

Математичне моделювання умов неідеального теплового контакту шарів через тонке включення з джерелами тепла

Богдан Гера

Д. т. н., професор, Центр математичного моделювання ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Дж. Дудасва, 15, Львів; Дніпропетровський національний університет залізничного транспорту імені академіка В. Лазаряна, Львівська філія, вул. І. Блажкевич, 12а, Львів, e-mail: gera@cmm.lviv.ua

Проведено математичне моделювання процесу теплообміну в кусково-неоднорідному шарі, що складається з однорідних шарів, у припущенні, що в зонах поблизу їх контакту діють джерела тепла, а також теплофізичні характеристики значно відрізняються від характеристик контактуючих шарів. Зона контакту подається як тонке включення між теплопровідними шарами, що є причиною термічного опору та підставою застосування умов неідеального теплообміну. Отримано та досліджено розв'язок задачі теплопровідності з використанням записаних умов неідеального теплообміну.

Ключові слова: неідеальні умови теплообміну, контактний термічний опір, шарувата структура, поверхневі джерела тепла, стрибок температури.

Вступ. Під час математичного моделювання умов теплової взаємодії контактуючих тіл у багатьох випадках застосовують умови неідеального контакту [1]. Моделювання таких умов передбачає відображення особливостей передачі тепла через шорсткі поверхні, з'єднання тіл через проміжні тонкі включення, які мають значно меншу теплопровідність, що призводить до локальних градієнтів температури. Якщо в зоні контакту є тепловиділення, то спостерігається також помітна зміна потоку тепла. Врахування таких ефектів можливе шляхом введення додаткових параметрів в умови теплообміну, що повинні забезпечити стрибок температури та теплового потоку у разі переходу через границю контакту.

Встановлювати значення параметрів, які входять в умови неідеального теплового контакту можна з розв'язків відповідних обернених задач [2, 3], а також досліджуючи тіла шаруватої структури, подаючи зону контакту як тонке проміжне включення між шарами [4]. Якщо включення створює теплоізолюючий ефект і значення його теплових характеристик, зокрема теплопровідності, суттєво відрізняються від характеристик контактуючих шарів, тоді у ньому спостерігається значний перепад температури, який у математичній моделі можна наближено подати функцією стрибка. Умови неідеального теплообміну отримуємо спрямувавши товщину включення до нуля, зберігаючи при цьому його вплив на передачу тепла, що досягається наявністю в умовах теплообміну контактного термічного опору.

Умови теплообміну можуть мати більш складний вигляд, якщо в області контакту відбуваються інші фізико-механічні чи хімічні процеси, що призводять, зокрема, до появи джерел тепла. Потужність джерел тепла потрібно оцінити та врахувати в умовах теплообміну. Це може призводити також до математичного моделювання взаємозв'язаних теплофізичних процесів. Таким чином отримуємо більш загальні умови теплового контакту, наприклад Барбера-Протасова [5]. Розв'язання задачі теплопровідності з такими умовами дає можливість отримати стрибок теплового потоку у разі переходу через границю контакту, що спостерігається експериментально та використано в роботах [5, 6].

У цій статті для задачі теплопровідності контактуючих через тонке включення шарів, у якому діють джерела (стоки) тепла, отримано умови неідеального теплообміну. У ці умови входять як термічні опори включення, так і питомі потужності джерел тепла, що дає змогу записати задачу теплопровідності без розгляду проміжного включення, але з умовами неідеального теплообміну. Їх використання забезпечує отримання спостережуваних особливостей температури та теплового потоку, а саме функції температури та теплового потоку зазнають стрибкоподібної зміни у разі переходу через поверхню контакту. Значення термічного опору пропонується визначати через більш звичні для вимірювання — коефіцієнт теплопровідності та товщину включення. Поверхневі питомі джерела тепла можна задати, якщо відомі величини тепловиділення на границі контакту. Отримано розв'язок задачі теплопровідності з неідеальними умовами теплообміну.

1. Теплообмін через тонке включення з джерелами тепла

Розглянемо кусково неоднорідний теплопровідний шар товщини L складений із двох шарів, що займають області $\Omega_1 = (0, z_1)$ та $\Omega_2 = (z_2, L)$, і контактують через тонке включення $\Omega' = (z_1, z_2)$. Щоб отримати різні варіанти неідеальних умов контакту, тонке включення вважається неоднорідним, тобто складається з двох прошарків $\Omega_3 = (z_1, z_*)$ й $\Omega_4 = (z_*, z_2)$, у яких діють джерела тепла різної потужності. За допомогою включення, теплофізичні характеристики якого відрізняються від характеристик основних шарів, моделюємо вплив поверхні розділу на особливості передачі тепла між частинами тіла.

