

Устойчивость и колебания составных стержней с упругими шарнирами

А.А. Брынза, к.т.н., доц.

Ключевые слова: упругие шарниры, обобщенные функции, свойство попарного сближения собственных частот при уменьшении жесткости упругого шарнира

В работе рассматривается устойчивость и колебания составных стержней с упругими шарнирами. Подобные системы встречаются в машиностроении и строительстве и их расчет является актуальной задачей. Для расчета составных стержней с упругими шарнирами применяется численно-аналитический метод, основанный на применении обобщенных функций.

1. Рассмотрим устойчивость составного стержня, состоящего из отдельных стержней одинаковой жесткости, соединенных между собой упругими шарнирами (рис. 1). Упругую постоянную этой связи обозначим k_M . Ее можно определить как величину момента, который необходимо приложить к узлу, чтобы взаимный поворот концов примыкающих к нему стержней был равен 1.

Рис. 1. Упругий шарнир с жесткостью k_M .

Пусть такие шарниры имеются в сечениях $x = L_i$ ($i = 1, \dots, n$) составного стержня.

Заменим дифференциальное уравнение изогнутой оси стержня системой уравнений

$$EI(x)v'' = EI_0 z, \quad z = -\frac{M(x)}{EI_0}, \quad (1.1)$$

где $EI(x)$ - изгибная жесткость балки, EI_0 - жесткость при $x \neq L_i$, $M_x(x)$ - изгибающий момент.

Перемещение $v(x)$ в общем случае может быть представлено в виде [1]

$$v(x) = \tilde{v}(x) + \sum_{i=1}^n \Delta v'(x - L_i) \sigma_0(x - L_i), \quad (1.2)$$

где $\tilde{v}(x)$ - некоторая непрерывная в точках $x = L_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) функция, имеющая непрерывную первую производную по x в этих точках; $\Delta v'(L_i) = v'(L_i + 0) - v'(L_i - 0)$ - взаимный угол поворота сечений справа и слева от i -го шарнира, а

$$\Delta v'(x - L_i) \sigma_0(x - L_i) = \begin{cases} \Delta v'(x - L_i) & \text{при } x > L_i \\ 0 & \text{при } x \leq L_i \end{cases} \text{ - линейный сплайн.}$$

Дифференцируя соотношение (1.2) дважды по x , получаем

$$v'' = \tilde{v}'' + \sum_{i=1}^n \Delta v'(L_i) \sigma_1(x - L_i),$$

где $\sigma_1(x - L_i)$ - импульсивная функция первого рода или δ -функция Дирака.

Подставляя это значение в равенство (1.1), находим

$$\frac{EI_0}{EI(x)} = \frac{\tilde{v}''}{z(x)} + \sum_{i=1}^n \frac{\Delta v'(L_i)}{z(x)} \sigma_1(x - L_i). \quad (1.3)$$

После некоторых преобразований уравнения (1.3), выполненных с использованием свойств обобщенных функций [1, 2], получаем

$$EI(x) = EI_0 \left[1 + \sum_{i=1}^n \frac{EI_0}{k_{Mi}} \sigma_1(x - L_i) \right]^{-1}. \quad (1.4)$$

Таким образом, жесткость $EI(x)$ равна EI_0 всюду, кроме конечного числа точек $x = L_i$, в которых она имеет сосредоточенные включения, определяемые выражением (1.4).

Дифференциальное уравнение изогнутой оси стержня с упругими шарнирами в сечениях $x = L_i (i = 1, 2, \dots, n)$ имеет следующий вид

$$v^{IV} + \frac{F}{EI_0} v''(x) = \sum_{i=1}^n \frac{EI_0}{k_{Mi}} z(L_i) \sigma_3(x - L_i), \quad (1.5)$$

или

$$v^{IV} + k^2 v''(x) = \sum_{i=1}^n \Delta v'(L_i) \sigma_3(x - L_i),$$

где $k^2 = \frac{F}{EI_0}$, $\sigma_3(x - L_i)$ - импульсивная функция третьего порядка.

