

В.М. Богомаз

Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара

ПРО АЛГОРИТМ ЗНАХОДЖЕННЯ РЕГУЛЯРИЗАТОРІВ В ОДНОМУ КЛАСІ ЗАДАЧ ВЕКТОРНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ

Робота присвячена проблемі знаходження ефективних регуляризаторів в одному класі задач векторної оптимізації. Запропоновано новий алгоритм побудови таких регуляризаторів.

Работа посвящена проблеме поиска эффективных регуляризаторов в одном классе задач векторной оптимизации. Предложен новый алгоритм построения таких регуляризаторов.

The paper is sanctified to the problem of search of effective regularizators in one class of vector optimization problem. The new algorithm of construction of such regularizators is proposed.

Ключові слова: адаптована скаляризація, ефективний регуляризатор, частково впорядковані простори.

Вступ. Як відомо, при моделюванні багатьох практичних задач оптимального керування нелінійними системами для отримання більш якісного результату виникає необхідність врахування декількох показників якості. Для цього дуже широко залучаються задачі векторної оптимізації. В цій роботі розглядаються задачі векторної оптимізації з такими особливостями: цільове відображення володіє ослабленою властивістю напівнеперервності знизу, упорядковувальний конус не є тілесним, обмеження на керування та фазові змінні системи. В цьому випадку неможна бути впевненим, що множина допустимих пар в задачі векторної оптимізації є не порожньою. Це вимагає розгляду вихідної задачі як нерегулярної. Як було показано в роботі [1], зручним методом побудови ефективних керувань в таких задачах є залучення так званого Λ, μ -регуляризатору. Одним з варіантів побудови регуляризаторів такого типу є розгляд послідовності оштрафованих задач векторної оптимізації. В роботі [2] для побудови ефективних регуляризаторів залучався метод лінійної згортки. Але, суттєвим недоліком такого методу є відсутність впевненості в тому, що існує хоча б одна лінійна згортка цільового відображення, яка є напівнеперервною знизу відносно певних топологій просторів. В зв'язку з цим виникає проблема існування розв'язків в задачі мінімізації такої згортки. Таким чином, виникає потреба в розробці нових

алгоритмів побудови ефективних Λ, μ -регуляризаторів в розглянутому класі задач векторної оптимізації.

Отже, основною метою цієї роботи є доведення можливості залучення адаптивного алгоритму скаляризації, запропонованого авторами в роботі [3] до побудови Λ, μ -регуляризаторів в означеному класі задач векторної оптимізації.

Основні поняття та постановка задачі. Нехай U – банахів простір керувань, який є топологічно спряженим до деякого сепарабельного банахового простору та X є простором фазових змінних системи, який є рефлексивним. Топологічний простір $U \times X$ наділений τ -топологією, в якості якої обрано добуток *-слабкої топології в U та слабкої топології в X .

Нехай Z – простір з нульовим елементом θ_Z , який є дуальним до сепарабельного банахового простору V та наділений μ -топологією, з якою будемо пов'язувати *-слабку топологію в ньому. Будемо вважати, що простір V частково впорядкований опуклим замкненим загостреним конусом K з непорожньою алгебраїчною внутрішністю.

Нехай Ξ – деяка підмножина простору $U \times X$ та на ній задано цільове відображення $I : \Xi \rightarrow Z$.

Позначимо частковий порядок в просторі Z , породжений конусом Λ , через $\leq_\Lambda$, що означає наступне:

$$z_1 \leq_\Lambda z_2 \Leftrightarrow z_2 - z_1 \in \Lambda, \quad z_1 <_\Lambda z_2 \Leftrightarrow z_2 - z_1 \in \Lambda \setminus \theta_Z.$$

Означення 1. [1] Підмножину простору $Z \cup \{\infty\}$ будемо називати Λ_μ -інфімумом відображення $I : U \times X \rightarrow Z$ та позначати $\inf_{(u,x) \in \Xi}^{\Lambda, \mu} I(u, x)$, якщо вона є ефективним Λ_μ -інфімумом образу $I(\Xi)$, тобто

$$\inf_{(u,x) \in \Xi}^{\Lambda, \mu} I(u, x) = \begin{cases} \min(cl_\mu I(\Xi)), & \min(cl_\mu I(\Xi)) \neq \emptyset, \\ \{\infty\}, & \min(cl_\mu I(\Xi)) = \emptyset, \end{cases}$$

де $cl_\mu I(\Xi)$ – μ -замикання образу цільового відображення $I(\Xi)$.

