УДК 517.5

С.А. Пичугов (Днепропетр. нац. ун-т ж.-д. трансп.)

НЕРАВЕНСТВА ТИПА НИКОЛЬСКОГО-СТЕЧКИНА ДЛЯ ПРИРАЩЕНИЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ В МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

У просторах $L_\Psi[0,2\pi]$ з метрикою $\rho(f,0)_\Psi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Psi(|f(x)|)dx$, де Ψ - функція типу модуля неперервності, досліджуються аналоги нерівностей Нікольського-Стечкіна для приростів та похідних тригонометричних поліномів.

In the spaces $L_\Psi[0,2\pi]$ with metric $\rho(f,0)_\Psi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Psi(|f(x)|)dx$, where Ψ - is function of the modulus-of-continuity type, we investigate the analogue of Nicholskii-Stechkin's inequalities for increase and derivative of trigonometric polynomials.

Введение. В пространствах $L_p[0,2\pi], 1\le p\le\infty$, для известного неравенства С. Н. Бернштейна для производных порядка $k, k=1,2,$, тригонометрических полиномов $T_n(x)$ порядка не выше n,

$$\|T_n^{(k)}\|_p \le n^k\|T_n\|_p, \tag{1}$$

есть различные обобщения и аналоги.

В частности, в [1] получены следующие точные неравенства:

$$\|T_n^{(k)}\|_p \le \left(\frac{n}{2}\right)^k \|\Delta^k_{\frac{\pi}{n}}T_n\|_p, \tag{2}$$

где $\Delta^k_h T_n(x) = T_n(x+h)-T_n(x), \Delta^k_h T_n(x) = \Delta_h(\Delta^{k-1}_h T_n(x))$- приращение $T_n(x)$ порядка k с шагом h, а в [2] доказано точное неравенство:

$$\|T_n^{(k)}\|_\infty \le \left(\frac{n}{2\sin\frac{nh}{2}}\right)^k \|\Delta^k_h T_n\|_\infty, \tag{3}$$

где $0<h<\frac{2\pi}{n}$.

Из (1) и (2) следует неравенство:

$$\omega_k\left(T_n,\frac{\pi}{n}\right)_p \le \left(\frac{\pi}{2}\right)^k \|\Delta^k_{\frac{\pi}{n}}T_n\|_p, \tag{4}$$

где

$$\omega_k(T_n,h)_p = \sup_{|t|\le h}\|\Delta^k_t T_n\|_p$$

- значение в точке h модуля непрерывности T_n порядка k. Для метрических пространств $L_p[0,2\pi], 0<p<1$ с метрикой

$$\rho(f,0)_p := \|f\|_p := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(x)|^p dx$$

аналог неравенства (1) доказан в [3,4] в виде

$$\|T_n^{(k)}\|_p \le (C_p n)^{kp}\|T_n\|_p, \tag{5}$$

а в [5] доказано неравенство (5) с константой $C_p = 1$, и в этом случае неравенство точное. В [6] получены аналоги неравенств (2), (4) в метрических пространствах $L_p[0, 2\pi], 0 < p < 1$, в следующем виде:

$$\|T_n^{(k)}\|_p \le (C_1(p)n)^{kp} \|\Delta^k_{\alpha_{n,p}} T_n\|_p, \tag{6}$$

$$\omega_k\left(T_n, \frac{2\pi}{n+1}\right) \le C_2(p) \|\Delta^k_{\beta_{n,p}} T_n\|_p, \tag{7}$$

где

$$\beta_{n,p} = \frac{2\pi}{2d_n^{(l)} + 1}, \quad d_n^{(l)} = n(l+1) - l, \quad l = \left[\frac{2}{p}\right], \tag{8}$$

$$\alpha_{n,p} = \frac{2\pi}{2d_s^{(l)} + 1}, \quad s = d_n^{(l)}. \tag{9}$$

Заметим, что величины $\alpha_{n,p}$ и $\beta_{n,p}$ имеют порядок $\frac{1}{n}$.

