

УДК 629.4.083

М. И. КАПИЦА – д.т.н., доцент, Днепропетровский национальный университет железнодорожного транспорта имени академика В. Лазаряна, m.i.kapica@ua.fm  
В. В. ЛАГУТА – к.т.н., доцент, Днепропетровский национальный университет железнодорожного транспорта имени академика В. Лазаряна, vvlaguta@mail.ru

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ ЛОКОМОТИВНОГО ПАРКА КАК СЛОЖНОЙ СИСТЕМЫ

*Статью представил д.т.н., проф. А. П. Разгонов*

### Введение

Эффективность функционирования локомотивного парка как сложной системы существенно зависит от режима и условий его эксплуатации, которые, во многих случаях, определяются как собственным состоянием, так и состоянием системы содержания. Реально изменения состояния системы удается описать ее дальнейшее поведение в большинстве случаев марковским случайным процессом. Следует отметить чрезмерную жесткость гипотезы о марковском характере поведения процесса технической эксплуатации локомотивного парка, делающую полученную модель недостаточно адекватной. Другой очевидный недостаток этой модели состоит в упрощенном описании эволюции исследуемого процесса на множестве возможных состояний: в принятой модели возможны переходы только в соседние состояния.

Стремление учёта большего числа факторов в математической модели реального процесса эксплуатации локомотивного парка приводит к увеличению числа дифференциальных уравнений Чэпмена-Колмогорова относительно вероятностей состояний. Численное решение такой системы дифференциальных уравнений накладывает значительные ограничения на разрабатываемую марковскую модель моделируемого процесса. В связи с этим теоретический и практический интерес представляет анализ функционирования локо-

мотивного парка как системы при более общих предположениях.

### Обзор литературы

Определяющими факторами, влияющими на процесс эксплуатации, который в свою очередь зависит от надежности и эффективности его функционирования как восстанавливаемой системы, является организация обслуживания, наличие достаточного количества запасных элементов. Модели систем, в которых исследованы различные методы проведения аварийного, профилактического, планово-предупредительного и других видов ремонта рассмотрены в [1-3], где применяется математический аппарат марковских и полумарковских процессов с конечным множеством состояний. Для сравнения стратегий обслуживания вычисляются технические и экономические показатели качества функционирования систем. В [4] проанализированы модели, в которых развитие системы описывается полумарковским процессом с несчетным множеством состояний и управляемым полумарковским процессом с конечным множеством состояний. Основным методом исследования сложных стохастических систем является теория массового обслуживания.

Задачами теории массового обслуживания является разработка рекомендаций по обеспечению высокой эффективности функционирования системы. Для достижения этой цели ставятся задачи, состоящие в

установленим залежностей ефективності функціонування системи від її організації [5-7]. Визначений інтерес представляє не тільки дослідження стаціонарних характеристик, але й можливість зміни структури системи і отримання визначених (оптимальних) результатів, наприклад, збільшення прибутку від роботи системи [8, 9].

Стохастическі моделі експлуатації і обслуговування знаходять застосування при аналізі якості функціонування висувальних систем і технологічних процесів [10, 11], функціональної безпеки засобів залізничного транспорту [12], при оцінці надійності програмного забезпечення [13, 14].

### Цель статьи

Обоснование выбора критериев оптимальности процесса технической эксплуатации локомотивного парка на основе исследования стохастических оценок эффективности с использованием полумарковской модели. Получить последовательность стратегий обслуживания и ремонта.

### Основные допущения

Положим, что процесс технической эксплуатации локомотивного парка представляет собой случайную последовательность переходов из текущего фазового состояния  $S_i$  в последующее  $S_j$ . Время пребывания в каждом состоянии может быть либо случайной величиной с заданным (произвольным) законом распределения, либо константой. В таком предположении описанный процесс может быть аппроксимирован моделью полумарковского процесса, называемого также в литературе вложенной цепью Маркова (ВЦМ) и задаваемого следующими параметрами:

– вектором начального состояния ВЦМ

$$P_0 = \{P_i^0\}, \quad i = \overline{1, N},$$

где  $N$  – количество возможных состояний процесса;

– квадратной матрицей переходных вероятностей из состояния  $S_i$  в состояние  $S_j$

$$\|P_{ij}\|, \quad i = \overline{1, N}; \quad j = \overline{1, N};$$

– матрица-строка плотностей распределения времени пребывания в состоянии  $S_i$  перед переходом в следующее состояние  $S_j$

$$F = \{F_i(t)\}, \quad i = \overline{1, N}.$$

### Обоснование выбора критериев оптимальности

Представление исследуемого процесса моделью ВЦМ даёт возможность использования достаточно удобных методик, используемых в стохастическом моделировании. Статистическая обработка экспериментальных данных имитации процесса эксплуатации локомотивов, позволяет вычислить значения комплексных показателей надёжности экономических эксплуатационных показателей, которые могут быть использованы в качестве критериев.

