

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

**Український державний університет  
науки і технологій**

---

Кафедра «Будівельне виробництво та геодезія»

*В авторській редакції*

**БУДІВЕЛЬНІ КОНСТРУКЦІЇ**  
**ОЦІНКА ЕФЕКТИВНОСТІ ЗАСТОСУВАННЯ**  
**БУДІВЕЛЬНИХ МАТЕРІАЛІВ**

Методичні рекомендації до практичних занять

Електронний аналог  
друкованого видання

Дніпро 2022

Укладач  
докт. техн. наук, проф. *Д. О. Банніков*

Експерти:  
канд. техн. наук, доц. *Н. А. Нікіфорова* (ННІ «ДІТ»)  
канд. техн. наук, доц. *С. М. Косячевська* (ННІ «ДІТ»)

Рекомендовано до друку МКФ ПЦБ (протокол № 1 від 14.09.2022 р.).  
Зареєстровано ННЦ ЗЯО УДУНТ (підстава № 578 від 02.12.2022 р.).

**Будівельні** конструкції. Оцінка ефективності застосування будівельних матеріалів: методичні рекомендації до практичних занять: 2-ге вид. виправ. / уклад. Д. О. Банніков. Дніпро: Укр. держ. ун-т науки і технологій. – 2022. – 35 с.

У методичних рекомендаціях викладено послідовність спрощеної оцінки несучої здатності конструктивних елементів будівлі на прикладі несучої колони, яка може бути виконана з різних будівельних матеріалів. Подано методику порівняння отриманих проектних рішень, на підставі якої може бути визначений найбільш ефективний конструктивний варіант.

Методичні рекомендації призначені для практичних занять і самостійної роботи студентів освітнього ступеня «бакалавр» за ОП «Промислове і цивільне будівництво та ОП «Будівництво та експлуатація будинків і споруд спеціального та загальновійськового призначення» спеціальності 192 «Будівництво та цивільна інженерія» під час опрацювання дисципліни «Будівельні конструкції», а також можуть бути корисними під час виконання курсових проектів з фахових дисциплін, підготовки кваліфікаційних бакалаврських і магістерських робіт.

Іл. 3. Табл. 4. Бібліогр.: 7 назв.

© Банніков Д. О., укладання, 2022  
© Укр. держ. ун-т науки і технологій, 2022

## ЗМІСТ

|                                                                   |    |
|-------------------------------------------------------------------|----|
| ВСТУП .....                                                       | 4  |
| ВИМОГИ ДО ПІДГОТОВКИ Й ОФОРМЛЕННЯ ЗВІТУ .....                     | 6  |
| ВИБІР ВИХІДНИХ ДАНИХ .....                                        | 7  |
| Приклад виконання .....                                           | 7  |
| 1. УМОВА МІЦНОСТІ .....                                           | 10 |
| Приклад виконання .....                                           | 12 |
| 2. УМОВА ЖОРСТКОСТІ .....                                         | 18 |
| 2.1. Умова жорсткості на стиск .....                              | 19 |
| Приклад виконання .....                                           | 20 |
| 2.2. Умова жорсткості на згин .....                               | 21 |
| Приклад виконання .....                                           | 23 |
| 3. ВИБІР МАТЕРІАЛУ .....                                          | 25 |
| 3.1. Визначення розмірів перерізу колони .....                    | 25 |
| Приклад виконання .....                                           | 25 |
| 3.2. Розрахунок укрупнених показників .....                       | 26 |
| Приклад виконання .....                                           | 27 |
| ВИСНОВОК ПО РОБОТІ .....                                          | 28 |
| БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК .....                                      | 29 |
| Додаток А. ВИХІДНІ ДАНІ ДО РОБОТИ .....                           | 30 |
| Додаток Б. ДОВІДКОВІ ДАНІ ДО РОБОТИ .....                         | 32 |
| Додаток В. ТРИГОНОМЕТРИЧНИЙ РОЗВ'ЯЗОК КУБІЧНОГО<br>РІВНЯННЯ ..... | 33 |

## ВСТУП

У практиці проектування досить часто виникає ситуація, коли є можливість виконати певну будівельну конструкцію з різних будівельних матеріалів. При цьому, звісно, постає питання щодо оцінки ефективності кожного з можливих варіантів конструктивного рішення, їх зіставлення між собою та вибору остаточного найкращого варіанта.

Така ситуація вимагає вміння від інженера виконати попередню спрощену оцінку несучої здатності основних конструктивних елементів майбутньої будівлі, адже розробка детального проекту декількох варіантів конструкції з різних будівельних матеріалів виявляється занадто дорогим і тривалим процесом, що є практично неможливим в умовах сучасного будівництва.

Основна складність при цьому полягає в тому, що одні й ті самі архітектурні рішення для різних будівельних матеріалів потребують різних конструктивних рішень. Це пов'язано з необхідністю враховувати різноманітні фізико-механічні властивості певних будівельних матеріалів, відмінності у їх поведінці під зовнішнім навантаженням, наявність низки специфічних властивостей. У результаті як сам процес розрахунку й конструювання основних несучих елементів майбутньої будівлі, так і остаточне їх проектно-конструкторське рішення для різних будівельних матеріалів виявляються доволі різними й мають ряд принципових особливостей.

Усі такі особливості детально розглядаються та аналізуються під час професійної підготовки інженерів-будівельників у ході вивчення спеціальних профільюючих дисциплін: “Залізобетонні та кам’яні конструкції”, “Металеві конструкції”, “Конструкції з дерева та пластмаси”. Проте досить часто загальний системний погляд на оцінку та вибір більш ефективного конструктивного варіанта в результаті не формується. Цей недолік частково усувається під час самостійного опрацювання та розробки дипломної магістерської роботи, хоча в багатьох випадках порівняльна оцінка конструктивних властивостей різних будівельних матеріалів так і залишається поза увагою.

Стосовно змісту та структури даних методичних рекомендацій слід зауважити, що до їх складу автор включив спрощену оцінку несучої здатності одного з найважливіших несучих конструктивних елементів будівель – колони каркаса. Спрощеність подібної оцінки полягає в аналізі лише умов міцності та жорсткості, не беручи до уваги умови стійкості. Остання умова є досить складною та для кожного з будівельних матеріалів описується зовсім різними залежностями. Умови міцності та жорсткості є більш простими та однотипними, що дозволяє на їх основі змодельовати ситуацію вибору більш ефективного та раціонального будівельного матеріалу в певному випадку.

На практичних заняттях студент опрацьовує практичне завдання, відповідно до якого готується звіт за практичними заняттями (за узгодженням із викладачем студенту може бути наданий індивідуальний варіант практичної роботи). Це сприятиме досягненню наступних очікуваних результатів навчання відповідно до робочих програм:

- 11) Змінити запропоноване конструктивне рішення будівельної конструкції з метою пристосування його до заданих умов експлуатації.
- 12) Порівнювати запропоновані конструктивні варіанти будівельних конструкцій з метою вибору найбільш ефективного.

Практична робота передбачає практичне ознайомлення з найважливішими особливостями та правилами визначення основних розрахункових характеристик будівельних матеріалів відповідно до чинних в Україні нормативних документів. У роботі передбачено розгляд семи видів будівельних матеріалів (бетону, каменю, сталі, алюмінію, деревини, пластмаси та деревних пластиків), які можуть використовуватись для несучих елементів будівельних конструкцій. Для визначеного конструктивного елемента – колони – необхідно провести спрощену оцінку її несучої здатності, за умови її виконання з трьох різних будівельних матеріалів, обраних за індивідуальними вихідними даними.

Оскільки в ході реального проектування завжди є можливість обрати більш раціональний для заданих умов будівельний матеріал, то в останньому розділі роботи на основі розрахунку укрупнених показників подається порівняльна характеристика для кожного із заданих за вихідними даними будівельних матеріалів.

**Методологічною метою роботи є набуття та закріплення студентами навичок самостійної роботи із чинними нормативними документами з питань визначення основних розрахункових характеристик будівельних матеріалів, а також навичок їх використання для спрощеної оцінки несучої здатності конструктивних елементів будівель і споруд.**

## ВИМОГИ ДО ПІДГОТОВКИ Й ОФОРМЛЕННЯ ЗВІТУ

Звіт за практичними заняттями готується кожним студентом самостійно відповідно до цих методичних вказівок. Вихідні дані до завдання обираються за додатком відповідно до затвердженого й підписаного викладачем бланка завдання, на якому ним проставляються необхідні номери за четвертою і п'ятою позиціями даних та вказується індивідуальний літерний шифр. Правила складання літерного шифру визначає викладач.

Якщо виникають будь-які непорозуміння або невідповідності з вибором вихідних даних, слід звернутися до викладача для узгодження цього питання. **У випадку, якщо вихідні дані обрані студентом неправильно або з помилками, робота вважається недійсною та потребує переробки за правильними даними.**

Звіт треба готувати в тій послідовності, в якій подано матеріал у методичних вказівках. При цьому не слід пропускати окремі розділи, навіть якщо вони здаються непотрібними.

Працюючи з текстом кожного розділу роботи, необхідно спочатку уважно ознайомитися з матеріалом, наведеним у його змістовній частині. Потім розібратись із наведеним прикладом виконання розрахунків, звертаючи увагу на незрозумілі місця, стосовно яких можна отримати роз'яснення у викладача. Далі за власними вихідними даними виконати аналогічні обчислення, чітко дотримуючись вказаної в методичних вказівках послідовності. Під час використання нормативно-довідкової літератури слід звертатися до теоретичних відомостей, розглянутих на лекційних та практичних заняттях.

У випадку виникнення певних утруднень та невизначеностей слід припинити роботу й також звернутися до викладача для отримання відповідної консультації. У цьому разі не рекомендується продовжувати подальші обчислення, оскільки вони можуть виявитися неправильними та потребуватимуть у майбутньому коректування або спростовування.

Повністю підготовлений звіт оформлюється на стандартних аркушах білого паперу формату А4 з дотриманням вимог чинних державних стандартів щодо оформлення проектної документації в будівництві. Робота обов'язково повинна бути жорстко скріплена, мати титульний аркуш прийнятого в університеті зразка, рамочки на кожному листі (відступи зліва 20 мм, з інших сторін по 5 мм), сторінки мають бути пронумеровані. У своєму звіті студенту також необхідно навести всі рисунки і таблиці, подані в даних методичних вказівках, з наскрізною нумерацією відповідно до свого варіанта вихідних даних. Не слід переписувати наведений у цих методичних вказівках загальний текстовий матеріал.