Таким образом, задача по расчету на устойчивость составного стержня с упругими шарнирами сводится к решению дифференциального уравнения 4-го порядка с импульсивными функциями в правой части (1.5). Решение этого уравнения, найденное с помощью преобразования Лапласа [3], имеет следующий вид

$$v(x) = v_0 + \theta_0 x - \frac{M_0}{EI_0 k^2} (1 - \cos kx) - \frac{Q_0}{EI_0 k^2} \left(x - \frac{\sin kx}{k} \right) + \sum_{i=1}^n \Delta v'(L_i) \frac{\sin k(x - L_i)}{k} \sigma_0(x - L_i), \quad (1.6)$$

где v_0, θ_0, M_0, Q_0 - начальные параметры, а $\Delta v'(L_i)$ - промежуточные параметры, зависящие только от начальных параметров и некоторых функций влияния. Так $\Delta v'(L_1)$ выражается только через начальные параметры

$$\Delta v'(L_1) = -\frac{M_x(L_1)}{k_{M1}} = \frac{EI_0}{k_{M1}} v_x''(L_1) = \frac{1}{k_{M1}} (-M_0 \cos kL_1 - \frac{Q_0}{k} \sin kL_1).$$

Рассмотрим защемленный по краям стержень с 3 упругими шарнирами, жесткости которых k_{Mi} могут изменяться от 0 до бесконечности, в сечениях $x = L_1, L_2, L_3$. Используя краевые условия на правом конце стержня, составляем характеристическое уравнение для нахождения критических параметров. Для нахождения решения составляем Mathcad-программу [4].

Вначале рассмотрим случай, когда крайние шарниры идеальные, т.е. их жесткости бесконечно малы ($k_{M1} = k_{M3} = 0,00001$), а средний упругий с конечной жесткостью $k_{M3} = 0,01$. При этом жесткость составного стержня на несколько порядков больше жесткости упругого шарнира. В этом случае, в первом приближении можно считать, стержень абсолютно жестким и такая конструкция будет системой с одной степенью свободы (рис. 2). При исходных данных (в кН, м): $L_{\max} = 4, EI = 100$,

$k_{M1} = 0,00001$, $k_{M2} = 0,01$, $k_{M3} = 0,00001$, минимальные критические параметры имеют следующие значения $\nu k_1 = 0,141$, $\nu k_2 = 1,166$, $\nu k_3 = 1,571$, $\nu k_4 = 3,142$.

Минимальный корень для этого случая можно найти рассматривая этот составной стержень как систему с одной степенью свободы (рис. 2). Используя статический метод [5] составим уравнение

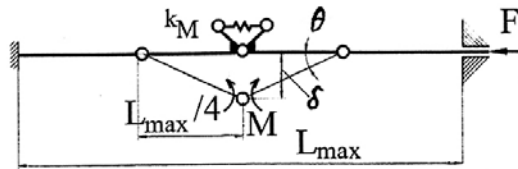


Рис. 2. Составной стержень с тремя шарнирами. Крайние шарниры идеальные, а средний упругий с жесткостью $k_M = 0,01$; M - изгибающий момент, δ - вертикальное перемещение упругого узла, θ - угол поворота

моментов относительно центрального шарнира, сил лежащих по одну сторону от этого узла. Реактивный момент в узле зависит от изменения угла между звеньями и жесткости упругого шарнира

$$\sum M = F_k \delta - M = F_k \frac{L_{\max}}{4} \theta - k_{M3} 2\theta = 0.$$

Отсюда

$$F_k = \frac{8k_{M3}}{L_{\max}} = \nu k_1^2 EI_0.$$

Тогда

$$\nu k_1 = \sqrt{\frac{8k_{M3}}{L_{\max} EI_0}} = \sqrt{\frac{8 \cdot 0,01 EI_0}{4 EI_0}} = 0,141.$$

Что полностью совпадает с ранее приведенным решением.

