

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
УКРАЇНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
НАУКИ І ТЕХНОЛОГІЙ

Кафедра «Вищої математики»

ВИЩА МАТЕМАТИКА

ч.1. РЯДИ

Методичні рекомендації до самостійної роботи
для студентів всіх спеціальностей денної форми навчання
(бакалаврський рівень)

ЕЛЕКТРОННИЙ АНАЛОГ ДРУКОВАНОГО ВИДАННЯ

Дніпро – 2022

УДК 517.52
М 54

Укладач
О.О. Левкович, канд. фіз.-мат. наук

Рецензент
П.І. Когут, д-р фіз.-мат. наук (ДНУ)

Рекомендовано до друку МКФ КТС (протокол № 3 від 25.09.2022)
Зареєстровано НМВ УДУНТ (підстава №551 від 2022)

Вища математика. Ряди : методичні рекомендації до самостійної роботи для студентів всіх спеціальностей денної форми навчання (бакалаврський рівень) / уклад. О. О. Левкович; Укр. держ. ун-т науки і технологій. – Дніпро: УДУНТ, 2022. – 30 с.

У методичних рекомендаціях наведені приклади для самостійної підготовки до модульного контролю для студентів, що вивчають вищу математику на усіх спеціальностях. Теоретичні відомості, а також ряд докладних розробок типових прикладів.

Для студентів ступеня бакалавра всіх спеціальностей денної форми навчання.

Бібліогр.: 4 назв.

© Левкович О.О., укладання, 2022

© Укр. держ. ун-т науки і технологій, 2022

Зміст

РЯДИ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ	4
1. Числові ряди	4
2. Властивості числових рядів	5
3. Необхідна умова збіжності ряду	6
4. Достатні ознаки збіжності рядів з додатними членами	6
5. Знакозмінні ряди	8
6. Функціональні ряди	10
7. Степеневі ряди. Інтервал, радіус збіжності	12
8. Властивості степеневих рядів	13
9. Ряди Тейлора і Маклорена	14
10. Основні розвинення функцій в ряд Маклорена	17
11. Застосування степеневих рядів до наближених обчислень	18
12. Приклади	20
Рекомендована література	28

РЯДИ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

1. Числові ряди

Нехай дана довільна числова послідовність $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$.

Числовим рядом називається вираз $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$, який позначається символом $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. Числа $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ називаються членами ряду, u_n - його n -м (загальним) членом.

Ряд вважається заданим, якщо загальний член ряду визначено як функція його номера n : $u_n = f(n)$.

Сума. S_n перших n членів ряду називається його n -ю частковою сумою.

Розглянемо ряд $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \dots$.

Складемо послідовність часткових сум S_n цього ряду.

Зауважимо, що загальний член цього ряду можна записати таким чином:

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}.$$

$$\text{Тоді } S_1 = \frac{1}{1 \cdot 2} = 1 - \frac{1}{2}; S_2 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = 1 - \frac{1}{3}.$$

$$S_3 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{4}, \dots$$

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Звідси випливає, що границя послідовності часткових сум цього ряду дорівнює одиниці: $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{n+1}) = 1$

Для деяких рядів послідовність часткових сум прямує до певної границі, а для інших рядів така границя не існує.

Числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ називається збіжним, якщо існує скінченна границя S послідовності його часткових сум S_n при $n \rightarrow \infty$: $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$.

Границя S послідовності часткових сум збіжного ряду називається сумою ряду: $S = \sum_{n=1}^{\infty} S_n$.

Якщо послідовність часткових сум ряду не має границі, то ряд називається розбіжним.

Зрозуміло, що розбіжний ряд не має суми (перший ряд $S=1$, другий, третій розбігаються).

Геометричний ряд

Має вигляд: $a + aq + aq^2 + \dots + aq^n + \dots$

Цей ряд складено з членів геометричної прогресії: a - перший член прогресії, q - знаменник прогресії. Відомо, що сума n перших членів (n - а часткова сума) прогресії може бути обчислена за формулою: $S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q}$ (якщо $q \neq 1$).

1) Якщо $|q| < 1$, то $q^n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ і $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a}{1-q}$.

Таким чином при $|q| < 1$ геометричний ряд збігається і його сума дорівнює $S = \frac{a}{1-q}$.

2) Якщо $|q| > 1$, то $q^n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$ і $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$, тобто ряд є розбіжним.

3) $q = 1: a + a + a + \dots + a + \dots$; $S_n = na$; $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$

ряд є розбіжним.

4) $q = -1: a - a + a - a + \dots + (-1)^{n-1}a + \dots$; $S_n = \begin{cases} 0, & \text{якщо } n - \text{парне,} \\ a, & \text{якщо } n - \text{непарне.} \end{cases}$

Отже границя S_n не існує і ряд розбігається.

Остаточно, геометричний ряд збігається лише при $|q| < 1$ і розбігається якщо $|q| \geq 1$.

2. Властивості числових рядів

Теорема 1. Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ (2.1) збігається і має суму S , то

збігається і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} au_n$ (2.2), де a - задане число та його сума дорівнює aS .

Теорема 2. Якщо ряди (2.1) і $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ (2.3) збігаються і мають відповідно суми S і $\bar{S}$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ (2.4) також збігається і має суму $S + \bar{S}$.

Аналогічно, можна твердити, що збігається ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n - v_n)$ і його сума дорівнює $S - \bar{S}$.

Розглянемо такі два ряди:

$$u_1 + u_2 + \dots + u_{k-1} + u_k + u_{k+1} + \dots + u_n + \dots \quad (2.5)$$

$$u_{k+1} + \dots + u_n + \dots \quad (2.6)$$

Теорема 3. 1) Якщо збігається ряд (2.5), то збігається і ряд (2.6), який отримано з ряду (2.5) відкиданням скінченного числа k його перших членів.