**Неправильно або неохайно оформлений звіт повертається студенту для доопрацювання.**

## ВИБІР ВИХІДНИХ ДАНИХ

Виконання розрахунково-графічної роботи необхідно розпочинати з вибору вихідних даних відповідно до бланка завдання. Вихідні дані складаються з восьми позицій. Перші три позиції обираються за результатами виконання розрахунково-графічної роботи № 1, четверта та п'ята позиції визначають види будівельних матеріалів, що мають аналізуватися в цій розрахунково-графічній роботі. Останні три позиції вихідних даних встановлюють деякі конструктивні обмеження для розглядуваного елемента будівлі – колони.

Кожна позиція має власний номер, на який є посилання у певних місцях методичних вказівок. Тому слід дуже уважно та ретельно виписати ці дані.

### Приклад виконання

Виберемо вихідні дані відповідно до позицій, наведених у бланку завдання.

#### 1. Значення зусиль від навантажень.

Ця позиція задається викладачем. В практиці проектування її приймають за результатами попередньої оцінки рівня діючих на будівельну конструкцію навантажень та їх оцінки.

В даному випадку приймемо наступні значення:

| Номер сполучення | Вид розрахункового зусилля | Поздовжня сила $N$ , кН | Згинальний момент $M_1$ , кН · м | Згинальний момент $M_2$ , кН · м |
|------------------|----------------------------|-------------------------|----------------------------------|----------------------------------|
| 1                | Граничне                   | 1184                    | 40,0                             | -                                |
|                  | Експлуатаційне             | 972                     | 7,4                              | -                                |
| 2                | Граничне                   | 724                     | 66,6                             | -                                |
|                  | Експлуатаційне             | 632                     | 12,3                             | -                                |
| 3                | Граничне                   | 1054                    | 59,9                             | -                                |
|                  | Експлуатаційне             | 904                     | 11,1                             | -                                |

#### 2. Висота колони.

Ця позиція задається викладачем. В практиці проектування її приймають за результатами попередніх архітектурно-будівельних креслень.

В даному випадку приймемо наступне значення:  $L = 8,4$  м.

#### 3. Колона для збору навантажень.

Ця позиція задається викладачем відповідно до рис. 1,а.

В даному випадку приймемо колону № 3.

#### 4. Тип будівельного матеріалу.

Навпроти цієї позиції в бланку завдання проставлено відповідне число, яке

позначає номер варіанта комбінації будівельних матеріалів, з яких можуть виготовлятися основні несучі елементи будівлі. Вона визначається за табл. А.1 додатка А.

У цій практичній роботі необхідно проаналізувати три різні будівельні матеріали. Проте в якості прикладу приймемо два, які є найпоширенішими в теперішній час, – бетон та сталь.

#### 5. Вид будівельного матеріалу.

Навпроти цієї позиції в бланку завдання проставлено відповідне число, яке позначає номер варіанта, конкретизуючи різновид будівельного матеріалу. Він визначається за табл. А.2 дод. А.

Як приклад приймемо:

- бетон класу С8/10;
- сталь марки Ст3кп2.

Наступні позиції вихідних даних обираються за індивідуальним літерним шифром, визначеним викладачем.

#### 6. Відношення розмірів перерізу елемента.

Як приклад приймемо – 0,7.

#### 7. Допустима вертикальна деформація.

Як приклад приймемо – 3 мм.

#### 8. Допустима горизонтальна деформація.

Як приклад приймемо –  $L/250$ .

Після того як вихідні дані виписані, необхідно визначитися з розташуванням відносно прикладених зусиль розглядуваного конструктивного елемента – колони.

Форма колони з навчальною метою приймається прямокутною, незалежно від видів заданих за вихідними даними будівельних матеріалів. Для заданої колони № 3 (позиція 3 вихідних даних) її орієнтація зображена на рис. 1,б. Правильне розташування колони має важливе значення, оскільки зовнішнє навантаження має бути прикладене у відповідних площинах.

Розглядаючи напружено-деформованого стан, необхідно враховувати наявність перекриттів, що створюють жорсткі проміжні опори, тому розглядувана колона аналізується лише на ділянці одного поверху. При цьому розміри перерізу колони, які поки що невідомі, позначені як  $b$  та  $h$ , де  $b$  – ширина перерізу колони (менший розмір),  $h$  – висота перерізу колони (більший розмір). На цьому ж рис. 1 слід позначити прикладені зусилля та довжину колони  $L$ .



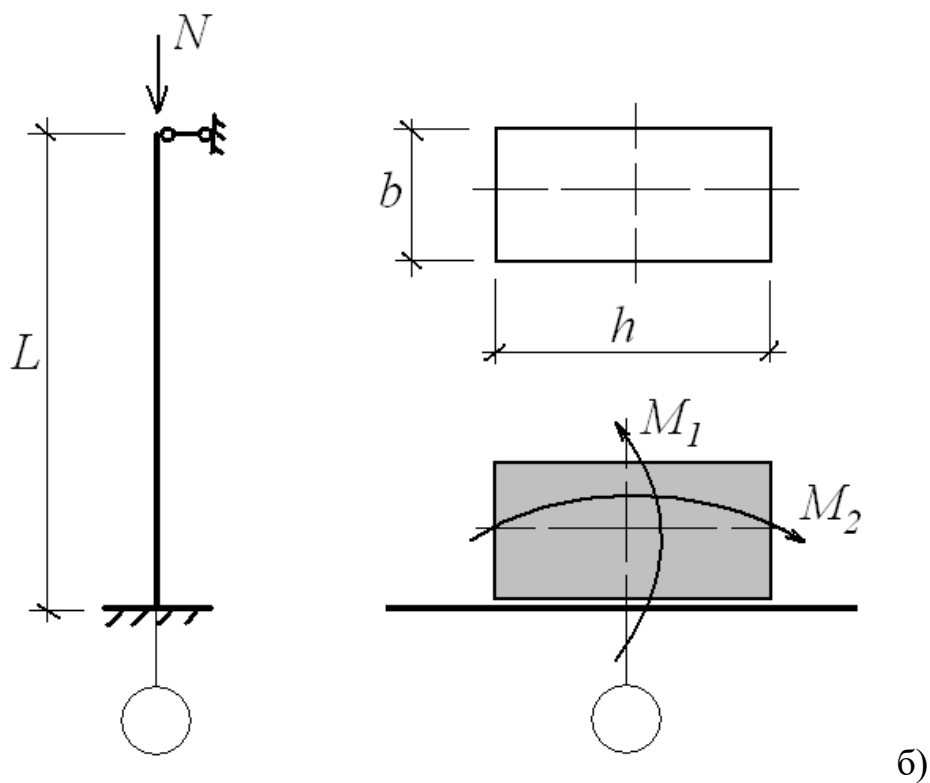
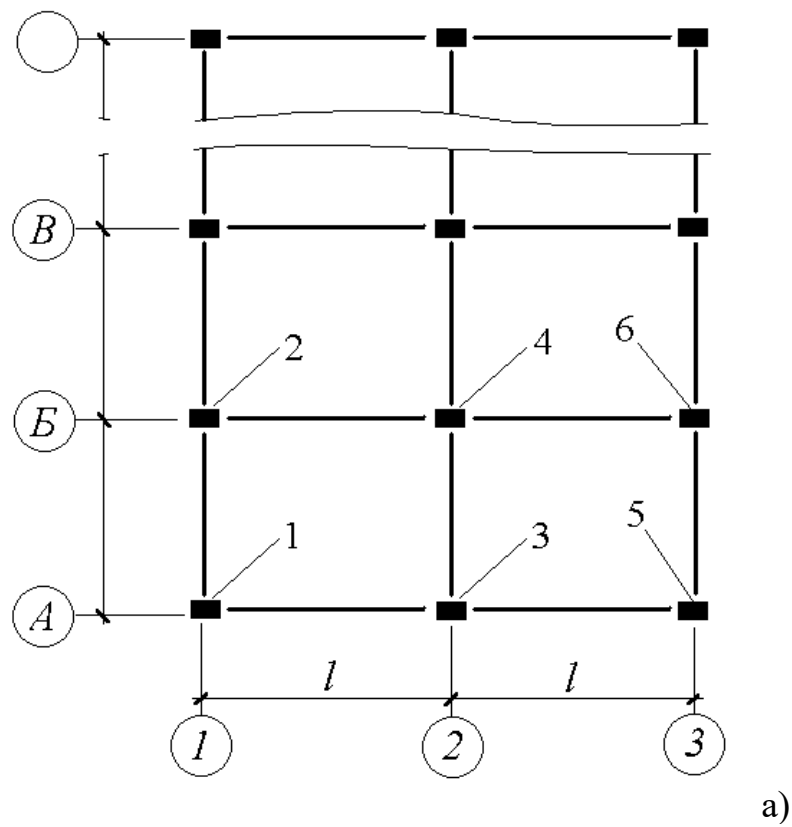


Рис. 1. Розглядувана колона (за прикладом):  
а) схема розташування; б) загальна орієнтація

**Увага!** При зображенні колони слід визначити напрям прикладання обох згинальних моментів, навіть якщо за вихідними даними один з них відсутній.

## 1. УМОВА МІЦНОСТІ

У цьому розділі практичної роботи необхідно визначити розміри перерізу колони для кожного із заданих за вихідними даними матеріалів за умовою міцності.

Проектуючи елементи реальних будівельних конструкцій, використовують декілька умов міцності, а самі розрахунки виконують за методом граничних станів. Проте при наближеному аналізі, метою якого є попереднє визначення обсягів будівництва, достатньо в якості умови міцності використати тільки міцність за нормальними напруженнями незалежно від виду будівельного матеріалу. При цьому досить зручним виявляється підхід методу допустимих напружень.

Розглядуваний конструктивний елемент – колона – знаходиться у складному напруженому стані, оскільки на нього одночасно діють в загальному випадку два згинальні моменти, розташованих у взаємно перпендикулярних головних площинах поперечного перерізу, та стискаюча сила. Для цього випадку умова міцності може бути записана у вигляді виразу (1):

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_1}{W_1} + \frac{M_2}{W_2} \leq \frac{\min \begin{cases} [\sigma]_c \\ [\sigma]_{32} \end{cases}}{K}, \quad (1)$$

де  $N$  – поздовжнє зусилля від стискаючої сили,

$M_1$  і  $M_2$  – згинальні моменти у двох головних площинах поперечного перерізу колони (див. рис. 1),

$A$  – площа поперечного перерізу колони,

$W_1$  і  $W_2$  – головні моменти опору поперечного перерізу колони,

$[\sigma]_c$  – допустиме напруження будівельного матеріалу на стиск,

$[\sigma]_{32}$  – допустиме напруження будівельного матеріалу на згин,

$K$  – коефіцієнт запасу для будівельного матеріалу.

Площа та моменти опору поперечного перерізу колони можуть бути розраховані за виразами (2) – (4) відповідно:

$$A = b \cdot h, \quad (2)$$

$$W_1 = \frac{b^2 \cdot h}{6}, \quad (3)$$

$$W_2 = \frac{b \cdot h^2}{6}. \quad (4)$$

У ці вирази входять два невідомі розміри поперечного перерізу колони, тому якщо їх підставити у вираз (1), то ми отримаємо вираз з двома невідомими. Тому необхідно ввести конструктивне обмеження на співвідношення

між сторонами поперечного перерізу колони. Його величина визначається за п. 6 вихідних даних. З його використанням вирази (2) – (4) можуть бути записані у вигляді (5) – (7) відповідно:

$$A = b \cdot h = \{b = 0,7 \cdot h\} = 0,7 \cdot h^2, \quad (5)$$

$$W_1 = \frac{b^2 \cdot h}{6} = \{b = 0,7 \cdot h\} = \frac{(0,7 \cdot h)^2 \cdot h}{6} = \frac{0,49 \cdot h^3}{6}, \quad (6)$$

$$W_2 = \frac{b \cdot h^2}{6} = \{b = 0,7 \cdot h\} = \frac{0,7 \cdot h^3}{6}. \quad (7)$$

Підставивши отримані вирази (5) – (7) у вираз (1) і прийнявши, що найбільш економічний переріз колони буде отриманий у випадку, коли цей вираз є рівнянням, маємо вираз (8):

$$\sigma = \frac{N}{0,7 \cdot h^2} + \frac{6 \cdot M_1}{0,49 \cdot h^3} + \frac{6 \cdot M_2}{0,7 \cdot h^3} = \frac{\min \begin{cases} [\sigma]_c \\ [\sigma]_{32} \end{cases}}{K}. \quad (8)$$

Після перетворень ліва частина цього рівняння набуде вигляду виразу (9), а остаточно отримане рівняння може бути записано у вигляді (10):

$$\frac{N}{0,7 \cdot h^2} + \frac{6 \cdot M_1}{0,49 \cdot h^3} + \frac{6 \cdot M_2}{0,7 \cdot h^3} = \frac{N}{0,7 \cdot h^2} + \frac{6}{h^3} \left( \frac{M_1}{0,49} + \frac{M_2}{0,7} \right), \quad (9)$$

$$\frac{N}{0,7 \cdot h^2} + \frac{6}{h^3} \left( \frac{M_1}{0,49} + \frac{M_2}{0,7} \right) = \frac{\min \begin{cases} [\sigma]_c \\ [\sigma]_{32} \end{cases}}{K}. \quad (10)$$

Умова міцності, записана у вигляді рівняння (10), може бути безпосередньо використана для визначення розмірів поперечного перерізу майбутньої колони. Для цього в це рівняння необхідно в якості поздовжнього зусилля  $N$  та згинальних моментів  $M_1$  і  $M_2$  підставити відповідні **граничні значення** цих зусиль, отриманих для різних сполучень навантажень за п. 1 вихідних даних.

**Увага!** Якщо за вихідними даними другий згинальний момент не наведений, він приймається рівним 0, і тоді вираз (10) може бути спрощений.

В якості величин допустимих напружень на стиск  $[\sigma]_c$  і згин  $[\sigma]_{32}$  приймають відповідні значення розрахункових опорів на стиск і згин для кожного з будівельних матеріалів за нормативними документами [1 – 5] та підручником [6].

В якості коефіцієнта запасу  $K$  приймається відповідне усереднене значення для кожного із заданих будівельних матеріалів за табл. Б.1 дод. Б.

Таким чином, для кожного з будівельних матеріалів будуть отримані по три відповідні кубічні рівняння. Для їх розв'язання рекомендується користуватись тригонометричним методом, наведеним у дод. В.

### Приклад виконання

Визначимо розміри поперечного перерізу колони для кожного із заданих за вихідними даними будівельних матеріалів за умовою міцності. Для цього будемо використовувати отриманий вище для нашого випадку вираз (10).

#### Бетон класу С8/10

Спочатку визначимо всі необхідні величини, які входять до виразу (10).

В якості допустимих напружень на стиск і згин для бетону класу С8/10 приймаємо за нормативним документом [1] розрахунковий опір на стиск:

$$[\sigma]_c = [\sigma]_{32} = 6,0 \text{ МПа} = 0,6 \text{ кН/см}^2.$$

Коефіцієнт запасу за табл. Б.1 дод. Б дорівнює  $K = 2,25$ .

**Увага!** У вираз умови міцності слід підставляти всі величини в однакових одиницях виміру. Рекомендується приймати кілоньютони і сантиметри, оскільки в цьому випадку числові значення величин і подальший розв'язок кубічного рівняння набуває найбільш зручного вигляду.

Для сполучення № 1 вираз (10) може бути записаний у вигляді

$$\frac{1184}{0,7 \cdot h^2} + \frac{6}{h^3} \left( \frac{4000}{0,49} + \frac{0}{0,7} \right) = \frac{0,6}{2,25}.$$

Виконаємо необхідні математичні перетворення

$$\begin{aligned} \frac{1184}{0,7 \cdot h^2} + \frac{6 \cdot 4000}{0,49 \cdot h^3} &= \frac{0,6}{2,25} \\ \frac{1184 \cdot 0,7 \cdot h + 24000}{0,49 \cdot h^3} &= \frac{0,6}{2,25} \\ 2,25 \cdot (1184 \cdot 0,7 \cdot h + 24000) &= 0,49 \cdot h^3 \cdot 0,6 \\ 1864,8 \cdot h + 54000 &= 0,294 \cdot h^3 \\ h^3 - 6342,86 \cdot h - 183673,47 &= 0 \end{aligned}$$

Таким чином отримано “неповне” кубічне рівняння з від’ємним коефіцієнтом при змінній у першому степені. Для знаходження його коренів використаємо тригонометричний розв'язок (див. дод. В).

$$Q = \left( \frac{p}{3} \right)^3 + \left( \frac{q}{2} \right)^2 = \left( \frac{-6342,86}{3} \right)^3 + \left( \frac{-183673,47}{2} \right)^2 = -9,5 \cdot 10^9 + 8,4 \cdot 10^9 < 0, \text{ тому}$$

$$\alpha = \arccos \left( -\frac{q}{2 \cdot \sqrt{-\left(\frac{p}{3}\right)^3}} \right) = \arccos \left( -\frac{-183673,47}{2 \cdot \sqrt{-\left(\frac{-6342,86}{3}\right)^3}} \right) = \arccos 0,9444 = 19,2^\circ$$

$$y = 2 \cdot \sqrt{-\frac{p}{3}} \cdot \cos \frac{\alpha}{3} = 2 \cdot \sqrt{-\frac{-6342,86}{3}} \cdot \cos \frac{19,2}{3} = 91,4 \text{ см.}$$

Зробимо перевірку, підставивши отримане значення кореня рівняння у початковий вираз

$$\frac{1184}{0,7 \cdot 91,4^2} + \frac{6}{91,4^3} \left( \frac{4000}{0,49} + \frac{0}{0,7} \right) = 0,267 \approx \frac{0,6}{2,25} = 0,267.$$

Таким чином, розв'язок отримано правильно.

Для сполучення № 2 вираз (10) може бути записаний у вигляді

$$\frac{724}{0,7 \cdot h^2} + \frac{6}{h^3} \left( \frac{6660}{0,49} + \frac{0}{0,7} \right) = \frac{0,6}{2,25}.$$

Виконаємо необхідні математичні перетворення

$$\begin{aligned} \frac{724}{0,7 \cdot h^2} + \frac{6 \cdot 6660}{0,49 \cdot h^3} &= \frac{0,6}{2,25} \\ \frac{724 \cdot 0,7 \cdot h + 39960}{0,49 \cdot h^3} &= \frac{0,6}{2,25} \\ 2,25 \cdot (724 \cdot 0,7 \cdot h + 39960) &= 0,49 \cdot h^3 \cdot 0,6 \\ 1140,30 \cdot h + 89910,00 &= 0,294 \cdot h^3 \\ h^3 - 3878,57 \cdot h - 305816,33 &= 0 \end{aligned}$$

Таким чином отримано “неповне” кубічне рівняння з від’ємним коефіцієнтом при змінній у першому степені. Для знаходження його коренів використаємо тригонометричний розв’язок (див. дод. В).

$$Q = \left( \frac{p}{3} \right)^3 + \left( \frac{q}{2} \right)^2 = \left( \frac{-3878,57}{3} \right)^3 + \left( \frac{-305816,33}{2} \right)^2 = -2,2 \cdot 10^9 + 2,3 \cdot 10^{10} > 0, \text{ тому}$$

$$\beta = \arcsin \left( -\frac{2}{q} \cdot \sqrt{\left( -\frac{p}{3} \right)^3} \right) = \arcsin \left( -\frac{2}{-305816,33} \cdot \sqrt{\left( -\frac{-3878,57}{3} \right)^3} \right) = \arcsin 0,3040 = 17,7^\circ,$$

$$\alpha = \arctg \left( \sqrt[3]{\operatorname{tg} \frac{\beta}{2}} \right) = \arctg \left( \sqrt[3]{\operatorname{tg} \frac{17,7}{2}} \right) = \arctg 0,5380 = 28,3^\circ,$$

$$h = 2 \cdot \sqrt{-\frac{p}{3}} \cdot \frac{1}{\sin 2\alpha} = 2 \cdot \sqrt{-\frac{-3878,57}{3}} \cdot \frac{1}{\sin 2 \cdot 28,3} = 86,1 \text{ см.}$$

Зробимо перевірку, підставивши отримане значення кореня рівняння у початковий вираз

$$\frac{724}{0,7 \cdot 86,1^2} + \frac{6}{86,1^3} \left( \frac{6660}{0,49} + \frac{0}{0,7} \right) = 0,267 \approx \frac{0,6}{2,25} = 0,267.$$

Таким чином, розв'язок отримано правильно.

Для сполучення № 3 вираз (10) може бути записаний у вигляді

$$\frac{1054}{0,7 \cdot h^2} + \frac{6}{h^3} \left( \frac{5990}{0,49} + \frac{0}{0,7} \right) = \frac{0,6}{2,25}.$$

Виконаємо необхідні математичні перетворення

$$\begin{aligned} \frac{1054}{0,7 \cdot h^2} + \frac{6 \cdot 5990}{0,49 \cdot h^3} &= \frac{0,6}{2,25} \\ \frac{1054 \cdot 0,7 \cdot h + 35940}{0,49 \cdot h^3} &= \frac{0,6}{2,25} \\ 2,25 \cdot (1054 \cdot 0,7 \cdot h + 35940) &= 0,49 \cdot h^3 \cdot 0,6 \\ 1660,05 \cdot h + 80865,00 &= 0,294 \cdot h^3 \\ h^3 - 5646,43 \cdot h - 275051,02 &= 0 \end{aligned}$$

Таким чином отримано “неповне” кубічне рівняння з від’ємним коефіцієнтом при змінній у першому степені. Для знаходження його коренів використаємо тригонометричний розв’язок (див. дод. В).

$$Q = \left( \frac{p}{3} \right)^3 + \left( \frac{q}{2} \right)^2 = \left( \frac{-5646,43}{3} \right)^3 + \left( \frac{-275051,02}{2} \right)^2 = -6,7 \cdot 10^9 + 1,9 \cdot 10^{10} > 0, \text{ тому}$$

$$\beta = \arcsin \left( -\frac{2}{q} \cdot \sqrt{\left( -\frac{p}{3} \right)^3} \right) = \arcsin \left( -\frac{2}{-275051,02} \cdot \sqrt{\left( \frac{-5646,43}{3} \right)^3} \right) = \arcsin 0,5937 = 36,4^\circ,$$

$$\alpha = \arctg \left( \sqrt[3]{\operatorname{tg} \frac{\beta}{2}} \right) = \arctg \left( \sqrt[3]{\operatorname{tg} \frac{36,4}{2}} \right) = \arctg 0,6902 = 34,6^\circ,$$

$$h = 2 \cdot \sqrt{-\frac{p}{3}} \cdot \frac{1}{\sin 2\alpha} = 2 \cdot \sqrt{-\frac{-5646,43}{3}} \cdot \frac{1}{\sin 2 \cdot 34,6} = 92,8 \text{ см.}$$

Зробимо перевірку, підставивши отримане значення кореня рівняння у початковий вираз

$$\frac{1054}{0,7 \cdot 92,8^2} + \frac{6}{92,8^3} \left( \frac{5990}{0,49} + \frac{0}{0,7} \right) = 0,267 \approx \frac{0,6}{2,25} = 0,267.$$

Таким чином, розв’язок отримано правильно.

Визначені для всіх трьох сполучень навантажень значення висоти поперечного перерізу колони дорівнюють – 91,4 см, 86,1 см і 92,8 см. З цих значень остаточно обираємо найбільше значення – 92,8 см.

Окремо слід звернути увагу на те, що найбільше значення було отримано за третім сполученням навантажень. Згадаємо, що в розрахунково-графічній роботі № 1 перші два сполучення навантажень були відібрані за критеріями найбільшого значення поздовжньої сили та згинального моменту відповідно. Проте, як уже зазначалося в розрахунково-графічній роботі № 1, такий підхід не є досконалим. Видно, що в даному випадку дійсно гіршим ви-

явилось так зване “проміжне сполучення”, у якому поздовжня сила не є максимальною, однак досить значною за величиною, і згинальний момент також не є максимальним, однак досить значним за величиною.

У практиці проектування подібна ситуація спостерігається досить часто, тому необхідно бути достатньо уважним та обережним під час відбору з усіх отриманих сполучень навантажень найгірших, на які потім ведеться проектування конструктивних елементів будівельних конструкцій.

### Сталь марки Ст3кп2

Спочатку визначимо всі необхідні величини, які входять до виразу (10).

В якості допустимих напружень на стиск і згин для сталі марки Ст3кп2 приймаємо за нормативним документом [3] розрахунковий опір на розтяг:

$$[\sigma]_c = [\sigma]_{32} = 220 \text{ МПа} = 22,00 \text{ кН/см}^2.$$

Коефіцієнт запасу за табл. Б.1 дод. Б дорівнює  $K = 1,37$ .

Для сполучення № 1 вираз (10) може бути записаний у вигляді

$$\frac{1184}{0,7 \cdot h^2} + \frac{6}{h^3} \left( \frac{4000}{0,49} + \frac{0}{0,7} \right) = \frac{22,00}{1,37}.$$

Виконаємо необхідні математичні перетворення

$$\begin{aligned} \frac{1184}{0,7 \cdot h^2} + \frac{6 \cdot 4000}{0,49 \cdot h^3} &= \frac{22,00}{1,37} \\ \frac{1184 \cdot 0,7 \cdot h + 24000}{0,49 \cdot h^3} &= \frac{22,00}{1,37} \\ 1,37 \cdot (1184 \cdot 0,7 \cdot h + 24000) &= 0,49 \cdot h^3 \cdot 22,00 \\ 1135,5 \cdot h + 32880 &= 10,78 \cdot h^3 \\ h^3 - 105,33 \cdot h - 3050,09 &= 0 \end{aligned}$$

Таким чином отримано “неповне” кубічне рівняння з від’ємним коефіцієнтом при змінній у першому степені. Для знаходження його коренів використаємо тригонометричний розв’язок (див. дод. В).

$$\begin{aligned} Q &= \left( \frac{p}{3} \right)^3 + \left( \frac{q}{2} \right)^2 = \left( \frac{-105,33}{3} \right)^3 + \left( \frac{-3050,09}{2} \right)^2 = -4,3 \cdot 10^4 + 2,3 \cdot 10^6 > 0, \text{ тому} \\ \beta &= \arcsin \left( -\frac{2}{q} \cdot \sqrt{\left( -\frac{p}{3} \right)^3} \right) = \arcsin \left( -\frac{2}{-3050,09} \cdot \sqrt{\left( -\frac{105,33}{3} \right)^3} \right) = \arcsin 0,1364 = 7,8^\circ, \\ \alpha &= \arctg \left( \sqrt[3]{\operatorname{tg} \frac{\beta}{2}} \right) = \arctg \left( \sqrt[3]{\operatorname{tg} \frac{7,8}{2}} \right) = \arctg 0,4085 = 22,2^\circ, \\ h &= 2 \cdot \sqrt{-\frac{p}{3}} \cdot \frac{1}{\sin 2\alpha} = 2 \cdot \sqrt{-\frac{-105,33}{3}} \cdot \frac{1}{\sin 2 \cdot 22,2} = 16,9 \text{ см.} \end{aligned}$$

Зробимо перевірку, підставивши отримане значення кореня рівняння у початковий вираз

$$\frac{1184}{0,7 \cdot 16,9^2} + \frac{6}{16,9^3} \left( \frac{4000}{0,49} + \frac{0}{0,7} \right) = 16,069 \approx \frac{22,00}{1,37} = 16,058.$$

Таким чином, розв'язок отримано правильно.

Для сполучення № 2 вираз (10) може бути записаний у вигляді

$$\frac{724}{0,7 \cdot h^2} + \frac{6}{h^3} \left( \frac{6660}{0,49} + \frac{0}{0,7} \right) = \frac{22,00}{1,37}.$$

Виконаємо необхідні математичні перетворення

$$\begin{aligned} \frac{724}{0,7 \cdot h^2} + \frac{6 \cdot 6660}{0,49 \cdot h^3} &= \frac{22,00}{1,37} \\ \frac{724 \cdot 0,7 \cdot h + 39960}{0,49 \cdot h^3} &= \frac{22,00}{1,37} \\ 1,37 \cdot (724 \cdot 0,7 \cdot h + 39960) &= 0,49 \cdot h^3 \cdot 22,00 \\ 694,32 \cdot h + 54745,20 &= 10,78 \cdot h^3 \\ h^3 - 64,41 \cdot h - 5078,40 &= 0 \end{aligned}$$

Таким чином отримано “неповне” кубічне рівняння з від’ємним коефіцієнтом при змінній у першому степені. Для знаходження його коренів використаємо тригонометричний розв’язок (див. дод. В).

$$Q = \left( \frac{p}{3} \right)^3 + \left( \frac{q}{2} \right)^2 = \left( \frac{-64,41}{3} \right)^3 + \left( \frac{-5078,40}{2} \right)^2 = -9,9 \cdot 10^3 + 6,4 \cdot 10^6 > 0, \text{ тому}$$

$$\beta = \arcsin \left( -\frac{2}{q} \cdot \sqrt{\left( -\frac{p}{3} \right)^3} \right) = \arcsin \left( -\frac{2}{-5078,40} \cdot \sqrt{\left( -\frac{64,41}{3} \right)^3} \right) = \arcsin 0,0392 = 2,2^\circ,$$

$$\alpha = \arctg \left( \sqrt[3]{\operatorname{tg} \frac{\beta}{2}} \right) = \arctg \left( \sqrt[3]{\operatorname{tg} \frac{2,2}{2}} \right) = \arctg 0,2678 = 15,0^\circ,$$

$$h = 2 \cdot \sqrt{-\frac{p}{3}} \cdot \frac{1}{\sin 2\alpha} = 2 \cdot \sqrt{-\frac{64,41}{3}} \cdot \frac{1}{\sin 2 \cdot 15,0} = 18,5 \text{ см.}$$

Зробимо перевірку, підставивши отримане значення кореня рівняння у початковий вираз

$$\frac{724}{0,7 \cdot 18,5^2} + \frac{6}{18,5^3} \left( \frac{6660}{0,49} + \frac{0}{0,7} \right) = 15,902 \approx \frac{22,00}{1,37} = 16,058.$$

Таким чином, розв’язок отримано правильно.

