

Банніков Д.О., к.т.н., доц. (Дніпропетровський національний університет залізничного транспорту імені академіка В. Лазаряна)

КОНТИНУАЛЬНА МОДЕЛЬ ТИСКУ СИПУЧОГО МАТЕРІАЛУ В ЗАМКНЕНІЙ ЄМНІСНІЙ КОНСТРУКЦІЇ

В статті наведена авторська математична модель тиску сипучого матеріалу в замкненій ємнісній конструкції. Модель побудована на континуальних уявленнях про сипучу речовину та дозволяє отримати диференціальне рівняння її рівноваги.

In the paper the author's mathematical model of granular material pressure in a closed capacity structure are presented. The model was founded on the base of continual imaginations as for a granular material and permits to obtain the differential equation of its equilibrium.

Вступні зауваження. Різні види сипучих матеріалів використовуються дуже широко як в багатьох сферах сучасної промисловості, так і в сільському господарстві. Для їх переробки застосовується ціла низка різноманітних конструкцій, машин та механізмів, які допомагають виконувати всю необхідну сукупність технологічних операцій, починаючи з видобутку сипучої речовини, її транспортування та закінчуючи ліквідацією накопичених відходів.

Одним з видів будівельних конструкцій, задіяних практично у всіх технологічних циклах, пов'язаних із сипучими матеріалами, є ємнісні конструкції. Вони призначені для зберігання сипучої речовини протягом певного відрізка часу, іноді, навіть, досить великого. Тому їх надійна та довговічна робота виявляється суттєво необхідною для тривалого та безперебійного функціонування будь-якого підприємства чи господарства.

На жаль, як свідчить накопичений за минуле сторіччя досвід проектування та експлуатації ємнісних конструкцій, вони незалежно від матеріалу виготовлення зазнають відмов та аварій [1, 2]. Причому така ситуація не обходить і закордонних фахівців [3]. Більш детальний аналіз основних видів та причин виникнення різноманітних аварійних ситуацій в ємнісних конструкціях, виконаний автором із використанням наявної доступної літератури з цього питання, представлений в узагальнюючій публікації [4].

Як свідчать накопичені статистичні дані, однією із вагомих причин руйнування ємнісних споруд виявляється невірне визначення навантаження від сипучого матеріалу на елементи конструкції. При цьому використовуються підходи, які є явно консервативними та не враховують більшості сучасних надбань та розробок науковців. Саме на таку проблему було акцентовано

увагу автором в його роботі [5], де зазначені основні напрямки підвищення експлуатаційних якостей ємнісних конструкцій.

Існуючі теоретичні моделі сипучої речовини. Аналіз поведінки сипучої речовини в замкненому сосуді являє собою доволі складну задачу. Така поведінка суттєво та принципово відрізняється від поведінки тієї ж самої сипучої речовини в умовно нескінченному півпросторі, тобто, як кажуть фахівці, в необмеженому ґрунтовому масиві. До того ж, часткове обмеження деформацій сипучої речовини, як наприклад у випадку встановлення підпірної стінки, також виявляється підпорядкованим зовсім іншим закономірностям.

Тому домінуюча на сьогодні концепція дослідження сипучої середи передбачає окремий незалежний розгляд кожної із можливих задач - вивчення особливостей фізико-механічних характеристик сипучих матеріалів, їх залежності від впливу різноманітних зовнішніх факторів, напружено-деформованого стану всередині та на поверхні сипучої речовини, її тиску на підпірну стіну, опору сипучої основи елементам фундаменту і т.д. Задача вивчення поведінки сипучої речовини в замкненому просторі, який обумовлений формою ємнісної конструкції, також виявляється окремим напрямком досліджень, який нерідко оперує своїми власними термінами та припущеннями.

Дослідження цього питання із самого початку пішло двома напрямками – теоретичним і експериментальним. Вони проводились відносно незалежно один від одного, але надаючи друг другу нові дані для уточнень та коректувань.