2) Якщо збігається ряд (2.6), то збігається і ряд (2.5).

Терему 3 можна сформулювати так: відкидання скінченного числа перших членів ряду не впливає на його збіжність.

3. Необхідна умова збіжності ряду

Теорема. Якщо ряд $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$ збігається, то границя загального члена дорівнює нулю.

Наслідок. (достатня умова розбіжності ряду). Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$, то ряд розбігається.

Дійсно, якщо б ряд збігався, то за теоремою його загальний член повинен був би прямувати до 0, що суперечить умові.

Зазначимо, що умова $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ є лише необхідною для збіжності ряду, однак не є достатньою.

Це означає що існують розбіжні ряди, для котрих $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

Гармонічним рядом називають ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$

Для цього ряду границя загального члена дорівнює нулю

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Але можна довести, що гармонічний ряд розбігається.

4. Достатні ознаки збіжності рядів з додатними членами

Як ми знаємо, сумою ряду називається границя послідовності його часткових сум: $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$. Але знаходження цієї границі зв'язано з

великими труднощами. В таких випадках суму ряду знаходять приблизно, для чого замінюють її частковою сумою S_n з достатньо великим номером n . Але для цього треба бути певним, що даний ряд збігається. Збіжність або розбіжність ряду в багатьох випадках можна установити за допомогою так званих достатніх ознак.

Спочатку розглянемо достатні ознаки збіжності та розбіжності для рядів з додатними членами.

Розглянемо ряд з додатними членами $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $u_n > 0$.

Часткові суми ряду утворюють, очевидно, зростаючу послідовність:

$$S_1 < S_2 < \dots < S_n < \dots$$

Тут можливі два випадки:

1) Послідовність часткових сум необмежена. В цьому випадку

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$ і ряд розбігається.

2) Послідовність часткових сум обмежена зверху, тобто $S_n < C$, при будь-якому n . В цьому випадку послідовність часткових сум має границю і тому ряд збігається.

Таким чином, при доведенні того, що той або інший ряд збігається, достатньо установити тільки обмеженість послідовності його часткових сум.

Ознаки порівнянь

Теорема порівнянь. Нехай $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ – два ряди з додатними членами. Тоді:

1) Якщо $u_n \leq v_n$, $n = 1, 2, \dots$, то із збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ випливає збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, а із розбіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ випливає розбіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$.

2) Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = k \neq 0$, то обидва ряди збіжні або розбіжні одночасно.

При дослідженні рядів за допомогою ознак порівняння необхідно мати для порівняння ряди, про які відомо збігаються вони, чи розбігаються.

Ці ряди такі: 1). геометричний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} aq^n$, при $|q| < 1$ збігається, $|q| \geq 1$ - розбігається.

2) гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ – розбігається.

3) узагальнений гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ збіжний при $p > 1$ і

розбіжний при $p \leq 1$.

Ознака Даламбера

Теорема. Нехай існує границя $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$, тоді при $\ell < 1$ ряд збігається, а при $\ell > 1$ ряд розбігається, при $\ell = 1$ ряд може збігатися, або розбігатися.

Радикальна ознака Коші

Теорема. Якщо існує границя $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$ то при $\rho < 1$ ряд збігається, при $\rho > 1$ ряд розбігається, а при $\rho = 1$ визначити збіжність ряду по ознаці неможливо.

Інтегральна ознака Коші

Теорема. Нехай члени ряду з додатними членами $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$ (4.1) є значеннями при $x = 1, 2, \dots, n, \dots$ деякої функції $f(x) : u_1 = f(1);$

$u_2 = f(2), \dots, u_n = f(n), \dots$

Нехай функція $f(x)$ – додатна, неперервна і спадна на інтервалі $1 \leq x < \infty$.

Тоді: а) якщо $\int_1^{\infty} f(x) dx$ збігається, то збігається і ряд (4.1)

б) якщо $\int_1^{\infty} f(x) dx$ розбігається, то розбігається і ряд (4.1)

Питання для самоконтролю:

1. Що називається числовим рядом ?
2. Який ряд називається збіжним ?
3. Властивості числових рядів.
4. Необхідна умова збіжності ряду.
5. Достатні ознаки збіжності рядів з додатними членами.

5. Знакозмінні ряди

$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$, де u_n – дійсні числа будь-якого знака.

Приклад. $\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} - \frac{1}{8^2} + \dots + \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n^2} + \dots$

Спочатку розглянемо знакопереміжні ряди

$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots + (-1)^{n-1} u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$, де $u_n > 0$.

Для цих рядів має місце достатня ознака збіжності Лейбніца.

Ознака Лейбніца

Якщо в знакопереміжному ряді:

- 1) абсолютні величини членів спадають: $u_1 > u_2 > u_3 > \dots > u_n > \dots$
- 2) загальний член ряду прямує до нуля: $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, то ряд збігається,

причому його сума додатна і не перевищує першого члена ряду.

Абсолютно і умовно збіжні ряди

Розглянемо тепер загальний випадок знакозмінного ряду:

$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$, де числа $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ можуть бути як додатними, так і від'ємними.

Теорема. Якщо ряд, утворений із абсолютних величин членів даного ряду, збігається, що цей ряд також збігається.

Приклад: $\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{6^2} - \dots$ (5.1)

Утворимо ряд із абсолютних величин членів даного ряду:

$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$ Цей ряд є збіжним, тому що $p = 2 > 1$. Отже й наш ряд збігається.

Ознака збіжності знакозмінного ряду є достатньою, але не є необхідною. Це означає, що існують знакозмінні ряди, які є збіжними, хоча ряди, складені із абсолютних величин його членів, є розбіжними.