Произвольное распределение времени пребывания в каждом из возможных состояний приводит к полумарковскому процессу, формальное описание которого представлено, например, в [15]. В дополнение к одношаговым переходным вероятностям в работе рассматриваются вероятности  $R_{ij}$  перехода из состояния  $i$  в состояние  $j$  за конечное  $n > 1$  шагов.

С использованием формулы полной вероятности

$$R_{ij} = \sum_{k=1}^N P_{ik} R_{kj}.$$

или

$$R_{ij} = \sum_{k \neq i}^N P_{ik} R_{kj} + P_{ij} R_{ij}.$$

Последнее выражение перепишем в матричной форме

$$R = \|R_{ij}\| = PR = P(R - R_{dg}) + PR_{dg},$$

где  $R_{dg}$  – диагональная матрица, полученная из матрицы  $R$  заменой диагональных элементов нулями.

Можно показать, что для эргодической вложенной цепи справедливо

$$R = P(R - I) + P,$$

$I$  – тождественная (единичная) матрица размерности  $N \times N$ .

В частности,

$$R_{ij} = \sum_{k \neq i}^N P_{ik} R_{kj} + P_{ij}.$$

Этот результат справедлив и для вложенных цепей с сообщающимися состояниями. Если процесс не имеет поглощающих состояний и их общее количество конечно, то в нем всегда можно указать маршрут конечной длины, следуя которому процесс может перейти из одного состояния в другое за конечное число шагов.

Среднее число шагов  $m_{ij}$  до первого попадания из состояния  $i$  в состояние  $j$  удовлетворяет уравнению восстановления

$$m_{ij} = \sum_{k \neq i} P_{ik} (m_{kj} + 1) + P_{ij}. \quad (1)$$

Из этого выражения следует, что среднее число шагов, необходимых для возвращения процесса в состояние  $i$ ,  $m_{ii} = 1/\pi_i$ ,  $\pi_i$  – стационарная вероятность пребывания в состоянии  $i$ .

Функция распределения времени безусловного пребывания процесса в состоянии  $i$

$$F_i(t) = \sum_{k=1}^N P_{ij} F_{ij}(t). \quad (2)$$

Если  $\mu_{ij}$  – среднее время, соответствующее распределению  $F_{ij}(t)$ , то из выражения (2) можно получить среднее время  $\mu_i$  безусловного пребывания процесса в состоянии  $i$ , т.е.

$$\mu_i = \sum_{k=1}^N P_{ik} \mu_{ik}.$$

Пусть  $l_{ij}$  среднее время до первого попадания процесса из состояния  $i$  в состояние  $j$ , тогда

$$L = \|l_{ij}\| = P(L - L_{dg}) + M, \quad (3)$$

где  $M$  – матрица, диагональные элементы которой есть безусловные средние  $\mu_i$ , а остальные равны нулю;  $L_{dg}$  – диагональная матрица, полученная из матрицы  $L$  заменой недиагональных элементов нулями.

Выражение (3) может быть записано в виде

$$l_{ij} = \sum_{k \neq i}^N P_{ik} l_{ij} + \mu_i.$$

Соответственно для среднего времени возвращения в состояние  $i$

$$l_{ji} = \frac{1}{\pi_i} \sum_{k \neq j}^N \pi_k \mu_k. \quad (4)$$

Для средней наработки локомотива в состоянии  $j$  процесса между двумя очередными входами в состояние  $i$

$$\phi_{ji} = (\pi_j / \pi_i) \mu_i,$$

где  $\pi_j / \pi_i$  – число попаданий в состояние

$j$ . Отсюда следует, что  $l_{ij} = \sum_{j=1}^N \phi_{ij}$ .

Определим вероятность перехода из состояния  $i$  в состояние  $j$  за время, не превышающее время  $t$

$$P_{ij}(t) = P_{ij} F_{ij}(t).$$

Теорема Смита [16] для конечных процессов с сообщающимися состояниями утверждает, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_{ij}(t) = \frac{\mu_i}{l_{ij}} \quad (5)$$

для любых  $\mu_i < \infty$  и произвольных функций

$$F_i(t) = \sum_{j=1}^N P_{ij}(t).$$

Выражение (5) представляет собой коэффициент использования в состоянии  $j$ .

В частности, если состояние  $j$  целевое состояние процесса эксплуатации, то  $\mu_i/l_{ii}$  можно определить как целевую функцию процесса технической эксплуатации. Она может рассматриваться как коэффициент использования, а его максимум может служить критерием оптимальности процесса технической эксплуатации локомотивов.

Обозначив коэффициент использования  $K_j = \mu_j/l_{jj}$ , и используя выражение (4), можно записать

$$K_j = \frac{\mu_j}{\mu_j + \frac{1}{\pi_j} \sum_{k \neq j}^N \pi_k \mu_k}. \quad (6)$$

Отсюда следует, что  $K_j > 0$  для всех  $D_j$  и  $\sum_{j=1}^N K_j = 1$ . Следовательно,  $K_j$  есть вероятность. Так как  $K_j$  - функция вероятностей  $P_{ik}$ , то она является характеристикой процесса технической эксплуатации локомотивов и потому может служить его целевой функцией. Формально это означает, что максимум  $K_j$  может быть принят в качестве одного из критериев оптимальности процесса технической эксплуатации локомотивов.

Из выражения (6) путем несложных алгебраических преобразований можно получить серию широко распространенных на практике удельных критериев эффективности процесса технической эксплуатации, в частности удельные затраты на техническую эксплуатацию. Из выражения (6) можно, например, получить

$$K_j = \frac{1}{1 - \frac{1}{\pi_j \mu_j} \sum_{k \neq j}^N \pi_k \mu_k}. \quad (7)$$

Выражение, стоящее в знаменателе (7), часто называют коэффициентом средних удельных потерь и обозначают

$$\tau_j = \frac{1}{\pi_j \mu_j} \sum_{k \neq j}^N \pi_k \mu_k. \quad (8)$$

Для максимизации  $K_j$  в (7) достаточно выполнить минимизацию  $\tau_j$ . Уменьшение величины  $\tau_j$  возможно прежде всего за счет перераспределения вероятностей  $\pi_j$  и  $\pi_k$ , а также сокращения  $\mu_k$ .

В том случае, когда вместо средних времен  $\mu_k$  введены средние стоимости  $C_k$  пребывания в состояниях  $k = 1, 2, \dots, N$ , из выражения (7) можно получить экономический критерий оптимальности процесса технической эксплуатации и ремонта локомотивов

$$K_{jc} = \frac{\pi_j C_j}{\pi_j C_j + \sum_{k \neq j}^N \pi_k C_k} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\pi_j C_j} \sum_{k \neq j}^N \pi_k C_k}. \quad (9)$$

Если положить, что каждый час использования локомотива в целевом состоянии дает средний удельный доход  $d_j$ , то можно считать, что доходы в целевом состоянии  $C_j = d_j \mu_j$ . Подставляя это выражение в (9), получим

$$K_{jc} = \frac{1}{1 + \frac{1}{d_j} \sum_{k \neq j}^N \frac{\pi_k C_k}{\pi_j \mu_j}}.$$

Выражение, определяемое множителем при элементе  $1/d_j$ , носит название средних удельных затрат  $C_j$  на техническую эксплуатацию и ремонт объекта. Если  $d_j = const$ , то максимум  $K_{jc}$  достигается минимизацией выражения

$$C_j = \frac{1}{\pi_j \mu_j} \sum_{k \neq j}^N \pi_k C_k. \quad (10)$$

Критериями оптимальности процесса технической эксплуатации локомотивов могут быть выбраны  $\max K_j (\min \tau_j)$  и (или)  $\min C_j$ , выражения (6), (8) и (10). В

соответствии с данными критериями определяются оптимальные стратегии технического обслуживания и ремонта применительно к отдельным узлам и агрегатам локомотивов. Идея получения наиболее выгодной стратегии заключается в следующем. Для некоторого исходного процесса технической эксплуатации объекта предполагается, что соответствующая ему стратегия обслуживания и ремонта не учитывает техническое состояние конкретного объекта. Значение целевой функции в данном случае будет определять качество исходной стратегии. Затем рассматривается стратегия обслуживания и ремонта, частично учитывающая технические состояния конкретных объектов, и находится но-

вое значение целевой функции. Если окажется, что оно лучше, чем у исходной, то можно утверждать, что вторая стратегия предпочтительнее первой. Далее, используя вторую стратегию в качестве исходной, определяется новая стратегия, которая уже полностью учитывает технические состояния объектов, т. е. каждого из его составных элементов. Если эта стратегия будет предпочтительнее второй, то из трех рассмотренных стратегий она будет оптимальной. Таким образом, представляется возможным получить упорядоченную последовательность стратегий, в которой одна стратегия имеет преимущества перед другими, рис. 1.