Може показатися дивним, але найперша теоретична модель, запропонована в 1895 р. Г.А. Янсеним, виявилась настільки простою та вдалою, що без принципових змін використовується й дотепер. Вона стала вже майже класичною, адже наводиться в багатьох сучасних роботах (див., наприклад, [2]). Навіть вітчизняними нормативними документами ця модель вважається за основну, яку слід використовувати при проектуванні [6].

Проте розраховані за цією моделлю ємнісні споруди не завжди виявлялися надійними. Велика кількість проведених експериментальних досліджень (більшість їх зібрано та проаналізовано в роботі [7]) наявно свідчила про неадекватність цієї моделі дійсній картині. Однак, ця неадекватність проявлялася лише у деяких випадках, а в інших – теоретичні й експериментальні дані майже збігалися.

Закордонними фахівцями було запропоновано ряд інших теоретичних моделей, найбільш відомі та вдалі з яких наведено в довіднику [3], проте всі вони давали майже таку саму картину відповідності наявним експериментальним результатам, як і модель Г.А. Янсена. Тому було вирішено вважати цю модель в якості основної, доповнивши її емпіричним поправочним коефіцієнтом, який призначається диференційовано для кожного із сипучих матеріалів.

Щодо вітчизняних досліджень у сфері вивчення сипучої речовини в замкненому сосуді, то достатньо цікавою та новою виявився підхід, запропонований Л.В. Гячевим в його роботі [8]. В основу його моделі була покладена, фактично, модель Г.А. Янсена – розгляд плоского елементарного шару сипучої речовини – який, однак, знаходився у рівновазі не тільки під час статичного спокою, а й під час руху сипучого матеріалу при його вивантаженні з ємності.

Така модель була покликана об'єднати статичну й динамічну поведінки сипучого матеріалу, що безумовно дозволило по-новому подивитись на розглядувану задачу. Проте, цей підхід все ж таки не є досконалим та має певну низку суттєвих недоліків.

Так, по-перше, якщо ємність має форму сосуду, що звужується донизу, то в цьому випадку плоский елементарний шар сипучої речовини, як сам і констатує автор, по мірі руху має стискатися доки не стане точкою. Однак, це неможливо на практиці і вимагає внесення в модель відповідних корегуючих моментів. Тому модель може бути справедлива лише для ємності із вертикальними бічними стінками (ємність силосного типу).

По-друге, як справедливо відмічено в роботі [9], навіть, у випадку силосної ємності отримані вирази не можна вважати абсолютно вірними, оскільки вони вказують на нескінченний ріст тиску сипучого матеріалу при зменшенні розмірів його зерен, чого не спостерігається в практиці. На думку автора даної публікації, це пов'язано з тим, що під час руху сипучого матеріалу проходить корінна зміна його структури порівняно із статичним станом. Тому все ж таки статичний й динамічний стан сипучої речовини треба розглядати з різних позицій.

Зважаючи на вищесказане, питання розробки та впровадження адекватної теоретичної моделі сипучої речовини для замкненого простору є до кінця не вирішеним та потребує продовження досліджень. Саме розробка більш досконалої та внутрішньо непротивічливої теоретичної моделі для даного випадку і є метою авторської роботи, результати якої наведені далі у публікації.

Континуальна модель сипучої речовини. При розробці власної теоретичної моделі поведінки сипучої речовини у замкненому сосуді автор виходив із наступних положень.

По-перше, модель має бути спрямована на опис статичного стану сипучого матеріалу, як найбільш розповсюдженого. Динамічна поведінка має бути розглянута окремо.

По-друге, модель має бути побудована на врахуванні континуальних властивостей сипучого матеріалу, адже це дає змогу використовувати співвідношення механіки сплошної середи.

По-третє, оскільки сипуча речовина за своєю природою є дуальною (проявляє властивості як континуальної, так і дискретної середи), то в моделі має бути передбачена можливість для врахування цієї особливості.

Приймаючи ці три положення до уваги, автором була запропонована наступна континуальна модель сипучої речовини (рис. 1).