Опишемо процес теплопровідності у шарі товщини L , якщо у включенні в області Ω_3 , починаючи з деякого моменту часу діють джерела тепла постійної потужності Q_3 , в області Ω_4 відповідно — Q_4 , а в основних його частинах Ω_1 та Ω_2 джерела тепла відсутні тобто $Q_1 = 0$, $Q_2 = 0$. На зовнішніх границях $z = 0$ і $z = L$ вважаємо відомими значення температури, а на внутрішніх — $z = z_1$, $z = z_*$ та $z = z_2$ для встановлення впливу прошарків на теплообмін між основними шарами приймаємо умови ідеального теплового контакту — рівність потоків тепла та температур з обох боків. Коефіцієнти теплопровідності та теплоємності для основних шарів і тонких включень позначатимемо як λ_i , c_i ($i = \overline{1,4}$).

Рівняння теплопровідності в областях Ω_i запишемо у вигляді

$$c_i \frac{\partial t_i(z, \tau)}{\partial \tau} - \lambda_i \frac{\partial^2 t_i(z, \tau)}{\partial z^2} = Q_i, \quad z \in \Omega_i \quad (i = \overline{1, 4}), \quad \tau > 0. \quad (1)$$

Тут $t_i(z, \tau)$ — функції температури $i = \overline{1, 4}$; z — координата; τ — час; Q_i — питомі потужності джерел тепла (при цьому $Q_1 = 0, Q_2 = 0$).

У початковий момент часу задано розподіл температури

$$t_i(z, 0) = \phi_i(z) \quad (i = \overline{1, 4}). \quad (2)$$

На границях $z = 0$ та $z = L$ відомі значення температури

$$t_1(0, \tau) = f_0, \quad t_2(L, \tau) = f_L. \quad (3)$$

На внутрішніх границях $z = z_1, z = z_*$ та $z = z_2$ запишемо умови ідеального теплового контакту:

$$\begin{aligned} \lambda_1 \frac{\partial t_1(z, \tau)}{\partial z} \Big|_{z=z_1} &= \lambda_3 \frac{\partial t_3(z, \tau)}{\partial z} \Big|_{z=z_1}, \quad t_1(z_1, \tau) = t_3(z_1, \tau), \\ \lambda_3 \frac{\partial t_3(z, \tau)}{\partial z} \Big|_{z=z_*} &= \lambda_4 \frac{\partial t_4(z, \tau)}{\partial z} \Big|_{z=z_*}, \quad t_3(z_*, \tau) = t_4(z_*, \tau), \\ \lambda_4 \frac{\partial t_4(z, \tau)}{\partial z} \Big|_{z=z_2} &= \lambda_2 \frac{\partial t_2(z, \tau)}{\partial z} \Big|_{z=z_2}, \quad t_4(z_2, \tau) = t_2(z_2, \tau). \end{aligned} \quad (4)$$

Зважаючи на малу товщину включення, скористаємося лінійними за товщиною наближеними поданнями його функцій температури $t_3(z, \tau), t_4(z, \tau)$ [4]. Враховуючи також при цьому дію джерел тепла, в області Ω_3 запишемо функцію температури у вигляді

$$t_3(z', \tau) = T_1'(\tau) + \frac{z'}{h} T_2'(\tau) - \frac{Q_3}{\lambda_3} \frac{z'^2}{2}, \quad (5)$$

де $T_1'(\tau)$ та $T_2'(\tau)$ — середня температура та температурний момент, а $z' = z - (z_1 + z_*)/2$ — змінена координата z , щоб початок відліку z' знаходився в середині відрізка $[z_1, z_*]$. Для визначення $T_1'(\tau)$ та $T_2'(\tau)$ використовуємо відомі формули [4]

$$T_1(\tau) = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} t(z, \tau) dz, \quad T_2 = \frac{12}{h^2} \int_{-h/2}^{h/2} t(z, \tau) z dz.$$

Тут $h \equiv h_3 = z_* - z_1$.

В області Ω_4 використаємо таке ж наближення функції температури

$$t_4(z'', \tau) = T_1''(\tau) + \frac{z''}{h} T_2''(\tau) - \frac{Q_4}{\lambda_4} \frac{z''^2}{2}, \quad (6)$$

де $T_1''(\tau)$ та $T_2''(\tau)$ мають аналогічний зміст для $h \equiv h_4 = z_2 - z_*$, а $z'' = z - (z_* + z_2)/2$. Останній доданок у формулах (5), (6) забезпечує виконання рівняння теплопровідності (1) із джерелами тепла. Підставимо вирази (5), (6) в умови (4) теплового контакту на внутрішніх поверхнях. Отримаємо для $z = z_1$:

$$t_1(z_1, \tau) = T_1'(\tau) - \frac{1}{2}T_2'(\tau) - \frac{Q_3}{\lambda_3} \frac{h_3^2}{8}; \quad \lambda_1 \frac{\partial t_1(z, \tau)}{\partial z} \Big|_{z=z_1} = \frac{\lambda_3}{h_3} T_2'(\tau) + \frac{Q_3 h_3}{2}; \quad (7)$$