Розглянемо ряд $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{1}{n} - \dots$ (5.2)

Утворимо ряд із абсолютних величин членів цього ряду: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$.

Цей ряд є гармонічним і розбігається. Застосуємо ознаку Лейбніца до

знакопереміжного ряду:
$$\left. \begin{array}{l} 1) 1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \dots > \frac{1}{n} > \dots \\ 2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \end{array} \right\}, \text{ тобто ряд збігається.}$$

Таким чином ряди (5.1) і (5.2) збігаються по різному.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ називається абсолютно збіжним, якщо ряд, складений з абсолютних величин членів ряду $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$, збігається.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ називається умовно збіжним, якщо ряд, складений з абсолютних величин ряду $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$, розбігається, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ збігається.

Абсолютно збіжні ряди займають особливе місце, тому що на такі ряди переносяться основні властивості скінченних сум. Для абсолютно збіжних рядів справедливі такі арифметичні властивості:

- 1) Збіжність ряду не порушиться, якщо в ньому переставити доданки;
- 2) Збіжність ряду не порушиться через сполучення членів ряду;
- 3) Виконується розподільна властивість.

Для умовно збіжних рядів ці властивості не виконуються.

Питання для самоконтролю:

1. Які ряди називаються знакозмінні?
2. Ознака Лейбниця. Як вона формулюється ?

6. Функціональні ряди

Розглянемо функціональний ряд, тобто ряд, членами якого є функції змінної x :

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots \quad (6.1)$$

Функції $u_n(x)$ визначені і неперервні в деякому інтервалі, скінченному, або нескінченному.

Якщо в (6.1) зафіксувати $x = x_0$, то дістанемо числовий ряд :

$$u_1(x_0) + u_2(x_0) + \dots + u_n(x_0) + \dots \quad (6.2)$$

У випадку, коли ряд (6.2) збігається, x_0 називається точкою збіжності функціонального ряду (6.1). Множина усіх точок збіжності ряду (6.1) називається областю збіжності ряду; збіжність ряду в кожній точці області – поточною збіжністю.

Сума функціонального ряду є деякою функцією від x , визначеною в області збіжності ряду. Позначимо її $S(x)$. $S(x) = u_1(x) + \dots + u_n(x) + \dots$

Суму n перших членів ряду позначимо $S_n(x)$, а залишок ряду – через $R_n(x)$.

Якщо ряд збігається при деякому значенні x , то $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = S(x)$, а

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0.$$

Відомо, що сума скінченного числа неперервних функцій є функція неперервна і інтеграл від такої суми функцій дорівнює сумі інтегралів від цих функцій. Похідна суми скінченного числа диференційовних функцій дорівнює сумі їх похідних.

Чи переносяться ці властивості на суми нескінченного числа функцій, тобто на функціональні ряди?

Не завжди так.

Функціональний ряд (1) називається рівномірно збіжним в області D , якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ можна вказати число $N(\varepsilon)$ (яке залежить від ε і не залежить від x), таке що для $n > N(\varepsilon)$ виконується нерівність $|R_n(x)| < \varepsilon$ для усіх точок області D .

Для перевірки рівномірної збіжності частіше всього застосовується достатня ознака Вейєрштрасса.

Теорема. Якщо функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ визначений на деякому інтервалі (a, b) і існує збіжний числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ такий, що для всіх $x \in (a, b)$ справедлива нерівність $|u_n(x)| \leq a_n$, то функціональний ряд збігається абсолютно і рівномірно на інтервалі (a, b) .

Властивості рівномірно збіжних рядів

Теорема 1. Якщо функції $u_n(x)$ неперервні в точці $x_0 \in D$ і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ рівномірно збігається в області D , то його сума $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ також неперервна в точці x_0 .

Теорема 2. Якщо ряд з неперервних функцій рівномірно збігається, то інтеграл від суми ряду дорівнює сумі ряду, складеного з інтегралів від цих функцій

$$\int_a^b S(x) dx = \int_a^b u_1(x) dx + \dots + \int_a^b u_n(x) dx + \dots \quad (\text{Зрозуміло, що інтервал інтегрування } [a, b] \text{ належить області рівномірної збіжності ряду}).$$

Теорема 3. Нехай ряд $u_1(x) + \dots + u_n(x) + \dots$, складений з неперервно диференційних функцій, збігається в області D і його сума дорівнює $S(x)$, а ряд, складений з похідних $u'_n(x)$ рівномірно збігається в області D , тоді $S'(x) = u'_1(x) + u'_2(x) + \dots + u'_n(x) + \dots$

Питання для самоконтролю:

1. Які ряди називаються функціональними?
2. Який ряд називається рівномірно збіжним рядом?
3. Властивості рівномірно збіжних рядів.

7. Степеневі ряди. Інтервал, радіус збіжності

Степеневим рядом називається функціональний ряд вигляду:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots, \quad (7.1)$$

де $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ – сталі, дійсні числа – коефіцієнти ряду.

Часткові суми ряду (7.1) є поліноми і цей ряд завжди збігається в точці $x = 0$.

Областю збіжності степеневого ряду завжди є деякий інтервал, який зокрема може вироджуватися в точку.

Множина всіх точок збіжності ряду (7.1) має цілком визначену структуру й виражається наступною теоремою.

Теорема Абеля: 1) Якщо степеневий ряд збігається в деякій точці $x = x_0 \neq 0$, то він абсолютно збігається при всіх значеннях x , для яких $|x| < |x_0|$.
2) Якщо при $x = x_1$ степеневий ряд розбігається, то він розбігається в довільній точці x , такий що $|x| > |x_1|$.

