УДК 517.5

С. А. Пичугов (Днепропетровский национальный университет железнодорожного транспорта им. акад. В. Лазаряна, Днепропетровск)

Оценки снизу для уклонений наилучших линейных методов приближения тригонометрическими полиномами непрерывных функций

В случае равномерной аппроксимации непрерывных периодических функций одной переменной тригонометрическими полиномами получены оценки снизу констант Джексона для наилучших линейных методов приближений.

Оцінки знизу для відхилень найкращих лінійних методів наближення тригонометричними поліномами неперервних функцій

У випадку рівномірної апроксимації неперервних періодичних функцій однієї змінної тригонометричними поліномами отримано оцінки знизу сталих Джексона для найкращих лінійних методів наближень.

Lower estimates for the tolerance of the best linear approximation methods by trigonometric polynomials of continuous functions.

In case of proportional approximation of continuous periodic functions by trigonometric polynomials of one variable the lower estimates of Jackson constant for the best linear approximation methods have been received.

1. Введение. Пусть $C_{2\pi}$ – пространство действительнозначных непрерывных 2π –периодических функций с нормой $\|f\| = \max\{|f(x)|; x \in \mathrm{R}\}$; для $h \geq 0$ $\omega(f,h) = \sup\{\|\Delta_t f\|; |t| \leq h\}$ – модуль непрерывности f из $C_{2\pi}$, где $\Delta_t f(x) = f(x+t) - f(x)$; $\Im^{n-1}$ - подпространство тригонометрических полиномов $T_{n-1}(x)$, $T_{n-1}(x) = \sum_{r=0}^{n-1} \lambda_r \cos rx + \mu_r \sin rx$, степени не выше $n-1$;

$$e_{n-1}(f) = \inf\left\{\|f - T_{n-1}\|; T_{n-1} \in \Im^{n-1}\right\}$$

– наилучшее приближение f подпространством $\Im^{n-1}$.

По теореме Джексона (см. напр. [1]) при любом фиксированном $\alpha > 0$ и всех $n \in \mathrm{N}$ конечна величина

$$\chi\left(\Im^{n-1}; \frac{\alpha}{n}\right) := \sup\left\{\frac{e_{n-1}(f)}{\omega\left(f, \frac{\alpha}{n}\right)}; f \in C_{2\pi}, f \neq const\right\},$$

которая является точной константой в соответствующем неравенстве Джексона для наилучших приближений

$$e_{n-1}(f) \leq \chi\left(\Im^{n-1}; \frac{\alpha}{n}\right)\omega\left(f, \frac{\alpha}{n}\right). \tag{1}$$

Н.П. Корнейчук доказал [2], что при всех $n \in \mathrm{N}$

$$1 - \frac{1}{2n} \leq \chi\left(\Im^{n-1}; \frac{\pi}{n}\right) \leq 1 . \tag{2}$$

В работе [3] было получено обобщение этого результата: при всех $k, n \in \mathrm{N}$

$$\frac{k+1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n}\right) \leq \chi\left(\Im^{n-1}; \frac{\pi}{nk}\right) \leq \frac{k+1}{2} . \tag{3}$$

Наряду с наилучшими приближениями функций важное значение имеет также их приближение линейными методами.

Пусть L_{n-1} – совокупность линейных полиномиальных операторов $A_{n-1} : C_{2\pi} \to \Im^{n-1}$,

$$\chi\left(A_{n-1}; \frac{\alpha}{n}\right) := \sup\left\{\frac{\|f - A_{n-1} f\|}{\omega\left(f, \frac{\alpha}{n}\right)}; f \in C_{2\pi}, f \neq const\right\} \tag{4}$$

– константа Джексона для приближения линейным методом A_{n-1}, а

$$\chi\left(L_{n-1}; \frac{\alpha}{n}\right) = \inf\left\{\chi\left(A_{n-1}; \frac{\alpha}{n}\right); A_{n-1} \in L_{n-1}\right\} \tag{5}$$

– точная константа Джексона для наилучшего линейного метода приближения.

В настоящий момент константы (5) и наилучшие линейные методы при $n>1$ неизвестны.

В [4] доказано, что при $n=2,3,...$

$$\chi\left(L_{n-1};\frac{\pi}{n}\right)>1. \tag{6}$$

Это означает (см. (2)), что точные неравенства Джексона для наилучших приближений (1) для $n>1$ и $\alpha=\pi$ не реализуются линейным методом.

В связи с этим представляют интерес оценки сверху и снизу величин $\chi\left(L_{n-1};\frac{\alpha}{n}\right)$.

