

ДНУЖТ

ВСЕСОЮЗНЫЙ НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ
ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА

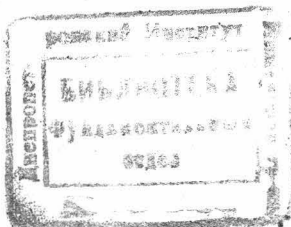
инж. С.В. Дувалян

625.21
А 79

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННОГО
СОСТОЯНИЯ ДИСКА ВАГОННОГО ЦЕЛЬНОКАТАНОГО
КОЛЕСА

(Диссертация на соискание ученой степени
кандидата технических наук)

Диссертация
709 сн.



Научный руководитель
д-р. техн. наук проф. А.А. Попов

А.А. Попов

Москва - 1960 г.

№ 381
ЦНИИ-МПС

ДНУЖТ

ВВЕДЕНИЕ

Директивами XXI съезда ВПСС предусмотрено увеличить за семилетку грузособорот железнодорожного транспорта на 39-43%. Одним из решающих мероприятий по решению этой задачи является повышение скорости движения поездов, что обеспечивается внедрением на железнодорожном транспорте более экономичной и мощной электровозной и тепловозной тяги. При этом особое значение приобретают вопросы динамического воздействия подвижного состава и пути, в связи с чем создание облегченных колесных пар следует рассматривать не только как средство экономии металла, снижения веса вагона, но и как важное мероприятие по улучшению динамических характеристик подвижного состава.

В последние годы Всесоюзный научно-исследовательский институт железнодорожного транспорта с участием ряда других научно-исследовательских организаций, металлургических и вагоностроительных заводов систематически проводит теоретические и опытные исследования по созданию облегченных колесных пар для вагонов. При решении вопроса о рациональной форме и размерах облегченного вагонного колеса важное значение имеют исследования, посвященные изучению напряженного состояния диска колеса.

Еще в 1902 году Н.Е. Жуковский рассмотрел задачу о прочности велосипедного колеса [12] и добился замечательного решения этой задачи, рассмотрев вместо обода, подкрепленного спицами, обод, покоящийся на упругом основании.

ДНУЖТ

Первые теоретические исследования, посвященные прочности элементов вагонных колесных пар, относятся к 30-м годам. В 1932 году вышла в свет работа А.А. Попова [26], посвященная теоретическому исследованию деформаций спицевых вагонных колес. В этой работе дано также приближенное решение задачи о влиянии диска и обода на величину контактных давлений наpressовки, основанное на замене конической части диска круглой кольцевой пластиной постоянной толщины. В работе Р. Экзермана и А.А. Попова [3 4] содержится интересная дискуссия проф. С.П. Тимошенко и Р. Экзермана по методике расчета спицевого колеса, предложенного последним.

В этой дискуссии проф. С.П. Тимошенко подчеркивает, в частности, что предположение об абсолютно жестком ободе приводит к неправильному /косинусидальному/ распределению усилий в спицах.

В дальнейшем появился еще ряд работ [15], [16] и другие, посвященные расчету спицевых колес.

Расчету колеса с плоским диском посвящена докторская диссертация Б.В. Дидова [10]. В этой работе обод рассматривается как кольцо /замкнутый кривой брус, который рассчитывается по гипотезе с сохранением плоских сечений/, покоящееся на упругом основании — диск постоянной толщины, защемленный в абсолютно жесткую ступицу. Стремясь упростить решение задачи, автор предлагает ряд упрощений, которые вряд ли представляют практический интерес, если учесть результаты, полученные Д.В. Вайнбергом [3] и изложенные нами ниже во второй главе методику расчета круглых пластин.

ДНУЖТ

В работе [3] дано несколько иное решение задачи с расчете колеса с плоским диском. Основное отличие заключается в том, что свобод рассматривается не как кольцо /замкнутый кривой брус/, а как круглая кольцевая пластина. Приемлемости такой схемы расчета подтверждается сравнением величин напряжений, вычисленных теоретически, с величинами напряжений, определенных экспериментально / см. [3] /.

Однако, вопрос о расчете цельнокатаного колеса с неплоским диском /например, коническим/ оставался открытым. Более того представление о диске как о круглой кольцевой пластине постоянной толщины далеко не отражает фактическую форму диска. Конструктивно диск всегда выполняется переменной толщины, при этом переход от диска к свобод, либо к ступице происходит плавно. Пренебрежение переменным характером толщины диска, наличием переходных участков делает расчет очень схематичным. Не удивительно, поэтому, что в 1957 году авторы работы [5] Г.П.Виноградов, В.Н.Гудков и И.В.Наумов писали: "До настоящего времени не существует методов теоретического расчета напряженного состояния цельнокатаных колес в целом" (см. [5] стр.58/.

В 1960 году была опубликована статья [II], посвященная расчету цельнокатаного колеса с коническим диском, где краткое изложение методики сопровождалось сравнением величин определенных теоретическим и экспериментальным путями.

