta_s f(x) := f(x+s) - f(x).$$

$$E_n(f)_\psi = \inf_{T_n} \| f - T_n \|_\psi$$

-наилучшее приближение f в L_ψ тригонометрическими полиномами степени не выше n.

В работах [1,2] мы исследовали вопрос о наличии в пространствах L_ψ прямых неравенств Джексона; точнее вопрос о наличии соотношений

$$\sup_n \sup_{f\in L_{\psi}, f\neq const} \frac{E_n(f)_\psi}{\omega(f,\frac{1}{n})_\psi}<\infty. \qquad (1)$$

Выяснилось, что ответ на этот вопрос зависит от значений нижнего показателя растяжения γ_ψ функции ψ.

Пусть для $s\in(0,\infty)$

$$M_\psi(s):=\sup_{0<t<\infty}\frac{\psi(st)}{\psi(t)}$$

-функция растяжения ψ ([3]). Тогда γ_ψ -такое число из $[0,1]$, что для всех $s\in[0,1]$

$$M_\psi(s)\geq s^{\gamma_\psi},$$

и в тоже время для любого $\varepsilon>0$ найдётся константа C_ε такая, что

$$M_\psi(s)\leq C_\varepsilon s^{\gamma_\psi-\varepsilon}, \quad s\in[0,1].$$

В [2] доказано, что в пространстве L_ψ неравенства Джексона (1) имеют место тогда и только тогда, когда $\gamma_\psi>0$.

В настоящей работе мы исследуем задачу о наличии в пространствах L_ψ обратных теорем Джексона, характеризующих дифференциально-разностные свойства функций с заданной последовательностью наилучших приближений. Будет показано, что ответ снова существенно зависит от значений γ_ψ.

Отметим вкратце основные известные результаты по обратным неравенствам Джексона в пространствах L_p, $0<p\leq\infty$ (при $p=\infty$ под L_∞ подразумеваем $C(T)$).

Пусть $k,r,n\in N$.

1) $1\leq p\leq\infty$ ([4,5,6]):

$$\omega_k(f,\tfrac{1}{n})_p\leq\frac{C_k}{n^k}\sum_{j=1}^{n} j^{k-1}E_{j-1}(f)_p;$$

2) $1<p<\infty$ ([7]): при $\beta:=\min(p,2)$

$$\omega_k(f,\tfrac{1}{n})_p \le \tfrac{C_{k,p}}{n^k}(\sum_{j=1}^{n} j^{\beta k-1}E_{j-1}^{\beta}(f)_p)^{\frac{1}{\beta}};$$

3) $1\le p\le\infty$ ([5,8]): если при некотором r

$$\sum_{j=1}^{\infty} j^{r-1}E_{j-1}(f)_p<\infty,$$

то $f^{(r-1)}\in AC,\ \ f^{(r)}\in L_p$, и $\forall k$

$$\omega_k(f^{(r)},\tfrac{1}{n})_p \le C_{k,r}(\tfrac{1}{n^k}\sum_{j=1}^{n} j^{r-1+k}E_{j-1}(f)_p+\sum_{j=n+1}^{\infty} j^{r-1}E_{j-1}(f)_p);$$

4) $1<p<\infty$ ([7,9]): если при некотором r

$$\sum_{j=1}^{\infty} j^{\beta r-1}E_{j-1}^{\beta}(f)_p<\infty,\quad \beta:=\min(p,2),$$

то $f^{(r-1)}\in AC,\ \ f^{(r)}\in L_p$, и $\forall k$

$$\omega_k(f^{(r)},\tfrac{1}{n})_p \le C_{k,r,p}(\tfrac{1}{n^k}(\sum_{j=1}^{n} j^{\beta(k+r)-1}E_{j-1}^{\beta}(f)_p)^{\frac{1}{\beta}}+(\sum_{j=n+1}^{\infty} j^{\beta r-1}E_{j-1}^{\beta}(f)_p)^{\frac{1}{\beta}}).$$

Подробнее с этими результатами можно ознакомиться ещё в [10,11].