Известно много оценок сверху для этих констант, вытекающие из вычисления величин (4) для конкретных линейных методов. Мы отметим работу С.Б. Стечкина [5] по вычислению константы Джексона (4) $\chi\left(\theta_{n-1};\frac{\pi}{n}\right)$ для приближения линейным методом Фавара θ_{n-1}:

$$\theta_{n-1}(f,x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)F_{n-1}(t)\,dt,$$

$$F_{n-1}(t)=1+2\sum_{r=1}^{n-1}\frac{r\pi}{2n}ctg\,\frac{r\pi}{2n}\cos rt. \tag{7}$$

Теорема 1 [5]. *При всех* $n\in\mathrm{N}$ *справедливы равенства*

$$\sup\left\{\frac{\|f-\theta_{n-1}f\|}{\omega\left(f,\frac{\pi}{n}\right)};\ f\in C_{2\pi},\ f\neq const\right\}=\frac{1+\|F_{n-1}\|_1}{2}, \tag{8}$$

причем

$$\sup_n\frac{1}{2}\left(1+\|F_{n-1}\|_1\right)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\left|\int_0^{\pi/2}u\,ctgu\cos tu\,du\right|dt\right),$$

где $\|F_{n-1}\|_1=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|F_{n-1}|\,dt$.

По подсчетом Н.П. Корнейчука [6] (подробности которых не были опубликованы)

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\left|\int_0^{\pi/2}u\,ctgu\cos tu\,du\right|dt\le 1{,}36.$$

Из теоремы 1 вытекает следующая оценка сверху для наилучшего линейного метода в случае $\alpha=\pi$: для $n=2,3,...$

$$\chi\left(L_{n-1};\frac{\pi}{n}\right)\le\chi\left(\theta_{n-1};\frac{\pi}{n}\right)=\frac{1}{2}\left(1+\left\|F_{n-1}\right\|_1\right)\le 1{,}18. \qquad (9)$$

Ниже мы получим оценки снизу для констант $\chi\left(L_{2n-1};\frac{\pi}{2n}\right)$, уточняющие (6). При этом будет найдено точное значение $\chi\left(L_1;\frac{\pi}{2}\right)$ и наилучший линейный метод A_1, который совпал с методом Фавара θ_1. Кроме того, получим оценки снизу для констант $\chi\left(L_{2n-1};\frac{\pi}{2nk}\right)$, $k=2,3,\dots$, из которых в частности следует, что точные неравенства Джексона для наилучших приближений по крайней мере для четных n не реализуются линейным методом ни при каком значении $k\in\mathrm{N}$.

2. Формулировки основных результатов. Имеют место следующие теоремы.

Теорема 2. *При всех* $n\in\mathrm{N}$

$$\chi\left(L_{2n-1};\frac{\pi}{2n}\right)\ge\chi\left(L_1;\frac{\pi}{2}\right)=\chi\left(\theta_1;\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1+\left\|F_{n-1}\right\|_1}{2}=1-\frac{1}{\pi}\arccos\frac{2}{\pi}+\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{\pi^2}}., \qquad (10)$$

Теорема 3. *При* $k=2,3,\dots$ *и всех* $n\in\mathrm{N}$

$$\chi\left(L_{2n-1};\frac{\pi}{2nk}\right)\ge\chi\left(L_1;\frac{\pi}{2k}\right)\ge\frac{k+1}{2}-\frac{k}{\pi}\gamma_k+$$
$$+\frac{1}{4\sin\frac{\pi}{4k}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4k}-\gamma_k\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4k}-\gamma_k\right)-\left(\cos\frac{\pi}{4k}-\sin\frac{\pi}{4k}\right)\right), \qquad (11)$$

где γ_k *из* $\left(0;\frac{\pi}{2k}\right)$ *– корень уравнения*

$$\cos\left(\frac{\pi}{4k}-\gamma_k\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4k}-\gamma_k\right)=\frac{\sin\frac{\pi}{4k}}{\frac{\pi}{4k}}. \qquad (12)$$

Следствие. *При* $k=2,3,\dots$ *и всех* $n\in\mathrm{N}$

$$\chi\left(L_{2n-1};\frac{\pi}{2nk}\right)>\frac{k+1}{2}.$$

3. Вспомогательные утверждения. Для $k\in\mathrm{N}$ и $n=2,3,\dots$ пусть $\overline{\Omega}_{n,k}$ – класс ограниченных измеримых 2π-периодических функций, удовлетворяющих условиям:

$$f(0)=0;\quad f(-x)=f(x);\quad \sup_{|x-x'|\le\frac{\pi}{nk}}\left|f(x)-f(x')\right|\le 1.$$