Рассмотрим задачу с тремя упругими шарнирами. Исходные данные следующие

$$L_{\max} = 4, EI = 100, L^T = [0,25 \quad 0,5 \quad 0,75] L_{\max}, k_M^T = [100 \quad 100 \quad 100].$$

Минимальные корни характеристического уравнения принимают следующие значения

$$\nu k_1 = 1,247, \nu k_2 = 1,766, \nu k_3 = 2,076, \nu k_4 = 3,398.$$

Формы потери устойчивости минимальных критических сил приведены на рис. 3. На рисунке видно, что наблюдается чередование симметричных и кососимметричных форм.

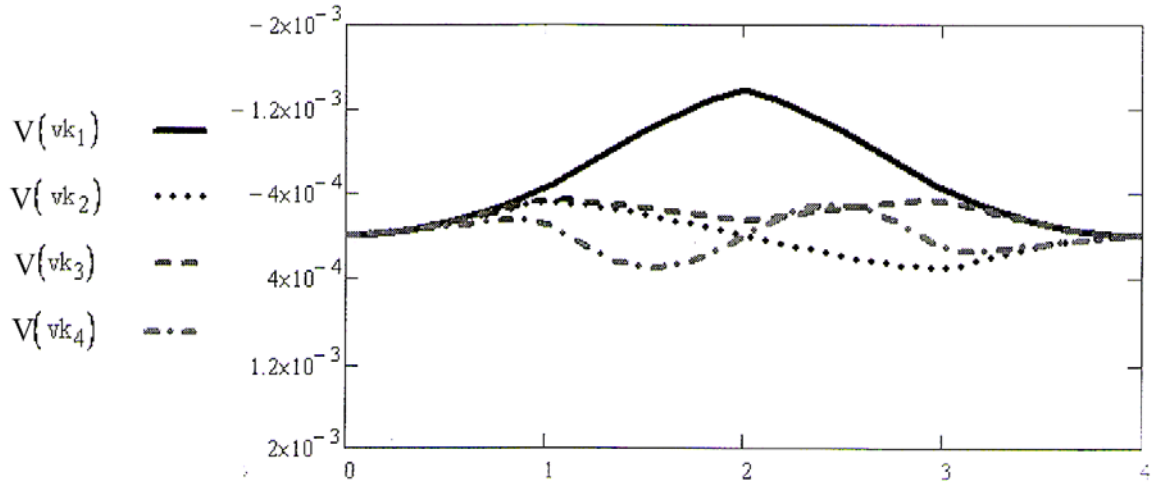


Рис. 3. Первые четыре формы потери устойчивости составного стержня с тремя упругими шарнирами

2. Рассмотрим свободные колебания составного стержня, состоящего из двух отдельных стержней одинаковой жесткости, соединенных между собой упругим шарниром, расположенным на упругой промежуточной опоре сопротивляющейся вертикальному перемещению (рис. 4).

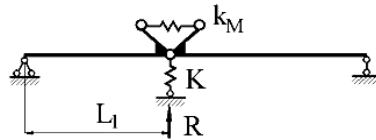


Рис. 4. Составной стержень с упругим шарниром жесткостью k_M на упругой опоре жесткостью K , расположенными на расстоянии L_1 от начала координат; R - реакция упругой опоры.

В этом случае дифференциальное уравнение свободных колебаний балки имеет следующий вид [1]

$$[EI(x)X_k'']' - mv_k^2 X_k = -R\sigma_1(x - L_1) = -K \cdot X(L_1)\sigma_1(x - L_1) \quad (2.1)$$

Здесь $EI(x)$ - изгибная жесткость стержня, при $x \neq L_1$ она равна EI_0 , а при $x = L_1$ имеет особенность, т.к. там упругий шарнир; m - погонная масса стержня, v_k - частота колебаний, K - жесткость упругой опоры на вертикальное перемещение, L_1 - координата сечения в котором находится промежуточная опора, $X(L_1)$ - перемещение сечения при $x = L_1$, $\sigma_1(x - L_1)$ - дельта-функция Дирака. Как частный случай, упругая опора может быть в том сечении, где находится упругий шарнир. В результате некоторых преобразований, решение уравнения (2.1) имеет следующий вид [1,2]

$$X_k^{IV} - k_k^4 X_k = \Delta X_k'(L_1)\sigma_3(x - L_1) - \frac{K}{EI_0} X_k(L_1)\sigma_1(x - L_1). \quad (2.2)$$

$$\text{Здесь, } \Delta X_k'(L_1) = -\frac{M(L_1)}{k_M} = \frac{EI_0 X_k''(L_1)}{k_M}.$$