5) $0<p<1$ ([12,13]):

$$\omega_k(f,\tfrac{1}{n})_p \le \tfrac{C_{k,p}}{n^k}\sum_{j=1}^{n} j^{k-1}E_{j-1}(f)_p;$$

6) $0<p<1$ ([13]): если $\|f-T_n\|_p=O(E_n(f)_p)$, и при некотором r

$$\sum_{j=1}^{\infty} j^{rp-1}E_{j-1}(f)_p<\infty,$$

то f имеет r-ю производную $f^{(r)}$ в смысле L_p, и

$$\|f^{(r)}-T_n^{(r)}\|_p \le C_{r,p}(n^{rp}E_n(f)_p+\sum_{j=n+1}^{\infty} j^{rp-1}E_{j-1}(f)_p).$$

При исследовании обратных неравенств Джексона в L_ψ мы придерживаемся классической схемы доказательств, основанной на неравенствах типа С.Н.Бернштейна для приращений и производных тригонометрических полиномов. Полиномиальные неравенства в L_ψ изучались нами в [14]. Приведём те неравенства из [14], которые будут здесь использоваться.

Пусть $k, r = 0,1,...,$ $h \in (0, \frac{1}{2}],$ и $\gamma_\psi > 0$. Тогда при всех $n \in N$

$$\left\|\Delta_h^k T_n^{(r)}\right\|_\psi \le C_{r,k} M_\psi (n^r \min((nh)^k, 1)) \|T_n\|_\psi, \qquad (2)$$

$$\left\|(\tfrac{\Delta_h}{h} - D) T_n^{(r)}\right\|_\psi \le C_r M_\psi (\max_{|k| \le n} (|k|^r \left|\tfrac{\sin(\pi kh)}{h} - \pi k\right|)) \|T_n\|_\psi. \qquad (3)$$

2.Обратная теорема Джексона в случае $\gamma_\psi > 0$.

Теорема 1. *Пусть* $\gamma_\psi > 0$. *Тогда для любого* $k \in N$ *найдётся константа* $C = C(k, \psi)$ *такая, что для всех* $f \in L_\psi$ *и всех* $h \in (0, \frac{1}{2}]$ *имеют место неравенства*

$$\omega_k(f, h)_\psi \le C \sum_{j=1}^{[\frac{1}{h}]} \frac{M_\psi((jh)^k)}{j} E_{j-1}(f)_\psi. \ (4)$$

Доказательство. Для функции растяжения M_ψ будем использовать мультипликативное неравенство $M_\psi(u \cdot v) \le M_\psi(u) \cdot M_\psi(v)$, вытекающее из определения.

Обозначим $e_j := E_j(f)_\psi$, и пусть T_n - полином наилучшего приближения f в L_ψ степени n (существование таких полиномов см. в [15]). Для доказательства (4) без ограничения общности можно считать, что $T_0 = 0$. Пусть сначала $h = 2^{-n}$. Тогда

$$f = (f - T_{2^n - 1}) + T_{2^n - 1} = f - T_{2^n - 1} + \sum_{j=1}^{n} (T_{2^j - 1} - T_{2^{j-1} - 1}),$$

$$\left\|\Delta_{1/2^n}^k f\right\|_\psi \le 2^k e_{2^n - 1} + \sum_{j=1}^{n} \left\|\Delta_{1/2^n}^k (T_{2^j - 1} - T_{2^{j-1} - 1})\right\|_\psi. \qquad (5)$$

Из (2) при $r = 0$ получаем:

$$\left\|\Delta_{1/2^n}^k (T_{2^j - 1} - T_{2^{j-1} - 1})\right\|_\psi \le C_1 M_\psi (2^{(j-n)k}) \left\|T_{2^j - 1} - T_{2^{j-1} - 1}\right\|_\psi \le$$
$$\le 2 C_1 M_\psi (2^{(j-n)k}) e_{2^{j-1} - 1}. \qquad (6)$$

Из (5) и (6) вытекает:

$$\omega_k(f, \tfrac{1}{2^n})_\psi \le C_2 \sum_{j=1}^{n+1} M_\psi (2^{(j-n)k}) e_{2^{j-1} - 1}. \qquad (7)$$

Из монотонного убывания e_n следует, что для $j \ge 1$

$$e_{2^j-1} \le 2\sum_{s=2^{j-1}+1}^{2^j} \tfrac{e_{s-1}}{s}, \tag{8}$$

а из монотонного возрастания $M_\psi(x)$ следует, что при $s > 2^{j-1}$

$$M_\psi(2^{(j-n)k}) \le M_\psi(2^k) M_\psi(\tfrac{1}{2^{nk}} 2^{k(j-1)}) \le M_\psi(2^k) M_\psi((\tfrac{s}{2^n})^k). \tag{9}$$