Ця теорема дозволяє говорити про розміщення точок абсолютної збіжності та розбіжності степеневого ряду (7.1). Справді, якщо степеневий ряд (7.1) збіжний в точці $x_0 \neq 0$, то інтервал $(-|x_0|, |x_0|)$ заповнено точками абсолютної збіжності ряду.

Отже, існує таке число $0 < R < +\infty$, що при $|x| < R$ ряд (7.1) абсолютно збіжний, а при $|x| > R$ – розбіжний.

Областю збіжності степеневого ряду (7.1) є інтервал з центром у початку координат.

Інтервалом збіжності степеневого ряду (7.1) називається такий інтервал $(-R, R)$, що для довільної точки x , яка лежить всередині цього інтервалу, ряд абсолютно збігається, а для точок x , які знаходяться зовні його, ряд розбігається.

Число R називається радіусом збіжності степеневого ряду (7.1).

На кінцях інтервалу, тобто при $x = \pm R$, питання про збіжність ряду розв'язуються окремо для кожного конкретного ряду.

Зауважимо, що у деяких рядів інтервал збіжності вироджується у точку $x = 0$, ($R = 0$), у інших – інтервалом збіжності є вся числова пряма $(-\infty, +\infty)$, $R = +\infty$.

Для знаходження радіуса збіжності степеневого ряду (7.1) розглянемо ряд, складений із абсолютних величин членів даного ряду:

$$|a_0| + |a_1 x| + |a_2 x^2| + \dots + |a_n x^n| + \dots \quad (7.2)$$

Нехай існує границя $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = |x| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = |x| \cdot L$, ($x \neq 0$), де позначено $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$. Тоді в силу ознаки Даламбера ряд (7.2) буде збігатися, якщо $|x| \cdot L < 1$, тобто, якщо $|x| < \frac{1}{L}$, і розбігатися, якщо $|x| \cdot L > 1$, тобто, $|x| > \frac{1}{L}$.

Таким чином, степеневий ряд (7.1) збігається абсолютно при $|x| < \frac{1}{L}$ і розбігається при $|x| > \frac{1}{L}$. З попереднього випливає, що інтервал $\left(-\frac{1}{L}, \frac{1}{L}\right)$ є інтервалом абсолютної збіжності ряду (7.1), причому радіус збіжності знаходиться за формулою $R = \frac{1}{L} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$, де a_n і a_{n+1} – коефіцієнти відповідно n -го і $(n+1)$ -го членів ряду.

Якщо для визначення інтервалу збіжності ряду (7.1) скористатися ознакою Коші, то $R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$.

8. Властивості степеневих рядів

1. Степеневий ряд рівномірно збігається на кожному відрізку, який належить його інтервалу збіжності.

Доведення: Нехай R – радіус збіжності. Візьмемо довільне число $r \in (0, R)$ і розглянемо відрізок $[-r, r]$, який міститься в інтервалі $(-R, R)$. Для

$r \in (-R, R)$ числовий ряд з додатковими членами

$|a_0| + |a_1|r + |a_2|r^2 + \dots + |a_n|r^n + \dots$ збігається. Для всіх $x \in [-r, r]$ виконується оцінка $|a_n x^n| \leq |a_n| \cdot r^n$. В силу ознаки Вейєрштрасса степеневий ряд (7.1) рівномірно збігається на відрізку $[-r, r]$.

2. Сума степеневого ряду (7.1) неперервна на інтервалі збіжності.

Це твердження випливає із властивостей рівномірно збіжних функціональних рядів.

3. При інтегруванні або диференціюванні ряду (7.1) членами його радіус збіжності не змінюється.

Наприклад, при інтегруванні членами дістанемо ряд:

$$a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} + \dots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \dots$$

Знайдемо радіус збіжності цього ряду: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n-1} \cdot (n+1)}{n \cdot a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| = R$.

При диференціюванні ряду (7.1) членами дістанемо:

$$a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots + na_n x^{n-1} + \dots; \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{na_n}{(n+1)a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = R.$$

Тобто радіус збіжності отриманих рядів не змінюється

4. Формулу $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots = S(x)$ можна інтегрувати і диференціювати членами довільне число разів на інтервалі збіжності $(-R, R)$.

Ряди, одержані при цьому, мають той самий радіус збіжності, що й початковий ряд. Це впливає з попередніх властивостей степеневих та рівномірно збіжних рядів.

Ряди по степенях $(x - a)$.

Степеневим рядом називається також функціональний ряд вигляду

$$a_0 + a_1(x - a) + \dots + a_n(x - a)^n + \dots \quad (8.1)$$

Цей ряд є степеневий ряд по степенях $(x - a)$.

При $a = 0$ отримаємо ряд (7.1)

Для визначення області збіжності ряду (8.1) проведемо лінійну заміну змінної $x' = x - a$. Ця заміна дозволяє розглядати ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x'^n \quad (8.2)$$

дослідження збіжності якого еквівалентно дослідженню збіжності ряду (7.1).

Нехай R – радіус збіжності ряду (8.2), тобто ряд (8.2) збігається для $-R < x' < R$. Отже, ряд (8.1) буде збігатися для $-R < x - a < R$, або $-R + a < x < a + R$; $a - R < x < a + R$.

Інтервалом збіжності ряду (8.1) буде інтервал $(a - R, a + R)$ з центром в точці $x = a$. Всі властивості степеневого ряду, розташованого по степенях x , усередині інтервалу збіжності $(-R, R)$ повністю зберігаються для степеневого ряду, розташованого по степенях $(x - a)$, усередині інтервалу збіжності $(a - R, a + R)$.

9. Ряди Тейлора і Маклорена

Нехай функція $f(x)$ є сумою степеневого ряду.

$$f(x) = a_0 + a_1(x - a) + \dots + a_n(x - a)^n + \dots, \quad (9.1)$$

інтервал збіжності якого є $(a - R, a + R)$.