Решение уравнения (2.2), найденное с помощью преобразования Лапласа [3] имеет следующий вид

$$\begin{aligned}
 X_k(x) &= v(0)Y_1(k_k x) + v'(0)\frac{Y_2(k_k x)}{k_k} + v''(0)\frac{Y_3(k_k x)}{k_k^2} + v'''(0)\frac{Y_4(k_k x)}{k_k^3} + \\
 &+ \Delta X_k'(x_1)\frac{Y_2(k_k(x-x_1))}{k_k}\sigma_0(x-x_1) - \frac{K}{EI_0}X(x_1)\frac{Y_4(k_k(x-x_1))}{k_k^3}\sigma_0(x-x_1) = \\
 &= v_0 Y_1(k_k x) + \theta_0 \frac{Y_2(k_k x)}{k_k} - \frac{M_0}{EI_0 k_k^2} Y_3(k_k x) - \frac{Q_0}{EI_0 k_k^3} Y_4(k_k x) + \\
 &+ \Delta X_k'(x_1)\frac{Y_2(k_k(x-x_1))}{k_k}\sigma_0(x-x_1) - \frac{K}{EI_0}X(x_1)\frac{Y_4(k_k(x-x_1))}{k_k^3}\sigma_0(x-x_1).
 \end{aligned}$$

Промежуточные параметры $\Delta X_k'(x_1)$, $X_k(x_1)$ выражаем через начальные параметры

$$\begin{aligned}
 X_k(x_1) &= v_0 Y_1(k_k x_1) + \theta_0 \frac{Y_2(k_k x_1)}{k_k} - \frac{M_0}{EI_0 k_k^2} Y_3(k_k x_1) - \frac{Q_0}{EI_0 k_k^3} Y_4(k_k x_1), \\
 \Delta X_k'(x_1) &= \frac{EI_0}{k_M} [v_0 k_k^2 Y_3(k_k x_1) + \theta_0 k_k Y_4(k_k x_1) - \frac{M_0}{EI_0} Y_1(k_k x_1) - \frac{Q_0}{EI_0 k_k} Y_2(k_k x_1)].
 \end{aligned}$$

Исключив промежуточные параметры, получим выражение $X_k(x)$ только через начальные параметры и некоторые функции влияния, которые будут иметь разрывы непрерывности I рода при $x = x_1$. Для составления характеристического уравнения используем граничные условия на правом конце системы.

В качестве примера рассмотрим шарнирно опертый по краям стержень с упругим шарниром на шарнирной опоре, расположенной симметрично относительно опор.

Выполним расчеты при $k_M = 100000EI$. В этом случае упругий шарнир можно считать «заглушенным». Даже 10 частота находится с точностью в 0,0001. Возьмем уменьшим жесткость упругого шарнира на 3 порядка ($k_M = 1000EI_0$), при этом частотный спектр не изменяется. Уменьшаем еще на порядок до $100EI_0$ и ряд частот начинает уменьшаться. Однако минимальная частота изменяется мало. При дальнейшем уменьшении жесткости упругого шарнира уменьшается и основная частота.