Для сполучення № 3 вираз (10) може бути записаний у вигляді

$$\frac{1054}{0,7 \cdot h^2} + \frac{6}{h^3} \left( \frac{5990}{0,49} + \frac{0}{0,7} \right) = \frac{22,00}{1,37}.$$

Виконаємо необхідні математичні перетворення

$$\frac{1054}{0,7 \cdot h^2} + \frac{6 \cdot 5990}{0,49 \cdot h^3} = \frac{22,00}{1,37}$$



$$\frac{1054 \cdot 0,7 \cdot h + 35940}{0,49 \cdot h^3} = \frac{22,00}{1,37}$$

$$1,37 \cdot (1054 \cdot 0,7 \cdot h + 35940) = 0,49 \cdot h^3 \cdot 22,00$$

$$1010,79 \cdot h + 49237,80 = 10,78 \cdot h^3$$

$$h^3 - 93,76 \cdot h - 4567,51 = 0$$

Таким чином отримано “неповне” кубічне рівняння з від’ємним коефіцієнтом при змінній у першому степені. Для знаходження його коренів використаємо тригонометричний розв’язок (див. дод. В).

$$Q = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 = \left(\frac{-93,76}{3}\right)^3 + \left(\frac{-4567,51}{2}\right)^2 = -3,1 \cdot 10^4 + 5,2 \cdot 10^6 > 0, \text{ тому}$$

$$\beta = \arcsin \left( -\frac{2}{q} \cdot \sqrt{\left(-\frac{p}{3}\right)^3} \right) = \arcsin \left( -\frac{2}{-4567,51} \cdot \sqrt{\left(-\frac{93,76}{3}\right)^3} \right) = \arcsin 0,0765 = 4,4^\circ,$$

$$\alpha = \arctg \left( \sqrt[3]{\operatorname{tg} \frac{\beta}{2}} \right) = \arctg \left( \sqrt[3]{\operatorname{tg} \frac{4,4}{2}} \right) = \arctg 0,3374 = 18,6^\circ,$$

$$h = 2 \cdot \sqrt{-\frac{p}{3}} \cdot \frac{1}{\sin 2\alpha} = 2 \cdot \sqrt{-\frac{93,76}{3}} \cdot \frac{1}{\sin 2 \cdot 18,6} = 18,5 \text{ см.}$$

Зробимо перевірку, підставивши отримане значення кореня рівняння у початковий вираз

$$\frac{1054}{0,7 \cdot 18,5^2} + \frac{6}{18,5^3} \left( \frac{5990}{0,49} + \frac{0}{0,7} \right) = 15,984 \approx \frac{22,00}{1,37} = 16,058.$$

Таким чином, розв’язок отримано правильно.

Визначені для всіх трьох сполучень навантажень значення висоти поперечного перерізу колони дорівнюють – 16,9 см, 18,5 см і 18,5 см. З цих значень остаточно обираємо найбільше значення – 18,5 см.

*Звернемо увагу на дві важливі обставини. По-перше, для сталі з двох перших сполучень навантажень гіршим є друге сполучення. Для бетону, навпаки, – перше сполучення. З цього випливає, що в практиці проектування для кожного будівельного матеріалу слід вести розрахунки на всі відібрані сполучення навантаження, а не відкидати якісь з них, якщо для одного з будівельних матеріалів вони не виявилися гіршими.*

*По-друге, як і в попередньому випадку, для сталі найгіршим можна вважати третє сполучення навантажень, яке є “проміжним сполученням” і не підпадає під загально вживані критерії відбору гірших сполучень. Це ще раз підкреслює необхідність у практиці проектування досить уважно та обережно відбирати з усіх отриманих сполучень навантажень найгірші.*

## 2. УМОВА ЖОРСТКОСТІ

У цьому розділі практичної роботи необхідно визначити розміри перерізу колони для кожного із заданих за вихідними даними матеріалів за умовами жорсткості.

На відміну від умов міцності, умови жорсткості для різних будівельних матеріалів мають більш однотипний вигляд. Проте специфічні конструктивні особливості кожного з матеріалів враховуються в цих умовах, як правило, за допомогою спеціальних поправочних коефіцієнтів. Під час наближеного аналізу, метою якого є попереднє визначення обсягів будівництва, достатньо в якості умов жорсткості використовувати класичні вирази опору матеріалів.

Розглядуваний конструктивний елемент – колона – знаходиться у складному напруженому стані, оскільки на нього одночасно діють в загальному випадку два згинальні моменти, розташованих у взаємно перпендикулярних головних площинах перерізу, та стискаюча сила. На відміну від умови міцності за нормальними напруженнями, яка може бути записана в цьому випадку для одного поперечного перерізу колони, поздовжні й поперечні деформації наявні в різних перерізах (рис. 2).

Величина найбільшої поздовжньої деформації має обчислюватися для верхньої частини колони, а величина найбільшої поперечної деформації – у середній частині. Тому слід розглядати не одну, а дві різні умови жорсткості – для стиску та для згину. Крім цього, слід пам'ятати, що повна поперечна деформація буде визначатись як геометрична сума двох поперечних деформацій у головних площинах перерізу колони.

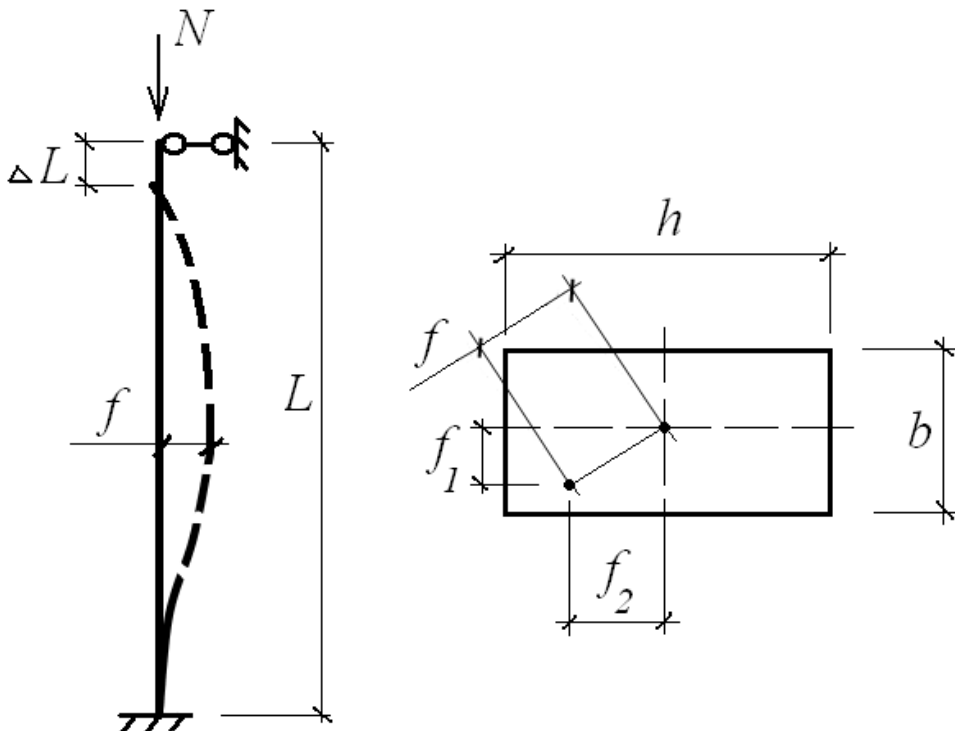


Рис. 2. Схема деформування розглядуваної колони (за прикладом)

## 2.1. Умова жорсткості на стиск

Умова жорсткості для стиску колони має вигляд виразу (11):

$$\Delta L = \frac{N \cdot L}{E \cdot A} \leq [\Delta L], \quad (11)$$

де  $N$  – поздовжнє зусилля від стискаючої сили,  
 $L$  – довжина колони,  
 $E$  – модуль пружності матеріалу колони,  
 $A$  – площа поперечного перерізу колони,  
 $[\Delta L]$  – допустима вертикальна деформація колони.

Площа поперечного перерізу колони може бути розрахована за отриманим раніше виразом (5). Підставивши його у вираз (11) і прийнявши, що найбільш економічний переріз колони буде отриманий у випадку, коли цей вираз є рівнянням, маємо вираз (12):

$$\frac{N \cdot L}{0,7 \cdot E \cdot h^2} = [\Delta L]. \quad (12)$$

З цього виразу може бути визначена висота поперечного перерізу колони у вигляді (13):

$$h = \sqrt{\frac{N \cdot L}{0,7 \cdot E \cdot [\Delta L]}}. \quad (13)$$

Отриманий вираз (13) може бути безпосередньо використаний для визначення розмірів поперечного перерізу майбутньої колони. В якості поздовжнього зусилля  $N$  слід приймати відповідні **експлуатаційні значення** цих зусиль, отриманих для різних сполучень навантажень за п. 1 вихідних даних.

Довжина колони  $L$  приймається такою, що дорівнює висоті поверху за п. 2 вихідних даних.

Значення модуля пружності для кожного із заданих за вихідними даними будівельних матеріалів слід визначати окремо за нормативними документами [1 – 5] та підручником [6].

Величина допустимої вертикальної деформації колони приймається за п. 7 вихідних даних.

Таким чином, за отриманим виразом (13) необхідно для кожного із заданих за вихідними даними будівельних матеріалів розрахувати величину мінімально достатньої висоти поперечного перерізу, за якою величина поздовжніх деформацій буде дорівнювати допустимій.

## Приклад виконання

Визначимо розміри поперечного перерізу колони для кожного із заданих за вихідними даними будівельних матеріалів за умовою жорсткості на стиск. Для цього будемо використовувати отриманий вище для нашого випадку вираз (13).

### Бетон класу С8/10

Спочатку визначимо модуль пружності. Його значення приймається за нормативним документом [1]:

$$E = 12,6 \text{ ГПа} = 12,6 \cdot 10^3 \text{ МПа} = 1260 \text{ кН/см}^2.$$

**Увага!** У вираз умови жорсткості на згин слід підставляти всі величини в однакових одиницях виміру. Рекомендується приймати кілоньютони і сантиметри, оскільки в цьому випадку числові значення величин набувають найбільш зручного вигляду.

Для сполучення № 1 згідно з виразом (13)

$$h = \sqrt{\frac{N \cdot L}{0,7 \cdot E \cdot [\Delta L]}} = \sqrt{\frac{972 \cdot 840}{0,7 \cdot 1260 \cdot 0,3}} = 55,5 \text{ см.}$$

Для сполучення № 2 згідно з виразом (13)

$$h = \sqrt{\frac{N \cdot L}{0,7 \cdot E \cdot [\Delta L]}} = \sqrt{\frac{632 \cdot 840}{0,7 \cdot 1260 \cdot 0,3}} = 44,8 \text{ см.}$$

Для сполучення № 3 згідно з виразом (13)

$$h = \sqrt{\frac{N \cdot L}{0,7 \cdot E \cdot [\Delta L]}} = \sqrt{\frac{904 \cdot 840}{0,7 \cdot 1260 \cdot 0,3}} = 53,6 \text{ см.}$$

Визначені для всіх трьох сполучень навантажень значення висоти поперечного перерізу колони дорівнюють – 55,5 см, 44,8 см і 53,6 см. З цих значень остаточно обираємо найбільше значення – 55,5 см.