В цьому випадку кажуть, що функція $f(x)$ розвинена в степеневий ряд в околі точки a або по степенях $(x - a)$. Знайдемо коефіцієнти $a_0, a_1, \dots, a_n$ цього степеневого ряду.

Відомо що в інтервалі збіжності степеневий ряд можна почленно диференціювати, причому інтервал збіжності не змінюється. Будемо послідовно диференціювати тотожність (9.1). При цьому дістанемо тотожності, вірні для будь-якого x із інтервалу збіжності.

$$\begin{aligned} f'(x) &= a_1 + 2a_2(x-a) + 3a_3(x-a)^2 + \dots \\ &+ na_n(x-a)^{n-1} + (n+1)a_{n+1}(x-a)^n + \dots \\ f''(x) &= 1 \cdot 2 \cdot a_2 + 2 \cdot 3 \cdot a_3(x-a) + 3 \cdot 4a_4(x-a)^2 + \dots \\ &+ n(n-1)a_n(x-a)^{n-2} + (n+1)na_{n+1}(x-a)^{n-1} \dots \\ f'''(x) &= 1 \cdot 2 \cdot 3a_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4a_4(x-a) + \dots \\ &+ (n-2)(n-1)n(x-a)^{n-3} + (n-1)n(n+1)(x-a)^{n-2} + \dots \\ f^{(n)}(x) &= 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot na_n + 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n(n+1)a_{n+1}(x-a) + \dots \end{aligned}$$

Нехай $x = a$. Тоді з цих тотожностей випливає: $a_0 = f(a); a_1 = \frac{f'(a)}{1!};$
 $a_2 = \frac{f''(a)}{2!}, \dots, a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \dots$

Таким чином дістанемо:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \dots$$

Одержаний ряд $f(a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \dots$ називається рядом Тейлора для функції $f(x)$.

В окремому випадку при $a = 0$ ряд здобуває вигляд:

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

Цей ряд називається рядом Маклорена для функції $f(x)$.

Таким чином, якщо функція $f(x)$ розвивається в ряд по степенях $(x - a)$, то цей ряд є її рядом Тейлора (або Маклорена).

Поставимо обернену задачу. Задано довільну функцію $f(x)$. Які умови треба накласти на функцію $f(x)$, щоб її можна було розвинути в околі точки a в ряд Тейлора? Це такі умови: 1) функція $f(x)$ має бути визначена в околі точки a ; 2) в цьому околі функція має бути нескінченне число разів диференційовною.

Ці умови дають змогу побудувати ряд Тейлора (або Маклорена) функції $f(x)$: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$ і знайти для нього радіус збіжності R . Проте поставити знак рівності між функцією та її рядом не можна.

З'ясуємо, при яких умовах сума ряду Тейлора даної функції співпадає з функцією, для котрої його складено.

Розглянемо часткову суму ряду Тейлора:

$$S_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n.$$

Сума $S_n(x)$ називається

многочленом Тейлора степеня n .

Розглянемо різницю між функцією $f(x)$ і її многочленом Тейлора степеня n . Ця різниця називається залишком, або залишковим членом ряду Тейлора і позначається через $R_n(x)$: $R_n(x) = f(x) - S_n(x)$.

Тепер $f(x)$ можна записати у вигляді $f(x) = S_n(x) + R_n(x)$, або

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n + R_n(x).$$

Теорема. Для того, щоб ряд Тейлора збігався до функції $f(x)$ в інтервалі $(a-R, a+R)$, необхідно і достатньо, щоб в цьому інтервалі функція $f(x)$ мала похідні всіх порядків, а залишковий член її формули Тейлора прямував до нуля при $n \rightarrow \infty$ для всіх x з вказаного інтервалу: $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$.

Доведення. Необхідність. Нехай $f(x)$ - сума ряду Тейлора, тобто $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = f(x) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$.

Достатність. Нехай $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$. Тоді

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [f(x) - S_n(x)] = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = f(x) \Rightarrow f(x) \text{ є сума ряду.}$$

Тобто для дослідження питання про розвинення функції в ряд Тейлора треба дослідити поведінку його залишкового члена $R_n(x)$ при $n \rightarrow \infty$. Якщо

$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x_0) = 0$ для даного значення $x = x_0$, то сума ряду Тейлора дорівнює значенню функції в точці x_0 , тобто $f(x_0)$. Якщо ж $R_n(x_0)$ не прямує до нуля, то ряд Тейлора або розбігається, або його сума при $x = x_0$ не співпадає із значенням функції в точці x_0 .

Запропоновано ряд формул, що виражають $R_n(x)$ у явному скінченному вигляді через змінну x . До таких формул належить форма Лагранжа:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}, \text{ де } a < \xi < x.$$

10. Основні розвинення функцій в ряд Маклорена

1. Розвинення функції $y = e^x$ в ряд Маклорена

$$f(x) = e^x; f(0) = 1$$

$$f'(x) = e^x; f'(0) = 1...$$

Дістанемо ряд Маклорена:

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (10.1)$$

Знайдемо інтервал збіжності цього ряду:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+1} n!}{(n+1)! x^n} \right| = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0, \quad x \in (-\infty, \infty). \text{ Звідси випливає, що}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0, \text{ тобто } \frac{|x|^n}{n!} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty \text{ як загальний член збіжного ряду.}$$

Щоб установити, що цей ряд має своєю сумою функцію e^x , треба показати, що залишковий член $R_n(x) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Запишемо $R_n(x)$ в формі Лагранжа:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1} = \frac{e^\xi}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad 0 < \xi < x. \quad e^\xi < e^{|x|}, \text{ тому що } \xi < |x|.$$

$$R_n(x) < e^{|x|} \cdot \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

$$\text{Оскільки } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0, \text{ то звідси випливає, що } \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0 \text{ для будь-якого } x.$$