для $z = z_*$:

$$T_1'(\tau) + \frac{1}{2}T_2'(\tau) - \frac{Q_3}{\lambda_3} \frac{h_3^2}{8} = T_1''(\tau) - \frac{1}{2}T_2''(\tau) - \frac{Q_4}{\lambda_4} \frac{h_4^2}{8},$$

$$\frac{\lambda_3}{h_3} T_2'(\tau) - \frac{Q_3 h_3}{2} = \frac{\lambda_4}{h_4} T_2''(\tau) + \frac{Q_4 h_4}{2}; \quad (8)$$

для $z = z_2$:

$$t_2(z_2, \tau) = T_1''(\tau) + \frac{1}{2}T_2''(\tau) - \frac{Q_4}{\lambda_4} \frac{h_4^2}{8}, \quad \lambda_2 \frac{\partial t_2(z, \tau)}{\partial z} \Big|_{z=z_2} = \frac{\lambda_3}{h_4} T_2'(\tau) - \frac{Q_4 h_4}{2}. \quad (9)$$

З умов (7)-(9) виключимо $T_1'(\tau)$, $T_2'(\tau)$, $T_1''(\tau)$ та $T_2''(\tau)$. Отримаємо дві умови

$$\lambda_1 \frac{\partial t_1(z, \tau)}{\partial z} \Big|_{z=z_1} - Q_3 h_3 = \lambda_2 \frac{\partial t_2(z, \tau)}{\partial z} \Big|_{z=z_2} + Q_4 h_4, \quad (10)$$

$$\frac{\lambda_1 h_3}{\lambda_3} \frac{\partial t_1(z, \tau)}{\partial z} \Big|_{z=z_1} + \frac{\lambda_2 h_4}{\lambda_4} \frac{\partial t_2(z, \tau)}{\partial z} \Big|_{z=z_2} = t_2(z_2, \tau) - t_1(z_1, \tau) + \frac{Q_3 h_3^2}{2\lambda_3} - \frac{Q_4 h_4^2}{2\lambda_4}. \quad (11)$$

Зауважимо, що з умов (7)-(9) також випливає, що різниця температур на границях включення $t_2(z_2, \tau) - t_1(z_1, \tau) = T_2'(\tau) + T_2''(\tau)$. За великих $T_2'(\tau)$ та $T_2''(\tau)$ перепад температур може бути достатньо відчутним на незначній відстані між $z = z_1$ та $z = z_2$.

Позначимо у співвідношеннях (10), (11) через $w_i = Q_i h_i$ ($i = 3, 4$) — питомі потужності джерел тепла, $R_i = h_i / \lambda_i$ ($i = 3, 4$) — контактні термічні опори. Запишемо умови теплового контакту, що враховують вплив включення на температуру, але не містять $t_3(z, \tau)$ та $t_4(z, \tau)$ у такому вигляді:

$$\lambda_1 \frac{\partial t_1(z, \tau)}{\partial z} \Big|_{z=z_1} - w_3 = \lambda_2 \frac{\partial t_2(z, \tau)}{\partial z} \Big|_{z=z_2} + w_4, \quad (12)$$

$$R_3 \lambda_1 \frac{\partial t_1(z, \tau)}{\partial z} \Big|_{z=z_1} + R_4 \lambda_2 \frac{\partial t_2(z, \tau)}{\partial z} \Big|_{z=z_2} = t_2(z_2, \tau) - t_1(z_1, \tau) + \frac{w_3 R_3}{2} - \frac{w_4 R_4}{2}. \quad (13)$$

Вони дозволяють замкнути задачу теплопровідності для основних шарів і визначати функції температури $t_1(z, \tau)$ та $t_2(z, \tau)$ з рівнянь (1) і умов (2), (3), (12), (13) не визначаючи температури у тонкому включенні. Вплив прошарку на температурне поле при цьому враховується через коефіцієнти контактного термічного опору R_3, R_4 в умові (13), а джерела тепла через w_3, w_4 .

Якщо нехтувати товщиною включення та спрямувати товщини $h_3 \rightarrow 0, h_4 \rightarrow 0$ ($z_1 \rightarrow z^*$ та $z_2 \rightarrow z^*$), залишивши в контактних умовах коефіцієнти R_3, R_4 , значення яких отримано з врахуванням характеристик включення, та w_3, w_4 , що визначаються через потужності внутрішніх джерел тепла, отримаємо умови, які називаються умовами неідеального теплообміну. Математична модель із використанням умов неідеального теплообміну не передбачає розгляду проміжних прошарків, а границею контакту вважається $z = z^*$.