*Звернемо увагу на те, що значення висот поперечного перерізу є приблизно вдвічі меншими, ніж були отримані з умови міцності.*

### Сталь марки Ст3кп2

Спочатку визначимо модуль пружності. Його значення приймається за нормативним документом [3]:

$$E = 2,06 \cdot 10^5 \text{ МПа} = 20600 \text{ кН/см}^2.$$

Для сполучення № 1 згідно з виразом (13)

$$h = \sqrt{\frac{N \cdot L}{0,7 \cdot E \cdot [\Delta L]}} = \sqrt{\frac{972 \cdot 840}{0,7 \cdot 20600 \cdot 0,3}} = 13,7 \text{ см.}$$

Для сполучення № 2 згідно з виразом (13)

$$h = \sqrt{\frac{N \cdot L}{0,7 \cdot E \cdot [\Delta L]}} = \sqrt{\frac{632 \cdot 840}{0,7 \cdot 20600 \cdot 0,3}} = 11,1 \text{ см.}$$

Для сполучення № 3 згідно з виразом (13)

$$h = \sqrt{\frac{N \cdot L}{0,7 \cdot E \cdot [\Delta L]}} = \sqrt{\frac{904 \cdot 840}{0,7 \cdot 20600 \cdot 0,3}} = 13,2 \text{ см.}$$

Визначені для всіх трьох сполучень навантажень значення висоти поперечного перерізу колони дорівнюють – 13,7 см, 11,1 см і 13,2 см. З цих значень остаточно обираємо найбільше значення – 13,7 см.

*Звернемо увагу на те, що значення висот поперечного перерізу для сталевих колон, як і для бетонної, є приблизно вдвічі меншими, ніж були отримані з умови міцності. Причому розміри колони зі сталі виявляються меншими, ніж для бетону.*

## 2.2. Умова жорсткості на згин

Умова жорсткості для згину колони в загальному випадку дії двох згинальних моментів у головних площинах перерізу має вигляд виразу (14):

$$f = \sqrt{\left(\frac{M_1 \cdot L^2}{16 \cdot E \cdot I_1}\right)^2 + \left(\frac{M_2 \cdot L^2}{16 \cdot E \cdot I_2}\right)^2} \leq [\Delta f], \quad (14)$$

де  $M_1$  і  $M_2$  – згинальні моменти у двох головних площинах поперечного перерізу колони (див. рис. 1),

$L$  – довжина колони,

$E$  – модуль пружності матеріалу колони,

$I_1$  і  $I_2$  – головні моменти інерції поперечного перерізу колони,

$[\Delta f]$  – допустима горизонтальна деформація колони.

Моменти інерції поперечного перерізу колони можуть бути розраховані за виразами (15) і (16):

$$I_1 = \frac{b^3 \cdot h}{12}, \quad (15)$$

$$I_2 = \frac{b \cdot h^3}{12}. \quad (16)$$

У ці вирази входять два невідомі розміри поперечного перерізу колони, тому, якщо їх підставити у (14), то ми отримаємо вираз з двома невідомими. Відповідно до цього необхідно ввести конструктивне обмеження на співвідношення між сторонами поперечного перерізу колони, так як це було зроблено для умови міцності. Його значення визначається за п. 6 вихідних даних. З його використанням вирази (15) і (16) можуть бути записані у вигляді (17) і (18):

$$I_1 = \frac{b^3 \cdot h}{12} = \{b = 0,7 \cdot h\} = \frac{(0,7 \cdot h)^3 \cdot h}{12} = \frac{0,343 \cdot h^4}{12}, \quad (17)$$

$$I_2 = \frac{b \cdot h^3}{12} = \{b = 0,7 \cdot h\} = \frac{0,7 \cdot h^4}{12}. \quad (18)$$

Підставивши отримані вирази (17) і (18) у (4) і прийнявши, що найбільш економічний переріз колони буде отриманий у випадку, коли цей вираз є рівнянням, будемо мати вираз (19):

$$\sqrt{\left(\frac{M_1 \cdot L^2 \cdot 12}{16 \cdot E \cdot 0,343 \cdot h^4}\right)^2 + \left(\frac{M_2 \cdot L^2 \cdot 12}{16 \cdot E \cdot 0,7 \cdot h^4}\right)^2} = [\Delta f]. \quad (19)$$

Після перетворень ліва частина цього рівняння набуде вигляд виразу (20):

$$\sqrt{\left(\frac{M_1 \cdot L^2 \cdot 12}{16 \cdot E \cdot 0,343 \cdot h^4}\right)^2 + \left(\frac{M_2 \cdot L^2 \cdot 12}{16 \cdot E \cdot 0,7 \cdot h^4}\right)^2} = \frac{3 \cdot L^2}{4 \cdot E \cdot h^4} \sqrt{\left(\frac{M_1}{0,343}\right)^2 + \left(\frac{M_2}{0,7}\right)^2}. \quad (20)$$

Права частина виразу (14) відповідно до вихідних даних (п. 8) може бути записана у вигляді виразу (21):

$$[\Delta f] = \frac{L}{250}. \quad (21)$$

Тоді остаточно вираз (14) може бути записаний у вигляді (22):

$$\frac{3 \cdot L^2}{4 \cdot E \cdot h^4} \sqrt{\left(\frac{M_1}{0,343}\right)^2 + \left(\frac{M_2}{0,7}\right)^2} = \frac{L}{250}. \quad (22)$$

З цього рівняння може бути отриманий вираз для знаходження висоти поперечного перерізу колони у вигляді (23):

$$h = \sqrt[4]{\frac{750 \cdot L}{4 \cdot E} \sqrt{\left(\frac{M_1}{0,343}\right)^2 + \left(\frac{M_2}{0,7}\right)^2}}. \quad (23)$$

Отриманий вираз (23) може бути безпосередньо використаний для визначення розмірів поперечного перерізу майбутньої колони. В якості згинальних моментів  $M_1$  і  $M_2$  слід приймати відповідні **експлуатаційні значення** цих моментів, отриманих для різних сполучень навантажень за п. 1 вихідних даних.

**Увага!** Якщо за вихідними даними другий згинальний момент не наведений, він приймається рівним 0, і тоді вираз (23) може бути спрощений.

Довжина колони  $L$  приймається такою, що дорівнює висоті поверху за п. 2 вихідних даних.

Значення модуля пружності для кожного із заданих за вихідними даними будівельних матеріалів слід визначати окремо за нормативними документами [1 – 5] та підручником [6].

Таким чином, за отриманим виразом (23) необхідно для кожного із заданих за вихідними даними будівельних матеріалів розрахувати значення мінімально достатньої висоти поперечного перерізу, за якої величина поперечних деформацій буде дорівнювати допустимій.

### Приклад виконання

Визначимо розміри поперечного перерізу колони для кожного із заданих за вихідними даними будівельних матеріалів за умовою жорсткості на згин. Для цього будемо використовувати отриманий вище для нашого випадку вираз (23).

#### Бетон класу С8/10

Спочатку визначимо модуль пружності. Його значення приймається за нормативним документом [1]:

$$E = 12,6 \text{ ГПа} = 12,6 \cdot 10^3 \text{ МПа} = 1260 \text{ кН/см}^2.$$

**Увага!** У вираз умови жорсткості на згин слід підставляти всі величини в однакових одиницях виміру. Рекомендується приймати кілоньютони і сантиметри, оскільки в цьому випадку числові значення величин набувають найбільш зручного вигляду.

Для сполучення № 1 згідно з виразом (23)

$$h = \sqrt[4]{\frac{750 \cdot L}{4 \cdot E} \sqrt{\left(\frac{M_1}{0,343}\right)^2 + \left(\frac{M_2}{0,7}\right)^2}} = \sqrt[4]{\frac{750 \cdot 840}{4 \cdot 1260} \sqrt{\left(\frac{740}{0,343}\right)^2 + \left(\frac{0}{0,7}\right)^2}} = 22,8 \text{ см.}$$

Для сполучення № 2 згідно з виразом (23)

$$h = \sqrt[4]{\frac{750 \cdot L}{4 \cdot E} \sqrt{\left(\frac{M_1}{0,343}\right)^2 + \left(\frac{M_2}{0,7}\right)^2}} = \sqrt[4]{\frac{750 \cdot 840}{4 \cdot 1260} \sqrt{\left(\frac{1230}{0,343}\right)^2 + \left(\frac{0}{0,7}\right)^2}} = 25,9 \text{ см.}$$

Для сполучення № 3 згідно з виразом (23)

$$h = \sqrt[4]{\frac{750 \cdot L}{4 \cdot E} \sqrt{\left(\frac{M_1}{0,343}\right)^2 + \left(\frac{M_2}{0,7}\right)^2}} = \sqrt[4]{\frac{750 \cdot 840}{4 \cdot 1260} \sqrt{\left(\frac{1110}{0,343}\right)^2 + \left(\frac{0}{0,7}\right)^2}} = 25,2 \text{ см.}$$

Визначені для всіх трьох сполучень навантажень значення висоти поперечного перерізу колони дорівнюють – 22,8 см, 25,9 см і 25,2 см. З цих значень остаточно обираємо найбільше значення – 25,9 см.

### Сталь марки Ст3кп2

Спочатку визначимо модуль пружності. Його значення приймається за нормативним документом [3]:

$$E = 2,06 \cdot 10^5 \text{ МПа} = 20600 \text{ кН/см}^2.$$

Для сполучення № 1 згідно з виразом (23)

$$h = \sqrt[4]{\frac{750 \cdot L}{4 \cdot E} \sqrt{\left(\frac{M_1}{0,343}\right)^2 + \left(\frac{M_2}{0,7}\right)^2}} = \sqrt[4]{\frac{750 \cdot 840}{4 \cdot 20600} \sqrt{\left(\frac{740}{0,343}\right)^2 + \left(\frac{0}{0,7}\right)^2}} = 11,3 \text{ см.}$$

Для сполучення № 2 згідно з виразом (23)

$$h = \sqrt[4]{\frac{750 \cdot L}{4 \cdot E} \sqrt{\left(\frac{M_1}{0,343}\right)^2 + \left(\frac{M_2}{0,7}\right)^2}} = \sqrt[4]{\frac{750 \cdot 840}{4 \cdot 20600} \sqrt{\left(\frac{1230}{0,343}\right)^2 + \left(\frac{0}{0,7}\right)^2}} = 12,9 \text{ см.}$$

Для сполучення № 3 згідно з виразом (23)

$$h = \sqrt[4]{\frac{750 \cdot L}{4 \cdot E} \sqrt{\left(\frac{M_1}{0,343}\right)^2 + \left(\frac{M_2}{0,7}\right)^2}} = \sqrt[4]{\frac{750 \cdot 840}{4 \cdot 20600} \sqrt{\left(\frac{1110}{0,343}\right)^2 + \left(\frac{0}{0,7}\right)^2}} = 12,5 \text{ см.}$$

Визначені для всіх трьох сполучень навантажень значення висоти поперечного перерізу колони дорівнюють – 11,3 см, 12,9 см і 12,5 см. З цих значень остаточно обираємо найбільше значення – 12,9 см.