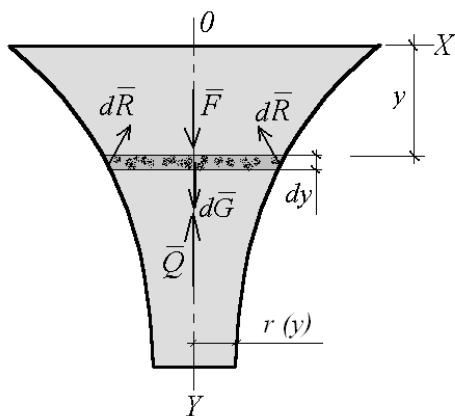


Рис. 1. Авторська континуальна модель сипучої речовини.

Модель являє собою сипучу речовину, розташовану у ємнісній конструкції. Координатні вісі спрямовані так, як зображено на рис. 1. На відміну від моделі Г.А. Янсена стінки ємності не є вертикальними, а мають довільну форму, яка визначається залежністю $r(y)$. Із масиву сипучої речовини двома горизонтальними паралельними площинами виділяється елементарний шар завтовшки dy . На відміну від моделі Л.В. Гячева, де сипучий матеріал рівноприскорено рухається, в даній моделі шар знаходиться у статичній рівновазі разом із усією масою сипучого матеріалу.

Розглянемо сили, що діють на елементарний шар. Зверху вертикально вниз спрямоване зусилля від ваги вищерозташованої маси сипучої речовини, позначене як F . Знизу на елементарний шар діє реакція від нижчерозташованого сипучого матеріалу – Q . Сам шар має власну вагу dG , спрямовану вертикально вниз. З боку стінок ємності на елементарний шар діє реакція dR , спрямована під довільним кутом. Вона може бути представлена у вигляді векторної суми нормальної dR_n та дотичної dR_τ складових реакції, відповідно до рис. 2.

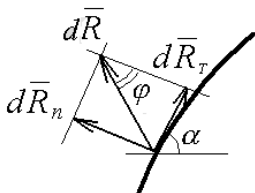


Рис. 2. Розклад реакції стінки ємності.

В довільній точці стінка має кут нахилу до горизонту α , який є функцією від форми стінки $r(y)$. Кут φ є кутом зовнішнього тертя сипучого матеріалу о матеріал стінки ємності.

Спроектуємо всі діючі сили на вертикальну вісь OY . Оскільки елементарний шар знаходиться в рівновазі, то сума проєкцій цих сила має дорівнювати нулю. Отримаємо вираз (1):

$$\sum Y = F + dG - \sum dR_{ny} - \sum dR_y - Q = 0. \quad (1)$$

Розглянемо кожну із складових, що входять до цього виразу, більш детально. Реакція від нижче розташованої маси сипучого матеріалу може бути записана у вигляді виразу (2), а вага елементарного шару у вигляді виразу (3):

$$Q = F + dF, \quad (2)$$

$$dG = g \cdot dm = g \cdot \gamma \cdot A \cdot dy, \quad (3)$$

де g – прискорення вільного падіння, dm – маса елементарного шару завтовшки dy , γ – щільність сипучого матеріалу, A – площа елементарного шару.

Найбільш невизначеними складовими рівняння (1) є проєкції реакцій стінки. Їх виникнення обумовлено передачею частини ваги від вищерозташованої маси сипучого матеріалу F на стінки ємності. Тому логічно припустити, що кожна з реакцій пропорційна цій масі. Тому вони можуть бути записані у вигляді виразів (4) і (5), в яких використано поки що невідомі коефіцієнти пропорційності k_n і k_τ запропоновані автором:

$$\sum dR_n = k_n \cdot F \cdot dy, \quad (4)$$

$$\sum dR_\tau = k_\tau \cdot F \cdot dy. \quad (5)$$

Знак суми необхідно вводити для того, щоб показати, що реакції стінок мають бути зібрані по периметру ємності (елементарного шару). Якщо далі використати відому залежність Кулона, то вираз (5) може бути записаний у вигляді (6):

$$\sum dR_\tau = tg\varphi \cdot \sum dR_n = k_n \cdot F \cdot tg\varphi \cdot dy. \quad (6)$$

Отримані вирази (2) – (4) і (6) підставимо в рівняння (1). Воно прийме вигляд (7):

$$F + g \cdot \gamma \cdot A \cdot dy - k_n \cdot F \cdot dy \cdot \cos \alpha - k_n \cdot F \cdot dy \cdot \sin \alpha \cdot \operatorname{tg} \varphi - F - dF = 0. \quad (7)$$

Після алгебраїчних перетворень рівняння може бути записано у вигляді (8):

$$\frac{dF}{dy} + F \cdot k_n (\cos \alpha + \sin \alpha \cdot \operatorname{tg} \varphi) - \gamma \cdot g \cdot A = 0. \quad (8)$$

Тепер виконаємо перехід від зусиль до тиску сипучого матеріалу. Вертикальне зусилля F може бути представлено через вертикальний тиск P_ϵ згідно з виразом (9):

$$F = P_\epsilon \cdot A. \quad (9)$$

Тоді похідна може бути записана у вигляді виразу (10):

$$\frac{dF}{dy} = \frac{\partial P_\epsilon}{\partial y} \cdot A + P_\epsilon \cdot \frac{\partial A}{\partial y}. \quad (10)$$

В роботі [10] автором було розглянуто відповідні співвідношення, які зв'язують між собою площу горизонтального перерізу A ємності із функцією форми її бічної поверхні. При цьому для симетричної в плані ємності із кількістю сторін n в плані та шириною випускного отвору a_0 вираз має вигляд (11):

$$A = n \cdot \operatorname{tg}(\pi/n) \cdot C^2(y) = n \cdot \operatorname{tg}(\pi/n) \cdot (a_0 + r(y))^2. \quad (11)$$

Тоді часткова похідна від нього буде мати вигляд виразу (12):

$$\frac{\partial A}{\partial y} = 2 \cdot n \cdot \operatorname{tg}(\pi/n) \cdot (a_0 + r(y)) \cdot \frac{dr(y)}{dy}. \quad (12)$$

Оскільки функція тиску сипучого матеріалу P_ϵ залежить тільки від змінної y (глибини розташування від поверхні), то достатньо виправданим буде перехід від часткових похідних до повних відповідно до (13):

$$\frac{\partial P_{\epsilon}}{\partial y} = \frac{dP_{\epsilon}}{dy} \quad (13)$$

Підставимо вирази (9) – (13) в рівняння (8). Після відповідних алгебраїчних перетворень воно може бути записано у вигляді виразу (14):

$$\frac{dP_{\epsilon}}{dy} + P_{\epsilon} \left[k_n \frac{\cos(\alpha - \varphi)}{\cos \varphi} + \frac{2 \cdot \frac{dr(y)}{dy}}{a_0 + r(y)} \right] - \gamma \cdot g = 0 \quad (14)$$

Отримане рівняння є основним диференціальним рівнянням рівноваги сипучого матеріалу, що знаходиться в замкненій ємності із довільною геометричною формою бічної поверхні. Рівняння є достатньо універсальним в плані можливості врахування форми ємності, адже будь-яка з них може бути представлена у вигляді неперервної або, принаймні, кусково неперервної функції. Єдиним обмеженням є можливість його застосування тільки для двоякосиметричної в плані ємності. Будь-яка несиметрія потребує внесення коректив у вираз (11).

Диференціальне рівняння може бути записано у більш компактній формі (15), якщо замість виразу в дужках використати додаткову допоміжну функцію $f(y)$:

$$\frac{dP_{\epsilon}}{dy} + P_{\epsilon} \cdot f(y) - \gamma \cdot g = 0 \quad (15)$$