При уменьшении жесткости упругого шарнира, расположенного на жесткой шарнирной опоре, частоты начинают попарно сближаться и при $k_M < 0,001EI$ низшие частоты попарно практически

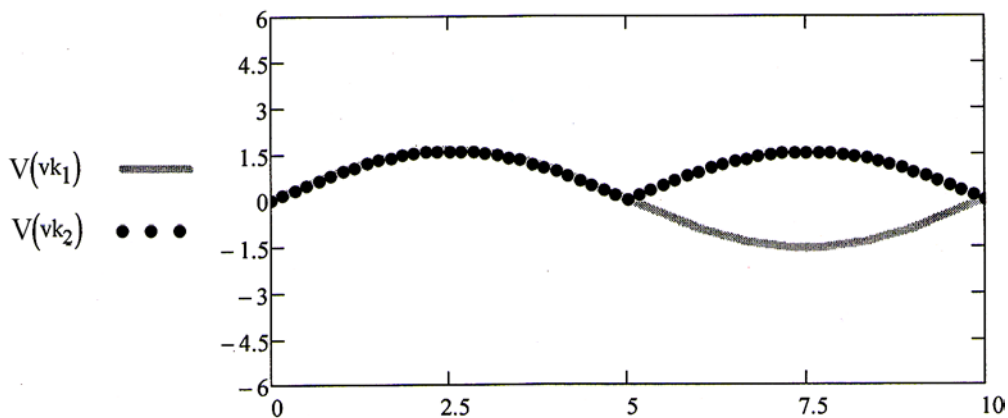


Рис. 5, а. Формы колебаний соответствующие равным 1-й и 2-й частотам

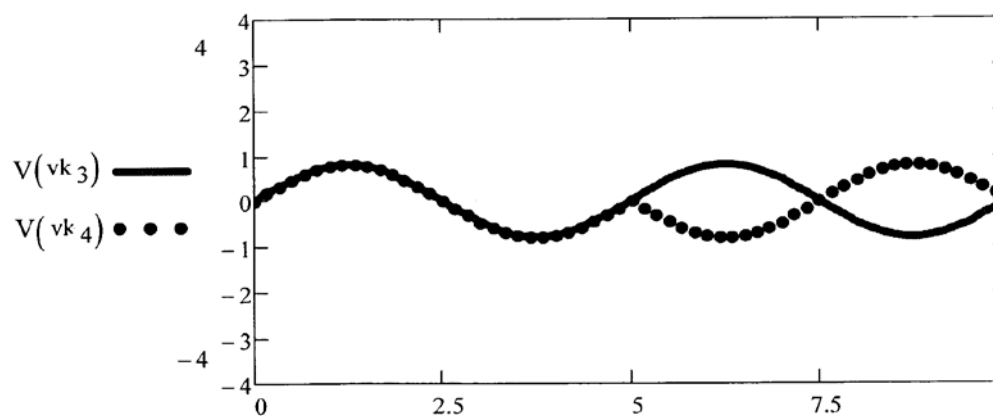


Рис. 5, б. Формы колебаний соответствующие равным 3-й и 4-й частотам

сливаются и равны частотам шарнирно опертой балки длиной $L_{\max}/2$. Так $\nu k_1 = \nu k_2 = 0,395$, $\nu k_3 = \nu k_4 = 1,579$ (отличие в 4 знаке). При этом формы колебаний взаимно ортогональны. При не центральной или упруго-шарнирной опоре это явление не наблюдается. Формы колебаний соответствующие низшим частотам приведены на рис. 5, а и 5, б.

ИСПОЛЬЗОВАННЫЕ ИСТОЧНИКИ

1. **Лазарян В.А.** Обобщенные функции в задачах механики / Лазарян В.А., Конашенко С.И.// К.: Наукова думка, 1974.- с. 190.
2. **Микусинский Я.** Элементарная теория обобщенных функций / Микусинский Я., Сикорский Р. // М.: Иностранная литература, 1959.- с. 258.
3. **Деч Г.** Руководство к практическому применению преобразования Лапласа, М.: Наука, 1963. - с. 287.
4. **Макаров Е.** Инженерные расчеты в Mathcad, СПб: Питер, 2005. - с.448.
5. **Безухов Н.И.** Устойчивость и динамика сооружений в примерах и задачах: Учебное пособие / Безухов Н.И., Лужин О.В., Колкунов Н.В. // М.: Высшая школа, 1987. - с. 264.