2. Задача теплопровідності з неідеальними умовами теплообміну

Використаємо умови неідеального теплообміну для формулювання задачі теплопровідності двох контактуючих шарів $\Omega_1 = (0, z^*)$ та $\Omega_2 = (z^*, L)$. Позначимо через $t(z, \tau)$ функцію температури, $\lambda(z), c(z)$ — коефіцієнти теплопровідності та теплоємності у складеному шарі:

$$t(z, \tau) = \begin{cases} t_1(z, \tau), & z \in \Omega_1, \\ t_2(z, \tau), & z \in \Omega_2, \end{cases} \quad \lambda(z) = \begin{cases} \lambda_1, & z \in \Omega_1, \\ \lambda_2, & z \in \Omega_2, \end{cases} \quad c(z) = \begin{cases} c_1, & z \in \Omega_1, \\ c_2, & z \in \Omega_2. \end{cases}$$

Рівняння теплопровідності в області $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ запишемо у вигляді

$$c(z) \frac{\partial t(z, \tau)}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda(z) \frac{\partial t(z, \tau)}{\partial z} \right) = 0, \quad z \in \Omega, \quad \tau > 0. \quad (14)$$

Початкова умова

$$t(z, 0) = \phi(z), \quad z \in \Omega. \quad (15)$$

Умови на зовнішніх границях

$$t(0, \tau) = f_0, \quad t(L, \tau) = f_L. \quad (16)$$

Контактні умови (12), (13) для $z = z^*$ набувають вигляду

$$\lambda_1 \frac{\partial t_1(z, \tau)}{\partial z} \Big|_{z=z^*} - w_3 = \lambda_2 \frac{\partial t_2(z, \tau)}{\partial z} \Big|_{z=z^*} + w_4, \quad (17)$$

$$R_3 \lambda_1 \frac{\partial t_1(z, \tau)}{\partial z} \Big|_{z=z^*} + R_4 \lambda_2 \frac{\partial t_2(z, \tau)}{\partial z} \Big|_{z=z^*} = t_2(z^*, \tau) - t_1(z^*, \tau) + \frac{w_3 R_3}{2} - \frac{w_4 R_4}{2}. \quad (18)$$

Розв'язок задачі (14)-(18) — функції температури $t(z, \tau)$ та теплового потоку для $z = z^*$ можуть мати розриви першого роду. Проведемо декомпозицію лінійної задачі теплопровідності. Для цього представимо шукану функцію $t(z, \tau)$ у вигляді суми

$$t(z, \tau) = t_\phi(z, \tau) + t_r(z, \tau) + t_w(z, \tau), \quad (19)$$

де $t_\phi(z, \tau)$ — розв’язок рівняння теплопровідності для $w_3 = 0$, $w_4 = 0$ в умовах (17), (18) що задовольняє початкову умову (15) і має нульові значення на границях $z = 0$ та $z = L$, $t_r(z, \tau)$ — розв’язок задачі теплопровідності з граничними умовами (16)-(18) для $w_3 = 0$, $w_4 = 0$ і нульовою початковою температурою, $t_w(z, \tau)$ — функція температури від джерел тепла з нульовими умовами на границі і для $\tau = 0$.

Кожна функція, що входить у співвідношення (19), є розв’язком рівняння теплопровідності. Отримаємо їх застосовуючи метод розділення змінних. Подамо $t_\phi(z, \tau)$ у вигляді ряду

$$t_\phi(z, \tau) = \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i Z_i(z) \Theta_i(\tau). \quad (20)$$

Підставимо в рівняння теплопровідності складник розв’язку $Z_i(z) \Theta_i(\tau)$ — добуток функцій від координати та часу. Поділимо на $Z_i(z) \Theta_i(\tau)$ й отримаємо рівність для знаходження $Z_i(z)$ та $\Theta_i(\tau)$ ($i = 1, 2, \dots$)

$$\frac{\dot{\Theta}_i(\tau)}{\Theta_i(\tau)} = \frac{1}{c(z)Z(z)} \frac{d}{dz} \left(\lambda(z) \frac{dZ_i(z)}{dz} \right) \equiv - \left(\frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{\bar{\lambda}}{\bar{c}}} n_i \right)^2.$$

Праву частину рівності записано зі сталим множником, що забезпечує бажану масштабованість і розмірність власних значень n_i . Через $\bar{\lambda}$, $\bar{c}$ позначено середні значення коефіцієнтів теплопровідності та теплоємності у складеному шарі.