Мы докажем аналоги неравенств (6), (7) в метрических пространствах $L_\Psi[0, 2\pi]$. Пусть Ω - множество функций $\Psi : R^1_+ \to R^1_+$, являющихся модулями непрерывности,

$$\|T_n\|_\Psi := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Psi(|T_n(x)|)dx.$$

Для функции $\Psi \in \Omega$ поведение ее функции растяжения

$$M_\Psi(s) := \sup_{0<t<\infty} \frac{\Psi(st)}{\Psi(t)}, s \in R^1_+,$$

в случае $s \in [0, 1]$ характеризуется нижним показателем растяжения γ_Ψ, имеющим свойства [7]:

а) $\gamma_\Psi \in [0, 1]$;

б) $M_\Psi(s) \ge s^{\gamma_\Psi}, s \in [0, 1]$;

в) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists C_\varepsilon > 0, \ \forall s \in (0, 1]$:

$$M_\Psi(s) \le C_\varepsilon s^{\gamma_\Psi - \varepsilon}.$$

В [8] доказан следующий аналог неравенства С. Н. Бернштейна (5): если $\gamma_\Psi > 0$, то

$$C_3 M_\Psi(n^k) \le \sup_{T_n \ne 0} \frac{\|T_n^{(k)}\|_\Psi}{\|T_n\|_\Psi} \le C_4 M_\Psi(n^k), \tag{10}$$

где константы C_3, C_4 зависят от k и Ψ, но не зависят от n.

Докажем следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть $\Psi \in \Omega, \gamma_\Psi > 0, \ k, n = 1, 2, \ $. Тогда для всех тригонометрических полиномов $T_n(x)$ справедливы неравенства:*
для всех $h \in (0, \beta_{2n-1,\gamma_\Psi})$

$$\|\Delta^k_h T_n\|_\Psi \le C_5(k, \Psi) \|\Delta^k_{\beta_{2n-1,\gamma_\Psi}} T_n\|_\Psi, \tag{11}$$

$$\|T_n^{(k)}\|_\Psi \le C_6(k, \Psi) M_\Psi(n^k) \|\Delta^k_{\alpha_{2n-1,\gamma_\Psi}} T_n\|_\Psi, \tag{12}$$

где константы C_5, C_6 не зависят от n, а величины $\alpha_{n,p}$ и $\beta_{n,p}$ определены в (8), (9).

Доказательство. С помощью функции $\upsilon(s) : R \to R$, такой, что:

1) $\upsilon(s) = 1$ для $s \in [-1, 1]$; $\upsilon(s) = 0$ для $|s| \geq 2$;

2) $\upsilon(-s) = \upsilon(s)$;

3) $\upsilon \in C^{\infty}(R)$,

определим тригонометрический полином

$$V_n(x) := \sum_{|k|<2n} \upsilon\left(\frac{k}{n}\right) e^{ikx}$$

степени не выше $2n-1$, который является аналогом классических полиномов Валле Пуссена.

Для произвольного натурального $N, N \geq 3n$, построим на периоде $[0, 2\pi]$ систему равностоящих точек $x_j = 2\pi \frac{j}{N}, j = 1, ..., N$. Тогда для любого полинома T_n справедлива интерполяционная формула

$$T_n(x) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} T_n(x_j) V_n(x - x_j),$$

которая использовалась в [6,8] при доказательстве неравенств для полиномов.

Пусть $\tau_t : f(x) \to f(x+t)$ - оператор сдвига на параметр t, и A - произвольный линейный оператор, перестановочный с операторами сдвига τ_t, то есть $\tau_t A = A \tau_t$ для всех операторов τ_t . Тогда

$$\tau_t A T_n(x) = A \tau_t T_n(x) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} T_n(t + x_j) A V_n(x - x_j). \tag{13}$$

Пусть еще $A1 = 0$. Так как

$$\frac{1}{N} \sum_{j-1}^{N} V_n(x - x_j) = 1,$$

то с помощью преобразования Абеля из (13) получаем:

$$\tau_t A T_n(x) = -\Sigma_{j=1}^{N-1} \Delta_{x_1} T_n(t + x_j) A \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{j} V_n(x - x_j) \right). \tag{14}$$

Из определения функции растяжения следует, что $\Psi(st) \leq \Psi(s) M_\Psi(t)$.

Используя полуаддитивность функции Ψ, из (14) получим:

$$\Psi(|\tau_t A T_n(x)|) \leq \sum_{j=1}^{N-1} \Psi(|\Delta_{x_1} T_n(t + x_j)|) M_\Psi \left(\left| A \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{j} V_n(x - x_j) \right| \right).$$

Так как Ψ - метрика инвариантна относительно сдвигов, то

$$\|AT_n\|_\Psi = \frac{1}{2\pi} \int_{t=0}^{2\pi} \|\tau_t A T_n\|_\Psi dt \leq$$

$$\leq \|\Delta_{\frac{2\pi}{N}} T_n\|_\Psi \sum_{j=1}^{N-1} \frac{1}{2\pi} \int_{x=0}^{2\pi} M_\Psi \left(\left| A \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{j} V_n(x - x_j) \right| \right) dx. \qquad (15)$$

Это неравенство справедливо для всех $N, N \geq 3n$, и линейных операторов $A,\ A\tau_t = \tau_t A,\quad A1 = 0$.