Тому сума ряду (10.1) співпадає з e^x :

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (-\infty < x < +\infty).$$

2. Розвинення функції $y = \sin x$ в ряд Маклорена.

$$f(x) = \sin x; f'(x) = \cos x; f''(x) = -\sin x; f'''(x) = -\cos x; \dots f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right), \dots$$

$$f(0) = 0; f'(0) = 1; f''(0) = 0; f'''(0) = -1; \dots$$

$$\text{Дістанемо ряд: } x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Ряд збігається на всій числовій осі.

$$R_n(x) = \frac{\sin\left(\xi + \frac{n\pi}{2}\right)}{(n+1)!} x^{n+1}; \left| \sin\left(\xi + \frac{n\pi}{2}\right) \right| \leq 1, |R_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \Rightarrow R_n(x) \rightarrow 0,$$

$n \rightarrow \infty$.

Тому

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots, x \in (-\infty, \infty).$$

Питання для самоконтролю:

1. Які ряди називаються степеневими?
2. Що таке інтервал та радіус збіжності?
3. Теорема Абеля.
4. Які ряди називаються рядом Тейлора та Маклорена?

11. Застосування степеневих рядів до наближених обчислень

Степеневі ряди мають різноманітні застосування. Зокрема, вони дозволяють з будь-якою заданою точністю обчислювати значення функцій, знаходити наближене значення визначених інтегралів, одержувати розв'язки диференціальних рівнянь тощо.

Наближене обчислення визначених інтегралів

Як відомо, багато практично важливих визначених інтегралів не можна обчислити безпосередньо за допомогою формули Ньютона-Лейбніца, оскільки її застосування пов'язано з відшукуванням первісної, яка часто не виражається через елементарні функції. Але якщо підінтегральна функція може бути розвинена в степеневий ряд, а межі інтегрування належать його інтервалу збіжності, то наближене обчислення визначеного інтеграла можна здійснити з наперед заданою точністю.

Приклад. Обчислити $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ з точністю до 10^{-4} . Розкладемо підінтегральну функцію в степеневий ряд, замінивши x на $(-x^2)$.

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + \dots \quad x \in R.$$

Проінтегруємо цей ряд на відрізку $[0,1]$:

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{-x^2} dx &= x - \frac{x^3}{3 \cdot 1!} + \frac{x^5}{2! \cdot 5} - \frac{x^7}{3! \cdot 7} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1) \cdot n!} + \dots \Big|_0^1 = \\ &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{4! \cdot 9} - \frac{1}{5! \cdot 11} + \frac{1}{6! \cdot 13} - \frac{1}{7! \cdot 15} + \dots \approx 0,7468 \end{aligned}$$

Похибка, яку ми допускаємо відкиданням всіх членів, не перевищує за абсолютною величиною першого із відкинутих членів (ознака Лейбніца).

Застосування рядів до розв'язання звичайних диференціальних рівнянь.

Шукатимемо розв'язок диференціального рівняння у вигляді ряду Тейлора. Сума скінченного числа членів цього ряду буде наближено дорівнювати шуканому частковому розв'язку.

Нехай треба знайти розв'язок диференціального рівняння другого порядку $y'' = F(x, y, y')$, який задовольняє початкові умови $y(x_0) = y_0$; $y'(x_0) = y'_0$.

Припустимо, що розв'язок $y = f(x)$ існує і може бути розвинений в ряд Тейлора.

$$y = f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots \\ + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \dots$$

Нам треба знайти $f(x_0)$, $f'(x_0)$, $f''(x_0)$,...

$$f(x_0) = y_0; \quad f'(x_0) = y'_0.$$

З диференціального рівняння дістанемо $f''(x_0) = y''(x_0) = F(x_0, y_0, y'_0)$.

Продиференціюємо диференціальне рівняння (1) по змінній x :

$y''' = F'_x(x, y, y') + F'_y(x, y, y') \cdot y' + F'_{y'}(x, y, y') \cdot y''$. Поклавши $x = x_0$ в праву частину, дістанемо

$$f'''(x_0) = y'''(x_0) = F'_x(x_0, y_0, y'_0) + F'_y(x_0, y_0, y'_0)y'_0 + F'_{y'}(x_0, y_0, y'_0) \cdot y''_0. \text{ І так далі.}$$

Знайдені значення похідних підставимо в ряд. Для тих значень x , для котрих цей ряд збігається, він є розв'язком диференціального рівняння.

Приклад: $y'' = -yx^2$; $y(0) = 1$; $y'(0) = 2$.

$$y = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \frac{y^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \dots$$

$$y''(0) = 0;$$

$$y'''(x) = -y'x^2 - y \cdot 2x; \quad y'''(0) = 0;$$

$$y^{(4)}(x) = -y''x^2 - y' \cdot 2x - y' \cdot 2x - 2y; \quad y^{(4)}(0) = -2, \dots$$

$$y = 1 + 2x - \frac{1}{12}x^4 + \dots - \text{шуканий розв'язок.}$$

12. Приклади

Приклад 1.

Перевірити, чи виконуються необхідні умови збіжності ряду:

$$\frac{1}{5} + \frac{2}{7} + \frac{3}{9} + \frac{4}{11} + \dots$$

Розв'язання

$$\frac{1}{5} + \frac{2}{7} + \frac{3}{9} + \frac{4}{11} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+3};$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+3} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n} = \frac{1}{2} \neq 0;$$

$\Rightarrow$ необхідні умови збіжності ряду не виконуються

$\Rightarrow$ ряд не збігається

Приклад 2.