Используя (8), (9), из (7) получаем (4) в случае $h = \frac{1}{2^n}$:

$$\omega_k(f, \tfrac{1}{2^n})_\psi \le C_2 \sum_{j=2}^{n+1} M_\psi(2^{(j-n)k}) 2 \sum_{s=2^{j-2}+1}^{2^j-1} \tfrac{e_{s-1}}{s} + C_2 M_\psi(2^{-nk}) e_0 \le$$

$$\le C_2 \sum_{j=2}^{n+1} \sum_{s=2^{j-2}+1}^{2^j-1} 2 M_\psi(2^k) \frac{M_\psi((\frac{s}{2^n})^k)}{s} e_{s-1} + C_2 M_\psi(2^{-nk}) e_0 \le \tag{10}$$

$$\le C_3 \sum_{s=1}^{2^n} \frac{M_\psi((\frac{s}{2^n})^k)}{s} e_{s-1}.$$

Для произвольного $h \in (0, \frac{1}{2}]$ найдем $n \in N$ такое, что $h \in (2^{-(n+1)}, 2^{-n}]$, и с помощью (10) получим:

$$\omega_k(f, h)_\psi \le \omega_k(f, \tfrac{1}{2^n})_\psi \le C_3 \sum_{s=1}^{2^n} \frac{M_\psi((\frac{s}{2^n})^k)}{s} e_{s-1} \le$$

$$\le C_3 \sum_{s=1}^{2^n} \frac{M_\psi(s^k (2h)^k)}{s} e_{s-1} \le C_3 M_\psi(2^k) \sum_{s=1}^{\left[\frac{1}{h}\right]} \frac{M_\psi((sh)^k)}{s} e_{s-1}.$$

Теорема 1 доказана.

Утверждение теоремы 1 является неулучшаемым в следующем смысле.

Теорема 2. *Какова бы ни была неотрицательная функция* $\lambda(h)$, $h \in (0, \frac{1}{2}]$, *такая что* $\lambda(h) \to 0$ *при* $h \to 0$, *неравенство*

$$\omega_k(f, h)_\psi \le \lambda(h) \cdot C \sum_{j=1}^{\left[\frac{1}{h}\right]} \frac{M_\psi((jh)^k)}{j} E_{j-1}(f)_\psi$$

для $h \in (0, \frac{1}{2}]$ *на всём пространстве* L_ψ *невозможно ни при какой константе* C *(не зависящей от* f *и* h*).*

Доказательство. Рассмотрим семейство функций

$$f_A(x) = A\sin(2\pi x), \quad A > 0.$$

Очевидно, что при $j > 1$ $E_{j-1}(f_A)_\psi = 0$, $E_0(f_A)_\psi \le \|f_A\|_\psi \le \psi(A)$, поэтому

$$\sum_{j=1}^{\left[\frac{1}{h}\right]} \frac{M_\psi((jh)^k)}{j} E_{j-1}(f_A)_\psi \le M_\psi(h^k)\psi(A). \qquad (11)$$

Теперь оценим $\omega(f_A,h)_\psi$ снизу:

$$\left\|\Delta_h^k f_A\right\|_\psi = \left\|A(2\sin\pi h)^k \sin 2\pi x\right\|_\psi >$$

$$> \int\limits_{\{x\in\mathrm{T}:|\sin 2\pi x|\ge\frac{\sqrt{2}}{2}\}} \psi(A(2\sin\pi h)^k |\sin 2\pi x|)dx > \psi(A(2\sin\pi h)^k \tfrac{\sqrt{2}}{2})\cdot\tfrac{1}{2} \ge$$

$$\ge \psi(A(4h)^k \tfrac{\sqrt{2}}{2})\cdot\tfrac{1}{2}, \qquad (12)$$

так как при $h\in(0,\frac{1}{2}]$ $\quad \sin\pi h \ge 2h.$

Из (11) и (12) получаем:

$$\sup_{\{f_A\}} \frac{\omega_k(f_A,h)_\psi}{\lambda(h)\sum\limits_{j=1}^{[\frac{1}{h}]}\frac{M_\psi((jh)^k)}{j}E_{j-1}(f_A)_\psi} > \sup_{A>0}\frac{2^{-1}\psi(2^{2k-1/2}h^kA)}{\lambda(h)M_\psi(h^k)\psi(A)} =$$

$$= \frac{2^{-1}}{\lambda(h)M_\psi(h^k)}\sup_{A>0}\frac{\psi(2^{2k-1/2}h^kA)}{\psi(A)} = \frac{2^{-1}}{\lambda(h)M_\psi(h^k)}M_\psi(2^{2k-1/2}h^k) \ge$$

$$\ge \frac{2^{-1}}{M_\psi(2^{-(2k-1/2)})}\frac{1}{\lambda(h)} \to \infty, \qquad h\to 0.$$

Отсюда следует утверждение теоремы.