Лемма 1. *Имеют место соотношения*

$$\chi\left(L_{n-1};\frac{\pi}{nk}\right)=\inf_{\left\{K_{n-1}(t)=1+2\sum_{r=1}^{n-1}\lambda_r\cos rt\right\}}\sup_{f\in\Omega_{n,k}}\frac{1}{\pi}\left|\int_0^{\pi}K_{n-1}(t)f(t)dt\right|. \qquad (13)$$

Доказательство леммы 1. Для заданных $k\in\mathrm{N}$ и $n=2,3,...$ построим равномерное разбиение отрезка $[0,\pi]$ точками $j\frac{\pi}{nk}$, $j=0,1,...,nk$, и определим кусочно постоянную функцию $\omega_{n,k}(h), h\geq 0$, по этому разбиению условиями: $\omega_{n,k}(0)=0$, $\omega_{n,k}(h)=j$ при $h\in\left((j-1)\frac{\pi}{nk}, j\frac{\pi}{nk}\right]$, $j=1,...,nk$, $\omega_{n,k}(h)=nk$ при $h\geq\pi$. Рассмотрим класс функций $\Omega_{n,k}:=\left\{f\in C_{2\pi}:\omega(f,h)\leq\omega_{n,k}(h), h\geq 0\right\}$. Очевидно, что для функций $f\in C_{2\pi}$ условия $\omega\left(f,\frac{\pi}{nk}\right)\leq 1$ и $f\in\Omega_{n,k}$ эквиваленты. Поэтому

$$\chi\left(L_{n-1};\frac{\pi}{nk}\right)=\inf_{A_{n-1}\in L_{n-1}}\sup_{\substack{f\in C_{2\pi}\\ f\neq const}}\frac{\|f-A_{n-1}f\|}{\omega\left(f,\frac{\pi}{nk}\right)}=$$
$$=\inf_{A_{n-1}\in L_{n-1}}\sup_{\omega\left(f,\frac{\pi}{nk}\right)\leq 1}\|f-A_{n-1}f\|=\inf_{A_{n-1}\in L_{n-1}}\sup_{f\in\Omega_{n,k}}\|f-A_{n-1}f\|. \qquad (14)$$

Класс функций $\Omega_{n,k}$ является инвариантным относительно сдвига, поэтому нижнюю грань в (14) достаточно вычислить для операторов $\overline{A}_{n-1}$, перестановочных со сдвигами ([7, с. 195]), то есть для операторов свертки с полиномиальным ядром:

$$\overline{A}_{n-1}(f,x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t-x)K_{n-1}(t)dt,$$

где

$$K_{n-1}(t)=\lambda_0+2\sum_{r=1}^{n-1}\lambda_r\cos rt+\mu_r\sin rt. \qquad (15)$$

Ясно, что в (14) достаточно ограничиться операторами $\overline{A}_{n-1}$, точными на константах, поэтому в (15) $\lambda_0=1$.

Из инвариантности по сдвигу класса $\Omega_{n,k}$ и операторов $\overline{A}_{n-1}$ следует, что

$$\chi\left(L_{n-1};\frac{\pi}{nk}\right)=\inf_{\overline{A}_{n-1}}\sup_{f\in\Omega_{n,k}}\left|f(0)-\overline{A}_{n-1}(f,0)\right|, \qquad (16)$$

а из точности $\overline{A}_{n-1}$ на константах вытекает, что в (16) без ограничения общности достаточно ограничиться функциями f такими, что $f(0)=0$. Для такой функции f из $\Omega_{n,k}$ её четная часть $f_1(x)=\frac{1}{2}\left(f(x)+f(-x)\right)$ также принадлежит $\Omega_{n,k}$. Пусть $a_r(f)$ – косинус-коэффициенты Фурье f. Тогда

$$\sum_{r=1}^{n-1}\lambda_r a_r(f)=f(0)-\overline{A}_{n-1}(f,0)=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}K_{n-1}(t)\,f(t)\,dt=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}K_{n-1,1}(t)\,f_1(t)\,dt, \qquad (17)$$

где $K_{n-1,1}(t)=1+2\sum_{r=1}^{n-1}\lambda_r\cos rt$.

Теперь видно, что экстремум интегрального функционала (17) реализуются для функций из класса $\overline{\Omega}_{n,k}$.