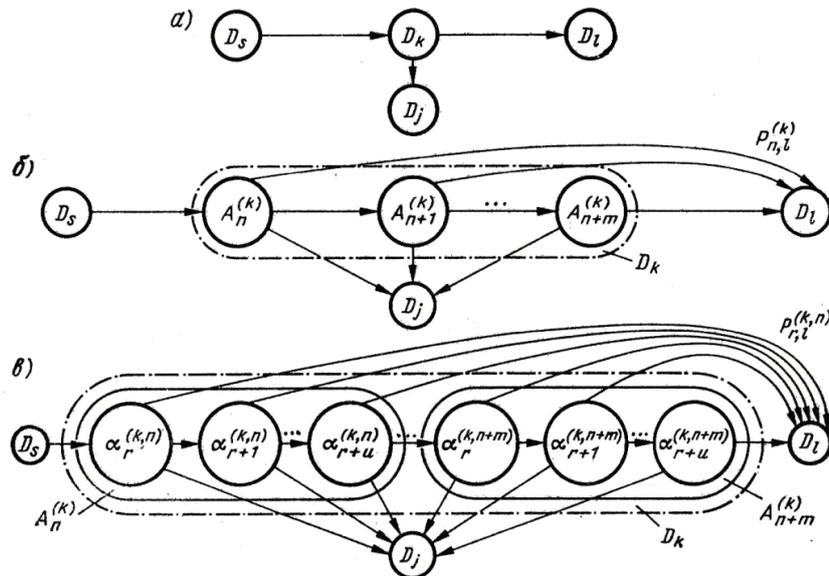


Рис. 1. Графическое представление принципа получения оптимальной стратегии технической эксплуатации ( $D_j$  - целевое состояние). Варианты стратегий:

а – без учета технического состояния агрегата; б – с учетом технического состояния агрегата; в – с учетом технического состояния элементов агрегата

С помощью диагностирования можно:

- выявлять неисправные агрегаты и подвергнуть их обслуживанию и ремонту;
- в неисправных агрегатах локализовать неисправные узлы и подвергать их осмотру и обслуживанию;
- выявлять неисправные детали и только их ремонтировать и т. д.

Чем глубже оценивается техническое состояние, тем более эффективной будет стратегия. Однако на практике внедрение более эффективной стратегии сопряжено с дополнительными затратами на техническое диагностирование [17]. С учетом этих затрат распределение стратегий по степени их эффективности может существенно измениться. Оптимальной в этом случае бу-

дет та стратегия обслуживания и ремонта, при которой суммарные приведенные затраты окажутся наименьшими [18].

### Выводы

Эффективность эксплуатации локомотивного парка существенно зависит от качества обслуживания. Качество обслуживания определяется эффективностью средств диагностирования технического состояния. Процесс эксплуатации локомотивного парка описывается полумарковской моделью. Используемая полумарковская модель позволяет более полно учесть в общем случае диагностическое обеспечение локомотива и процесс восстановления.

В качестве целевых функций выбраны функция удельных затрат (10), коэффициент средних удельных потерь (8), коэффициент использования (6). Предложена процедура построения упорядоченной последовательности улучшающих стратегий обслуживания и ремонта с учетом состояния конкретного локомотива.