Знайдемо розв’язок рівняння

$$\frac{1}{c(z)Z(z)} \frac{d}{dz} \left(\lambda(z) \frac{dZ_i(z)}{dz} \right) = - \left(\frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{\bar{\lambda}}{\bar{c}}} n_i \right)^2.$$

Власні функції $Z_i(z)$, як і $t_\phi(z, \tau)$, задовольняють нульові умови на границях

$$Z_i(0) = 0, \quad Z_i(L) = 0.$$

та умови для $z = z_*$, які випливають з умов (17), (18):

$$\begin{aligned} \left[\lambda(z) \frac{dZ_i(z)}{dz} \right]_{z=z_*-0} &= \frac{1}{R} (Z_i(z_*+0) - Z_i(z_*-0)), \\ \left[\lambda(z) \frac{dZ_i(z)}{dz} \right]_{z=z_*-0} &= \left[\lambda(z) \frac{dZ_i(z, \tau)}{dz} \right]_{z=z_*+0}. \end{aligned}$$

Отримуємо власні функції відповідної задачі Штурма-Ліувіля, що мають стрибок першого роду, якщо $z = z_*$

$$Z_i(z) = \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi n_i}{L} \gamma_1 z\right), & z \in \Omega_1, \\ -\frac{\lambda_1 \gamma_1 \cos\left(\frac{\pi n_i}{L} \gamma_1 z_*\right)}{\lambda_2 \gamma_2 \cos\left(\frac{\pi n_i}{L} \gamma_2 (L - z_*)\right)} \sin\left(\frac{\pi n_i}{L} \gamma_2 (L - z_*)\right), & z \in \Omega_2. \end{cases}$$

Тут $\gamma_j = \sqrt{\bar{\lambda} c_j / (\bar{c} \lambda_j)}$ ($j = 1, 2$).

Для знаходження власних значень n_i отримано рівняння $F(n_i) = 0$, де

$$F(n) = \left[\frac{\pi n}{L} \lambda_1 \gamma_1 R \cos\left(\frac{\pi n}{L} \gamma_1 z_*\right) + \sin\left(\frac{\pi n}{L} \gamma_1 z_*\right) \right] \cos\left(\frac{\pi n}{L} \gamma_2 (L - z_*)\right) + \\ + \frac{\lambda_1 \gamma_1}{\lambda_2 \gamma_2} \cos\left(\frac{\pi n}{L} \gamma_1 z_*\right) \sin\left(\frac{\pi n}{L} \gamma_2 (L - z_*)\right).$$

Зауважимо, що $n_0 = 0$ і при цьому $Z_0(z) = 0$. Функції $Z_i(z)$ ($i = 1, 2, \dots$) ортогональні з ваговим множником $c(z)$, тобто

$$\int_0^L c(z) Z_k(z) Z_l(z) dz \begin{cases} = 0, & k \neq l, \\ \neq 0, & k = l. \end{cases}$$

З тотожності (22) записуємо також рівняння для $\Theta_i(\tau)$

$$\dot{\Theta}_i(\tau) + \left(\frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{\bar{\lambda}}{\bar{c}}} n_i \right)^2 \Theta_i(\tau) = 0.$$

Звідки отримуємо, що

$$\Theta_i(\tau) = \exp \left[- \left(\frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{\bar{\lambda}}{\bar{c}}} n_i \right)^2 \tau \right].$$

Оскільки $\Theta_i(0) = 1$, то для $\tau = 0$ умова (16) зводиться до $\phi(z) = \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i Z_i(z)$. Коефіцієнти σ_i отримуємо розкладаючи $\phi(z)$ за системою ортонормованих функцій $Z_i(z)/\|Z_i(z)\|$. Тобто

$$\sigma_i = \frac{1}{\|Z_i(z)\|} \int_0^L \phi(z) c(z) Z_i(z) dz, \quad \text{де } \|Z_i(z)\| = \int_0^L c(z) Z_i^2(z) dz. \quad (21)$$

Отримана функція (20) забезпечить для $t(z, \tau)$ виконання початкової умови (15).

Інші доданки у співвідношенні (19) подамо як суму стаціонарного та нестаціонарного розв'язків відповідної задачі теплопровідності, а саме

$$t_T(z, \tau) = t_G(z) + \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i Z_i(z) \Theta_i(\tau), \quad (22)$$

$$t_w(z, \tau) = t_Q(z) + \sum_{i=1}^{\infty} \nu_i Z_i(z) \Theta_i(\tau). \quad (23)$$

Функція $t_G(z)$ задовольняє граничні умови (16) і має вигляд

$$t_G(z) = \begin{cases} k_1 z + f_0, & z \in \Omega_1, \\ k_1 \lambda_1 \lambda_2^{-1} (z - L) + f_L, & z \in \Omega_2 \end{cases},$$

$$\text{де } k_1 = \frac{f_L - f_0}{(R_3 + R_4) \lambda_1 + z_* + \lambda_1 \lambda_2^{-1} (L - z_*)}.$$