Теорема 1 позволяет дать конструктивную характеристику некоторых функциональных классов в L_ψ.

Для $\alpha\in(0,1]$ определим стандартным образом классы Липшица

$$Lip(\alpha,\psi) := \{f\in L_\psi : \omega(f,h)_\psi \le C_f h^\alpha, h\in(0,\tfrac{1}{2}]\}.$$

Теорема 3. *Пусть* $\gamma_\psi > 0$. *Тогда для любого* $\alpha\in(0,\gamma_\psi)$ *следующие утверждения 1), 2) эквивалентны:*

1) $f\in Lip(\alpha,\psi)$

2) $\exists K_f \forall n\in N \quad E_{n-1}(f)_\psi \le K_f n^{-\alpha}.$

Доказательство. Импликация 1) $\Rightarrow$ 2) следует из прямой теоремы Джексона в L_ψ [2], и справедлива для всех $\alpha\in(0,1]$.

Пусть теперь дано 2). Из свойств γ_ψ следует, что для любого $\varepsilon>0$ найдётся константа $C(\varepsilon)$ такая, что для всех $y\in(0,1]$ будет

$M_\psi(y) \le C(\varepsilon) y^{\gamma_\psi - \varepsilon}$. Для заданного $\alpha \in (0, \gamma_\psi)$ выберем $\varepsilon > 0$ из условия $\alpha < \gamma_\psi - \varepsilon$, и воспользуемся теоремой 1:

$$\omega(f,h)_\psi \le C \sum_{j=1}^{\left[\frac{1}{h}\right]} \frac{M_\psi(jh)}{j} K_f j^{-\alpha} \le C_1(\varepsilon) \sum_{j=1}^{\left[\frac{1}{h}\right]} \frac{(jh)^{\gamma_\psi - \varepsilon}}{j} K_f j^{-\alpha} =$$

$$= C_2(f,\varepsilon) h^{\gamma_\psi - \varepsilon} \sum_{j=1}^{\left[\frac{1}{h}\right]} j^{\gamma_\psi - \varepsilon - \alpha - 1} \le C_3(f,\varepsilon) h^{\gamma_\psi - \varepsilon} \left[\tfrac{1}{h}\right]^{\gamma_\psi - \varepsilon - \alpha} \le C_4(f,\varepsilon) h^\alpha .$$

Итак 2)$\Rightarrow$ 1), и теорема доказана.

Заметим, что для пространств L_p, $0 < p < 1$, $\gamma_\psi = p$, и в случае $\alpha \ge \gamma_\psi$ импликация 2)$\Rightarrow$1) становится неверной [12]. По-видимому, так будет в каждом пространстве L_ψ при $\gamma_\psi > 0$.

Теорему 3 можно переформулировать следующим образом: если $\gamma_\psi > 0$, то для любого $\beta \in (0,1)$

$$/ f \in Lip(\gamma_\psi \cdot \beta, \psi) / \iff / E_{n-1}(f)_\psi \le K_f \left(\tfrac{1}{n^{\gamma_\psi}}\right)^\beta, n = 1,2,... / \quad . \qquad (13)$$

Так как функция x^{γ_ψ} при $x \in (0,1)$ «близка» к функции $M_\psi(x)$, то соотношения (13) наводят на мысль о возможности конструктивной характеристики следующих классов:

$$H^{M_\psi^\beta} := \{ f \in L_\psi : \omega(f;h)_\psi \le C_f (M_\psi(h))^\beta, h \in [0, \tfrac{1}{2}) \},$$

где $\beta \in (0,1]$. Заметим, что при $\gamma_\psi > 0$ функция $M_\psi(h)$ является функцией типа модуля непрерывности, поэтому классы $H^{M_\psi^\beta}$ наряду с липшицевыми принадлежат шкале классических классов H_ψ^ω. В пространствах L_p, очевидно, $H^{M_\psi^\beta} = Lip(\gamma_\psi \cdot \beta, \psi)$, однако легко видеть, что для произвольных $\psi \in \Omega$ это будут, вообще говоря, различные классы.