### Библиографический список

1. Гнеденко, Б. В. Математические методы в теории надежности. Основные характеристики надежности и их статистический анализ [Текст] / Б. В. Гнеденко, Ю. К. Беляев, А. Д. Соловьев. – М.: Наука, 1965. – 524 с.
2. Барзилович, Е. Ю. Некоторые математические вопросы теории обслуживания сложных систем [Текст] / Е. Ю. Барзилович, В. А. Каштанов. – М.: Сов. Радио, 1971. – 272 с.
3. Вопросы математической теории надежности [Текст] / [Е. Ю. Барзилович, Ю. К. Беляев, В. А. Каштанов и др.]/ Под ред. Гнеденко Б.В. – М.: Радио и связь, 1983. – 376 с.
4. Каштанов, В. А. Полумарковские модели процесса технического обслуживания. [Текст] / В. А. Каштанов. – М.: Знание, 1987. – 91 с.
5. Banik, A. D. Queueing analysis and optimal control of BMAP/G(a,b)/1/N and BMAP/MSP(a,b)/1/N systems // Computers & Industrial Engineering. – 2009. – No. 57. – P. 748–761.
6. Bellman, R. A. Markovian Decision Process // J. Math. and Mech. – 1957. – No. 6. – P. 679.
7. Jewell, W. S. Markov-renewal programming // Operation Res. – 1967. – No. 11. – P. 938–971.
8. Кондрашова, Е. В. Алгоритмизация исследования качества работы системы массового обслуживания [Текст] / Е. В. Кондрашова // «Качество. Инновации. Образование». – 2011. – №8. – С. 40–46.
9. Kashtanov, V. A. Controlled semi-markov processes in modeling of the reliability and redundancy maintenance of queueing systems // Computer Modelling and New Technologies. – 2010. – Vol. 14, No. 1. – P. 26–30.
10. Бубнов, В. П. О загрузке вычислительной системы с изменяющейся интенсивностью поступления заданий [Текст] / В. П. Бубнов, В. И. Сафонов, В. Л. Смагин // Автоматика и вычислительная техника. – 1987. – № 6. – С. 19–22.
11. Бубнов, В. П. Разработка динамических моделей нестационарных систем обслуживания [Текст] / В. П. Бубнов, В. И. Сафонов // – СПб. – Издательство «Лань», 1999. – С. 64.
12. Бубнов, В. П. Нестационарная модель оценки функциональной безопасности средств железнодорожной автоматики [Текст] / В. П. Бубнов, К. И. Бурцева // Труды Международной научно-методической конференции, 11-12 ноября 2010 г. – СПб. – Петербургский государственный университет путей сообщения. – 2011. – С. 269.
13. Бубнов, В.П. Обоснование стратегии отладки программ на основе нестационарной модели надёжности [Текст] /

- В. П. Бубнов, А. В. Тырва,  
А. Д. Хомоненко // Научно-технические  
ведомости Санкт-Петербургского госу-  
дарственного политехнического уни-  
верситета. – 2010. – № 2 (97). – С. 85-  
92.
14. Bubnov, V. P. Model of reliability of the  
software Coxian distribution of length of  
intervals between the moments of detec-  
tion of errors [Text] / V. P. Bubnov,  
A. V. Tyrva, A. D. Khomonenko // In pro-  
ceedings of 34th Annual IEEE Computer  
Software and Applications Conference  
(COMPSAC 2010). – Seoul, Korea, 19-23  
July 2010. – P. 238-243.
15. Тихонов, В. И. Марковские процессы  
[Текст] / В. И. Тихонов, М. А. Миронов.  
– М.: Сов. радио, 1977, – 488 с.
16. Барлоу, Р. Статистическая теория  
надежности и испытания на безотказ-  
ность [Текст] / Р. Барлоу, Ф. Прошан //  
Пер. с англ. И. А. Ушакова. – М.:  
Наука, 1985, 328 с.
17. Босов, А. А. Оценка влияния стацио-  
нарного диагностирования на надеж-  
ность локомотивов [Текст] /  
А. А. Босов, М. И. Капица // Актуаль-  
ные проблемы развития транспортных  
систем и строительного комплекса:  
Труды Междунар. научн.-прак. конф./  
Под общ. ред. В. И. Сенько. – Гомель:  
БелГУТ, 2001. – С. 51-54.
18. Босов, А. А. Необходимые условия ра-  
циональности системы плановых вос-  
становлений подвижного состава  
[Текст] / А. А. Босов, М. И. Капица //  
Збірник наукових праць Київського  
університету економіки і технологій  
транспорту Міністерства транспорту  
України: Серія «Транспортні системи і  
технології». – Вип. 4. – К.: КУЕТТ,  
2003. – С. 180 – 191.
- Ключові слова:** стохастичні моделі сис-  
тем, напівмарковські моделі, вкладений мар-  
ківський ланцюг, експлуатація локомоти-  
вів.
- Ключевые слова:** стохастические моде-  
ли систем, полумарковские модели, вло-  
женная марковская цепь, эксплуатация ло-  
комотивов.
- Keywords:** stochastic models of systems,  
semi-markov models, embedded markov  
chain, maintenance of locomotives.

Надійшла до редколегії 15.10.2012