З математичної точки зору рівняння (15) є лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням першого порядку. Відомо його загальне рішення [11], яке в даному випадку буде мати вигляд (16), а інтеграл від допоміжної функції – вигляд (17):

$$P_{\epsilon}(y) = e^{-\int f(y) \cdot dy} \cdot (\gamma \cdot g \cdot e^{\int f(y) \cdot dy} \cdot dy + C), \quad (16)$$

$$\int f(y) \cdot dy = \int k_n \cdot \frac{\cos(\alpha - \varphi)}{\cos \varphi} \cdot dy + 2 \cdot \int \frac{\frac{dr(y)}{dy}}{a_0 + R(y)} \cdot dy \quad (17)$$

В ці обидва вирази входить єдиний невідомий параметр – коефіцієнт пропорційності k_n . Існують декілька різних підходів щодо його визначення. В

першому наближенні він може бути прийнятий із теорії В. Ренкіна, але більш точно має враховувати дискретні властивості матеріалу. Його знаходженню присвячені окремі авторські публікації.

Основні висновки. На основі розгляду континуальних властивостей сипучої речовини автором запропоновано власну нову математичну модель, яка здатна описувати поведінку широкого класу сипучих матеріалів в замкнених ємнісних конструкціях. Модель вільна від ряду недоліків існуючих підходів та зводиться до отримання і вирішення нескладного лінійного неоднорідного диференційного рівняння першого порядку, що має загальне рішення. Тому його практичне застосування не викликає серйозних утруднень.

Єдиним невизначеним параметром при цьому залишається коефіцієнт пропорційності між вертикальним та боковим тиском сипучого матеріалу. В першому наближенні в якості його може бути використаний коефіцієнт із теорії В. Ренкіна, який рекомендований у діючий вітчизняній нормативній літературі. Однак, більш точним буде отримання цього коефіцієнту на основі розгляду дискретних властивостей сипучої речовини, котра за своєю природою є дуальною.

Автором проводяться відповідні дослідження у вказаному напрямку, а отримані результати представлені у ряді його сучасних публікацій. Таким чином, комплексний дискретно-континуальний підхід дозволяє теоретично досить точно та адекватно відобразити основні природні особливості сипучого матеріалу, як природної речовини.

1. Беляев Б.И., Корниенко В.С. Причины аварий стальных конструкций и способы их устранения. – М.: Изд-во лит-ры по строит-ву, 1968. – 208 с. 2. Липницкий М.Е., Абрамович Ж.Р. Проектирование железобетонных бункеров и силосов. – Л.: Стройиздат, 1960. – 288с. 3. Structural Engineering Handbook / Edited by Edwin H. Gaylord, Jr., Charles N. Gaylord, James E. Stallmeyer. - 4th ed. - McGraw-Hill, 1997. – 624 p. 4. Банников Д.О., Казакевич М.И. Основные причины аварий жестких стальных бункеров и низких силосов // Металеві конструкції. - 2002. – Том 5, номер 1. – С. 59-66. 5. Банников Д.О., Казакевич М.И. Направления совершенствования современной концепции проектирования жестких стальных бункеров // Вісник ДНУЗТ. – Дніпропетровськ: вид-во ДНУЗТ. – 2003. - Вип. 1. – С. 130-136. 6. ДБН В.2.2-8-98. Підприємства, будівлі та споруди по зберіганню та переробці зерна. – Введ. 01.07.98. – Вид. офіц. - К.: Держбуд України, 1988. – 41 с. – Укр. та рос. мовами. 7. Клейн Г.К. Строительная механика сыпучих тел. – М.: Стройиздат, 1977. – 256 с. 8. Гячев Л.В. Основы теории бункеров. - Новосибирск: изд-во НГУ, 1992. – 312 с. 9. Семенов В.Ф. Бункеры и хранилища зерна: Учебное пособие. – Барнаул: изд-во АлтГТУ, 1999. – 221 с. 10. Банников Д.О. Снижение площади коррозионного износа стальных емкостных конструкций // Вісник ДНУЗТ. – Дніпропетровськ: Вид-во ДНУЗТ. - 2005. - Вип. 9.– С. 136-145. 11. Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров. Определения, теоремы, формулы: Пер. с англ. / Г. Корн, Т. Корн. Под общ. ред. И.Г. Абрамовича. – М.: Наука, 1970. – 720 с.