Для формулировки результата нам понадобится определение верхнего показателя растяжения δ_ψ функции ψ (см. [3, с.76]): в случае $\psi \in \Omega$ δ_ψ - такое число из отрезка $[\gamma_\psi, 1]$, что при $s > 1$ $M_\psi(s) \ge s^{\delta_\psi}$, но для любого $\varepsilon > 0$ $M_\psi(s) \le C_\varepsilon s^{\delta_\psi + \varepsilon}$.

Теорема 4. *Пусть* $\gamma_\psi > 0$. *Тогда для любого* $\beta \in (0, \frac{\gamma_\psi}{\delta_\psi})$ *следующие условия 1), 2) эквивалентны:*

1) $f \in H^{M_\psi^\beta}$;

2) $\exists K_f \forall n \in N \quad E_{n-1}(f)_\psi \le K_f (M_\psi(\frac{1}{n}))^\beta$.

Доказательство. Из прямой теоремы Джексона следует 1)$\Rightarrow$2) для любого $\beta \in (0,1)$.

Пусть дано 2). Так как

$$M_\psi(\tfrac{1}{j}) = M_\psi(\tfrac{1}{jh} h) \le M_\psi(\tfrac{1}{jh}) M_\psi(h),$$

то из теоремы 1 следует:

$$\omega(f,h)_\psi \le C \sum_{j=1}^{\left[\frac{1}{h}\right]} \frac{M_\psi(jh)}{j} K_f M_\psi^\beta(\tfrac{1}{j}) \le M_\psi^\beta(h) \cdot C_1 \sum_{j=1}^{\left[\frac{1}{h}\right]} \frac{M_\psi(jh)}{j} M_\psi^\beta(\tfrac{1}{jh}),$$

и всё будет доказано, если мы покажем, что при $h \to 0$

$$U_h := \sum_{j=1}^{\left[\frac{1}{h}\right]} \frac{M_\psi(jh)}{j} M_\psi^\beta(\tfrac{1}{jh}) = O(1).$$

По условию $\gamma_\psi > \beta\delta_\psi$. Выберем $\varepsilon > 0$ настолько малым, чтобы $\gamma_\psi - \varepsilon > \beta(\delta_\psi + \varepsilon)$. Из свойств показателей растяжения следует, что

$$M_\psi(jh) \le C(\varepsilon)(jh)^{\gamma_\psi - \varepsilon}, \quad M_\psi(\tfrac{1}{jh}) \le C(\varepsilon)(\tfrac{1}{jh})^{\delta_\psi + \varepsilon}.$$

Тогда

$$U_h \le C'(\varepsilon) \sum_{j=1}^{\left[\frac{1}{h}\right]} \frac{(jh)^{\gamma_\psi - \varepsilon}}{j} (\tfrac{1}{jh})^{\beta(\delta_\psi + \varepsilon)} =$$

$$= C'(\varepsilon) h^{\gamma_\psi - \varepsilon - \beta(\delta_\psi + \varepsilon)} \cdot \sum_{j=1}^{\left[\frac{1}{h}\right]} j^{-1 + (\gamma_\psi - \varepsilon) - \beta(\delta_\psi + \varepsilon)} \le$$

$$= C''(\varepsilon) h^{\gamma_\psi - \varepsilon - \beta(\delta_\psi + \varepsilon)} \cdot (\tfrac{1}{h})^{\gamma_\psi - \varepsilon - \beta(\delta_\psi + \varepsilon)} = O(1).$$

Теорема 4 доказана.

3. О существовании обратной теоремы в L_ψ.

Определение. Скажем, что в пространстве L_ψ для данного $k \in N$ имеет место обратная теорема Джексона (для модуля непрерывности k - го порядка) в форме (*), если найдутся функции

$$\alpha_j(h), \quad j \in N, \quad \alpha_j : [0, \tfrac{1}{2}] \to R^+,$$

целочисленная функция $\nu : N \to N$, и константа C такие, что для всех $f \in L_\psi$, $h \in (0, \tfrac{1}{2}]$ выполнены неравенства

$$\omega_k(f, h)_\psi \le C \sum_{j=1}^{\nu([\frac{1}{h}])} \alpha_j(h) E_{j-1}(f)_\psi, \qquad (*)$$

и при этом $\forall f \in L_\psi$

$$\lim_{h \to 0} \sum_{j=1}^{\nu([\frac{1}{h}])} \alpha_j(h) E_{j-1}(f)_\psi = 0. \qquad (14)$$

Так как $\lim\limits_{h \to 0} \omega_k(f, h)_\psi = 0$, то условие (14) нам представляется естественным для того, чтобы правая часть (*) была «хорошей» мажорантой для модулей непрерывности.

Отметим, что из (14) следует, что $\lim\limits_{h \to 0} \alpha_j(h) = 0 \quad \forall j \in N$.

Теорема 5. *Каким бы ни было $k \in N$, в пространстве L_ψ имеет место обратная теорема Джексона в форме (*) для k - го модуля непрерывности тогда и только тогда, когда $\gamma_\psi > 0$.*

Доказательство. При $\gamma_\psi > 0$ - смотри теорему 1.

Пусть $\gamma_\psi = 0$, и допустим противное: для некоторых k, $\alpha_j(h)$, ν, C выполняются неравенства (*) для всех $f \in L_\psi$, $h \in (0, \tfrac{1}{2}]$. Применим (*) к семейству функций

$$f_A(x) = A \sin(2\pi x), \quad A > 0.$$

Так как (см. (12))

$$\omega_k(f_A, h)_\psi \ge 2^{-1} \psi(2^{2k-1/2} h^k A),$$

$$\sum_{j=1}^{\nu([\frac{1}{h}])} \alpha_j(h) E_{j-1}(f_A)_\psi \le \alpha_1(h) \psi(A),$$

для любого $h \in (0, \tfrac{1}{2}]$

$$C \ge \sup_{\{f_A\}} \frac{\omega_k(f_A, h)_\psi}{\sum_{j=1}^{\nu[\frac{1}{h}]} \alpha_j(h) E_{j-1}(f_A)_\psi} \ge \sup_A \frac{2^{-1} \psi(2^{2k-1/2} h^k A)}{\alpha_1(h) \psi(A)} =$$

$$= \frac{2^{-1}}{\alpha_1(h)} M_\psi(2^{2k-1/2} h^k).$$

Так как в случае $\gamma_\psi = 0 \quad M_\psi(s) = 1 \quad \forall s \in (0,1]$, то при всех достаточно малых h

$$C \ge \frac{2^{-1}}{\alpha_1(h)},$$

что невозможно, так как при $h \to 0 \quad \alpha_1(h) \to 0$.

Теорема 5 доказана.

4. **Дифференциально-разностные свойства функций и её наилучшие приближения.** В зависимости от скорости убывания наилучших приближений f в L_ψ будем исследовать вопрос о существовании у этой функции f производных в этом же пространстве L_ψ. Будем использовать следующее известное понятие глобальной производной, но сформулированное для случая пространств L_ψ.

Определение. Скажем, что функция $g \in L_\psi$ является (глобальной) L_ψ-производной для $f \in L_\psi$ (и будем обозначать $g = f'$), если

$$\lim_{h\to 0} \left\| \tfrac{1}{h}(f(x+h) - f(x)) - g(x) \right\|_\psi = 0.$$

Далее, если у этой функции g существует L_ψ-производная, то обозначим её f'' и назовём L_ψ-производной для $f \in L_\psi$ второго порядка (и так далее).

Теорема 6. *Пусть $\gamma_\psi > 0$, и для заданного $r \in N$ функция f из L_ψ такова, что сходится ряд*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{M_\psi(j^r)}{j} E_{j-1}(f)_\psi < \infty. \qquad (15)$$

Тогда:

1. *У функции f существует L_ψ-производные $f', \dots, f^{(r)}$ до порядка r включительно;*
2. *Для любого $k \in N$ существует константа $C = C(k, r, \psi)$ такая, что для всех $h \in (0, \frac{1}{2}]$ выполняется неравенство*

$$\omega_k(f^{(r)}, h)_\psi \le C \left(\sum_{j<\frac{1}{h}} \frac{M(j^r(jh)^k)}{j} E_{j-1}(f)_\psi + \sum_{j\ge\frac{1}{h}} \frac{M(j^r)}{j} E_{j-1}(f)_\psi \right) \qquad (16)$$

Доказательство. Пусть T_n-полином наилучшего приближения f, $T_0 = 0$ (без ограничения общности),

$$S^{(\nu)}(f):=\sum_{j=1}^{\infty}(T_{2^j-1}-T_{2^{j-1}-1})^{(\nu)},\quad \nu=0,1,2,...,r. \qquad (17)$$

Условие (15) гарантирует L_ψ-сходимость рядов (17). Действительно, так как $\gamma_\psi>0$, то по неравенству Бернштейна (2)

$$\left\|(T_{2^j-1}-T_{2^{j-1}-1})^{(\nu)}\right\|_\psi \le C_1M_\psi(2^{j\nu})\left\|T_{2^j-1}-T_{2^{j-1}-1}\right\|_\psi \le 2C_1M_\psi(2^{j\nu})E_{2^{j-1}-1}(f)_\psi,$$

поэтому, действуя аналогично (8), (9), (10), получаем:

$$\left\|\sum_{j=1}^{\infty}(T_{2^j-1}-T_{2^{j-1}-1})^{(\nu)}\right\|_\psi \le 2C_1\sum_{j=1}^{\infty}M_\psi(2^{j\nu})E_{2^{j-1}-1}(f)_\psi \le C_2\sum_{j=1}^{\infty}\tfrac{M_\psi(j^\nu)}{j}E_{j-1}(f)_\psi.$$

(на последнем этапе использовали монотонное возрастание функции $M_\psi(s)$).

Таким образом корректно определены функции $S^{(\nu)}(f)$ как элементы пространства L_ψ.

Докажем первое утверждение теоремы. Для этого нам достаточно показать, что для всех $\nu\le r$

$$f^{(\nu)}=S^{(\nu)}(f). \qquad (18)$$

Очевидно, что $f^{(0)}:=f=S(f):=S^{(0)}(f)$. Поэтому допустим, что (18) справедливо для $\nu\le r-1$, и докажем, что $f^{(r)}=S^{(r)}(f)$.

Для любого $h\ne 0$ и $N\in \mathrm{N}$ имеем:

$$\left\|\tfrac{\Delta_h}{h}f^{(r-1)}-S^{(r)}(f)\right\|_\psi=\left\|\tfrac{\Delta_h}{h}S^{(r-1)}(f)-S^{(r)}(f)\right\|_\psi\le$$

$$\le\sum_{j=0}^{\infty}\left\|(\tfrac{\Delta_h}{h}D^{r-1}-D^r)(T_{2^j-1}-T_{2^{j-1}-1})\right\|_\psi=\sum_{j=1}^{N}+\sum_{j>N}:=\sum\nolimits_1(h)+\sum\nolimits_2(h).$$

Для оценки $\sum_2(h)$ используем (3) и неравенство $|\frac{\sin x}{x}|\le 1$:

$$\sum\nolimits_2(h)\le C_3\sum_{j>N}M_\psi(2^{jr})E_{2^{j-1}-1}(f)_\psi. \qquad (19)$$

Из условия (15) следует, что правая часть неравенства (19) является остатком сходящегося ряда, поэтому с ростом N стремится к нулю. Тем самым $\sum_2(h)$ можно сделать как угодно малым при всех h, если N достаточно велико.

Оценим $\sum_1(h)$ при любом фиксированном N с помощью (3):

$$\sum\nolimits_1(h) \le C_4 \sum_{j=1}^{N} M_\psi (\max_{|k|\le 2^j}(|k|^{r-1}|\tfrac{\sin(\pi kh)}{h} - \pi k|))E_{2^{j-1}-1}(f)_\psi \le$$

$$\le C_4 M_\psi (2^{N(r-1)} \max_{|k|\le 2^N} |\tfrac{\sin(\pi kh)}{h} - \pi k|) \sum_{j=1}^{N} E_{2^{j-1}-1}(f)_\psi .$$

Отсюда следует, что $\sum\nolimits_1(h) \to 0$ при $h \to 0$.

Таким образом

$$\lim_{h\to 0}\left\| \tfrac{\Delta_h}{h} f^{(r-1)} - S^{(r)}(f)\right\|_\psi = 0,$$

и первое утверждение теоремы доказано.