Перевірити, чи виконуються необхідні умови збіжності ряду:

$$\frac{2}{1} + \frac{4}{3} + \frac{6}{9} + \frac{8}{27} + \dots$$

Розв'язання

$$\frac{2}{1} + \frac{4}{3} + \frac{6}{9} + \frac{8}{27} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3^{n-1}};$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{3^{n-1}} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)'}{(3^{n-1})'} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{3^{n-1} \ln 3} = \left\{ \frac{2}{\infty} \right\} = 0$$

$\Rightarrow$ необхідні умови збіжності ряду виконуються

Приклад 3.

Дослідити на збіжність ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3^{n-1}}$$

Розв'язання

Перевіряємо за ознакою Даламбера:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n+1)}{3^{(n+1)-1}} : \frac{2n}{3^{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+2) \cdot 3^{n-1}}{3^n \cdot 2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+2}{3 \cdot 2n} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+2}{6n} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{6n} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} < 1$$

$\Rightarrow$ ряд збігається

Приклад 4.

Дослідити на збіжність ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n+2}}{4n+1}$$

Розв'язання

Перевіряємо за ознакою Даламбера:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^{n+3}}{4(n+1)+1} : \frac{5^{n+2}}{4n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^{n+3} \cdot (4n+1)}{(4n+5) \cdot 5^{n+2}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5(4n+1)}{4n+5} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{20n}{4n} = 5 > 1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ ряд не збігається

Приклад 5.

Дослідити на збіжність ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{(2n+3)!}$$

Розв'язання

Перевіряємо за ознакою Даламбера:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^{n+1}}{(2(n+1)+3)!} : \frac{4^n}{(2n+3)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^{n+1}(2n+3)!}{(2n+5)! \cdot 4^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{(2n+5) \cdot (2n+4)} = \left\{ \frac{4}{\infty} \right\} = 0 < 1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ ряд збігається

Приклад 6.

Дослідити на збіжність ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{7n}{2n+5} \right)^{3n}$$

Розв'язання

За радикальною ознакою Коші:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{7n}{2n+5} \right)^{3n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{7n}{2n+5} \right)^3 = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{7n}{2n} \right)^3 = \frac{7^3}{2^3} = \frac{343}{8} > 1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ ряд не збігається

Приклад 7.

Дослідити на збіжність ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^{2n}} \cdot \left(\frac{n+3}{n} \right)^{3n}$$

Розв'язання

За радикальною ознакою Коші:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{4^{2n}} \cdot \left(\frac{n+3}{n}\right)^{3n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4^2} \cdot \left(\frac{n+3}{n}\right)^3 = \\ &= \frac{1}{16} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+3}{n}\right)^3 = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \frac{1}{16} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n}\right)^3 = \frac{1}{16} < 1\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ ряд збігається

Приклад 8.

Дослідити на збіжність ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \cdot \ln(n+1)}$$

Розв'язання

За інтегральною ознакою Коші:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{(n+1) \cdot \ln(n+1)} dn = \left\{ \begin{array}{l} \ln(n+1) = t \\ \frac{1}{n+1} dn = dt \\ \text{при } n=1; \quad t = \ln 2 \\ \text{при } n=+\infty; \quad t = +\infty \end{array} \right\} =$$

$$\int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{dt}{t} = \ln|t| \Big|_{\ln 2}^{+\infty} = \ln(+\infty) - \ln(\ln 2) = +\infty$$

$\Rightarrow$ ряд не збігається

Приклад 9.

Дослідити на збіжність ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$$

Розв'язання

За інтегральною ознакою Коші:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dn}{n^2 + 1} = \operatorname{arctg} n \Big|_1^{+\infty} = \operatorname{arctg} (+\infty) - \operatorname{arctg} (1) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

$\Rightarrow$ ряд збігається

Приклад 10.

Дослідити на збіжність ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2 + 4}$$

Розв'язання

$$\frac{\sin^2 n}{n^2 + 4} \leq \frac{1}{n^2 + 4} < \frac{1}{n^2}$$

Так як $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ – це узагальнений гармонічний ряд, при $\alpha=2>1$ він збігається. Внаслідок чого по I ознаці порівняння, первинний ряд також збігається.

Приклад 11.

Дослідити на збіжність ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + 4}{(n^3 + 1) \cdot n \cdot (n + 2)^4}$$

Розв'язання

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + 4}{(n^3 + 1) \cdot n \cdot (n + 2)^4} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^8} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^7}$$

Це є узагальнений гармонічний ряд, при $\alpha=7>1$ він збігається. А так як цей ряд еквівалентний первинному ряду, то і первинний ряд також збігається по II ознаці порівняння.

Приклад 12.

Дослідити на збіжність ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n + 5}{6n^4 - 1}}$$

Розв'язання

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n + 5}{6n^4 - 1}} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n}{6n^4}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{n^3}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$$

Це є узагальнений гармонічний ряд, при $\alpha=3/2>1$ він збігається. Первинний ряд також збігається по II ознаці порівняння.

Приклад 13.

Дослідити на збіжність ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n + 2) \cdot \sin \frac{\pi}{3^n}$$

Розв'язання:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n+2) \cdot \sin \frac{\pi}{3^n} \sim \sum_{n=1}^{\infty} (n+2) \cdot \frac{\pi}{3^n}$$

За ознакою Даламбера:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+3) \cdot \pi}{3^{n+1}} : \frac{(n+2) \cdot \pi}{3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+3) \cdot \pi \cdot 3^n}{3^{n+1} \cdot (n+2) \cdot \pi} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+3}{3(n+2)} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{3n} = \frac{1}{3} < 1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ ряд збігається

$\Rightarrow$ первинний ряд також збігається по II ознаці порівняння

Приклад 14.