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Для всех* $k,n,j\in\mathrm{N}$ *справедливы соотношения*

$$\chi\left(L_{nj-1};\frac{\pi}{njk}\right)\geq\chi\left(L_{j-1};\frac{\pi}{jk}\right). \qquad (18)$$

Доказательство леммы 2. Пусть E – банахово пространство периодических четных и измеримых функций f, $f(0)=0$, с нормой

$$\|f\|_E=\sup_{x',x''}\frac{\left|f(x')-f(x'')\right|}{\omega_{j,k}\left(\left|x'-x''\right|\right)}.$$

Класс $\overline{\Omega}_{j,k}$ является единичным шаром в E. По теореме двойственности С.Н. Никольского [8], если $F_0,F_1,...,F_{j-1}$ – линейные функционалы на E, и

$$H_{j-1}=\left\{f\in E;\,F_r(f)=0,\,r=\overline{1,j-1}\right\},$$

то

$$\inf_{\lambda_r\in\mathbb{R}}\left\|F_0+\sum_{r=1}^{j-1}\lambda_r F_r\right\|_{E^*}=\sup\left\{F_0(f);\,\|f\|_E\leq 1,\ f\in H_{j-1}\right\}. \qquad (19)$$

Пусть $F_0(f)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(t)\,dt,\ F_r(f)=a_r(f)$. Тогда из леммы 1 и (19) получаем соотношение двойственности для наилучших линейных приближений:

$$\chi\left(L_{j-1};\frac{\pi}{jk}\right)=\inf_{\lambda_r\in\mathbb{R}}\sup_{f\in\overline{\Omega}_{j,k}}\left|\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(t)\,dt+\sum_{r=1}^{j-1}\lambda_r a_r(f)\right|=$$

$$=\sup\left\{\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(t)\,dt;\ f\in\overline{\Omega}_{j,k},\ a_r(f)=0,\ r=\overline{1,j-1}\right\}. \qquad (20)$$

Для функции $f(x)$ из $\overline{\Omega}_{j,k}\bigcap \mathrm{H}_{j-1}$ пусть $G_f(x):=f(nx)$. Тогда $a_r(G_f)=0$, $r=\overline{1,nj-1}$, и

$$\sup\left\{\left|G_f(x')-G_f(x'')\right|;\left|x'-x''\right|\le\frac{\pi}{njk}\right\}=\sup\left\{\left|f(x')-f(x'')\right|;\left|x'-x''\right|\le\frac{\pi}{jk}\right\},$$

то есть $G_f\in\overline{\Omega}_{nj,k}\bigcap \mathrm{H}_{nj-1}$. Поэтому

$$\chi\left(L_{nj-1};\frac{\pi}{njk}\right)=\sup\left|\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}G(t)\,dt;G\in\overline{\Omega}_{nj,k}\bigcap \mathrm{H}_{nj-1}\right|\ge$$

$$\ge\sup\left|\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}G_f(t)\,dt;\,f\in\overline{\Omega}_{j,k}\bigcap \mathrm{H}_{j-1}\right|=\sup\left|\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(t)\,dt;\,f\in\overline{\Omega}_{j,k}\bigcap \mathrm{H}_{j-1}\right|=\chi\left(L_{j-1};\frac{\pi}{jk}\right).$$

Лемма 2 доказана.

В частности, при $j=2$

$$\chi\left(L_{2n-1};\frac{\pi}{2nk}\right)\ge\chi\left(L_1;\frac{\pi}{nk}\right). \tag{21}$$

Аналогичные (21) соотношения использовал В.В. Шалаев [9] для оценок снизу уклонений линейных методов для классов H^{ω}.

4. Доказательство основных результатов.

Доказательство теоремы 2. Из лемм 2, 1 следует, что

$$\chi\left(L_{2n-1};\frac{\pi}{2nk}\right)\ge\chi\left(L_1;\frac{\pi}{2k}\right)=\inf_{\lambda\in\mathbb{R}}\sup_{f\in\overline{\Omega}_{2,k}}\frac{1}{\pi}\left|\int_0^{\pi}K_1(t)\,f(t)dt\right|, \tag{22}$$

где $K_1(t)=1+2\lambda\cos t$.

Пусть $k=1$. Для произвольного значения параметра $\gamma\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ определим следующие функции $f_\gamma(x)$ и $g_\gamma(x)$ из $\overline{\Omega}_{2,1}$:

$$f_\gamma(0)=0;\quad f_\gamma(x)=1,\,x\in(0,\pi-\gamma];\quad f_\gamma(x)=0,\,x\in[\pi-\gamma,\pi];\quad f_\gamma(-x)=f_\gamma(x);$$
$$f_\gamma(x+2\pi)=f_\gamma(x);$$

$$g_\gamma(x)=f_\gamma(x),\,|x|\le\frac{\pi}{2};\quad g_\gamma(x)=f_\gamma(x)+1,\,|x|\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right);\quad g_\gamma(\pi)=0;$$
$$g_\gamma(x+2\pi)=g_\gamma(x).$$

Эти функции используем для оценок снизу $\chi\left(L_1;\frac{\pi}{2}\right)$.

Если $\lambda\ge\frac{\pi}{4}$, то

$$\frac{1}{\pi}\left|\int_0^{\pi} K_1(t)\, f_\gamma(t)dt\right| = \frac{1}{\pi}\left|\int_0^{\pi}(1+2\lambda\cos t)\, f_\gamma(t)dt\right| = 1-\frac{\gamma}{\pi}+\frac{2\lambda}{\pi}\sin\gamma \ge 1-\frac{\gamma}{\pi}+\frac{1}{2}\sin\gamma. \quad (23)$$

Если $\lambda\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$, то

$$\frac{1}{\pi}\left|\int_0^{\pi} K_1(t)\, g_\gamma(t)dt\right| = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} K_1(t)\, f_\gamma(t)dt+\frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} K_1(t)\,dt = \left(1-\frac{\gamma}{\pi}+\frac{2\lambda}{\pi}\sin\gamma\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{2\lambda}{\pi}\right)=$$

$$=\frac{3}{2}-\frac{\gamma}{\pi}+\frac{2\lambda}{\pi}(\sin\gamma-1)\ge\frac{3}{2}-\frac{\gamma}{\pi}+\frac{1}{2}(\sin\gamma-1)=1-\frac{\gamma}{\pi}+\frac{1}{2}\sin\gamma. \quad (24)$$

Если $\lambda<0$, то оценки снизу (23), (24) получим заменой функций $f_\gamma(x)$ и $g_\gamma(x)$ соответственно на функции $f_\gamma(\pi-x)$ и $g_\gamma(\pi-x)$, которые также принадлежат классу $\overline{\Omega}_{2,1}$.

Теперь из (22), (23), (24) следует необходимая оценка снизу:

$$\chi\left(L_1;\frac{\pi}{2}\right)\ge\max_{\gamma\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]}\left(1-\frac{\gamma}{\pi}+\frac{1}{2}\sin\gamma\right)=1-\frac{\gamma_1}{\pi}+\frac{1}{2}\sin\gamma_1,$$

где $\gamma_1=\arccos\frac{2}{\pi}$.

Для оценки сверху величины $\chi\left(L_1;\frac{\pi}{2}\right)$ рассмотрим линейный метод свертки с ядром $K_1(t)=1+\frac{\pi}{2}\cos t$. Это ядро совпадает с ядром F_1 метода Фавара (см. (7)). Так как $F_1(\pi-\gamma_1)=0$, то

$$\|F_1\|_1=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left|1+\frac{\pi}{2}\cos t\right|dt=\frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi-\gamma_1}\left(1+\frac{\pi}{2}\cos t\right)dt-\int_{\pi-\gamma_1}^{\pi}\left(1+\frac{\pi}{2}\cos t\right)dt\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\left(\pi-\gamma_1+\frac{\pi}{2}\sin\gamma_1\right)-\left(\gamma_1-\frac{\pi}{2}\sin\gamma_1\right)\right)=1-\frac{2\gamma_1}{\pi}+\sin\gamma_1,$$

и по теореме 1 С.Б. Стечкина

$$\chi\left(L_1;\frac{\pi}{2}\right)\le\chi\left(\theta_1;\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(1+\|F_1\|_1\right)=1-\frac{\gamma_1}{\pi}+\frac{1}{2}\sin\gamma_1.$$

Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. Пусть $k=2,3,\dots$ Для произвольного значения параметра $\gamma\in\left[0,\frac{\pi}{2k}\right)$ рассмотрим следующую кусочно постоянную функцию $f_\gamma(x)$ из $\overline{\Omega}_{2,k}$:

$$f_\gamma(0)=0;\quad f_\gamma(-x)=f_\gamma(x);\quad f_\gamma(x)=j \text{ для } x\in\left((j-1)\frac{\pi}{2k},\, j\frac{\pi}{2k}\right],\ j=1,\dots,k;$$

$$f_\gamma(x)=k \text{ для } x\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2k}-\gamma\right];$$

$$f_\gamma(x)=k-j \text{ для } x\in\left(\frac{\pi}{2}+j\frac{\pi}{2k}-\gamma,\frac{\pi}{2}+(j+1)\frac{\pi}{2k}-\gamma\right],\ j=1,\dots,k-1;$$

$$f_\gamma(x)=0 \text{ для } x\in(\pi-\gamma,\pi];\quad f_\gamma(x+2\pi)=f_\gamma(x).$$

Вычислим значение интеграла $\frac{1}{\pi}\left|\int_0^\pi(1+2\lambda\cos t)\, f_\gamma(t)dt\right|$.

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi f_\gamma(t)dt=\frac{1}{\pi}2\sum_{j=1}^{k-1} j\frac{\pi}{2k}+\frac{1}{\pi}k\left(\frac{\pi}{2k}+\frac{\pi}{2k}-\gamma\right)=\frac{k+1}{2}-\frac{k\gamma}{\pi}.$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi f_\gamma(t)\cos t dt=-\sum_{j=1}^{k-1}\sin j\frac{\pi}{2k}+\sum_{j=1}^{k}\sin\left(\frac{\pi}{2}+j\frac{\pi}{2k}-\gamma\right)=-\sum_{j=1}^{k-1}\sin j\frac{\pi}{2k}+\sin\gamma+$$
$$+\sum_{j=1}^{k-1}\left(\cos j\frac{\pi}{2k}\cos\gamma+\sin j\frac{\pi}{2k}\sin\gamma\right).$$

Так как

$$\sum_{j=1}^{k-1}\cos j\frac{\pi}{2k}=\sum_{j=1}^{k-1}\sin j\frac{\pi}{2k}=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{4k}}\left(\cos\frac{\pi}{4k}-\sin\frac{\pi}{4k}\right),$$

то

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi f_\gamma(t)\cos t dt=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{4k}}\left(\cos\frac{\pi}{4k}-\sin\frac{\pi}{4k}\right)(\cos\gamma+\sin\gamma-1)+\sin\gamma=$$
$$=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{4k}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4k}-\gamma\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4k}-\gamma\right)-\left(\cos\frac{\pi}{4k}-\sin\frac{\pi}{4k}\right)\right)=:\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{4k}}\psi(\gamma).$$

Поэтому

$$\frac{1}{\pi}\left|\int_0^\pi(1+2\lambda\cos t)\, f_\gamma(t)dt\right|=\left|\frac{k+1}{2}-\frac{k\gamma}{\pi}+\frac{2\lambda}{\pi}\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{4k}}\psi(\gamma)\right|. \tag{25}$$

Пусть $\lambda\ge\frac{\pi}{4}$. Так как для $\gamma\in\left[0,\frac{\pi}{2k}\right]$

$$\psi'(\gamma)=\sin\left(\frac{\pi}{4k}-\gamma\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4k}-\gamma\right)\geq 0, \text{ то } \psi(\gamma)\geq\psi(0)=0, \text{ и}$$

$$\left|\frac{k+1}{2}-\frac{k\gamma}{\pi}+\frac{2\lambda}{\pi}\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{4k}}\psi(\gamma)\right|\geq\frac{k+1}{2}-\frac{k\gamma}{\pi}+\frac{1}{4\sin\frac{\pi}{4k}}\psi(\gamma):=\psi_1(\gamma). \tag{26}$$

Далее, так как для $\gamma\in\left(0,\frac{\pi}{2k}\right)$

$$\psi_1''(\gamma)=\frac{1}{4\sin\frac{\pi}{4k}}\left(-\cos\left(\frac{\pi}{4k}-\gamma\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4k}-\gamma\right)\right)<0,$$

$\psi_1(0)=\psi_1\left(\frac{\pi}{2k}\right)=\frac{k+1}{2}$, то функция $\psi_1(\gamma)$ строго выпуклая вверх на $\left[0,\frac{\pi}{2k}\right]$ и имеет на этом отрезке единственный максимум в точке γ_k, определяемой условием $\psi_1'(\gamma_k)=0$, то есть γ_k - корень уравнения (12).

Из (25), (26) следует, что

$$\inf_{\lambda\geq\frac{\pi}{4}}\sup_{f\in\overline{\Omega}_{2,k}}\frac{1}{\pi}\left|\int_0^\pi(1+2\lambda\cos t)\,f(t)dt\right|\geq\psi_1(\gamma_k)=\frac{k+1}{2}-\frac{k\gamma_k}{\pi}+$$

$$+\frac{1}{4\sin\frac{\pi}{4k}}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{4k}-\gamma_k\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4k}-\gamma_k\right)-\left(\cos\frac{\pi}{4k}-\sin\frac{\pi}{4k}\right)\right\}. \tag{27}$$

Заметим, что так как $\psi_1(\gamma)>\psi_1(0)=\frac{k+1}{2}$, то значение правой части неравенства (27) строго больше $\frac{k+1}{2}$.

Пусть $\lambda\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$. Теперь для оценки снизу используем функции $g_\gamma(x)$ из $\overline{\Omega}_{2,k}$,

$$g_\gamma(x)=f_\gamma(x) \text{ для } |x|\leq\frac{\pi}{2};\quad g_\gamma(x)=f_\gamma(x)+1 \text{ для } |x|\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right);\quad g_\gamma(\pi)=0;$$

$g_\gamma(x+2\pi)=g_\gamma(x)$.

Тогда (см. (25))

$$\frac{1}{\pi}\left|\int_0^\pi(1+2\lambda\cos t)\,g_\gamma(t)dt\right|=\frac{1}{\pi}\left|\int_0^\pi(1+2\lambda\cos t)\,f_\gamma(t)dt+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(1+2\lambda\cos t)\,dt\right|=$$

$$=\left(\frac{k+1}{2}-\frac{k\gamma}{\pi}+\frac{2\lambda}{\pi}\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{4k}}\psi(\gamma)\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{2\lambda}{\pi}\right)=\frac{k}{2}+1-\frac{k\gamma}{\pi}+$$

$$+\frac{2\lambda}{\pi}\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{4k}}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{4k}-\gamma\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4k}-\gamma\right)-\cos\frac{\pi}{4k}-\sin\frac{\pi}{4k}\right\}=$$

$$=:\frac{k}{2}+1-\frac{k\gamma}{\pi}+\frac{2\lambda}{\pi}\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{4k}}\psi_2(\gamma). \tag{28}$$

Так как $\psi_2'(\gamma)=\sin\left(\frac{\pi}{4k}-\gamma\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4k}-\gamma\right)>0,$ то $\psi_2(\gamma)\le\psi_2\left(\frac{\pi}{2k}\right)=0$, и при $\lambda\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ (см. (26))

$$\frac{k}{2}+1-\frac{k\gamma}{\pi}+\frac{2\lambda}{\pi}\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{4k}}\psi_2(\gamma)\ge\frac{k}{2}+1-\frac{k\gamma}{\pi}+\frac{1}{4\sin\frac{\pi}{4k}}\psi_2(\gamma)=\psi_1(\gamma)\ge\psi_1(\gamma_k). \tag{29}$$

Из (28), (29) следует, что оценка снизу (27) справедлива для всех $\lambda\ge 0$. Если $\lambda<0$, то такую же оценку получим, если вместо функций $f_\gamma(x)$ и $g_\gamma(x)$ использовать функции $f_\gamma(\pi-x)$ и $g_\gamma(\pi-x)$.

Теперь из (22) получаем утверждение теоремы 3.

5. Дополнения к теореме 2.

1.Так как $\gamma_1=\arccos\frac{1}{\pi}=0{,}8806892354...$,

то

$$\chi\left(L_1;\frac{\pi}{2}\right)=1-\frac{\gamma_1}{\pi}+\frac{1}{2}\sin\gamma_1=1{,}105256831....$$

2. Приведем еще другое доказательство теоремы 2, основанное на соотношении двойственности (20) (при $j=2$ и $k=1$).

Рассмотрим следующую функцию $h(x)$ из $\overline{\Omega}_{2,1}$:

$$h(0)=0;\quad h(x)=1, |x|\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right];\quad h(x)=1+\sin\gamma_1, |x|\in\left(\frac{\pi}{2},\pi-\gamma_1\right];$$

$$h(x)=\sin\gamma_1, |x|\in(\pi-\gamma_1,\pi);\quad h(\pi)=0;\quad h(x+2\pi)=h(x),$$

где γ_1 из $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ такое, что $\cos\gamma_1=\frac{2}{\pi}$.

Тогда $\frac{1}{\pi}\int_0^\pi h(x)\cos x\,dx=0$, и

$$\chi\left(L_1;\frac{\pi}{2}\right)\ge\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}h(x)dx=1-\frac{\gamma_1}{\pi}+\frac{1}{2}\sin\gamma_1.$$

Это доказательство проще первоначального, но из него не видно экстремального свойства ядра $K_1(t)=1+\frac{\pi}{2}\cos t$.

В заключение докажем двусторонние оценки для константы $\chi\left(L_2;\frac{\pi}{3}\right)$.

Лемма 3. *Имеют место неравенства*

$$1{,}110042<\chi\left(L_2;\frac{\pi}{3}\right)<1{,}125681. \tag{30}$$

Доказательство. Оценка сверху вытекает из теоремы 1: так как $\|F_2\|_1<1{,}251361$ (вычисления в программе Maple), то

$$\chi\left(L_2;\frac{\pi}{3}\right)\le\chi\left(\theta_2;\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1+\|F_2\|_1}{2}<1{,}125681.$$

Для оценки снизу с помощью параметров $\xi_1,\xi_2,\beta_1,\beta_2$,

$$\xi_1\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right],\ \xi_2\in\left[\frac{2\pi}{3},\pi\right),\ \beta_1\in(1,2],\ \beta_2-\beta_1\in(0,1] \tag{31}$$

определим функции $h(x)$ из класса $\overline{\Omega}_{2,1}$:

$h(0)=0;\quad h(x)=1,|x|\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right];\quad h(x)=1+\beta_1,|x|\in\left(\frac{\pi}{3},\xi_1\right];$

$h(x)=\beta_1,|x|\in(\xi_1,\xi_2];\quad h(x)=\beta_2,|x|\in(\xi_2,\pi];\quad h(x+2\pi)=h(x).$

Пусть $a_1(h)=a_2(h)=0$. Тогда

$$\beta_2-\beta_1=\frac{\sin\xi_1}{1-2\cos\xi_2}\frac{1-2\cos\xi_1}{\sin\xi_2},\quad \beta_1=\frac{\sin\xi_1}{1-2\cos\xi_2}\frac{2}{\sin\frac{\pi}{3}}(\cos\xi_1-\cos\xi_2), \tag{32}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}h(x)dx=\frac{\xi_1}{\pi}+\frac{\sin\xi_1}{1-2\cos\xi_2}\left(\frac{1-2\cos\xi_1}{\sin\xi_2}\left(1-\frac{\xi_2}{\pi}\right)+\frac{4}{3\sin\frac{\pi}{3}}(\cos\xi_1-\cos\xi_2)\right)=$$

$=:\varphi(\xi_1,\xi_2)$,

и из соотношений двойственности (20) следует, что $\chi\left(L_2;\frac{\pi}{3}\right)\ge\sup\varphi(\xi_1,\xi_2)$, где верхняя грань вычисляется при ограничениях (31), (32). Оценку снизу этой верхней грани получим, положив $\xi_1=\frac{\pi}{2},\ \xi_2=\frac{5}{6}\pi.$ Тогда

$\beta_1=\beta_2-\beta_1=\sqrt{3}-1,$

$$\varphi\left(\frac{\pi}{2},\frac{5}{6}\pi\right)=\frac{1}{2}+\frac{5}{6}\left(\sqrt{3}-1\right)=1{,}11004234\ldots.$$

Из (10 и (18) при $j=3, k=1$ получаем следующее дополнение к оценкам снизу в теореме 2:

$$\chi\left(L_{6n+r};\frac{\pi}{6n+r+1}\right)\geq\chi\left(L_1;\frac{\pi}{2}\right)=1{,}105256\ldots \quad \text{при} \quad r=1,3;$$

$$\chi\left(L_{6n+r};\frac{\pi}{6n+r+1}\right)\geq\chi\left(L_2;\frac{\pi}{3}\right)>1{,}110042 \quad \text{при} \quad r=2,5.$$

1. *Корнейчук Н.П.* Точные константы в теории приближения. – М.: Наука, 1987. – 320 с.
2. *Корнейчук Н.П.* Точная константа в теореме Джексона о наилучшем равномерном приближении непрерывных периодических функций / / Докл. АН СССР. – 1962. – **145**, №3. – С. 514–515.
3. *Корнейчук Н.П.* О точной константе в неравенстве Джексона для непрерывных периодических функций / / Мат. заметки – 1982. – **32**, №5. – С. 669–674.
4. *Шалаев В.В.* Некоторые точные оценки приближения функций линейными полиномиальными методами. Дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук. – Днепропетровск: 1980.
5. *Стечкин С.Б.* О Приближение непрерывных периодических функций суммами Фавара/ / Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1971. – **119**. – С. 26–34.
6. *Корнейчук Н.П.* Об оценке приближений функций класса H^{α} тригонометрическими многочленами / / В. сб. Исследования по современным проблемам конструктивной теории функций. – 1961. – **1**, – С. 148–154.
7. *Тихомиров В.М.* Некоторые вопросы теории приближений. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1976. – 624 с.
8. *Никольский С.М.* Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем / / Изв. АН СССР, сер. матем. – 1946. – С. 207–256.
9. *Шалаев В.В.* О погрешности наилучшего на классе H^{ω} периодических функций линейного полиномиального метода. Рукопись представлена Днепропетр. ун-том. Ден. в Укр НИИИТИ. – Днепропетровск, 1980. – 17 с.