Докажем (16). Используя (2), имеем:

$$\left\|\Delta_h^k f^{(r)}\right\|_\psi = \left\| \sum_{j=1}^{\infty} (T_{2^j-1} - T_{2^{j-1}-1})^{(\nu)} \right\|_\psi \le$$

$$\le 2C_5 \sum_{j=1}^{\infty} M_\psi (2^{jr} \min((2^j h)^k, 1))E_{2^{j-1}-1}(f)_\psi =$$

$$= 2C_5 (\sum_{2^j < \frac{1}{h}} M_\psi (2^{j(r+k)} h^k) E_{2^{j-1}-1}(f)_\psi + \sum_{2^j \ge \frac{1}{h}} M_\psi (2^{jr}) E_{2^{j-1}-1}(f)_\psi).$$

Дальнейшие преобразования стандартные (см. доказательство теоремы 1). Теорема 6 доказана.

[1] *Пичугов С.А.* О теореме Джексона для периодических функций в пространствах с интегральной метрикой // Укр. мат. журн. – 2000.-52, №1. С.122-133.

[2] *Пичугов С.А.* О теореме Джексона для периодических функций в метрических пространствах с интегральной метрикой. II // Укр. мат. журн. – 2011. – 63, №11. С. 1524-1533.

[3] *Крейн С.Г., Петунин Ю.И., Семенов Е.М.* Интерполяция линейных операторов.- М.: Наука, 1978.-400с.

[4] *Salem R.* Essais sur les Series trigonometriques.- Paris, 1940.

[5] *Стечкин С.Б.* О порядке наилучшего приближения непрерывных функций // Известия АН СССР, серия матем. – 1951.-15, С. 219-242.

[6] *Тиман А.Ф., Тиман М.Ф.* Обобщенный модуль непрерывности и наилучшее приближение в среднем // Труды IV Всес. матем. съезда – 1964.-3, С.683-693.

[7] *Тиман М.Ф.* Обратные теоремы конструктивной теории функций в пространствах L_p // Матем. сборник. –1958.-46, №1. С.125-132.

[8] *Тиман А.Ф.* Исследования по теории приближения: Автореферат доктор. диссерт. –Днепропетровск – 1951.

[9] *Бесов О.В.* О некоторых условиях принадлежности к L_p производных периодических функций // Научные доклады высшей школы, физ.-матем. н. –1959.-1 С.13-17.

[10] *Тиман М.Ф.* Аппроксимация и свойства периодических функций.-Киев: Наукова думка, 2009.-375с.

[11] *Тиман А.Ф.* Теория приближения функций действительного переменного.-М.: Физматгиз, 1960. – 624с.

[12] *Стороженко Э.А., Кротов В.Г., Освальд П.* Прямые и обратные теоремы типа Джексона в пространствах $L_p, 0 < p < 1$ // Матем.сб.-1975.-98, №3.-С.395-415.

[13] *Иванов В.И.* Прямые и обратные теоремы теории приближения в метрике L_p для $0 < p < 1$ // Матем.заметки-1975.-18, №5. –С.641-658.

[14] *Пичугов С.А.* Неравенства для тригонометрических полиномов в пространствах с интегральной метрикой // Укр. мат. журн. – 2011. – 63, №12.

[15] *Гаркави А.Л.* Теоремы о существовании элемента наилучшего приближения в пространствах типа (F) с интегральной метрикой // Матем. заметки- 1970.-8, №4.-С.583-594.

УДК 517.5

С. А. Пичугов
(Днепропетровский национальный университет железнодорожного транспорта им. акад. В. Лазаряна, Днепропетровск)

Обратные теоремы Джексона в пространствах с интегральной метрикой

В пространствах $L_{\psi}(\mathrm{T})$ периодических функций с метрикой $\rho(f,0)_{\psi}=\int\limits_{\mathrm{T}}\psi(|f(x)|)dx$, где ψ - функция типа модуля непрерывности, исследуются обратные теоремы Джексона в случае аппроксимации тригонометрическими полиномами. Доказано, что обратная теорема Джексона имеет место тогда и только тогда, когда нижний показатель растяжения функции ψ не равен нулю.

УДК 517.5

С. А. Пичугов

(Днепропетровский национальный университет железнодорожного транспорта им. акад. В. Лазаряна, Днепропетровск)

Обратные теоремы Джексона в пространствах с интегральной метрикой

The problem to be considered is researches the converse of Jackson's theorem in the $L_\Psi(T)$ spaces of periodical functions with the metrics $\rho(f,0)_\Psi = \int_T \Psi(|f(x)|)dx$, where Ψ is a function of continuity module for the case of approximation by trigonometrical functions. It is proved that converse of Jackson's theorem will be truth if and only if the inferior index of function Ψ extension is not equal to zero.