О существовании каких-либо теоретических исследований напряженного состояния диска колеса за рубежом нам не известно. Что касается экспериментального исследования напряжений

ДНУЖТ

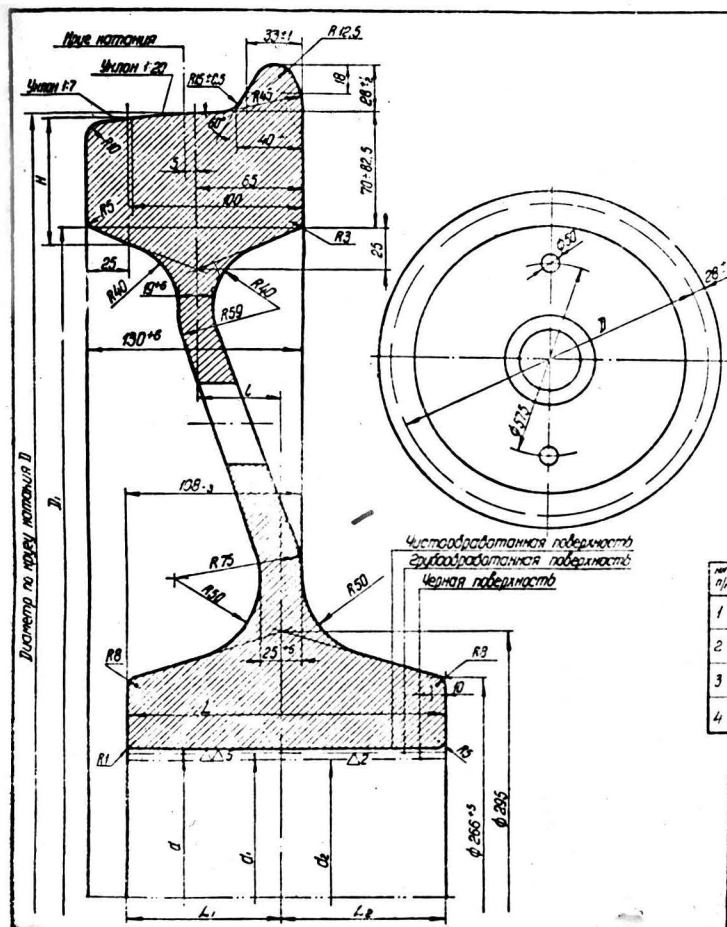
в различных частях колесной пары, то такие работы проводились и проводятся как у нас, так и за рубежом, и освещены частично в литературе [5], [23], [43], [44]. См. также отчеты [35], [36], [37]. В отчете [35] содержится также обзор некоторых экспериментальных работ.

Рассматриваемый вопрос является объемной задачей теории упругости. Сложность формы колеса и сосредоточенный характер сил, действующих на него, приводят к непреодолимым математическим трудностям при точном решении задачи. Следует отметить, что даже такой частный случай этой задачи, как определение напряжений в диске от напрессовки колеса на ось, пока не решена точно. Эти трудности, связанные, в первую очередь, со сложностью формы колеса, являлись причиной того, что так долго не разрабатывалась методика расчета колеса с коническим диском. Приближенное решение, предложенное в [11] и рассматриваемая ниже, является первой попыткой аналитического определения напряжений в диске цельскопанного колеса с коническим диском (рис. 1).

Рассматривая задачу об определении напряжений в диске колеса под действием сосредоточенных сил, приложенных на его обode, автор предлагает применить для решения этой задачи теорию тонких оболочек.

Согласно расчетной схеме, рассматриваемой во второй главе, задача об определении напряжений в диске сводится к расчету круглых кольцевых пластин и круговой конической оболочки переменной толщины при несимметричном краевом нагружении.

ДНУЖТ



№ п/п	Тип вагона	№ вагона
1	2-осный вагон	4
2	4-осный вагон	8

остальное

Техническое требование.
Цельнокатанное колесо изготавливать по ТУ гост 6362-52 и ост/нхп 8795/1706

Примечания.

1. Цельнокатанное колесо в запас изготавливается с грубообработанной внутренней поверхностью ступицы.
2. При заказе колес для осей с диаметром подступичной части 175-182 мм необработанное (черное) отверстие ступицы должно иметь диаметр 163 мм, а грубообработанное - 169 мм.
3. Колеса не удовлетворяющие по своим размерам и допускам настоящему чертежу должны быть обработаны.

№ п/п	Наименование	D	D ₁	d	d ₁	d ₂	L	L ₁	L ₂	L ₃	Вес в кг
1	Цельнокатанное колесо φ 1050 для оси I	1050 ^{mm}	910 ^{mm}	153	150 ^{mm}	145	200 ^{mm}	97 ^{mm}	103	54	510
2	Цельнокатанное колесо φ 1050 для оси II	1050 ^{mm}	910 ^{mm}	165	160 ^{mm}	155	200 ^{mm}	97 ^{mm}	103	54	506
3	Цельнокатанное колесо φ 1050 для оси III	1050 ^{mm}	910 ^{mm}	182	177 ^{mm}	172	190 ^{mm}	92 ^{mm}	98	49	402
4	Цельнокатанное колесо φ 950 для оси IV	950 ^{mm}	810 ^{mm}	182	177 ^{mm}	172	190 ^{mm}	92 ^{mm}	98	49	402

Лист 1 из 1	Документ № 1	Подпись	Вопрос	Литера	Вес в кг	Всего листов
Изменен	Исполнитель	Утвержден	Материал	Ст. мод.	33266-Н	
Спр. инж.	Дилетант	Спр. инж.	Гост	Лист-1	Всего листов-1	
Проверил	Климов	Проверил	Марка	6362-52		
Нач. Служ.	Родионов	Нач. Служ.	Гост	6362-52		
Спр. инж.	Дилетант	Спр. инж.	Гост	6362-52		
Нач. Служ.	Родионов	Нач. Служ.	Гост	6362-52		

Колесо цельнокатанное φ 1050 и φ 950 ост/нхп 8795/1706

70'4-H

материал

гост

Лит-1

Рис. 1.

