УДК 517.5

С. А. Пичугов
(Днепропетровский национальный университет железнодорожного транспорта им. акад. В. Лазаряна, Днепропетровск)

О теореме Джексона для периодических функций в метрических пространствах с интегральной метрикой. II

У просторах $L_\psi(\mathrm{T}^m)$ *періодичних функцій з метрикою*
$\rho(f,0)_\psi = \int\limits_{\mathrm{T}^m} \psi(|f(x)|)dx$, *де* ψ *- функція типу модуля неперервності, досліджується пряма теорема Джексона у випадку апроксимації тригонометричними поліномами. Доведено, що пряма теорема Джексона має місце тоді і тільки тоді, коли нижній показник розтягнення функції* ψ *не дорівнює нулеві.*

1. Введение. Данная статья является продолжением работы [1].

Пусть Ω – класс функций $\psi : R^1_+ \to R^1_+$, являющихся модулем непрерывности, то есть ψ – непрерывная неубывающая функция, ψ(0)=0, ψ (x+y)≤ ψ (x)+ ψ (y) для всех x,y∈ R^1_+;

функции f(x), x∈ R^1, - действительнозначные, имеющие период 1; **T**=$[-1/2, 1/2)$ – основной тор периодов; L_0≡L_0(**T**) – множество всех таких функций, которые почти всюду на **T** конечны и измеримы; для $\psi \in \Omega$ множество L_ψ:

$$L_\psi \equiv L_\psi(T) = \left\{ f \in L_0(T) : \| f \|_\psi := \int\limits_T \psi(|f(x)|)dx < \infty \right\},$$

является линейным метрическим пространством с метрикой $\rho(f,g)_\psi = \| f - g \|_\psi$.

В частности, с помощью функции $\phi(t) = t(1+t)^{-1}$, $\phi \in \Omega$, в L_0 вводится метрика

$$\rho(f,g)_0 := \int\limits_T \phi(|f(x) - g(x)|)dx,$$

порождающая сходимость по мере, а в случае $\psi(t) = t^p$, 0<p<1, получаем пространства L_p.

Пусть $T_n(x)=\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{i2\pi kx}$ - действительнозначный тригонометрический полином периода 1 и степени n,

$$E_n(f)_\psi := \inf_{\{c_k\}} \| f - T_n \|_\psi$$

- наилучшее приближение f такими полиномами в пространстве L_ψ,

$$\omega(f,h)_\psi := \sup\{\| \Delta_t f \|_\psi : |t| \le h\} \quad , h \in R_+^1,$$

- модуль непрерывности f из L_Ψ , где $\Delta_t f(x) = f(x+t) - f(x)$.

Неравенствами Джексона (или теоремой Джексона) в теории приближения периодических функций принято называть следующие соотношения (если они выполняются):

$$\sup_{n>0} \sup_{f\in L_\psi, f\neq const} \frac{E_{n-1}(f)_\psi}{\omega(f,\frac{1}{n})_\psi} < \infty \qquad (1)$$

Сведения и библиографию о неравенствах (1) в пространствах L_ψ см. в [1]. В связи с тем, что в пространствах L_p неравенства Джексона (1) справедливы, а в пространстве L_0 не выполняются, нами в [1] была сформулирована задача описания функций ψ из Ω, для которых в соответствующих пространствах L_ψ справедливы соотношения (1).

В этом направлении был доказан следующий частный результат ([1; теорема2]): если функция $\psi \in \Omega$ удовлетворяет условиям:

1) $\exists M : \forall x, y \in R_+^1 \quad \psi(x\cdot y) \le M\psi(x)\psi(y)$,

2) $\exists \varepsilon > 0: \quad \int_0^1 \frac{\psi(t)}{t^{1+\varepsilon}} dt < \infty$,

то в L_ψ справедлива теорема Джексона (1).

Отметим, что первые результаты в этой задаче были получены в [4]. А именно, в [4; теорема 4.3] доказано, что если $\psi \in \Omega$ такова, что при некотором r =1,2,…

$$\sum_{k=1}^{\infty} k M_\psi(k^{-2r}) < \infty,$$

где

$$M_\psi(c) = \sup_{x>0} \frac{\psi(cx)}{\psi(x)}, \quad c>0,$$

то выполнены неравенства (1).

В настоящей работе мы получим полное решение сформулирован- ной задачи. Но предварительно сделаем два замечания.

1. В настоящий момент во всех случаях, когда доказаны теоремы Джексона в метрических и нормированных пространствах периодических функций, они имеют вид (1) в том смысле, что значения приближения $E_{n-1}(f)$ оцениваются сверху через значения $\omega(f,\alpha_n)$ для α_n, имеющих порядок убывания 1/n. Возникает вопрос: существуют ли пространства L_ψ, в которых неравенства Джексона выполнены для других значений $\{\alpha_n\}$?

В связи с этим наряду с « классической » формой теоремы Джексона (1) нас будет интересовать вопрос о наличии в данном пространстве неравенств Джексона в следующем более общем виде:
существует ли последовательность $\{\alpha_n\}$, $\alpha_n > 0$, $\alpha_n \downarrow 0$, такая, что

$$\sup_n \sup_{f\in L_\psi,\, f\neq const} \frac{E_{n-1}(f)_\psi}{\omega(f,\alpha_n)_\psi} < \infty \qquad (2)$$

2. Для $\psi\in\Omega$ пусть $\overline{\psi}$ - наименьшая выпуклая вверх мажоранта. Тогда по лемме Стечкина С.Б.

$$\psi(x)\le\overline{\psi}(x)\le 2\psi(x),$$

и значит метрики в пространствах L_ψ и $L_{\overline{\psi}}$ эквивалентны. Поэтому в рассматриваемых нами задачах без ограничения общности мы будем предполагать функции ψ выпуклыми вверх, а класс таких модулей непрерывности обозначим через $\overline{\Omega}$.

2. Функция растяжения. Для решения поставленной задачи важную роль для нас играет понятие функции растяжения.

Пусть $\beta(t)$, $t\in(0,\infty)$ - произвольная строго положительная всюду конечная функция. Ее функцией растяжения называют [2, гл.II, §1] функцию $M_\beta(s)$, $s\in(0,\infty)$,

$$M_\beta(s) := \sup_{0<t<\infty} \frac{\beta(st)}{\beta(t)}.$$

Общие свойства M_β см. в [2]. Нам понадобятся следующие два дополнительных свойства M_ψ в случае $\psi\in\overline{\Omega}$ ([2]):

1) M_ψ – всюду конечная неубывающая на $(0,\infty)$ функция и

$$M_\psi(s_1 s_2)\le M_\psi(s_1)M_\psi(s_2) \quad \forall s_1,s_2\in(0,\infty);$$

2) существует число γ_ψ (называемое нижним показателем растяжения функции ψ), такое что:

а) $\gamma_\psi\in[0,1]$,

б) $M_\psi(s)\ge s^{\gamma_\psi} \quad \forall s\in(0,1]$,

в) для любого $\varepsilon > 0$ при $0<s<1$ с некоторой константой C_ε

$$M_\psi(s) \le C_\varepsilon s^{\gamma_\psi-\varepsilon}.$$

При этом $\gamma_\psi = \lim\limits_{s\to 0} \dfrac{\ln M_\psi(s)}{\ln s} = \sup\limits_{0<s<1} \dfrac{\ln M_\psi(s)}{\ln s}$. В частности, из свойства 2) следует, что функция M_ψ (s) в правой окрестности нуля ведет себя следующим образом: либо M_ψ (s)≡1 для всех $s\in(0,1]$ (случай γ_ψ =0), либо M_ψ (+0):= $\lim\limits_{s\to+0}$ M_ψ (s)=0 (случай γ_ψ >0).

Несложные вычисления показывают, что, например, нижний показатель растяжения будет равен нулю у функций

$$\phi(t) = \frac{t}{1+t}, \quad \psi(t) = (\ln(1+t))^p, \quad p\in(0,1].$$

3. О теореме Джексона в L_ψ. В следующей теореме сформулирован основной результат статьи.

Теорема1. *Пусть $\psi\in\overline{\Omega}$, γ_ψ -нижний показатель растяжения ψ.*

1. *Если γ_ψ >0, то в пространстве L_ψ выполняются неравенства Джексона (1);*
2. *Если γ_ψ =0, то в пространстве L_ψ невозможны неравенства Джексона в форме(2) ни при каком выборе последовательности $\{\alpha_n\}$.*

Доказательство. Первое утверждение теоремы легко следует из процитированной нами теоремы 4.3 из [4]. Мы, однако, приведем другое доказательство, близкое к доказательству теоремы 2 из [1]. Это связано с тем, что данный метод допускает обобщения на случай приближения функций многих переменных (см. [1]).

Итак, пусть Σ_1 – класс суммирующих функций $\alpha(x)$, $x\in R^1$, т.е.

$$\alpha\in C(\mathbf{R}^1), \quad \operatorname{supp}\alpha\subset[-1;1], \quad \alpha(0)=1, \quad \alpha(-x)=\alpha(x).$$

По заданной функции $\alpha\in\Sigma_1$ для каждого $n\in\mathbf{N}$ строится тригонометрический полином степени не выше n-1

$$K_n(x) = \sum_{|k|<n} \alpha\left(\frac{k}{n}\right) e^{2\pi i k x},$$

и линейный полиномиальный метод приближения

$$\tilde{L}_n(\alpha; f, x) \equiv \tilde{L}_n(f, x) := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} K_n(x-x_k) f(x_k),$$

где $x_k=k/n$. При этом

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} K_n(x-x_k) = \int_T K(x)dx = 1.$$

Для $t\in\mathbf{T}$ обозначим через f_t сдвиг f на параметр t:

$$f_t(x) := f(x+t).$$

Тогда (см.[1])

$$\psi(|f_t(x) - \tilde{L}_n(f_t;x)|) \le \sum_{k=1}^{n} \psi\left(\left| \frac{K_n(x-x_k)}{n} \right| |f_t(x) - f_t(x_k)| \right),$$

$$E_{n-1}(f)_\psi = \int_{t\in T} E_{n-1}(f_t)_\psi dt \le \int_{t\in T} \| f_t - \tilde{L}_n(f_t) \|_\psi \, dt \le$$

$$\le n \int_{t\in T} \int_{y\in T} \psi\left(\frac{|K_n(y)|}{n} |\Delta_y f(t)| \right) dy dt := U$$

Далее предполагаем, что $\alpha \in \Sigma_1 \cap C^\infty(R^1)$. Тогда ее преобразование Фурье

$$\hat{\alpha}(x) = \int_{R^1} \alpha(t) e^{-2\pi itx} dt, \quad x \in R^1,$$

убывает на бесконечности быстрее любой степени, то есть для любого $N \in \mathbf{N}$ существует константа C_N такая, что для всех $x \in \mathbf{R}^1$

$$\hat{\alpha}(x) \le \frac{C_N}{(1+|x|)^N}, \tag{3}$$

В частности, можно применить формулу суммирования Пуассона [7, стр.232]:

$$K_n(y) = \sum_{|k|<n} \alpha\left(\frac{k}{n}\right) e^{2\pi iky} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \hat{\alpha}_n(y-j),$$

где $\hat{\alpha}_n(x) := n\hat{\alpha}(nx)$. Поэтому

$$\psi\left(\frac{|K_n(y)|}{n} |\Delta_y f(t)| \right) \le \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi\left(\frac{1}{n} |\hat{\alpha}_n(y-j)| |\Delta_y f(t)| \right),$$

$$U \le n \int_{t\in T} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_{y\in T} \psi\left(\frac{1}{n} |\hat{\alpha}_n(y-j)| |\Delta_y f(t)| \right) dy dt =$$

$$= n \int_{t\in T} \int_{x\in R^1} \psi\left(\frac{1}{n} |\hat{\alpha}_n(x)| |\Delta_x f(t)| \right) dx dt = \int_{t\in T} \int_{x\in R^1} \psi\left(|\hat{\alpha}(x)| \left| \Delta_{\frac{x}{n}} f(t) \right| \right) dx dt.$$

Таким образом, используя определение функции растяжения, получаем неравенство

$$E_{n-1}(f)_\psi \le \int_{R^1} M_\psi(|\hat{\alpha}(x)|) \| \Delta_{\frac{x}{n}} f \|_\psi \, dx, \tag{4}$$

справедливое для всех $\alpha \in \Sigma_1 \cap C^\infty(R^1)$.

Докажем сходимость интеграла

$$I := \int_{x\in R^1} (1+|x|) M_\psi(|\hat{\alpha}(x)|) dx < \infty. \tag{5}$$

Используем (3):

$$I \le 2\int_0^\infty (1+x) M_\psi\left(\frac{C_N}{(1+x)^N}\right) dx = 2\int_1^\infty y M_\psi\left(\frac{C_N}{y^N}\right) dy =$$
$$= \frac{2}{N}\int_0^1 \frac{M_\psi(C_N t)}{t^{1+\frac{2}{N}}} dt \le \frac{2M_\psi(C_N)}{N}\int_0^1 \frac{M_\psi(t)}{t^{1+\frac{2}{N}}} dt\,. \qquad (6)$$

По условию теоремы γ_ψ >0, значит по свойству 2) $M_\psi(s) \le C_\varepsilon s^{\gamma_\psi - \varepsilon}$ для достаточно малых ε и $s \in (0,1]$. Поэтому, выбирая ε и N из условия $\gamma_\psi - \varepsilon - \frac{2}{N} > 0$, получим сходимость последнего интеграла в (6), а значит и $I < \infty$.

Из условия (5) следует конечность констант B_1,B_2,

$$B_1 = \int_{R^1} M_\psi(|\hat{\alpha}(x)|) dx, \quad B_2 = B_1^{-1}\int_{R^1} |x| M_\psi(|\hat{\alpha}(x)|) dx\,, \qquad (7)$$

Через $\bar{\omega}(f,h)_\psi$ обозначим наименьшую выпуклую вверх мажоранту функции $\omega(f,h)_\psi$, тогда по лемме Стечкина С.Б.

$$\bar{\omega}(f,h)_\psi \le 2\omega(f,h)_\psi\,, \qquad (8)$$

Из (4),(7),(8) с помощью неравенства Йенсена для выпуклой вверх функции $\bar{\omega}$ получаем:

$$E_{n-1}(f)_\psi \le \int_{R^1} M_\psi(|\hat{\alpha}(x)|)\bar{\omega}\left(f, \frac{|x|}{n}\right)_\psi dx \le B_1 \bar{\omega}\left(f, \frac{B_2}{n}\right)_\psi \le 2B_1 \omega\left(f, \frac{B_2}{n}\right)_\psi \,.$$

Первое утверждение теоремы доказано.

Для доказательства второй части теоремы оценим снизу наилучшие приближения функций

$$f_A(x) = A\,sign \sin 2\pi x, \quad A > 0$$

(в случае аппроксимации в L_0 это семейство функций рассматривал С.В. Конягин).

Пусть $\delta \in (0,1)$, T_{n-1} – произвольный тригонометрический полином,

$$e = \left\{ x \in \left(0, \frac{1}{2}\right) : |f_A(x) - T_{n-1}(x)| > \delta A \right\},$$
$$e' = \left\{ x \in \left(0, \frac{1}{2}\right) : |f_A(x) - T_{n-1}(x)| \le \delta A \right\}.$$

Возможны два случая : $\mu e > \frac{1}{4}$ или $\mu e' \ge \frac{1}{4}$.

Если $\mu e > \frac{1}{4}$, то

$$\| f_A - T_{n-1} \|_\psi > \int_e \psi(| f_A(x) - T_{n-1}(x) |) dx > \psi(\delta A)\mu e > \frac{1}{4}\psi(\delta A). \qquad (9)$$

Пусть теперь $\mu e' \geq \frac{1}{4}$. Будем использовать следующее свойство тригонометрических полиномов: если

$$K(n) := \sup_{e':\mu e' \geq \frac{1}{4}} \sup_{T_{n-1}} \frac{\max_{x\in T} | T_{n-1}(x) |}{\max_{x\in e'} | T_{n-1}(x) |},$$

то при каждом n

$$K(n) < \infty \ . \qquad (10)$$

Действительно, пусть $\max\{|T_{n-1}(x)|; x \in e'\} \leq 1$. График полинома T_{n-1} имеет на периоде не более $2n-2$ участков монотонности. Если участок монотонности T_{n-1} не содержит точки разрыва функции $f_A(x)$, то на этом участке может быть только одна точка пересечения графиков T_{n-1} и f_A. Если же участок монотонности полинома содержит окрестность точки разрыва f_A, то на этом участке возможны две точки пересечения графиков. Поэтому множество e' состоит не более чем из $2n$ отрезков, и найдется отрезок I_n такой, что

$$\mu I_n \geq \frac{1}{8n}, \quad \max_{x\in I_n} | T_{n-1}(x) | \leq 1.$$

Но тогда известно [3, стр. 232], что

$$\max_{x\in T} | T_{n-1}(x) | \leq tg^{2(n-1)} \frac{\pi}{32n} + ctg^{2(n-1)} \frac{\pi}{32n} \ ,$$

и свойство (10) доказано.

На множестве $(0, \frac{1}{2})$ функция

$$f_A(x) - T_{n-1}(x) = A - T_{n-1}(x)$$

является полиномом, поэтому из (10) следует, что

$$\| A - T_{n-1} \|_{C(T)} \leq K(n) \max_{x\in e'} | A - T_{n-1}(x) | \leq K(n)\delta A.$$

Применим теперь неравенство С.Н. Бернштейна для производной полинома:

$$\| T'_{n-1} \|_{C(T)} = \| (A - T_{n-1})' \|_{C(T)} \leq (n-1) \| A - T_{n-1} \|_{C(T)} \leq (n-1)K(n)\delta A. \qquad (11)$$

Оценка (11) производной полинома получена при произвольном выборе значения δ из (0,1). Теперь будем считать, что с самого начала δ выбрана настолько малой, что выполнено условие

$$(n-1)K(n)\delta < 2(1-\delta). \qquad (12)$$

Тогда из (11),(12) следует, что предположение $\mu e' \geq \frac{1}{4}$ влечет неравенство

$$\| T'_{n-1} \|_{C(T)} < 2A(1-\delta). \qquad (13)$$

Теперь рассмотрим значения x$\in (-\frac{1}{2},0)$. Если сравнить графики полинома T_{n-1} и линейной функции y(x) = 2A(1-δ)x, то из (13) следует, что множество

$$d := \left\{ x \in \left(-\frac{1}{2}, 0 \right) : T_{n-1}(x) > -A(1-\delta) \right\}$$

имеет достаточно большую меру: μd ≥ ¼. Поэтому в случае μe′≥ ¼

$$\| f_A - T_{n-1} \|_\psi \geq \int_d \psi(| f_A(x) - T_{n-1}(x) |) dx > \psi(\delta A) \mu d \geq \frac{1}{4} \psi(\delta A). \qquad (14)$$

Оценки (9) и (14) получены для произвольного полинома, а значит при всех n ≥ 1 имеют место неравенства

$$E_{n-1}(f_A)_\psi \geq \frac{1}{4} \psi(\delta A), \qquad (15)$$

где δ из (0,1) удовлетворяет условию (12).

Легко видеть, что для любого $h \in (0, \frac{1}{2}]$

$$\omega(f_A, h)_\psi = \psi(2A) 2h.$$

Используя (15), для любых фиксированных n и h >0 получаем:

$$\sup_{f \in L_\psi, f \neq const} \frac{E_{n-1}(f)_\psi}{\omega(f,h)_\psi} \geq \sup_{A>0} \frac{E_{n-1}(f_A)_\psi}{\omega(f_A,h)_\psi} \geq \sup_{A>0} \frac{\frac{1}{4}\psi(\delta A)}{\psi(2A)2h} =$$

$$= \frac{1}{8h} M_\psi \left(\frac{1}{2} \delta \right) = \frac{1}{8h}. \qquad (16)$$

На последнем шаге мы использовали условие γ_ψ =0. Теорема 1 доказана.

Замечание. В работе [5] исследовалась аппроксимация в классах Орлича $\varphi(L)$, где $\varphi(x)$ – четная, непрерывная, строго монотонная на $[0;\infty)$ функция, такая что $\varphi(0)=0$ и $\varphi(2x) \leq C_\varphi \varphi(x),\ x \geq 0$, любой так называемой нелокализованной системой (в том числе и тригонометрической). Доказано, что если $\varphi(x)$ существенно отличается от степенной в окрестности 0 или ∞, то неравенства Джексона в форме (2) невозможны.

Теорема 1 остается справедливой в случае аппроксимации функций m переменных *f(x),* $x = (x_1, ..., x_m) \in T^m$, в пространствах $L_\psi(T^m)$ полиномами

$$T_R(x) = \sum_{k \in Z^m \cap RS} c_k e^{i2\pi kx} \qquad (17)$$

со спектром в RS, где S – некоторое ограниченное центрально-симметричное тело в $\mathbf{R}^m$, RS – его гомотет с коэффициентами R$\in \mathbf{R}^1_+$ (все необходимые определения см. в [1]).

Теорема 2. *Справедливы следующие утверждения:*

1. Если γ_ψ >0, то имеют место неравенства Джексона:

$$\sup_R \sup_{f\in L_\psi(T^m),\, f\neq const} \frac{E_R(f)_\psi}{\omega(f,\frac{1}{R})_\psi} < \infty;$$

*2.Если γ_ψ =0, то при любом выборе числовой последовательности $\{\alpha_R\}\downarrow 0$, ($R\in$ **N**) выполнены соотношения*

$$\sup_R \sup_{f\in L_\psi(T^m),\, f\neq const} \frac{E_R(f)_\psi}{\omega(f,\alpha_R)_\psi} = \infty.$$

Доказательство. Доказательство первого утверждения аналогично одномерному случаю; в работе [1] (см. теоремы 3,4) есть соответствующие выкладки для пространств $L_\psi\left(T^m\right)$.

Поэтому мы ограничимся доказательством второго утверждения. Рассмотрим семейство функций

$$f_A(x) = A sign\,\sin 2\pi x_1, \quad A>0.$$

Для любого полинома T_R вида (17) имеем:

$$\| f - T_R \|_{L_\psi(T^m)} = \int\limits_{(x_2,\dots,x_m)\in T^{m-1}} \left(\int\limits_{x_1=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \psi(| f_A(x) - T_R(x)|)dx_1 \right) dx_2 \dots dx_m.$$

Во внутреннем интеграле при фиксированных $\left(x_2,\dots,x_m\right)$ функция $T_R(x)$ переменной x_1 есть полином некоторой степени; поэтому мы можем использовать (15):

$$\int\limits_{x_1=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \psi(| f_A(x) - T_R(x)|)dx_1 \geq \frac{1}{4}\psi(\delta A)$$

при всех достаточно малых δ>0.

Далее, легко посчитать модуль непрерывности f_A: для любого $h\in(0,\frac{1}{2}]$

$$\omega(f_A,h)_{L_\psi(T^m)} = \sup_{|t|\leq h,\, t\in R^m} \|\Delta_t f_A\|_{L_\psi(T^m)} = \psi(2A)2h.$$

Осталось повторить выкладку (16).

Отметим, что в пространствах $L_p\left(\mathrm{T}^m\right)$, $0<p<1$, $m>1$, теорема Джексона доказана в [6].

Выражаю благодарность В.И. Иванову, указавшему автору на работу [5].

[1] *Пичугов С.А.* О теореме Джексона для периодических функций в пространствах с интегральной метрикой // Укр. мат. журн. – 2000. – 52, №1. – С. 122 – 133.
[2] *Крейн С.Г., Петунин Ю.И., Семенов Е.М.* Интерполяция линейных операторов. – М.: Наука, 1978. – 400с.
[3] *Гончаров В.Л.* Теория интерполирования и приближения функций. – М.: Гостехиздат, 1954. – 328с.
[4] *Стороженко Э.А., Освальд П., Кротов В.Г.* Прямые и обратные теоремы типа Джексона в пространствах L_p, $0 < p < 1$ // Мат. сб. – 1975. – 98, №3. – С. 395 – 415.
[5] *Runovski K.* On Jackson's type inequalities in Orlicz classes // Revista Mat. Comp. – 2001. – 14, №2. P. 394 – 404.
[6] *Стороженко Э.А., Освальд П.* Теоремы Джексона в пространствах $L_p\left(\mathbf{T}^n\right)$, $0 < p < 1$ // Сиб. мат. журн. – 1978. – 19, №4. С. 888 – 901.
[7] *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на эвклидовых пространствах. – М.: Мир, 1974. – 330с.

УДК 517.5

С. А. Пичугов
(Днепропетровский национальный университет железнодорожного транспорта им. акад. В. Лазаряна, Днепропетровск)

О теореме Джексона для периодических функций в метрических пространствах с интегральной метрикой. II

В пространствах $L_{\psi}(\mathrm{T}^m)$ периодических функций с метрикой $\rho(f,0)_{\psi}=\int\limits_{\mathrm{T}^m}\psi(|f(x)|)dx$, где ψ - функция типа модуля непрерывности, исследуется прямая теорема Джексона в случае аппроксимации тригонометрическими полиномами. Доказано, что прямая теорема Джексона имеет место тогда и только тогда, когда нижний показатель растяжения функции ψ не равен нулю.