Функція $t_Q(z)$ задовольняє умови (17), (18) із джерелами тепла. Її вигляд

$$t_Q(z) = \begin{cases} k_2 z, & z \in \Omega_1, \\ (\lambda_1 k_2 - w_3 - w_4) \lambda_2^{-1} (z - L), & z \in \Omega_2. \end{cases}$$

$$\text{Тут } k_2 = \frac{1}{2} \frac{(R_3 + R_4) w_3 + R_4 [4 + 2 \lambda_2^{-1} (L - z_*)] (w_3 + w_4)}{(R_3 + R_4) \lambda_1 + z_* + \lambda_1 \lambda_2^{-1} (L - z_*)}.$$

Коефіцієнти μ_i, ν_i визначаємо як коефіцієнти розкладів функцій $-t_G(z)$ і $-t_Q(z)$ за $Z_i(z)$ подібно, як σ_i за формулами (21).

Підставимо співвідношення (20), (22), (23) у рівняння (19) і отримаємо формулу для обчислення $t(z, \tau)$

$$t(z, \tau) = t_G(z) + t_Q(z) + \sum_{i=1}^{\infty} (\sigma_i + \mu_i + \nu_i) Z_i(z) \Theta_i(\tau).$$

Таке подання розв'язку рівняння теплопровідності забезпечує виконання початкових (15) і граничних (16)-(18) умов. Якщо $\tau \rightarrow \infty$, то отримуємо стаціонарний режим, оскільки тоді $t(z, \tau) \rightarrow t_G(z) + t_Q(z)$.

3. Окремі випадки та дослідження неідеальних умов теплообміну

Умови теплообміну (17), (18) можна використати для отримання відомих і нових умов неідеального теплообміну. Тоді розв'язок задачі теплопровідності (14)-(18) дає можливість досліджувати різні способи теплового контакту тіл: через тонкі прошарки, з тепловиділеннями та поглинанням тепла на границі контакту, а також із поєднанням різних факторів.

3.1. Теплоізолюючий контакт. Припускаємо, що джерела тепла відсутні $Q_3 = 0$, $Q_4 = 0$ ($w_3 = 0$, $w_4 = 0$) і теплофізичні характеристики прошарків Ω_3 й Ω_4 однакові. Загальний їх термічний опір $R = R_3 + R_4$. Тоді умови (17), (18) спрощуються до вигляду [7]

$$\lambda_1 \frac{\partial t_1(z, \tau)}{\partial z} \Big|_{z=z_*} = \lambda_2 \frac{\partial t_2(z, \tau)}{\partial z} \Big|_{z=z_*},$$

$$\lambda_1 \frac{\partial t_1(z, \tau)}{\partial z} \Big|_{z=z_*} = \frac{1}{R} (t_2(z_*, \tau) - t_1(z_*, \tau)).$$

У цьому випадку функція потоку тепла неперервна, а функція температури має стрибок у разі переходу через границю контакту. Величина стрибка пропорційна потокові тепла на внутрішній границі.

3.2. Неідеальний тепловий контакт із нагрівом. Вважається, що в однорідному прошарку, в обох його частинах, діють джерела тепла з однаковою питомою потужністю, тобто $w_3 = w_4$ та загальна їх поверхнева питома потужність $w = w_3 + w_4$. Якщо теплофізичні характеристики прошарків однакові, то їх сумарний термічний опір $R = R_3 + R_4$. Тоді отримуємо умови, які описують температурні процеси фрикційної взаємодії [6, 7]

$$\lambda_1 \frac{\partial t_1(z, \tau)}{\partial z} \Big|_{z=z_*} - \lambda_2 \frac{\partial t_2(z, \tau)}{\partial z} \Big|_{z=z_*} = w,$$

$$\lambda_1 \frac{\partial t_1(z, \tau)}{\partial z} \Big|_{z=z_*} = \frac{1}{R} (t_2(z_*, \tau) - t_1(z_*, \tau)) + \frac{w}{2}.$$

У цьому випадку маємо розривні функції температури та теплового потоку у разі переходу через границю контакту.

3.3. Теплоізолюючий контакт із поверхневим нагрівом. Якщо перехідний шар поєднує теплоізолюючий прошарок і прошарок із джерелами тепла, то відповідні умови можна отримати, наприклад, якщо $w_3 = 0$, $\lambda_3 = \lambda_4$ ($R = R_3 + R_4$) та записати у вигляді

$$\lambda_1 \frac{\partial t_1(z, \tau)}{\partial z} \Big|_{z=z_*} - \lambda_2 \frac{\partial t_2(z, \tau)}{\partial z} \Big|_{z=z_*} = w_4,$$

$$\lambda_1 \frac{\partial t_1(z, \tau)}{\partial z} \Big|_{z=z_*} = \frac{1}{R} (t_2(z_*, \tau) - t_1(z_*, \tau)) + \frac{w_4}{4}.$$

Знову отримаємо стрибок функцій температури та теплового потоку, але іншої величини, ніж у попередньому випадку.

3.4. Контакт з нагрівом і охолодженням. Нехай в одній частині прошарку відбувається відбір тепла (стоки), а в іншій діють джерела тепла такої ж інтенсивності. Для отримання умов теплового контакту приймаємо, що $Q_3 = -Q_*$, $Q_4 = Q_*$. Теплові характеристики $\lambda_3 = \lambda_4$ однакові та товщини $h_3 = h_4$ також однакові. Позначимо через $w = Q_*(h_3 + h_4)$. Тоді $w_3 = -w/2$, $w_4 = w/2$ та сумарна потужність поверхневих джерел $w_3 + w_4 = 0$. Умови контактного теплообміну в таких випадках набувають вигляду

$$\begin{aligned} \lambda_1 \frac{\partial t_1(z, \tau)}{\partial z} \Big|_{z=z_*} &= \lambda_2 \frac{\partial t_2(z, \tau)}{\partial z} \Big|_{z=z_*}, \\ \lambda_1 \frac{\partial t_1(z, \tau)}{\partial z} \Big|_{z=z_*} &= \frac{1}{R} (t_2(z_*, \tau) - t_1(z_*, \tau)) - \frac{w}{4}. \end{aligned} \quad (24)$$

Оскільки джерела та стоки взаємно компенсуються, то потоки тепла однакові з обох боків внутрішньої поверхні, температура стрибкоподібно зростає в напрямку z на границі контакту.

Якщо ж навпаки $Q_3 = Q_*$, $Q_4 = -Q_*$ та $w_3 = w/2$, $w_4 = -w/2$, то в умові (24) останній доданок стає зі знаком плюс і температури матиме стрибкоподібне зменшення на границі контакту в напрямку z .

Проведено обчислення функції температурного поля у шарі з включенням іншого матеріалу, на границі $z = 0$ якого підтримуються постійна температура f_0 , на границі $z = L$ температура рівна $f_L = 0$, а початковий розподіл $\phi(z) = 0$, що зумовлює $t_\phi(z, \tau) = 0$. Для обчислень інших функцій беремо такі вхідні дані: товщина шару $L = 0,025$ м, коефіцієнти теплопровідності та теплоємності:

$$\lambda_1 = 0,5 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}, c_1 = 1,5 \cdot 10^6 \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3 \cdot \text{К}}, \lambda_2 = 0,8 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}, c_2 = 1 \cdot 10^6 \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3 \cdot \text{К}}.$$

Границя розділу $z_* = 0,011$ м чинить термічний опір $R = 0,01 (\text{м}^2 \cdot \text{К})/\text{Вт}$ і тут діють стоки та джерела тепла так, що $w_3 = -w/2$, $w_4 = (w = 200 \text{ Вт}/\text{м}^2)$.

На рис. 1 показано графіки зміни функції температури $t(z, \tau)$ за товщиною шару отримані у деякі моменти часу $\tau = 20; 100; 600$ с. Якщо $\tau = 600$ с, то маємо практично стаціонарний температурний режим. Стрибкоподібне зростання температури за її спадання в напрямку від границі $z = 0$ до границі $z = L$ і неперервному потоці тепла викликане характером стоків і джерел тепла. Зліва від границі $z = z_*$ діють стоки, а справа — джерела тепла.

На рис. 2 відповідно показані графіки для функції $t(z, \tau)$ у такому ж шарі, якщо зліва діють джерела, а справа стоки тепла так, що $w_3 = w/2$, $w_4 = -w/2$ ($w = 20 \text{ Вт}/\text{м}^2$). Як і очікувалося зменшення температури якщо $z = z_*$ відбувається стрибкоподібно.

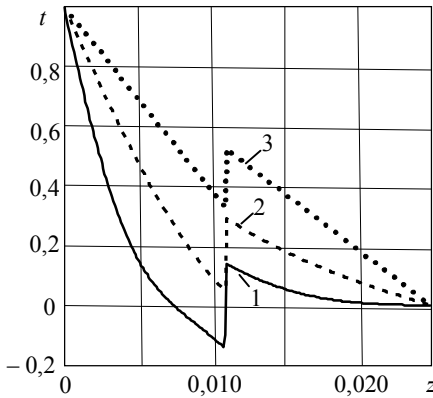


Рис. 1. Зміна температури за товщиною складеного шару. В околі поверхні контакту зліва діють стоки та справа — джерела тепла. Криві 1-3 відповідають часам $\tau = 20; 100; 600$ с