Дослідити на збіжність ряд:

$$\frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{3^5} + \dots$$

Розв'язання

$$\frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{3^5} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3^{n+1}}$$

Розглянемо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{3^{n+1}} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{n+1}}$$

За ознакою Даламбера:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3^{n+2}} : \frac{1}{3^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1}}{3^{n+2}} = \frac{1}{3} < 1$$

$\Rightarrow$ ряд збігається

$\Rightarrow$ первинний ряд збігається абсолютно

Приклад 15.

Дослідити на збіжність ряд:

$$\frac{1}{4} - \frac{2}{7} + \frac{3}{10} - \dots$$

Розв'язання:

$$\frac{1}{4} - \frac{2}{7} + \frac{3}{10} - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot n}{3n+1}$$

За ознакою Лейбніца:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{3n+1} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \frac{1}{3} \neq 0 - \text{не виконується}$$

$\Rightarrow$ первинний ряд не збігається.

Приклад 16.

Знайти інтервал збіжності степеневого ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{3^n \sqrt{n}}$$

Розв'язання

Розглянемо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(x-5)^n}{3^n \sqrt{n}} \right|$$

За ознакою Даламбера:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(x-5)^{n+1}}{3^{n+1} \sqrt{n+1}} : \frac{(x-5)^n}{3^n \sqrt{n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(x-5)^{n+1} 3^n \sqrt{n}}{3^{n+1} \sqrt{n+1} (x-5)^n} \right| = \\ &= |x-5| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{3\sqrt{n+1}} = \frac{|x-5|}{3} \end{aligned}$$

$$\frac{|x-5|}{3} < 1;$$

$$|x-5| < 3;$$

$$-3 < x-5 < 3;$$

$$2 < x < 8 \text{ - інтервал збіжності}$$

Перевіримо збіжність ряду на кінцях інтервалу:

При $x=2$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2-5)^n}{3^n \sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{3^n \sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

За ознакою Лейбніца:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\infty} = 0 \text{ - виконується}$$

$$2) \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n+1}}} = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} > 1, \forall n \text{ - виконується}$$

Отже, при $x=2$ ряд збігається.

При $x=8$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(8-5)^n}{3^n \sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{3^n \sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Це є узагальнений гармонічний ряд, $\alpha=1/2 < 1$, отже він розбігається в точці $x=8$.

Знайдемо радіус збіжності

$$R = \frac{|8-2|}{2} = 3$$

Відповідь: $x \in [2; 8)$; $R = 3$

Приклад 18.

Знайти інтервал збіжності степеневого ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n!}$$

Розв'язання

За ознакою Даламбера:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(x+3)^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{(x+3)^n}{n!} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(x+3)^{n+1} \cdot n!}{(n+1)! (x+3)^n} \right| = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x+3}{n+1} \right| = |x+3| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1; \quad \forall x \end{aligned}$$

Відповідь: $x \in (-\infty, +\infty)$; $R = \infty$ (радіус збіжності)

Приклад 19.

Знайти інтервал збіжності степеневого ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! \cdot x^n}{3^n}$$

Розв'язання

За ознакою Даламбера:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)! \cdot x^{n+1}}{3^{n+1}} : \frac{n! \cdot x^n}{3^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)! \cdot x^{n+1} \cdot 3^n}{3^{n+1} \cdot n! \cdot x^n} \right| = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1) \cdot x}{3} \right| = |x| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{3} = \infty > 1; \quad \forall x \neq 0 \end{aligned}$$

Відповідь: ряд збігається тільки в точці $x=0$; $R=0$ (радіус збіжності)

Приклад 20.

Знайти інтервал збіжності степеневого ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1} \cdot x^{2n}}{3n-1}$$

Розв'язання

За ознакою Даламбера:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2^n \cdot x^{2n+2}}{3(n+1)-1} : \frac{2^{n-1} \cdot x^{2n}}{3n-1} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2 \cdot x^2 \cdot (3n-1)}{3n+2} \right| = \\ &= 2x^2 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-1}{3n+2} = 2x^2 \end{aligned}$$

$$2x^2 < 1;$$

$$x^2 < \frac{1}{2};$$

$$|x| < \frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ - інтервал збіжності}$$

Перевіримо збіжність на кінцях інтервалу:

$$\text{При } x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n}}{3n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n}{3n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2(3n-1)}$$

Це є гармонічний ряд, він розбігається

$$\text{При } x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n}}{3n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2(3n-1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{6n-2} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Це є гармонічний ряд, він розбігається

$$\text{Відповідь: } x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right); \quad R = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

Рекомендована література

1. Овчинніков П.П. та інші. Вища математика, ч. 2, К.: Техніка, 2003.
2. Каплан И.А. Практические занятия по высшей математике. Ч1, Харьков, ХГУ, 1967. – 947 с.
3. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. Навч. посібник. К.: А.С.К., 2001. – 648 с.
4. Левкович О.О., Хорсева Л.Ю. Методичні вказівки до самостійної роботи з дисципліни «Вища математика» (розділ «Числові ряди. Властивості. Ознаки збіжності») для студентів галузі знань 07 «Управління та адміністрування» заочної форми навчання, 2018. – 10 с.

Виробничо-практичне видання

ВИЩА МАТЕМАТИКА. Ч.1 РЯДИ

Методичні рекомендації до самостійної роботи
для студентів всіх спеціальностей денної форми навчання
(бакалаврський рівень)

Редактор А. В. Безверхня
Комп'ютерна верстка В. В. Бердо

Підписано до друку 05.11.2022. Формат 60х84 $\frac{1}{16}$. Папір друк. Друк плоский.
Обл.-вид. арк. 1,70. Ум.друк.арк.1,68. Замовлення № 574

Український державний університет науки і технологій
49010, м. Дніпро, вул. Лазаряна,2

Редакційно-видавничий відділ УДУНТ

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи