

Библ.

ДНЕПРОПЕТРОВСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ 300-ЛЕТИЯ
ВОССОЕДИНЕНИЯ УКРАИНЫ С РОССИЕЙ

517,928

На правах рукописи

КАГАДИЙ Татьяна Станиславовна

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ МЕТОД В ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ЗАДАЧАХ
ЛИНЕЙНОЙ ВЯЗКОПРУГОСТИ ОРТОТРОПНЫХ ТЕЛ

01.02.04 - механика деформируемого твердого тела

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Днепропетровск - 1990

**НТБ
ДНУЖТ**

Работа выполнена в Днепропетровском государственном университете.

Научный руководитель – доктор физико-математических наук,
профессор ПАВЛЕНКО А.В.

Официальные оппоненты – доктор физико-математических наук,
профессор ЕФИМОВ А.В.

кандидат физико-математических наук,
доцент ЛОБОДА В.В.

Ведущая организация – Институт проблем механики АН СССР,
г. Москва.

Защита диссертации состоялась 16 ноября 1990 г.
в 15 час. на заседании специализированного совета К 053.24.05
по присуждению ученой степени кандидата физико-математических
наук при Днепропетровском ордена Трудового Красного Знамени госу-
дарственном университете имени 300-летия воссоединения Украины
с Россией по адресу: 320625, ГСП, г.Днепропетровск – 10,
пр. Гагарина, 72, корп. 3, ауд. 57.

Днепропетров-

1990 г.

ЛАМЗЮК В.Д.

НТБ
ДНУЖТ

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Во многих отраслях современной техники, строительстве, машиностроении, судостроении широко применяются конструкции, изготовленные из анизотропных и композиционных материалов. При расчете на прочность таких конструкций приходится определять неравномерное поле напряжений, возникающее при нагружении. Анизотропия среды даже в рамках теории упругости приводит к значительному усложнению задач. Кроме того, на практике часто возникает необходимость учета вязкоупругих свойств материалов, особенно при исследовании напряженно-деформированного состояния композитов. Такие задачи, как правило, слишком сложные и недоступные для аналитического решения. В определенной степени запросы инженерной практики могут быть удовлетворены за счет развития численных методов, ориентированных на ЭВМ. Однако потребность в аналитических решениях, пусть даже приближенных, остается весьма значительной. Такие решения служат для выяснения качественных особенностей задач, получения асимптотик, анализа особых точек и построения соответствующих решений, являются основой для численных методов.

Поэтому разработка простых аналитических подходов к решению задач механики анизотропных и композиционных материалов является актуальной.

Целью работы является:

- построение асимптотического метода решения задач линейной вязкоупругости ортотропных тел с цилиндрической анизотропией, когда в качестве малого параметра выступает отношение жесткостных характеристик материала;
- решение на основе предложенного метода ряда новых контактных задач линейной вязкоупругости, исследование которых другими методами затруднительно.

Научная новизна. В диссертации построен асимптотический метод решения осесимметричных задач линейной вязкоупругости ортотропных сред, обладающих цилиндрической анизотропией, который является обобщением метода асимптотического интегрирования, разработанного ранее применительно к упругим материалам.

Днепропетровский
институт инженеров
железнодорожного транспорта
им. П. И. Калинина
БИБЛИОТЕКА

5561a

Предложенный метод применен к исследованию новых задач механики: о действии кругового в плане штампа с плоским основанием на границу вязкоупругого ортотропного полупространства с учетом трения и сцепления; о передаче нагрузки упругим стержнем вязкоупругому полупространству, полудубесконечному и конечному цилиндрам.

Практическая ценность. Разработанный в диссертации аналитический метод позволяет строить обоснованные приближенные решения важных задач линейной вязкоупругости, исследование которых другими методами затруднено или невозможно. При этом, как правило, полученные результаты сводятся к простым и наглядным формулам, удобным для практического применения в инженерных расчетах и могут быть использованы в организациях, связанных с созданием анизотропных и композиционных материалов, строительных организациях. Некоторые результаты диссертации используются в виде методик при проведении научно-исследовательских работ, а также в учебном процессе.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на XVI научно-технической конференции молодых ученых и специалистов (г.Харьков, 1988 г.), IV Всесоюзной конференции "Смешанные задачи механики деформируемого тела" (г.Одесса, 1989 г.), III Всесоюзной конференции "Прочность, жесткость и технологичность изделий из композиционных материалов" (г.Запорожье, 1989 г.), IV Международной конференции по дифференциальным уравнениям и их приложениям (г.Русе, Болгария, 1989 г.), на семинарах по механике сплошной среды им. Л.А.Галина (г.Москва, ИГиМ АН СССР, 1988, 1989 гг.), на семинаре кафедры математического моделирования физико-механических систем Московского института электронного машиностроения (г.Москва, 1989 г.).

Публикации. Основные научные результаты диссертации опубликованы в семи печатных работах.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы.

Общий объем - 105 с., включая 89 о. машинописного текста, 12 рис. на 7 с., 1 табл. на 1 с., список литературы из 56 наименований на 8 с.

ИГЭ
ДНУЖТ

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении дан краткий обзор асимптотических методов, применяемых в настоящее время к решению смешанных задач теории упругости, изложены подходы, используемые при решении краевых задач линейной вязкоупругости.

Первая глава посвящена изложению основ асимптотического метода.

При исследовании тех или иных практически важных задач даже в упругой области приходится прибегать к упрощению разрешающей системы уравнений. Естественным математическим аппаратом, который дает возможность построить обоснованные приближенные уравнения и оценить области применимости различных гипотез, является асимптотический анализ. В §1.1 проводится такой анализ основных уравнений. Рассматривается материал в условиях аксиальной симметрии, ортотропный как в отношении упругих, так и вязкоупругих свойств.

Соотношения между деформациями и напряжениями в таком материале имеют вид

$$\begin{aligned}
 e_{11} &= \frac{1}{E_1} (\sigma_{11} + \int_0^t K_{11}(t-\tau) \sigma_{11} d\tau) - \frac{\nu_{12}}{E_2} (\sigma_{22} + \int_0^t K_{12}(t-\tau) \sigma_{22} d\tau) - \\
 &- \frac{\nu_{13}}{E_3} (\sigma_{33} + \int_0^t K_{13}(t-\tau) \sigma_{33} d\tau), \\
 e_{22} &= -\frac{\nu_{21}}{E_1} (\sigma_{11} + \int_0^t K_{21}(t-\tau) \sigma_{11} d\tau) + \frac{1}{E_2} (\sigma_{22} + \int_0^t K_{22}(t-\tau) \sigma_{22} d\tau) - \\
 &- \frac{\nu_{23}}{E_3} (\sigma_{33} + \int_0^t K_{23}(t-\tau) \sigma_{33} d\tau), \\
 e_{33} &= -\frac{\nu_{31}}{E_1} (\sigma_{11} + \int_0^t K_{31}(t-\tau) \sigma_{11} d\tau) - \frac{\nu_{32}}{E_2} (\sigma_{22} + \int_0^t K_{32}(t-\tau) \sigma_{22} d\tau) + \\
 &+ \frac{1}{E_3} (\sigma_{33} + \int_0^t K_{33}(t-\tau) \sigma_{33} d\tau), \quad e_{13} = \frac{1}{G} (\sigma_{13} + \int_0^t \hat{c}(t-\tau) \sigma_{13} d\tau),
 \end{aligned}$$

$$e_{23} = e_{12} = 0, \quad \nu_{12} E_1 = \nu_{21} E_2, \quad \nu_{23} E_2 = \nu_{32} E_3, \quad \nu_{31} E_3 = \nu_{13} E_1,$$

$$K_{12} = K_{21}, \quad K_{23} = K_{32}, \quad K_{13} = K_{31}$$

НТБ
ДНУЖТ

Здесь $E_1, E_2, E_3(\rho)$ - мгновенные модули упругости (сдвига); ν_{ij} - коэффициенты Пуассона; $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$ - нормальные напряжения; $\sigma_{13} = \sigma_{31}$ - касательные напряжения; $K_{ij}(t-\tau)$ ядра ползучести; t - время.

Для аппроксимации ядер ползучести используются следующие аналитические выражения:

$$K_{ij}(t-\tau) = k_{ij}(t-\tau)^{\alpha_{ij}-1} \exp[-\beta_{ij}(t-\tau)], \quad (2)$$

$$K(t-\tau) = k(t-\tau)^{\alpha-1} \exp[-\beta(t-\tau)] \quad (0 < \alpha_{ij}, \alpha \leq 1).$$

После применения преобразования Лапласа по времени к соотношениям (1) с учетом (2) вопрос об осесимметричном напряженно-деформированном состоянии вязкоупругого ортотропного тела с цилиндрической анизотропией сводится к интегрированию уравнений относительно трансформант U и W компонент вектора перемещений u и w .

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \varepsilon_1 \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \varepsilon_1 m_1(\rho) \frac{\partial^2 W}{\partial z \partial z} + \frac{1}{z} \frac{\partial U}{\partial z} - \varphi_1 \frac{U}{z^2} = 0, \quad (3)$$

$$\varepsilon_2 \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + \varphi_2 \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + \varepsilon_1 m_1(\rho) \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial z} + \varepsilon_1 \frac{1}{z} \frac{\partial W}{\partial z} + \varepsilon_1 m_2(\rho) \frac{1}{z} \frac{\partial U}{\partial z} = 0,$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon F_1(\rho)/F_{11}(\rho), \quad \varepsilon = G/E_1, \quad m_1(\rho) = 1 + \nu_{13} \varepsilon_1^{-1} F_{13}(\rho),$$

$$m_2(\rho) = 1 + \nu_{32} \varphi_2 \varepsilon_1^{-1} F_{32}(\rho), \quad \varphi_2 = E_2 F_{22}(\rho)/E_1 F_{11}(\rho), \quad \varphi_1 = E_3 F_{33}(\rho)/E_1 F_{11}(\rho)$$

при соответствующих граничных условиях.

Отношения модулей упругости Q , Q_1 в реальных конструкциях могут быть самыми разнообразными ($Q \leq 1$ (> 1)), $Q_1 \leq 1$ (≥ 1)). Остановимся подробно на анализе случая, когда $Q \leq 1$ (при этом $m_1 = m_2 = m$; анализ других случаев проводится аналогично). Величину ε_1 будем рассматривать как "малый" параметр при асимптотическом интегрировании системы (3). Он действительно оказывается малым, если мало ε так как известная функция

$F_1(\rho)/F_2(\rho)$ не превосходит единицы при произвольных значениях параметра ρ (ρ - параметр преобразования Лапласа).

Формальный переход к пределу при $\varepsilon_i \rightarrow 0$ в уравнениях (3) приводит к простейшей расчетной схеме, соответствующей системе перекрестных стержней, работающих на растяжение-сжатие. При таком формальном предельном переходе фактически навязывается определенное поведение решений, а именно: компоненты вектора смещений имеют один и тот же порядок по ε_i , а дифференцирование по координатам не приводит к изменениям порядка. В действительности это не так.

Чтобы учесть возможные соотношения между компонентами вектора перемещений и скоростями их изменения по координатам, вводятся аффинные преобразования, зависящие от ε_i и представляющие собой частный случай преобразований Лайтхилла:

$$z_1 = z, \quad \zeta_1 = \varepsilon_1^{1/2} \alpha z, \quad U = \varepsilon_1^{3/2} U^{(1)}, \quad W = W^{(1)}, \quad (4)$$

$$z_2 = z, \quad \zeta_2 = \varepsilon_2^{-1/2} \beta z, \quad U = \varepsilon_2^{1/2} U^{(2)}, \quad W = \varepsilon_2^2 W^{(2)}. \quad (5)$$

Из вида этих преобразований вытекает, что решения системы, полученной из (3) после применения (4), относительно медленнее изменяются вдоль координаты \bar{z} по сравнению с аналогичными решениями системы, полученной из (3) после введения преобразований (5). Компоненты вектора перемещений разыскиваются в виде суперпозиции решений обоих типов.

Функции $U^{(n)}, W^{(n)}$ ($n = 1, 2$), а также коэффициенты α, β представляются в виде рядов по параметру $\varepsilon_i^{1/2}$:

$$U^{(n)}(W^{(n)}) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon_i^{j/2} U^{n,j} (W^{n,j}), \quad \alpha(\beta) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon_i^{j/2} \alpha_j (\beta_j).$$

Показано, что если коэффициенты α_j, β_j находятся по формулам

$$\alpha_j - \frac{1}{2} \left[m^2 \delta_{j-4} + \sum_{k=1}^{j-4} \alpha_k (m^2 \delta_{j-k-4} - \alpha_{j-k}) \right],$$

НТБ
ДНУЖТ

$$\beta_j = \frac{1}{2} \left[m^2 \delta_{j-4} + \sum_{k=1}^{j-4} \beta_k (m^2 \delta_{j-k-4} + \beta_{j-k}) \right] \quad (j=1, 2, \dots),$$

$$\delta_s = \alpha_s + \sum_{n=0}^{s-4} c_n \delta_{s-n-4}, \quad \delta_s = -\beta_s + \sum_{n=0}^{s-4} d_n \delta_{s-n-4} \quad s > 0,$$

$$\delta_s = \delta_s = 0, \quad s < 0, \quad \alpha_0 = \beta_0 = \delta_0 = \delta_0 = 1 \quad c_n = \sum_{e=0}^n d_e d_{n-e},$$

то основные уравнения (т.е. уравнения относительно функций $W^{i,j}$, $U^{2,j}$) в каждом приближении становятся однородными, а вспомогательные функции $W^{2,j}$, $U^{1,j}$ определяются через основные простым интегрированием. В результате приходим к последовательному решению уравнений напряженно-деформированного состояния первого типа (медленно изменяющегося вдоль координаты Z):

$$W_{2s}^{1,j} + W_{2s}^{2,j} = 0$$

(6)

$$U_{2s}^{1,j} + m W_{2s}^{2,j} = -m \sum_{v=0}^{j-1} W_{2s}^{1,v} \alpha_{j-v} - \sum_{v=0}^{j-4} U_{2s}^{2,v} c_{j-v-4}$$

и уравнений напряженно-деформированного состояния второго типа:

$$U_{2s}^{2,j} + U_{2s}^{1,j} = 0,$$

$$W_{2s}^{2,j} + m U_{2s}^{1,j} = - \sum_{v=0}^{j-1} (W_{2s}^{2,v} d_{j-v} + m U_{2s}^{1,v} \beta_{j-v}) - W_{2s}^{2,j-4} \quad (7)$$

$$d_p = \sum_{e=0}^p \beta_e \beta_{p-e}, \quad f_{2s}^{(n)} = \frac{\partial^2 f^{(n)}}{\partial z_n^2} + \frac{1}{2_n} \frac{\partial f^{(n)}}{\partial z_n}, \quad f_{2s}^{(n)} = \frac{\partial^2 f^{(n)}}{\partial z_n^2}$$

$$f_{2s}^{(n)} = \frac{\partial^2 f^{(n)}}{\partial z_n \partial z_n}, \quad f_{2s}^{(n)} = \frac{\partial^2 f^{(n)}}{\partial z_n^2} + \frac{1}{2_n} \frac{\partial f^{(n)}}{\partial z_n} - \frac{f^{(n)}}{2_n^2} \quad (n=1, 2).$$

Эффективность изложенного метода зависит от того, удастся ли сформулировать краевые условия для отыскания основных функций. В §1.2 показано, что это действительно можно сделать. В частности, для первой основной задачи линейной вязкоупругости, когда на ограничивающей плоскости Z заданы известные нормальные σ_{zz} , $\sigma_{zz}(\cdot, \cdot)$

и касательное $\sigma_{13} = \varphi_2(z, t)$ напряжения, граничные условия для функций $W^{1,j}$ $U^{2,j}$ запишутся в виде

$$\frac{\partial W^{1,j}}{\partial \xi} = (EF_1(\rho))^{-1} \varepsilon_1^{-1/2} \tilde{\varphi}_{1,j} - \sum_{v=0}^{j-1} \frac{\partial W^{1,v}}{\partial \xi} \alpha_{j-v} - \sum_{v=0}^{j-2} \frac{\partial W^{2,v}}{\partial \xi} \beta_{j-v-2} - \int \mu \left(\frac{\partial U^{2,j-2}}{\partial z} + \frac{U^{2,j-2}}{z} \right) - \int \mu \left(\frac{\partial U^{1,j-4}}{\partial z} + \frac{U^{1,j-4}}{z} \right),$$

$$\frac{\partial U^{2,j}}{\partial \xi} = (EF_1(\rho) \varepsilon_1)^{-1} \tilde{\varphi}_{2,j} - \frac{\partial W^{1,j}}{\partial z} - \sum_{v=0}^{j-1} \frac{\partial U^{2,v}}{\partial \xi} \beta_{j-v} - \frac{\partial W^{2,j-4}}{\partial z} - \sum_{v=0}^{j-4} \frac{\partial U^{1,v}}{\partial \xi} \alpha_{j-v-4} \quad (j=0, 1, 2, \dots)$$

В нулевом приближении ($j=0$) граничные условия для функции $W^{1,0}$ не зависят ни от более высоких приближений, ни от решения уравнений напряженно-деформированного состояния второго типа. Поэтому $W^{1,0}$ определяется независимо из первого уравнения системы (6), а $U^{1,0}$ находится простым интегрированием из второго уравнения (6). После этого полностью определяются граничные условия для нахождения $U^{2,0}$. В результате интегрирования уравнений напряженно-деформированного состояния второго типа в нулевом приближении находятся граничные условия для отыскания $W^{1,1}$ в первом приближении и так далее. При решении уравнений первого состояния в нулевом приближении удовлетворяются граничные условия по компоненте перемещения W и нормальному напряжению σ_{33} но возникают невязки по U и касательному напряжению σ_{13} которые снимаются решением уравнений (7) в нулевом приближении. При этом ставятся граничные условия для функции U и ее производной. При решении (7) в нулевом приближении возникают невязки по W и напряжению σ_{33} , но они имеют более высокий порядок малости и снимаются решением уравнений напряженного состояния первого типа в первом приближении. Но на каждом этапе приходится интегрировать только основные уравнения (первые уравнения в системах (6), (7)).

Таким образом, использование предложенного подхода позволяет расщепить напряженно-деформированное состояние на две состав-

ляющие с различными свойствами и свести краевую задачу линейной вязкоупругости к последовательно решаемым краевым задачам для отыскания одной функции.

В §1.3 показано, что полученные решения как функции времени могут быть представлены в виде

$$\Omega(t) = a_0 + a_1 t + \dots \quad (t \rightarrow 0), \quad (8)$$

$$\Omega(t) = b_0 + b_1 e^{-\beta t} + \dots \quad (t \rightarrow \infty). \quad (9)$$

"Предельная" информация (8), (9) позволяет судить о поведении решений при произвольных значениях времени, если использовать двухточечную аппроксиманту Паде. Это функция вида

$$T = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 t + \beta_1 e^{\beta t} + \dots}{\delta_0 + \gamma_1 t + \delta_1 e^{\beta t} + \dots}, \quad (10)$$

коэффициенты которой определяются из условий, что при разложении в ряды при $t \rightarrow 0$ и $t \rightarrow \infty$ получаются асимптотические выражения (8) (9). Эти условия дают

$$\delta_0 = 1, \quad \alpha_0 = b_0 + b_1 \delta_1, \quad \alpha_1 = b_0 \gamma_1, \quad b_1 = b_0 \delta_1,$$

$$\delta_1 = -\frac{b_0 - a_0}{b_0 + b_1 - a_0}, \quad \gamma_1 = \frac{a_1 b_1 + \beta (b_0 - a_0)^2}{(b_0 - a_0)(b_0 + b_1 - a_0)}$$

Аппроксиманты Паде позволяет "сростить" между собой предельные выражения (8), (9) и найти области "малых" и "больших" времени.

В §1.4 предложенный метод применен к решению модельной задачи о действии сосредоточенной силы на границу вязкоупругого ортотропного полупространства. Сравнение полученных результатов с точным решением показывает, что даже для изотропного материала (самого неблагоприятного с точки зрения применяемого метода, так как параметр ϵ , при этом максимален) погрешность не превышает 1% (сравнения проводились для упругих задач при $t = 0$ и $t = \infty$).

Вторая глава посвящена решению осесимметричной контактной задачи о действии кругового в плане штампа с плоским основанием на границу вязкоупругого ортотропного полупространства с цилиндрической анизотропией. Штмп вдавливается вертикальной силой P_0

приложенной в начальный момент времени и затем остающейся постоянной. Предполагается, что область контакта (круг радиуса a) состоит из участка скольжения, примыкающего к границе области, и участка сцепления. Вследствие симметрии граница между участками сцепления и скольжения представляет собой окружность, радиус которой $\delta(t)$ заранее неизвестен и находится в процессе решения. На участке скольжения касательные напряжения пропорциональны нормальным. Требуется определить нормальные и касательные напряжения в области контакта, а также размер участка сцепления.

В данном случае оказывается возможным применение преобразования Лапласа по времени, так как предложенный метод позволяет сформулировать граничные условия для определения искомых функций в каждый момент времени.

Для определения границ между участками скольжения и сцепления δ получено соотношение

$$\ln \left[\frac{1 + \tilde{\delta}}{1 - \tilde{\delta}} \right] = 2\rho (E/G)^{1/2} F^{-1/2}(\rho) \tilde{\delta} K'(\tilde{\delta}), \quad (II)$$

где $K'(\tilde{\delta})$ - полный эллиптический интеграл первого рода; $\tilde{\delta} = \delta/a$; $F(\rho) = (\rho + \beta + k) / (\rho + \beta)$. Асимптотические выражения для границы δ при малых и больших значениях времени могут быть выписаны в явном виде, если трансформанту $\tilde{\delta}$ представить в форме ряда по малому параметру ε_* :

$$\tilde{\delta} = (\delta_0 + a_1 \varepsilon_* + a_2 \varepsilon_*^2 + \dots) / \rho, \quad (I2)$$

причем при больших значениях параметра ρ (что соответствует малым значениям времени t) $\varepsilon_* = k / (\rho + \beta)$, а при малых ρ (что соответствует большим значениям времени) $\varepsilon_* = k\rho / (k + \beta)(\rho + \beta)$. a_1, a_2, \dots являются известными функциями δ_0 , которое определяется из уравнения (II) заменой $\tilde{\delta}$ на δ_0 . Обратное преобразование Лапласа в (I2) определяет границу участка сцепления как функцию времени. Выполнено "срачивание" полученных предельных выражений для δ по схеме Паде. На рисунке 1 показано изменение радиуса участка сцепления δ при $\rho = 0,3$; $(E/G)^{1/2} = 3$ (кривая 1), $\rho = 0,3$; $(E/G)^{1/2} = \sqrt{3}$ (кривая 2), $\rho = 0,15$; $(E/G)^{1/2} = 3$ (кривая 3). Кривые I и II для каждого случая были найдены соответственно для малых и больших значений времени t .

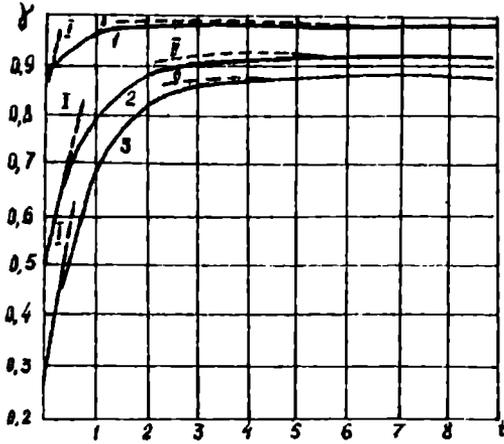


Рис. I

Трансформанты нормального и касательного напряжений находятся по следующим формулам:

$$\tilde{\sigma}_{33} = -\frac{1}{\rho} \frac{P_0}{2\pi a} \frac{1}{\sqrt{a^2 - z^2}}, \quad z < a,$$

$$\tilde{\sigma}_{13} = -\frac{2GF(\rho)\tilde{C}_0}{\pi^2 a \xi \sqrt{1-\xi^2}} \left\{ \frac{\int_0^{\xi} (E/G)^{1/2}}{F^{1/2}(\rho)} \xi + \frac{\sqrt{\delta^2 + \xi^2}}{\sqrt{1-\xi^2}} \left[\frac{1}{\delta} \ln \frac{1+\delta}{1-\delta} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{2\rho(E/G)^{1/2}}{F^{1/2}(\rho)} \xi^2 \Pi(\xi^2, \sqrt{1-\delta^2}) \right] - \ln \frac{\sqrt{1-\xi^2} + \sqrt{\delta^2 - \xi^2}}{\sqrt{1-\xi^2} - \sqrt{\delta^2 - \xi^2}} \right\}$$

(на участке сцепления $0 < z < \tilde{b}$)

$$\tilde{\sigma}_{13} = -\frac{2\rho(GE)^{1/2} F^{1/2}(\rho)\tilde{C}_0}{\pi a \sqrt{1-\xi^2}}$$

(на участке скольжения $\tilde{b} < z < a$)

Здесь $\xi = z/a$, $\Pi(\kappa, m)$ — полный эллиптический интеграл третьего рода; \tilde{C}_0 — трансформанта осадки штампа.

Возвращение к оригиналам производится указанным выше способом при малых и больших значениях времени.

Для осадки штампа $\epsilon_0(t)$ получена точная по времени формула. На рисунке 2 показано поведение осадки штампа $\epsilon_+(t) - \epsilon_0(t) / \epsilon_+(0)$. Кривые 1, 2 дают значения $\epsilon_0(t)$ при малых и больших значениях времени соответственно. Кривая 3 построена методом срачивания по Паде. Следует заметить, что результаты, полученные по точной (по времени) формуле и с помощью аппроксиманты Паде, практически совпадают.

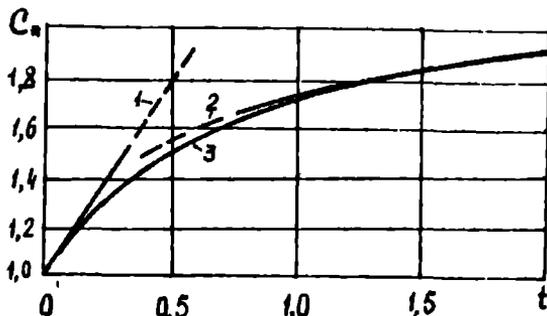


Рис. 2

В полученном решении (с учетом только одного приближения) особенность контактных напряжений на границе области контакта имеет вид $(a-z)^{-1/2}$, в то время как точное решение задачи при наличии кулоновского трения должно содержать особенность $(a-z)^{-1/2 + \theta}$ (р. л.). Вблизи особой линии $z = a$ необходимо использовать точное решение, либо уточненное более высокими приближениями. Чтобы найти значения напряжений во всей области контакта и определить зоны, в которых справедливы полученное приближенное либо "особое" решения, проводится "срачивание" этих двух решений, если последнее имеет вид $\sigma_{zz}^* A (a-z)^{-1/2 + \theta}$. Постоянный множитель A определяется из условий срачивания, которые задаются следующим образом: на некоторой окружности $z = z_0$ должны совпадать как приближенное и особое решения, так и их производные по z .

В третьей главе приведены решения задач о передаче продольной нагрузки от одномерного подкрепляющего элемента к полупространству, полубесконечному и конечному цилиндрам. Такие задачи часто встречаются в практике строительства и непосредственно относятся к механике армированных волокнами композитов. Эффективные решения получены с использованием описанного в первой главе метода.

Предполагается, что подкрепляющий элемент (стержень) помещен в тело перпендикулярно ограничивающей плоскости, площадь его поперечного сечения достаточно мала, в концевой точке стержня приложена сила P_0 . Рассматривается модель одномерного континуума стержня в сочетании с моделью контакта по цилиндрической поверхности для тела.

В результате решения найдены усилия в стержне и усилия контактного взаимодействия. В задаче о передаче нагрузки от стержня к вязкоупругому ортотропному полупространству они имеют вид

$$\tilde{N}(z, \rho) = \frac{2P_0}{\pi} \frac{1}{\rho} \int_0^{\infty} \frac{\sin zs}{s + gM(s)} ds, \quad \tilde{\tau}(z, \rho) = \frac{2P_0}{\pi} \frac{g}{\rho} \int_0^{\infty} \frac{\cos zs}{g + sM'(s)} ds,$$

$$M(s) = K_1(a\omega s) / K_0(a\omega s), \quad \omega = \omega_0 F^{1/2}(\rho), \quad g = g_0 F^{-1/2}(\rho),$$

$$\omega_0 = (E_s/G)^{1/2}, \quad g_0 = 2(E_s G)^{1/2}/Ea,$$

где K_0, K_1 - модифицированные функции Бесселя.

Обратное преобразование Лапласа определяет соответствующие усилия как функции времени. При этом используется подход, изложенный во второй главе. Усилия N и τ могут быть представлены асимптотическими выражениями при малых и больших значениях координаты z . На рисунке 3 показано изменение предельных при $t \rightarrow 0$ (кривая 1) и $t \rightarrow \infty$ (кривая 2) значений $N^* = N/P_0$ в зависимости от z_1 , $z_1 = g_0 z$. Аналогичное представление усилий контактного взаимодействия $\tau^* = \tau/P_0 g_0$ показано на рисунке 4 (кривые 1, 2 соответствуют значениям времени $t = 0, t = \infty$).

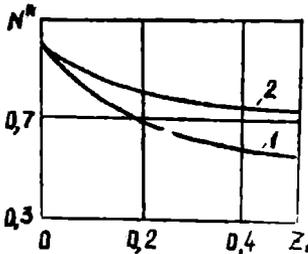


Рис 3

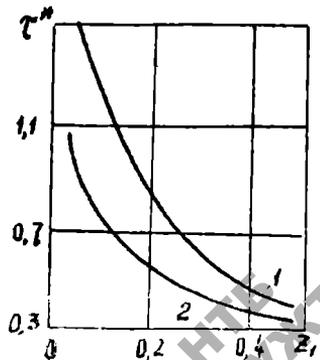


Рис. 4

Получены также решения задач о передаче нагрузки стержнем вязкоупругому конечному (полубесконечному) цилиндру, боковая поверхность которого закреплена. Такие задачи приходится решать при определении адгезионной прочности волокнистого композита.

Найденные решения справедливы на некотором удалении от особой линии ($z = 0$). В непосредственной окрестности этой линии известен характер особенности. Используя изложенный во второй главе подход, проводится "срачивание" приближенного и "особого" решений.

В заключении сформулированы основные результаты работы, которые сводятся к следующему:

1. Предложен метод решения осесимметричных контактных задач линейной вязкоупругости для ортотропных сред с цилиндрической анизотропией, который является обобщением известного асимптотического метода, разработанного применительно к упругим материалам. Метод основан на разложении зависимых и независимых переменных в ряд по малому параметру, представляющему собой отношение жесткостных характеристик материала.

2. Показано, что основные задачи механики вязкоупругих ортотропных материалов могут быть сведены к последовательно решаемым краевым задачам для отыскания одной функции. Это позволило существенно расширить класс задач, для которых удастся построить аналитические решения.

3. На основе предложенного метода рассмотрена новая контактная задача о действии кругового в плане штампа с плоским основанием на границу вязкоупругого ортотропного полупространства с учетом трения и сцепления в области контакта. Получены распределение напряжений под штампом и размер участка сцепления как функции времени, коэффициента трения и жесткостных характеристик материала.

4. Решен ряд задач о передаче нагрузки упругим стержнем вязкоупругим ортотропным телам, которые непосредственно относятся к механике армированных волокнами композитов. Получены достаточно простые формулы для усилия в стержне и усилия контактного взаимодействия, удобные для практического применения.

5. Установлено, что предложенный метод существенно расширяет класс задач линейной вязкоупругости, для которых применим принцип соответствия.

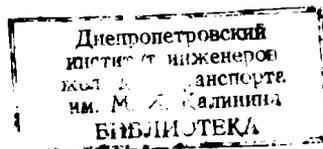
НИИ
ДНУЖТ

Основное содержание диссертации опубликовано в следующих работах:

1. Кагадий Т.С., Павленко А.В. Осесимметричная задача о передаче нагрузки упругим стержнем вязкоупругому ортотропному телу //Прикладная математика и механика.1989.Т.53,вып.5.С.787-790.
2. Кагадий Т.С., Павленко А.В. Осесимметричная контактная задача линейной вязкоупругости с учетом трения и сцепления//Динамика и прочность тяжелых машин. Теоретические и экспериментальные исследования. Днепропетровск: ДГУ, 1989. С.105-116.
3. Кагадий Т.С. Применение асимптотического метода к решению осесимметричных задач линейной вязкоупругости ортотропных тел //Гидроаэромеханика и теория упругости. Теоретические и экспериментальные методы гидроаэромеханики и теории упругости Днепропетровск: ДГУ,1989.С.85-90.
4. Павленко А.В., Кагадий Т.С. Асимптотическое интегрирование дифференциальных уравнений механики вязкоупругих анизотропных материалов//4-я Междунар. конф. по дифференциальным уравнениям и их применениям. Аннотации докладов и сообщений. Русе (Болгария), 1989. С.216.
5. Кагадий Т.С. К вопросу об адгезионной прочности вязкоупругого волокнистого композита//3-я Всесоюз. конф. "Прочность, жесткость и технологичность изделий из композиционных материалов": Тез. докл. Запорожье, 1989. С.98.
6. Кагадий Т.С. Осесимметричная контактная задача линейной вязкоупругости с учетом трения и сцепления//16-я научно-техн. конф. молодых ученых и специалистов. Харьков, 1988.С.51-52
7. Павленко А.В., Кагадий Т.С. К решению осесимметричных контактных задач линейной вязкоупругости с учетом трения и сцепления //4-я Всесоюз. конф. "Смешанные задачи механики деформируемого тела": Тез. докл. Ч.2. Одесса,1989.С.48.

Риса

5.5.91a



НТБ
ДНУЖТ

Кагадий Татьяна Станиславовна

АСИММЕТРИЧЕСКИЙ МЕТОД В ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ЗАДАЧАХ
ЛИНЕЙНОЙ ВЯЗКОУПРУГОСТИ ОРТОТРОПНЫХ ТЕЛ

01.02.04 – механика деформируемого твердого тела

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Подписано в печать 30.07.90. БТ 70071 Формат 60x84/16.
Бумага типографская. Печать плоская. Уол. печ. л. 0,99.
Уч.-изд.л. 0,7. Тираж 100 экз. Заказ № 264 . Бесплатно.

Редакционно-издательский отдел ДГУ, 320625, ГСШ,
г.Днепропетровск – 10, пр. Гагарина, 72.
Ротапринт ДГУ, 320110, г.Днепропетровск, ул.К.Закова, 4а

Сканировала Камянская Н.А.

НТБ
ДНУЖТ