Звернемо увагу на те, що значення висот поперечного перерізу як для сталеві колони, так і для бетонної є в декілька разів меншими, ніж були отримані з умови міцності.



### 3. ВИБІР МАТЕРІАЛУ

У цьому розділі практичної роботи необхідно із заданих за вихідними даними будівельних матеріалів обрати найбільш раціональний матеріал для створення колони.

У практиці проектування вибір найбільш раціонального проектного рішення виконують за системою спеціально розроблених техніко-економічних показників. Проте під час наближеного аналізу, метою якого є попереднє визначення обсягів будівництва, достатньо замість них прийняти укрупнені показники ваги та ринкової вартості будівельної конструкції.

#### 3.1. Визначення розмірів перерізу колони

Перед тим як обчислити укрупнені показники для розглядуваного конструктивного елемента – колони, слід визначити остаточні розміри її поперечного перерізу. Для цього з усіх визначених в першому та другому розділах даної практичної роботи за умовою міцності та умовами жорсткості значень висоти перерізу обирають найбільше.

**Увага!** Досить типовою помилкою при визначенні остаточних розмірів перерізу колони є намагання прийняти найменше значення з усіх розрахованих. У цьому випадку переріз колони буде задовольняти лише одну умову з усіх розглянутих, що є неприпустимим. Необхідно, щоб остаточно обраний переріз відповідав усім висунутим вимогам.

#### Приклад виконання

##### Бетон класу С8/10

Визначені за умовою міцності та умовами жорсткості значення висоти поперечного перерізу колони дорівнюють відповідно – 92,8 см, 55,5 см і 25,9 см. З цих значень остаточно обираємо найбільше –  $h = 92,8$  см.

Ширина поперечного перерізу буде визначена за величиною конструктивного обмеження на співвідношення між сторонами поперечного перерізу колони. Його значення визначається за п. 6 вихідних даних і дорівнює для нашого випадку 0,7. Тому  $b = 0,7 \cdot 92,8 = 65,0$  см.

Остаточно приймаємо величини поперечного перерізу колони, округляючи отримані розміри у більшу сторону:  $b \times h = 65 \times 93$  см.

##### Сталь марки Ст3кп2

Визначені за умовою міцності та умовами жорсткості значення висоти поперечного перерізу колони дорівнюють відповідно – 18,5 см, 13,7 см і 12,9 см. З цих значень остаточно обираємо найбільше –  $h = 18,5$  см.

Ширина поперечного перерізу  $b = 0,7 \cdot 18,5 = 13,0$  см. Остаточно:  $b \times h = 13 \times 19$  см.

Остаточно прийняті поперечні перерізи колони ескізно зображуємо на рис. 3. Умовне позначення будівельних матеріалів, з яких виконано колону, наводимо за чинним стандартом [7].

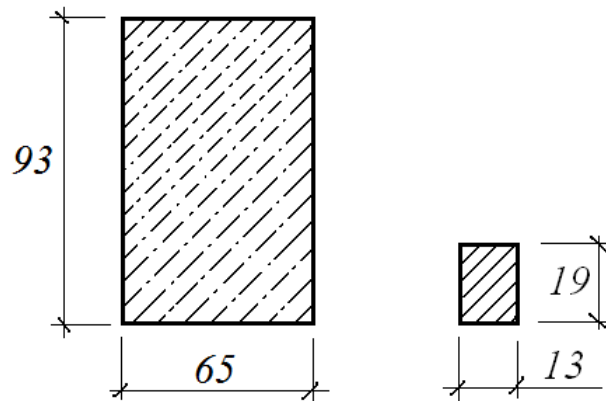


Рис. 3. Остаточно прийняті поперечні перерізи колони

*Звернемо увагу на різницю в розмірах остаточних перерізів для бетону та сталі. Це зумовлено насамперед більш високою міцністю сталі.*

### 3.2. Розрахунок укрупнених показників

До числа укрупнених показників, які найчастіше використовуються під час попередньої оцінки ефективності застосування різних будівельних матеріалів для несучих елементів конструкцій, відносять конструктивну масу<sup>1</sup> та ринкову вартість.

**Конструктивна маса** колони може бути обчислена за відомим виразом (24):

$$M = \rho \cdot V, \quad (24)$$

де  $\rho$  – усереднена густина будівельного матеріалу, яка приймається за довідковими даними (табл. Б.1 дод. Б);

$V$  – конструктивний об'єм колони, який визначається за її розмірами згідно з виразом (25):

$$V = b \cdot h \cdot L. \quad (25)$$

Підставивши вираз (25) в (24), отримаємо остаточний вираз (26) для розрахунку конструктивної маси колони:

$$M = \rho \cdot b \cdot h \cdot L. \quad (26)$$

<sup>1</sup> Конструктивна маса не враховує відходи при виготовленні конструктивного елемента на обрізку, підгонку тощо.

**Ринкова вартість** колони може бути обчислена згідно з виразом (27):

$$C = C_1 \cdot M, \quad (27)$$

де  $C_1$  – усереднена ринкова вартість однієї тони будівельного матеріалу. Ця величина може бути прийнята як за реальними даними на момент виконання даної практичної роботи, так і за довідковими даними на момент підготовки методичних вказівок за табл. Б.1 дод. Б.

### Приклад виконання

#### Бетон класу С8/10

Конструктивна маса колони обчислюється згідно з виразом (26)

$$M = \rho \cdot b \cdot h \cdot L = 2400 \cdot 0,65 \cdot 0,93 \cdot 8,40 = 12186,7 \text{ кг.}$$

Ринкова вартість колони обчислюється згідно з виразом (27)

$$C = C_1 \cdot M = 60 \cdot 12,19 = 731,4 \approx 732 \text{ у.о.}$$

**Увага!** У наведені вище вирази слід підставляти всі величини в однакових одиницях виміру.

#### Сталь марки Ст3кп2

Конструктивна маса колони обчислюється згідно з виразом (26)

$$M = \rho \cdot b \cdot h \cdot L = 7850 \cdot 0,13 \cdot 0,19 \cdot 8,40 = 1628,7 \text{ кг.}$$

Ринкова вартість колони обчислюється згідно з виразом (27)

$$C = C_1 \cdot M = 1100 \cdot 1,63 = 1793 \text{ у.о.}$$

Отримані укрупнені показники для кожного з будівельних матеріалів заносимо у підсумовуючу табл. 1.

Таблиця 1

#### Укрупнені показники для будівельних матеріалів

| № пор. | Будівельний матеріал | Укрупнений показник        |                               |
|--------|----------------------|----------------------------|-------------------------------|
|        |                      | Конструктивна маса $M$ , т | Ринкова вартість $C^1$ , у.о. |
| 1      | Бетон класу С8/10    | 12,19                      | 732                           |
| 2      | Сталь марки Ст3кп2   | 1,63                       | 1793                          |

Обов'язковим останнім елементом цієї практичної роботи має бути висновок, у якому обґрунтовано відображається вибір найбільш раціонального будівельного матеріалу із заданих за вихідними даними.

<sup>1</sup> Одиниці виміру обрані з урахуванням постійної наростаючої глобалізації світового економічного простору та з метою можливості порівняння зі світовими даними.

## ВИСНОВОК ПО РОБОТІ

Аналізуючи укрупнені показники для розглянутих у цій розрахунково-графічній роботі будівельних матеріалів, слід відмітити, що за першим показником маси елемента перевагу слід надати сталі, а за другим показником вартості елемента – бетону. При цьому в кількісному відношенні перший показник для сталі є приблизно в 7 разів меншим, а другий показник – майже в 3 рази більшим. Це означає, що якщо орієнтуватися тільки на ці показники, то в сукупності більш раціональним конструктивним матеріалом для умов дії зовнішніх навантажень за даними розрахунково-графічної роботи № 1 і роботи колони за даними практичної роботи № 2 є **сталь**.

Проте в практиці проектування досить часто має місце низка додаткових обставин, які можуть суттєво впливати на остаточний вибір будівельного матеріалу для будівельної конструкції. Наприклад, якщо найбільш важливим виявляється кошторисна вартість будівництва, то перевагу в розглянутому випадку слід надати бетону. Додатковим аргументом може служити той факт, що в процесі подальшої експлуатації бетонна конструкція не буде потребувати суттєвих додаткових витрат на її обслуговування, на відміну від сталевий, за якою необхідно постійно доглядати. Такий догляд ще збільшить загальну вартість побудованого об'єкта.

З іншої сторони, якщо будівництво ведеться в складних геологічних умовах, на неміцних або підпрацьованих ґрунтах, то в цій ситуації більш раціональним виявиться конструкція з меншою масою, тобто виготовлена зі сталі.

Подібні обставини в реальних проектних ситуаціях можуть досить суттєво впливати на остаточне рішення, тому для кожної конкретної ситуації слід приймати відповідне рішення.

## БІБЛОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. ДБН В.2.6-98:2009. Бетонні та залізобетонні конструкції. Основні положення. – Київ: Мінрегіонбуд, 2011. – 71 с.
2. ДБН В.2.6-162:2010. Кам'яні та армокам'яні конструкції. Основні положення. – Київ: Мінрегіонрозвиткубуд, 2011. – 97 с.
3. ДБН В.2.6-198:2014. Сталеві конструкції. Норми проектуванн. – Київ: Мінрегіон, 2014. – 205 с.
4. ДБН В.2.6-165:2011. Алюмінієві конструкції. Основні положення. – Київ: Мінрегіон, 2012. – 76 с.
5. ДБН В.2.6-161:2017. Дерев'яні конструкції. Основні положення. – Київ: Мінрегіон, 2017. – 111 с.
6. Клименко В. З. Конструкції з дерева і пластмас : підручник. Київ: Вища школа : 2000. – 304 с.
7. ДСТУ Б А.2.4-4:2009. Система проектної документації для будівництва. Основні вимоги до проектної та робочої документації. – Київ: Мінрегіонбуд, 2009. – 50 с.

## Додаток А

### ВИХІДНІ ДАНІ ДО РОБОТИ

Таблиця А.1

#### Тип будівельного матеріалу

| Варіант | Матеріал № 1 | Матеріал № 2 | Матеріал № 3     |
|---------|--------------|--------------|------------------|
| 1       | Бетон        | Алюміній     | Пластмаса        |
| 2       | Бетон        | Камінь       | Дерево           |
| 3       | Сталь        | Пластмаса    | Деревний пластик |
| 4       | Бетон        | Сталь        | Деревний пластик |
| 5       | Камінь       | Дерево       | Деревний пластик |
| 6       | Камінь       | Сталь        | Пластмаса        |
| 7       | Бетон        | Дерево       | Деревний пластик |
| 8       | Алюміній     | Пластмаса    | Деревний пластик |
| 9       | Бетон        | Камінь       | Алюміній         |
| 10      | Камінь       | Алюміній     | Пластмаса        |
| 11      | Камінь       | Сталь        | Деревний пластик |
| 12      | Бетон        | Сталь        | Дерево           |
| 13      | Сталь        | Алюміній     | Деревний пластик |
| 14      | Бетон        | Камінь       | Сталь            |
| 15      | Дерево       | Пластмаса    | Деревний пластик |
| 16      | Сталь        | Дерево       | Пластмаса        |
| 17      | Бетон        | Алюміній     | Дерево           |
| 18      | Алюміній     | Дерево       | Пластмаса        |
| 19      | Бетон        | Сталь        | Алюміній         |
| 20      | Камінь       | Алюміній     | Деревний пластик |
| 21      | Камінь       | Сталь        | Дерево           |
| 22      | Бетон        | Камінь       | Пластмаса        |
| 23      | Сталь        | Алюміній     | Пластмаса        |
| 24      | Бетон        | Пластмаса    | Деревний пластик |
| 25      | Камінь       | Пластмаса    | Деревний пластик |
| 26      | Камінь       | Сталь        | Алюміній         |
| 27      | Бетон        | Дерево       | Пластмаса        |
| 28      | Сталь        | Алюміній     | Дерево           |
| 29      | Бетон        | Камінь       | Деревний пластик |
| 30      | Камінь       | Алюміній     | Дерево           |
| 31      | Камінь       | Дерево       | Пластмаса        |
| 32      | Бетон        | Сталь        | Пластмаса        |
| 33      | Алюміній     | Дерево       | Деревний пластик |
| 34      | Бетон        | Алюміній     | Деревний пластик |
| 35      | Сталь        | Дерево       | Деревний пластик |

Таблиця А.2

## Вид будівельного матеріалу

| Матеріал                    | Вид матеріалу              |                        |                        |                          |                   |
|-----------------------------|----------------------------|------------------------|------------------------|--------------------------|-------------------|
|                             | 1                          | 2                      | 3                      | 4                        | 5                 |
| <b>Бетон</b>                | С12/15                     | С16/20                 | С20/25                 | С25/30                   | С30/35            |
| <b>Камінь</b><br>(розчин)   | блок<br>30,0 (15,0)        | бетонний<br>30,0 (5,0) | цегла<br>20,0 (10,0)   | природний<br>50,0 (10,0) | бут<br>40,0 (5,0) |
| <b>Сталь</b>                | 09Г2С                      | Ст3пс5                 | Ст3Гсп5                | Ст3Гпс5                  | 15ХСНД            |
| <b>Алюміній</b>             | АД1М                       | 1925                   | АД31Т                  | АД31Т1                   | АД31Т5            |
| <b>Дерево</b>               | кедр<br>С24                | сосна<br>С20           | дуб<br>D40             | ялина<br>С27             | ялиця<br>С30      |
| <b>Пластмаса</b>            | склопластик<br>поліефірний | склопластик<br>СВАМ    | скло<br>органічне      | склопластик<br>КАСТ-В    | вініпласт<br>ВП   |
| <b>Деревний<br/>пластик</b> | фанера ФСФ<br>п'ятишарова  | пластик<br>ДШП-Б       | фанера ФК<br>тришарова | пластик<br>ДШП-В         | фанера ФБС        |

Закінчення таблиці А.2

| Матеріал                    | Вид матеріалу       |                           |                         |                    |                      |
|-----------------------------|---------------------|---------------------------|-------------------------|--------------------|----------------------|
|                             | 6                   | 7                         | 8                       | 9                  | 10                   |
| <b>Бетон</b>                | С32/40              | С35/45                    | С40/50                  | С45/55             | С50/60               |
| <b>Камінь</b><br>(розчин)   | цегла<br>10,0 (5,0) | природний<br>60,0 (20,0)  | бетонний<br>15,0 (10,0) | блок<br>15,0 (7,5) | бут<br>15,0 (10,0)   |
| <b>Сталь</b>                | 09Г2                | 06ГБ-355                  | 14Г2                    | 14Г2АФ             | Ст3сп5               |
| <b>Алюміній</b>             | 1915Т               | АМг2М                     | АМг2Н2                  | АЛ8                | АМцМ                 |
| <b>Дерево</b>               | тополя<br>D30       | клен<br>D35               | модрина<br>С22          | в'яз<br>D50        | акація<br>D60        |
| <b>Пластмаса</b>            | скло<br>органічне   | склопластик<br>СВАМ       | вініпласт<br>ВН         | вініпласт<br>ВП    | склопластик<br>АГ-4С |
| <b>Деревний<br/>пластик</b> | ДВП<br>тверда       | фанера В/ВВ<br>семишарова | ДСП                     | ДВП<br>надтверда   | фанера Ф-1           |

Додаток Б

**ДОВІДКОВІ ДАНІ ДО РОБОТИ**

Таблиця Б.1

**Усереднені довідкові дані по будівельних матеріалах**

| Матеріал            |                            | Коефіцієнт<br>запасу $K$ | Густина<br>$\rho$ , кг/м <sup>3</sup> | Ринкова<br>вартість $C_1$ ,<br>у.о. за 1 т |
|---------------------|----------------------------|--------------------------|---------------------------------------|--------------------------------------------|
| Бетон               |                            | 2,25                     | 2400                                  | 60                                         |
| Камінь              |                            | 2,55                     | 1600                                  | 70                                         |
| Сталь               |                            | 1,37                     | 7850                                  | 1500                                       |
| Алюміній            |                            | 1,60                     | 2700                                  | 5500                                       |
| Дерево              |                            | 2,75                     | 700                                   | 300                                        |
| Пластмаса           | Склопластик<br>поліефірний | 1,95                     | 1400                                  | 80                                         |
|                     | Склопластик КАСТ-В         |                          | 1850                                  | 110                                        |
|                     | Склопластик СВАН           |                          | 1800                                  | 120                                        |
|                     | Склопластик АГ-4С          |                          | 1800                                  | 170                                        |
|                     | Скло органічне             |                          | 1200                                  | 200                                        |
|                     | Вініпласт ВН               |                          | 1200                                  | 220                                        |
|                     | Вініпласт ВП               |                          | 1200                                  | 230                                        |
| Деревний<br>пластик | Фанера ФСФ, ФК, В/ВВ       | 2,05                     | 650                                   | 700                                        |
|                     | Фанера ФБС                 |                          | 600                                   | 900                                        |
|                     | Фанера Ф-1                 |                          | 700                                   | 800                                        |
|                     | Пластик ДШП-Б              |                          | 1300                                  | 150                                        |
|                     | Пластик ДШП-В              |                          | 1300                                  | 180                                        |
|                     | Плита ДВП                  |                          | 900                                   | 500                                        |
|                     | Плита ДСП                  |                          | 750                                   | 450                                        |



**ТРИГОНОМЕТРИЧНИЙ РОЗВ'ЯЗОК КУБІЧНОГО РІВНЯННЯ**

Вирішення багатьох інженерних задач досить часто зводиться до розв'язання кубічного рівняння. Його загальний вигляд має вид виразу (28):

$$x^3 + a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0. \quad (28)$$

Підстановкою  $x = y - \frac{a}{3}$  кубічне рівняння може бути приведене до “неповного” вигляду (29):

$$y^3 + p \cdot y + q = 0, \quad (29)$$

у якому коефіцієнти при новій змінній  $y$  визначаються виразами  $p = -\frac{a^2}{3} + b$  і  $q = 2\left(\frac{a}{3}\right)^3 - \frac{a \cdot b}{3} + c$ .

У випадку, коли коефіцієнт  $p < 0$ , може бути використане тригонометричний розв'язок. Корені “неповного” кубічного рівняння при цьому залежать від додаткового параметра  $Q$ , який визначається виразом (30):

$$Q = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2. \quad (30)$$

Залежно від знака цього параметра розрізняють два випадки визначення коренів “неповного” кубічного рівняння.

У випадку  $Q \geq 0$  єдиний дійсний додатний корінь визначається виразом (31):

$$y = 2 \cdot \sqrt{-\frac{p}{3}} \cdot \frac{1}{\sin 2\alpha}, \quad (31)$$

де додаткові параметри  $\alpha$  і  $\beta$  визначаються відповідно до виразів (32) і (33):

$$\alpha = \arctg\left(\sqrt[3]{\frac{\beta}{2}}\right), \quad (32)$$

$$\beta = \arcsin\left(-\frac{2}{q} \cdot \sqrt{\left(-\frac{p}{3}\right)^3}\right). \quad (33)$$

У випадку  $Q < 0$  єдиний додатний корінь визначається виразом (34):

$$y = 2 \cdot \sqrt{-\frac{p}{3}} \cdot \cos \frac{\alpha}{3}, \quad (34)$$

де додатковий параметр  $\alpha$  визначається відповідно до виразу (35):

$$\alpha = \arccos \left( -\frac{q}{2 \cdot \sqrt{-\left(\frac{p}{3}\right)^3}} \right). \quad (35)$$

**Увага!** Слід зауважити, що точність отриманих тригонометричним методом коренів кубічного рівняння суттєво залежить від точності визначення проміжних тригонометричних параметрів, тому слід максимально точно знаходити ці величини.

Навчально-методичне видання

**Банніков Дмитро Олегович**

**БУДІВЕЛЬНІ КОНСТРУКЦІЇ**  
**ОЦІНКА ЕФЕКТИВНОСТІ ЗАСТОСУВАННЯ**  
**БУДІВЕЛЬНИХ МАТЕРІАЛІВ**

Методичні рекомендації до практичних занять

В авторській редакції  
Комп'ютерна верстка *Д. О. Банніков*

Формат 60x84 <sub>1/16</sub>. Обл.-вид.арк.2,05. Ум.друк.арк.2,02.  
Тираж 2 пр. Зам.№ 578

Український державний університет  
науки і технологій  
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи

Адреса видавця та дільниці оперативної поліграфії:  
вул. Лазаряна, 2, Дніпро, 49010