Перейдем к доказательству неравенства (11). Ясно, что достаточно ограничится случаем $k = 1$.

Пусть в (15) $A = \Delta_h,\ \ h \in \left(0, \frac{2\pi}{N}\right)$. Тогда совокупность $\{(x - x_i + h, x - x_i), i = 1, ..., N\}$ является системой непересекающихся интервалов, поэтому $\forall x, \forall j, j \leq N - 1$,

$$\left| \Delta_h \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{j} V_n(x - x_i) \right| \leq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{j} |\Delta_h V_n(x - x_i)| \leq Var \left(\frac{1}{N} V_n \right) =$$

$$= \frac{1}{N} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |V_n\prime(s)| ds \leq \frac{2n-1}{N} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |V_n(s)| ds \leq K,$$

где константа K не зависит от n. Мы использовали неравенство С.Н. Бернштейна в $L_1[0, 2\pi]$ и равномерную ограниченность L_1-норм полиномов Валле Пуссена.

Так как $M_\Psi(st) \leq M_\Psi(s) M_\Psi(t)$, то

$$M_\Psi(K)^{-1} M_\Psi(|\Delta_h \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{j} V_n(x - x_i)|) \leq$$

$$\leq M_\Psi \left(\frac{1}{K} \left| \Delta_h \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{j} V_n(x - x_i) \right| \right), \qquad (16)$$

и аргумент M_Ψ в правой части не превосходит единицы.

По условию $\gamma_\Psi > 0$, поэтому $\forall \varepsilon, \varepsilon \in (0, \gamma_\Psi), \exists C_\varepsilon > 0$:

$$M_\Psi \left(\frac{1}{K} \left| \Delta_h \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{j} V_n(x - x_i) \right| \right) \leq C_\varepsilon \frac{1}{K^{\gamma_\Psi - \varepsilon}} \left| \Delta_h \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{j} V_n(x - x_i) \right|^{\gamma_\Psi - \varepsilon},$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M_\Psi \left(\left| \Delta_h \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{j} V_n(x - x_i) \right| \right) dx \leq$$

$$\leq C_\varepsilon \frac{M_\Psi(K)}{K^{\gamma_\Psi - \varepsilon}} \left\| \Delta_h \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{j} V_n(x - x_i) \right\|_{L_{\gamma_\Psi - \varepsilon}}. \qquad (17)$$

Теперь применим соответствующее L_p - неравенство (7) при $p = \gamma_\Psi - \varepsilon$.

Полагаем ε настолько малым, чтобы выполнялось равенство $\left[\frac{2}{\gamma_\Psi - \varepsilon}\right] = \left[\frac{2}{\gamma_\Psi}\right]$, и пусть $N = 2d_{2n-1}^{(l)} + 1,\ \ d_{2n-1}^{(l)} = (2n-1)(l+1) - l,\ \ l = \left[\frac{2}{\gamma_\Psi}\right]$. Заметим, что условие $N \geq 3n$ выполнено.

Тогда для всех $j \leq N - 1$,

$$\left\| \Delta_h \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{j} V_n(x - x_i) \right\|_{L_{\gamma_\Psi - \varepsilon}} \leq C_2(\gamma_\Psi - \varepsilon) \left\| \Delta_{x_1} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{j} V_n(x - x_i) \right\|_{L_{\gamma_\Psi - \varepsilon}} =$$

$$C_2(\gamma_\Psi-\varepsilon)\|\frac{1}{N}(V_n(x)-V_n(x-x_j))\|_{L_{\gamma_\Psi-\varepsilon}}\leq C_2(\gamma_\Psi-\varepsilon)\frac{2}{N^{\gamma_\Psi-\varepsilon}}\|V_n\|_{L_{\gamma_\Psi-\varepsilon}}. \quad (18)$$

Так как $\upsilon(s)\in C^\infty$, то для любого $\gamma_\Psi>0$ ([6,8])

$$\|V_n\|_{L_{\gamma_\Psi-\varepsilon}}\leq C(\gamma_\Psi,\varepsilon)n^{\gamma_\Psi-\varepsilon-1}. \quad (19)$$

Теперь из (15) - (19) следует, что

$$\frac{\|\Delta_h T_{n_\Psi}\|}{\|\Delta_{\beta_{2n-1,\gamma_\Psi}}\|_\Psi}\leq\sum_{j=1}^{N-1}C_\varepsilon\frac{M_\Psi(K)}{K^{\gamma_\Psi-\varepsilon}}C_2(\gamma_\Psi-\varepsilon)\frac{2}{N^{\gamma_\Psi-\varepsilon}}C(\gamma_\Psi,\varepsilon)n^{\gamma_\Psi-\varepsilon-1}\leq C_7(\gamma_\Psi).$$

Неравенство (7) доказано.

Докажем неравенство (12) при $k=1$. Пусть в (15) $A=D$ - оператор дифференцирования. Так как

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}M_\Psi\left(\left|D\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{j}V_n(x-x_i)\right|\right)dx\leq M_\Psi(N)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}M_\Psi\left(\left|D\frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{j}V_n(x-x_i)\right|\right)dx,$$

то достаточно доказать, что $\forall j\leq N-1$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}M_\Psi\left(\left|D\frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{j}V_n(x-x_i)\right|\right)dx\leq C_8(\Psi)\frac{1}{N}. \quad (20)$$

Из (2) при $k=1$ и $p=\infty$ следует, что

$$\left|D\frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{j}V_n(x-x_i)\right|\leq\frac{N}{2}\left\|\Delta_{x_1}\left(\frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{j}V_n(x-x_i)\right)\right\|_\infty\leq N\left\|\frac{V_n}{N^2}\right\|_\infty\leq C_9\frac{n}{N}\leq C_{10},$$

поэтому $\forall\varepsilon,\ \varepsilon\in(0,\gamma_\Psi),\ \exists C_\varepsilon$:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}M_\Psi\left(\left|D\frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{j}V_n(x-x_i)\right|\right)dx\leq$$

$$\leq C_\varepsilon M_\Psi(C_{10})\left\|\frac{1}{C_{10}}D\frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{j}V_n(x-x_i)\right\|_{L_{\gamma_\Psi-\varepsilon}}. \quad (21)$$

Используем неравенство(6) при $p=\gamma_\Psi-\varepsilon$ и положим $N=2d_s^{(l)}+1$ при $s=d_{2n-1}(l),l=\left[\frac{2}{\gamma_\Psi}\right]$. Тогда при достаточно малом ε

$$\left\|D\left(\frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{j}V_n(x-x_i)\right)\right\|_{L_{\gamma_\Psi-\varepsilon}}\leq C_1(\gamma_\Psi)(2n-1)^{\gamma_\Psi-\varepsilon}\left\|\Delta_{x_1}\left(\frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{j}V_n(x-x_i)\right)\right\|_{L_{\gamma_\Psi-\varepsilon}}\leq$$

$$\leq C_{11}(\gamma_\Psi)\frac{n^{\gamma_\Psi-\varepsilon}}{N^{2(\gamma_\Psi-\varepsilon)}}\|V_n\|_{L_{\gamma_\Psi-\varepsilon}}\leq$$

$$\leq C_{12}(\gamma_\Psi)\frac{n^{\gamma_\Psi-\varepsilon}}{N^{2(\gamma_\Psi-\varepsilon)}}n^{\gamma_\Psi-\varepsilon-1}<C_{12}(\gamma_\Psi)\frac{1}{n}. \quad (22)$$

Так как N имеет порядок роста n, то из (21), (22) следует(20).

В случае $k>1$ неравенство (12) доказывается аналогично; для этого к формуле (13) нужно применить преобразование Абеля k раз.

Список литературы

[1] *Никольський С. М.* Обобщение одного неравенства С. Н. Бернштейна // Докл. АН СССР. — 1948. — **60**, №9. — С. 1507-1510.

[2] *Стечкин С. Б.* Обобщение некоторых неравенств С. Н. Бернштейна // Докл. АН СССР. — 1948. — **60**, №9. — С. 1511-1514.

[3] *Иванов В. И.* Некоторые неравенства для тригонометрических полиномов и их производных в разных метриках // Мат. заметки. — 1975. — **18**, №4. — С. 489-498.

[4] *Стороженко Э. А., Кротов В. Г., Освальд П.* Прямые и обратные теоремы типа Джексона в пространствах $L_p, 0 < p < 1$ // Мат. сб. — 1975. — **98**, №3.— С. 395-415.

[5] *Арестов В. В.*О неравенствах С. Н. Бернштейна для алгебраических и тригонометрических полиномов // Докл. АН СССР. — 1979. — **246**, №6. — С. 1289-1292.

[6] *Руновский К.В.* О приближении семействами линейных полиномиальных операторов в пространствах $L_p, 0 < p < 1$ // Мат. сб. — 1994. — **185**, №8.— С. 81-102.

[7] *Крейн С.Г., Петунин Ю.И., Семенов Е.М.* Интерполяция линейных операторов.— М.: Наука,1978. — 400 с.

[8] *Пичугов С. А.* Неравенства для тригонометрических полиномов в пространствах с интегральной метрикой // Укр. мат. журн. — 2011. — **63**, №12. - С. 1657-1671.