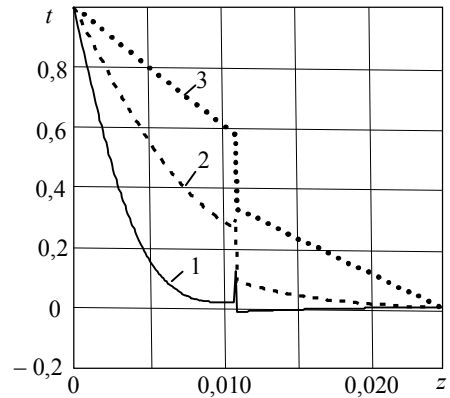


Рис. 2. Зміна температури за товщиною складеного шару. В околі поверхні контакту зліва діють джерела та справа — стоки тепла. Криві 1-3 відповідають часам $\tau = 20; 100; 600$ с

При цьому стрибок функції температури добре прораховується за великих часів, а у разі малих функція має пилоподібну зміну в околі $z = z^*$. Як показано у роботі [7] це є наслідком того, що термічний опір, який також регулює стрибок температури, вважаємо постійним, хоча, особливо за малих градієнтів температури, спостерігається його залежність від температури.

Висновки. За з'єднання плоских теплопровідних шарів так, що в околі контакту відбулося «збурення матеріалу» з появою теплоізолюючого ефекту, а також виникли джерела (стоки) тепла, умови контактного теплообміну різного виду між шарами отримуються моделюванням теплообміну між шарами через тонкий прошарок. Припускаючи, що його теплові характеристики можуть суттєво відрізнятися від характеристик основних шарів, спостерігаємо значні перепади температури, що моделюється стрибкоподібною функцією. Наявність джерел тепла в зоні контакту призводить до стрибка функції температури, а також теплового потоку. Залежно від послідовності розподілу джерел і стоків тепла стрибок може бути як в сторону збільшення, так і зменшення температури. Ці ефекти цілком враховуються та відображаються неідеальними умовами теплообміну між контактуючими шарами. Значення термічного опору, що входить у ці умови, пропонується визначати через більш звичні для вимірювання — коефіцієнт теплопровідності та товщину включення. Поверхневі питомі потужності джерел тепла можна задати, якщо відома величина тепловиділення в околі границі контакту.

Література

- [1] Меснянкін С. Ю., Викулов А. Г., Викулов Д. Г. Современный взгляд на проблемы теплового контактирования твердых тел // Успехи физических наук. — 2009. — Т. 179, № 9. — С. 495-970.
- [2] Веселовский В. Б. Контактное термическое сопротивление в элементах конструкций. Гидродинамика и процессы тепломассобмена. — Киев: Наукова думка, 1986. — С. 120-125.

- [3] Біляєва В. В., Берлов О. В., Клім В. Ю. Визначення параметрів теплообміну багат шарових елементів конструкцій // Харків: НТУ «ХП». — 2012. — № 8. — С. 154-163.
- [4] Підстригач Я. С. Вибрані праці. — Київ: Наукова думка, 1995. — 460 с.
- [5] Беляков Н. С., Носко А. П. Неидеальный тепловой контакт тел при трении. — Москва: Книжный дом Либорком, 2010. — 104 с.
- [6] Belyakov N. S., Nosko A. P. Mathematical Simulation of Thermal Friction Processes under Conditions of Nonideal Contact // Heat and Mass Transfer and Physical Gas Dynamics. — 2009. — Vol. 46, No 1. — P. 129-136.
- [7] Гера Б. В. Моделювання умов неідеального теплообміну контактуючих теплопровідних шарів // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. — 2012. — Вип. 16. — С. 52-60.

Mathematical modelling of nonideal conditions for thermal contact of layers through thing inclusion with heat source

Bohdan Gera

The mathematical modelling of heat interchange through heterogeneous layer composed of homogeneous layers is made. It is assumed that in the locality of interior contact surfaces act the heat sources of power and the thermal and physical characteristics are differ from such characteristics of main layers. The contact region we can see as thing inclusion between heat conductance layers. It is cause of the thermal resistance of contact and motive (occasion) to use conditions of nonideal contact. The solution of thermal conductivity problem with nonideal heat transfer conditions is obtained and analyzed.

Математическое моделирование условий неидеального теплового контакта слоев через тонкое включение с источниками тепла

Богдан Гера

Проведено математическое моделирование процесса теплообмена в кусочно-неоднородном слое, составленном из однородных слоев, в предположении, что в зонах вблизи их контакта действуют источники тепла, а также теплофизические характеристики значительно отличаются от характеристик контактирующих слоев. Зона контакта представляется как тонкое включение между теплопроводящими слоями, что является причиной термического сопротивления и основанием для применения условий неидеального теплообмена. Получено и исследовано решение задачи теплопроводности с использованием условий неидеального теплообмена.

Отримано 4.11.13