ДНУЖТ

Как отмечает С.П.Тимшенко в своей монографии [31], первое исследование круглой пластины переменной толщины было выполнено Хельцером [39]. О.Пихлер в своей докторской диссертации "Изгиб радиально симметричных пластин переменной толщины" [41] рассматривал случай диска, толщина которого меняется по закону $h = Ae^{-\beta z^2}$, где A и β постоянные, а z расстояние от оси вращения. Однако эти работы относятся к случаю осесимметричной задачи изгиба круглой пластины.

Расчету круглых пластин переменной толщины, находящихся под действием несимметричной нагрузки, посвящены работы [4], [13], [32], где рассматривается расчет диска гиперболического профиля. Авторы этих работ Л.В.Вайнберг, В.З.Итенберг, Э.С.Уманский получили решение рассматриваемой ими задачи в рядах Фурье. Однако решение в форме, указанной в этих работах не приспособлено для применения метода начальных параметров, ибо для построения решения, соответствующего данным начальным условиям, приходится решать систему четырех линейных алгебраических уравнений с четырьмя неизвестными.

В работе А.Н.Лурье [18] дано решение задачи об изгибе пластины постоянной толщины методами операционного исчисления. Ниже во второй главе читатель найдет решение задачи с расчете круглых пластин переменной толщины методами операционного исчисления.

Расчет круговой конической оболочки представляет значительные трудности. Список работ, посвященных расчету круго-

ДНУЖТ

вой конической оболочки постоянной толщины, находящейся под действием осесимметричной нагрузки довольно большой. Особенно подробно эта задача рассматривалась Дюбуа [38]. Вопросами приближенного решения осесимметричной задачи для круговой конической оболочки занимались З.Б. Канторович [14], С.Ривкин [28]. А.Лявом [24] рассмотрено решение задачи для круговой конической оболочки постоянной толщины, находящейся под произвольной нагрузкой. Этот же вопрос рассматривается в диссертациях [21], [30] и в монографии А.Л.Гольденвейзера [7].

Коническая часть диска колеса представляет собой круговую коническую оболочку с линейно-изменяющейся толщиной. Рассматривалось ли решение задачи для такой оболочки при не-симметричном краевом нагружении — нам неизвестно. Что касается асимметричной задачи для круговой конической оболочки переменной толщиной следует отметить работу Мейснера [40], где показано, что интегрирование дифференциальных уравнений для круговой конической оболочки с толщиной, пропорциональной расстоянию от оси вращения, может быть выполнено в элементарных функциях и работу Григорюка [9]. Учитывая громоздкость приближенных методов, развитых в ряде работ [7], [20], [21], [24], [30] для оболочек постоянной толщины и возможность внесения в расчет дополнительной погрешности при применении приближенных методов мы решили встать на путь интегрирования дифференциальных уравнений оболочки переменной толщины в рядах.

В работе /глава II/ рассмотрена также задача определения напряжений в диске колеса, возникающих при напрессовке ступицы на ось.

Учитывая громоздкость вычислений, связанной с аналитическим определением напряжений в диске колеса, автором была разработана программа для решения этой задачи на цифровой вычислительной машине "Урал-І". Описанию этой программы посвящена глава третья.

В четвертой главе приводятся результаты, полученные при решении задачи на вычислительной машине для ряда колес и проводится анализ полученных результатов. В этой же главе проводится сравнение величин напряжений, определенных теоретическим и экспериментальным путями.

ДНУЖТ

ГЛАВА 1

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК

§1 Криволинейные координаты

Значения трех функций $f_1(x, y, z) = q_1$; $f_2(x, y, z) = q_2$
 $f_3(x, y, z) = q_3$ называются криволинейными /гауссовыми/
 координатами точки $M(x, y, z)$, если для каждой тройки чисел q_1, q_2, q_3 система уравнений

$$\left. \begin{aligned} f_1(x, y, z) &= q_1, \\ f_2(x, y, z) &= q_2, \\ f_3(x, y, z) &= q_3 \end{aligned} \right\} \quad /1/$$

имеет единственное решение.

Координата q_1 сохраняет постоянное значение на каждой из поверхностей семейства $f_1(x, y, z) = C$.

Поверхность принадлежащую этому семейству назовем координатной поверхностью $q_1 = \text{const}$.

Аналогично определяются координатные поверхности $q_2 = \text{const}$ и $q_3 = \text{const}$. Две координатные поверхности $q_2 = \text{const}$ и $q_3 = \text{const}$ пересекаются по кривой вдоль которой меняется только координата q_1 . Такие линии назовем линиями q_1 . Аналогично определяются линии q_2 и линии q_3 .

Предполагая непрерывность и дифференцируемость функции $f_1(x, y, z) = q_1$, $f_2(x, y, z) = q_2$, $f_3(x, y, z) = q_3$ можно показать, что при предположенной выше однозначной разрешимости система /1/ определяет тройку непрерывных, дифференцируе-

ДНУЖТ

ных функций:

$$\left. \begin{aligned} x &= \varphi_1(q_1, q_2, q_3), \\ y &= \varphi_2(q_1, q_2, q_3), \\ z &= \varphi_3(q_1, q_2, q_3). \end{aligned} \right\} \quad /2/$$

Пусть $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ единичные векторы декартовых осей координат, а $\bar{r}$ радиус вектор точки $M(x, y, z) \equiv M(q_1, q_2, q_3)$. Тогда

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$$

или, подставляя сюда x, y и z , получим

$$\bar{r} = \bar{i} \cdot \varphi_1(q_1, q_2, q_3) + \bar{j} \cdot \varphi_2(q_1, q_2, q_3) + \bar{k} \cdot \varphi_3(q_1, q_2, q_3), \quad /3/$$

т.е. радиус вектор выражается как функция криволинейных координат q_1, q_2, q_3 .

Из /3/ следует, что

$$d\bar{r} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_3} dq_3.$$

Так, как, согласно определению частной производной,

$\frac{\partial \bar{r}}{\partial q_1}$ означает производную от $\bar{r}$ при постоянных q_2 и q_3 , то конец вектора $\bar{r}$ при изменении q_1 описывает линию q_1 и, следовательно, $\frac{\partial \bar{r}}{\partial q_1}$ направлен по касательной к линии q_1 , а векторы $\frac{\partial \bar{r}}{\partial q_2}$ и $\frac{\partial \bar{r}}{\partial q_3}$ — по касательным к линиям q_2 и q_3 соответственно.

Обозначив модули производных $\frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i}$ через A_i ($i=1, 2, 3$) и введя единичные векторы криволинейных координат $\bar{e}_i$,

ДНУЖТ

$\bar{e}_2, \bar{e}_3$ можно написать

$$\frac{\partial \bar{z}}{\partial q_i} = A_i \bar{e}_i \quad (i=1, 2, 3) \quad /4/$$

Величины A_i называются параметрами Ляме. В дальнейшем мы будем предполагать, что система координат ортогональна и что тройка ортов $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ в указанном порядке образует правую тройку, т.е.

$$\bar{e}_3 = \bar{e}_1 \times \bar{e}_2 \quad /5/$$

Из /4/, /5/ и тождеств

$$\frac{\partial^2 \bar{z}}{\partial q_k \partial q_\ell} = \frac{\partial^2 \bar{z}}{\partial q_\ell \partial q_k} \quad /k, \ell = 1, 2, 3/$$

вытекают важные формулы дифференцирования:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{e}_1}{\partial q_1} &= -\frac{\partial A_1}{A_2 \partial q_2} \bar{e}_2 - \frac{1}{A_3} \frac{\partial A_1}{\partial q_3} \bar{e}_3, & \overrightarrow{1, 2, 3} \\ \frac{\partial \bar{e}_2}{\partial q_2} &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial q_1} \bar{e}_1, & \overrightarrow{1, 2, 3} \\ \frac{\partial \bar{e}_3}{\partial q_3} &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_3}{\partial q_1} \bar{e}_1, & \overrightarrow{1, 2, 3} \end{aligned} \right\} /6/$$

Здесь и далее символ $\overrightarrow{1, 2, 3}$ означает, что невыписанные формулы получаются из приведенных круговой перестановкой индексов.

Следует заметить, что три параметра Ляме A_1, A_2, A_3 не независимы. Их производные удовлетворяют следующим шести дифференциальным уравнениям совместности, впер-

ДНУЖТ

ние найденным для нас:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q_1} \left[\frac{\partial A_2}{A_1 \partial q_1} \right] + \frac{\partial}{\partial q_2} \left[\frac{\partial A_1}{A_2 \partial q_2} \right] + \frac{\partial A_1}{A_3 \partial q_3} \cdot \frac{\partial A_2}{A_3 \partial q_3} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial q_1} \left[\frac{\partial A_3}{A_2 \partial q_2} \right] - \frac{\partial A_1}{A_2 \partial q_2} \cdot \frac{\partial A_3}{A_1 \partial q_1} &= 0. \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \overrightarrow{1,2,3} \\ \overrightarrow{1,2,3} \end{array} \quad /7/$$

Последние три соотношения можно записать еще в виде

$$\frac{\partial}{\partial q_1} \left[\frac{\partial A_2}{A_3 \partial q_3} \right] - \frac{\partial A_1}{A_3 \partial q_3} \cdot \frac{\partial A_2}{A_1 \partial q_1} = 0. \quad /7a/$$

Соотношения /7/ легко получить из формул дифференцирования /6/, учитывая тождества

$$\frac{\partial^2 \bar{e}_i}{\partial q_k \partial q_l} = \frac{\partial^2 \bar{e}_i}{\partial q_l \partial q_k}. \quad /i, k, l = 1, 2, 3/$$

Легко получить также выражения для градиента скалярной φ -ии, и расхождения и вихря вектор-функции в ортогональных криволинейных координатах. А именно

$$\left. \begin{aligned} \text{grad } \varphi &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \bar{k} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \varphi}{A_i \partial q_i} \bar{e}_i, \\ \text{div } \bar{a} &= \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = \\ &= \frac{1}{A_1 A_2 A_3} \left[\frac{\partial A_2 A_3 a_1}{\partial q_1} + \frac{\partial A_3 A_1 a_2}{\partial q_2} + \frac{\partial A_1 A_2 a_3}{\partial q_3} \right], \\ \text{rot } \bar{a} &= \bar{i} \left[\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right] + \bar{j} \left[\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right] + \bar{k} \left[\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right] = \\ &= \frac{1}{A_2 A_3} \left[\frac{\partial A_3 a_3}{\partial q_2} - \frac{\partial A_2 a_2}{\partial q_3} \right] \bar{e}_1 + \frac{1}{A_3 A_1} \left[\frac{\partial A_1 a_1}{\partial q_3} - \frac{\partial A_3 a_3}{\partial q_1} \right] \bar{e}_2 + \end{aligned} \right\} /8/$$

ДНУЖТ

$$+ \frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial A_2 a_2}{\partial q_1} - \frac{\partial A_1 a_1}{\partial q_2} \right],$$

где a_1, a_2, a_3 проекции вектора $\bar{a}$ на орты $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$.

§ 2. Геометрические соотношения на оболочке

Оболочкой называется тело, ограниченное двумя поверхностями, расстояние между которыми мало по сравнению с другими размерами этого тела.

Геометрическое место точек, равноудаленных от обеих ограничивающих поверхностей, называется срединной поверхностью оболочки.

Отрезок нормали к срединной поверхности, заключенный между ограничивающими поверхностями, называется нормальным элементом, а его длина толщиной оболочки.

Соотношения теории оболочек принимают наиболее простой вид в криволинейной ортогональной системе координат, для которой срединная поверхность является координатной поверхностью, а нормали к ней координатными линиями. Но в этом случае, по теореме Дюпена [27] о триортогональных системах поверхностей, координатные линии будут линиями кривизны координатных поверхностей. Поэтому, отнесем срединную поверхность к си-

ДНУЖТ

системе криволинейных ортогональных координат q_1, q_2 , координатные линии которой совпадают с линиями кривизны срединной поверхности, а орты $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$ вместе с ортом $\bar{e}_3$, направленным по внешней нормали, образуют правую тройку.

Тогда положение произвольной точки M' /рис.2/ лежащей на нормали MM' , определится заданием координат q_1, q_2 основания нормали M и расстояния z точки M' от срединной поверхности /положительного, если точка M' лежит на внешней нормали/.

В дальнейшем всюду, где речь идет об оболочке, мы будем предполагать, что она отнесена именно к такой системе координат. При этом координату $q_3 = z$ будем обозначать через z и все обозначения величины, относящихся к точкам с координатой $z \neq 0$, будем снабжать верхним индексом z . Так, например, если некоторая точка M срединной поверхности имеет радиус вектор $\bar{r}$, то произвольная точка нормального элемента MM' будет иметь радиус вектор /рис.2/

$$\bar{r}^z = \bar{r} + z \bar{e}_3. \quad /9/$$

Дифференцируя /9/ по q_1 и q_2 получим

$$\left. \begin{aligned} A_1^z \bar{e}_1^z &= A_1 \bar{e}_1 + z \frac{\partial \bar{e}_3}{\partial q_1}, \\ A_2^z \bar{e}_2^z &= A_2 \bar{e}_2 + z \frac{\partial \bar{e}_3}{\partial q_2}, \end{aligned} \right\} \quad /10/$$

где A_1^z и A_2^z параметры Ламе в точке с координатой

ДНУЖТ

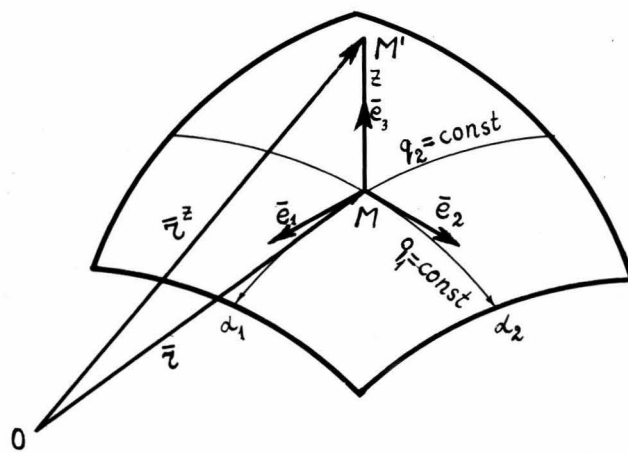


Рис. 2

ДНУЖТ

Пусть далее $\frac{1}{R_1}$ и $\frac{1}{R_2}$ кривизны нормальных сечений по направлению координатных линий q_1 и q_2 , являющихся линиями кривизны. Тогда из теоремы Родрига [27] следует, что

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{e}_3}{A_1 \partial q_1} &= \frac{1}{R_1} \bar{e}_1, \\ \frac{\partial \bar{e}_3}{A_2 \partial q_2} &= \frac{1}{R_2} \bar{e}_2. \end{aligned} \right\} \quad /11/$$

Учитывая /11/ соотношения /10/ можно переписать следующим образом

$$\left. \begin{aligned} A_1^z \bar{e}_1^z &= A_1 \left(1 + \frac{z}{R_1}\right) \bar{e}_1, \\ A_2^z \bar{e}_2^z &= A_2 \left(1 + \frac{z}{R_2}\right) \bar{e}_2. \end{aligned} \right\} \quad /12/$$

Отсюда следует, что

$$\left. \begin{aligned} A_1^z &= A_1 \left(1 + \frac{z}{R_1}\right), \\ A_2^z &= A_2 \left(1 + \frac{z}{R_2}\right). \end{aligned} \right\} \quad /13/$$

А также

$$\left. \begin{aligned} \bar{e}_1^z &= \bar{e}_1, \\ \bar{e}_2^z &= \bar{e}_2 \end{aligned} \right\} \quad /14/$$

$\bar{e}_3^2 = \bar{e}_3$ доказывает, что введение таким образом криволинейные координаты $q_1, q_2, q_3 = z$ действительно ортогональны.

Поверхности $z = \text{const}$ эквидистантны срединной поверхности $z = 0$. Параметры Ляме A_1^z и A_2^z ($A_3^z = A_3 = 1$) в точках поверхности $z = \text{const}$ определяются значениями параметров Ляме на срединной поверхности и кривизнами ее нормальных сечений $\frac{1}{R_1}$ и $\frac{1}{R_2}$ по формулам /13/.

Координатные линии q_1 и q_2 являются линиями кривизны на любой эквидистантной поверхности. Поэтому

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{e}_3}{A_1^z \partial q_1} &= \frac{1}{R_1^z} \bar{e}_1, \\ \frac{\partial \bar{e}_3}{A_2^z \partial q_2} &= \frac{1}{R_2^z} \bar{e}_2. \end{aligned} \right\} \quad /15/$$

Но тогда в силу /11/ и /13/ получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{R_1^z} &= \frac{1}{R_1 + z}, \\ \frac{1}{R_2^z} &= \frac{1}{R_2 + z}. \end{aligned} \right\} \quad /16/$$

Соотношения /12/ и условие $A_3^z = A_3 = 1$ позволяют представить формулы дифференцирования /6/ в следующей форме

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{e}_1}{\partial q_1} &= - \frac{\partial A_1}{A_2 \partial q_2} \bar{e}_2 - \frac{A_1}{R_1} \bar{e}_3, \\ \frac{\partial \bar{e}_1}{\partial q_2} &= \frac{\partial A_2}{A_1 \partial q_1} \bar{e}_2, \end{aligned} \right\} \quad /17/$$

$$\frac{\partial \bar{e}_2}{\partial q_1} = \frac{\partial A_1}{A_2 \partial q_2} \bar{e}_1,$$

$$\frac{\partial \bar{e}_2}{\partial q_2} = - \frac{\partial A_2}{A_1 \partial q_1} \bar{e}_1 - \frac{A_2}{R_2} \bar{e}_3,$$

$$\frac{\partial \bar{e}_3}{\partial q_1} = \frac{A_1}{R_1} \bar{e}_1,$$

$$\frac{\partial \bar{e}_3}{\partial q_2} = \frac{A_2}{R_2} \bar{e}_2,$$

$$\frac{\partial \bar{e}_1}{\partial z} = \frac{\partial \bar{e}_2}{\partial z} = \frac{\partial \bar{e}_3}{\partial z} = 0.$$

/17/

Формулы /17/ справедливы и при слаблении величин A_1 , A_2 , R_1 , R_2 индексом z , т.е. если они отнесены к произвольной точке оболочки. Использование этого очевидного замечания приводит к двум соотношениям Кодацци в линиях кривизны

$$\frac{\partial A_1}{\partial q_2} = R_2 \frac{\partial \frac{A_1}{R_1}}{\partial q_1},$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial q_1} = R_1 \frac{\partial \frac{A_2}{R_2}}{\partial q_2}.$$

/18/

Соотношения Кодацци в линиях кривизны /18/, а также соотношение Гаусса для полной кривизны можно получить также из соотношений Ламе /7/.

ДНУЖТ

§ 3. Поступательное, поворотное и деформационное перемещения

Под действием приложенных сил или при изменении теплового состояния изменяются расстояния между частицами твердого тела или, как принято говорить, тело деформируется. Возьмем произвольную точку тела $M(q_1, q_2, q_3)$, где q_1, q_2, q_3 криволинейные координаты точки M в некоторой ортогональной системе координат до деформации. После деформации эта точка займет положение M_1 . Вектор $\overline{MM}_1$ представляет перемещение точки M при деформации. Обозначив через u, v, w проекции вектора $\overline{P} = \overline{MM}_1$ /рис.3/ на координатные орты $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$, мы получим

$$\overline{P} = u\bar{e}_1 + v\bar{e}_2 + w\bar{e}_3. \quad /19/$$

Перемещение $\overline{P}$ является вектор[функцией точки и его задание равносильно заданию трех скалярных функций

$$\begin{aligned} u &= u(q_1, q_2, q_3), \\ v &= v(q_1, q_2, q_3), \\ w &= w(q_1, q_2, q_3). \end{aligned}$$

Если тело при деформации не терпит разрывов, то эти функции будут непрерывными, мы будем также предполагать непрерывность частных производных этих функций.

В курсах теоретической механики доказывается, что любое перемещение абсолютно твердого тела можно представить как сумму поступательного перемещения, совпадаю-

ДНУЖТ

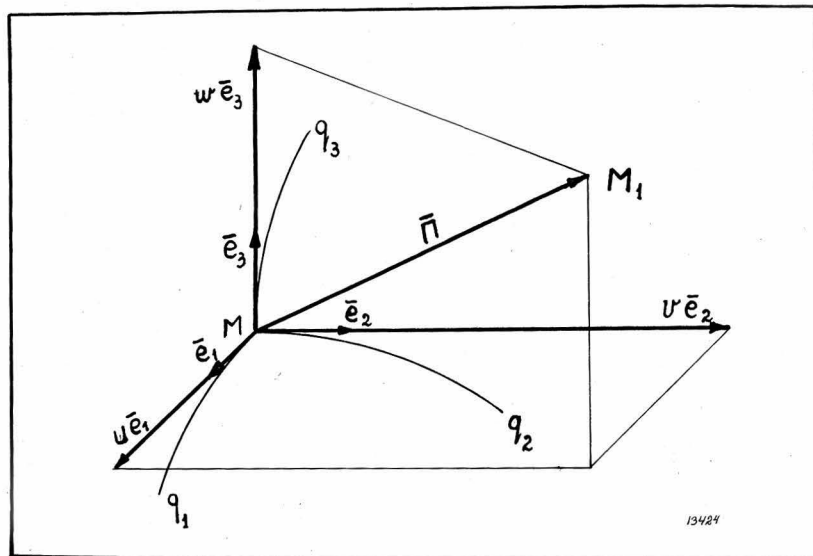


рис. 3.

ДНУЖТ

шего с перемещением произвольно выбранного полюса O , и поворотного перемещения вокруг оси проходящей через полюс O . Так что /рис.4/

$$\bar{P} = \bar{P}_0 + \overline{\sin \alpha} \times \bar{p} + 2 \overline{\sin \frac{\alpha}{2}} \times \left[\overline{\sin \frac{\alpha}{2}} \times \bar{p} \right], \quad /20/$$

где $\bar{P}_0$ — перемещение полюса O .

α — угол поворота, который не больше π .

$\overline{\sin \alpha}, \overline{\sin \frac{\alpha}{2}}$ — векторы по модулю равные $\sin \alpha$ и $\sin \frac{\alpha}{2}$ соответственно и направленные по оси поворота так, что из их концов поворот виден против часовой стрелки,

$\bar{p} = \overline{OM}$ — радиус вектор точки M относительно полюса O .

$\bar{P}$ — перемещение точки M .

Можно доказать, что

$$\overline{\sin \alpha} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \bar{P}. \quad /21/$$

Из формулы /21/ видно, что вихрь перемещения абсолютно твердого тела по модулю не больше двух.

Выражение /20/ наводит на мысль, при изучении деформаций в окрестности некоторой точки O , разложить перемещение деформируемого тела на поступательное, совпадающее с перемещением точки O , поворотное, характеризующее поворот окрестности точки O , как недеформирующейся среды и деформационное, характеризующее деформацию окрестности точки O . Очевидно это разложе-

ДНУЖТ

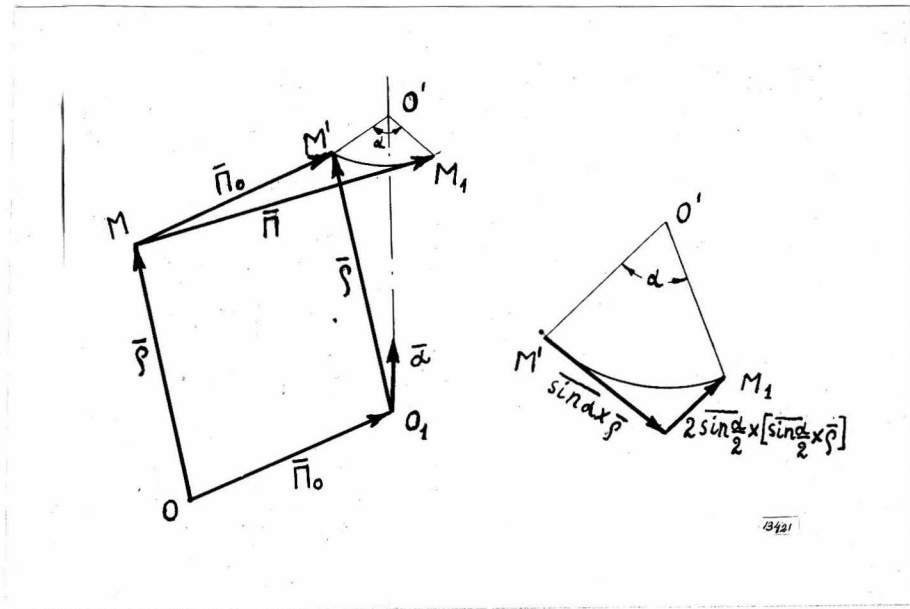


Рис. 4.

ДНУЖТ

ние должно перейти в разложение /20/, если деформации нет. Для этого необходимо угол α определять так, чтобы удовлетворялось /21/, что возможно при выполнении условия

$$|\operatorname{rot} \bar{P}| \leq 2$$

/22/

Вообще говоря для произвольной функции $\bar{P}$ соотношение /22/ не выполняется. Но такие случаи не представляют интереса, они, как показывает анализ, соответствуют очень большим деформациям. С точки зрения малых деформаций, такое разложение представляет большой интерес.

Поэтому мы сформулируем следующее утверждение о разложении перемещений деформируемого тела.

Перемещение деформируемого тела в окрестности произвольной точки O можно представить как сумму поступательного перемещения, совпадающего с перемещением точки O , поворотного перемещения вокруг оси проходящей через точку O и направленной по вихрю перемещения в точке O и деформационного перемещения $\bar{P}_g$, если только выполняется условие /22/.

ДНУЖТ

§ 4. Деформационное перемещение и деформации при малых перемещениях

Если поворотные перемещения малы и в выражении поворотного перемещения можно пренебречь членами порядка $\sin^2 \frac{\alpha}{2}$ ($\sin^2 \frac{\alpha}{2} \ll |\sin \alpha|$), то в силу /20, 21/ получим следующее выражение для определения деформационного перемещения в окрестности произвольной точки O .

$$\bar{\Pi}_g = \bar{\Pi} - \bar{\Pi}_0 - \frac{1}{2} \operatorname{rot} \bar{\Pi} \times \bar{\rho}. \quad /23/$$

Учитывая, что

$$\bar{\Pi} - \bar{\Pi}_0 = (\bar{\rho} \nabla) \bar{\Pi} + \bar{\varepsilon}(\rho^2) = \xi \frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial q_1} + \eta \frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial q_2} + \zeta \frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial q_3} + \bar{\varepsilon}(\rho^2),$$

где

ξ, η, ζ — составляющие вектора $\bar{\rho} = \overline{OM}$ по координатным осям $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$.

$\bar{\varepsilon}(\rho^2)$ — бесконечно малая порядка не выше ρ^2 ,

и воспользовавшись выражением для $\operatorname{rot} \bar{\Pi}$ /8/, мы, пренебрегая членами $\bar{\varepsilon}(\rho^2)$, после несложных преобразований получим следующее выражение для деформационного перемещения малой окрестности точки O .

$$\begin{aligned} \bar{\Pi}_g = & (\xi \varepsilon_1 + \frac{1}{2} \gamma_{12} \eta + \frac{1}{2} \gamma_{13} \zeta) \bar{e}_1 + \\ & + (\frac{1}{2} \gamma_{12} \xi + \varepsilon_2 \eta + \frac{1}{2} \gamma_{23} \zeta) \bar{e}_2 + \\ & + (\frac{1}{2} \gamma_{13} \xi + \frac{1}{2} \gamma_{23} \eta + \varepsilon_3 \zeta) \bar{e}_3, \end{aligned} \quad /24/$$

где

ДНУЖТ

О Г Л А В Л Е Н И Е

В в е д е н и е	2
ГЛАВА I. Элементы теории оболочек	
§1. Криволинейные координаты	I 0
§2. Геометрические соотношения на оболочке	I 4
§ 3. Поступательное, поворотное и деформационное перемещение	20
§4. Деформационное перемещение и деформации при малых перемещениях	25
§5. Малые перемещения и деформации с сохране- нием нормалей	29
§6. Основная гипотеза теории оболочек	35
§7. Усилия и моменты	37
§8. Дифференциальные уравнения равновесия оболочки	46
§9. Граничные условия и условия сопряжения	52
ГЛАВА II.	
§10. Расчетная схема и выбор системы координат . .	58
§11. Дифференциальные уравнения деформации	65
§12. Интегрирование системы дифференциальных уравнений деформации	73
✓ §13. Определение напряжений в диске от действия вертикальной и боковой нагрузок	94
✓ §14. Определение напряжений в диске, возникающих при напрессовке ступицы на ось	101
ГЛАВА III. Решение задачи на универсальной автоматической цифровой вычислительной машине "Урал-1".	
§15. Общая характеристика программы	II 3
§16. Особенности алгоритма	II 5
§17. Алгоритм решения	II 21

ДНУЖТ

ГЛАВА IV. Результаты аналитического исследования

§18. Сходимость рядов, которыми представляются напряжения в диске колеса	134
✓ §19. Форма и основные размеры колес, напряженное состояние которых изучалось аналитически . . .	137
§20. Экспериментальное подтверждение результатов теоретического исследования	139
✓ §21. Расчетные и экспериментальные величины напряжений, возникающих в диске при непрессовке колеса на ось	150
✓ §22. Влияние толщины диска колеса на величину возникающих в диске напряжений	153
✓ §23. Влияние смещения обода на величину напряжений в диске колеса	157
✓ §24. Сравнение напряжений в дисках колес различной конструкции	162
Выводы	165
Литература	167



ДНУЖТ

ДНУЖТ