Нехай $\{u_k, x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ – довільна послідовність в Z . Позначимо через $L^\mu \{u_k, x_k\}$ множину всіх μ -граничних точок цієї послідовності. Нехай $(u^0, x^0) \in U \times X$ – деякий фіксований елемент, визначимо наступну множину

$$L^{\tau \times \mu}(I, (u^0, x^0)) = \bigcup_{(u_k, x_k) \in \Theta_\tau(u^0, x^0)} L^\mu(I, (u_k, x_k)),$$

де $\Theta_\tau(u^0, x^0)$ — сукупність всіх послідовностей $\{(u_k, x_k)\}_{k=1}^\infty \subseteq U \times X$ таких, що $(u_k, x_k) \xrightarrow{\tau} (u^0, x^0)$ в $U \times X$.

Означення 2. [4] Цільове відображення $I: U \times X \rightarrow Z$ називається ері-напівнеперервним знизу в точці (u, x) , якщо виконується умова $I(u, x) = \inf^\Lambda L^{\tau \times \mu} I, (u, x)$, де операція $\inf^\Lambda A$ визначається наступним чином: для кожного $y \in Z$ виконується умова $y \leq_\Lambda \inf^\Lambda A$ тоді і тільки тоді, коли $y \leq_\Lambda z \quad \forall z \in A$. Якщо ця властивість виконується у всіх точках $(u, x) \in \Xi$, то відображення I називають ері-напівнеперервним знизу на Ξ .

Означення 3. Відображення $I: \Xi \rightarrow Z$ будемо називати опуклим, якщо для будь-яких $y_1, y_2 \in \Xi$ та $\lambda \in [0, 1]$ виконується умова $I(\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2) \leq \lambda I(y_1) + (1-\lambda)I(y_2)$.

В роботі [1] для знаходження ефективних (Λ, μ) -регуляризаторів в задачах векторної оптимізації множина Ξ розбивається на дві підмножини Ξ_1 та Ξ_2 такі, що: $\Xi_1 \neq \emptyset$ та $\Xi_1 \cap \Xi_2 = \emptyset$. Для апроксимації таких регуляризаторів запропоновано розглядати послідовність задач векторної оптимізації зі штрафом:

$$I_\varepsilon(u, x) = I(u, x) + \varepsilon^{-1} \beta(u, x) \rightarrow \inf^{\Lambda, \mu}, \quad (1.1)$$

$$(u, x) \in \Xi_1, \quad (1.2)$$

де відображення $I: U \times X \rightarrow Z$ та $\beta: U \times X \rightarrow Z$ є опуклими ері-напівнеперервним знизу та секвенційно напівнеперервним знизу відносно топологій τ та μ в просторах $U \times X$ та Z відповідно. Відображення β характеризує відстань від елементів множини Ξ_1 до елементів множини Ξ_2 та задовольняє умовам: $\beta(u, x) = \theta_Z$ при $(u, x) \in \Xi_2$, $\beta(u, x) \geq_\Lambda \theta_Z$ - в іншому випадку.

Означення 4. [1] Пару $(u^*, x^*) \in \Xi_1$ будемо називати (Λ, μ) -регуляризатором множини Ξ_2 , якщо виконується умова:

$$\beta(u^*, x^*) \in \inf_{(u, x) \in \Xi_1}^{\Lambda, \mu} \beta(u, x). \quad (1.3)$$

Позначимо сукупність всіх (Λ, μ) -регуляризаторів множини Ξ_2 через Ω .

Означення 5. [1] (Λ, μ) -регуляризатор $(\tilde{u}, \tilde{x}) \in \Xi_1$ множини Ξ_2 будемо називати ефективним, якщо виконується умова:

$$I(\tilde{u}, \tilde{x}) \leq_\Lambda I(u, x), \quad \forall (u, x) \in \Omega. \quad (1.4)$$

Нехай множина Ξ_1 є опуклою та замкнутою. Внаслідок теореми Мазура [5] вона є τ -компактною.

Означення 6. [3] При фіксованому $\varepsilon > 0$ пара $(u^*, x^*) \in \Xi_1$ називається (Λ, μ) -ефективним розв'язком задачі (1.1) – (1.2), якщо виконується умова $(I_\varepsilon(u^*, x^*) - \Lambda) \cap \text{cl}_\mu I_\varepsilon(\Xi_1) = \{I_\varepsilon(u^*, x^*)\}$. Множину всіх (Λ, μ) -ефективних розв'язків задачі (1.1) – (1.2) при фіксованому $\varepsilon > 0$ будемо позначати через $\text{Eff}_{\tau \times \mu}(\Xi_1; I_\varepsilon; \Lambda)$.

Означення 7. [3] При фіксованому $\varepsilon > 0$ пара $(u^*, x^*) \in \Xi_1$ називається $(\tau \times \mu)$ -узагальненим розв'язком задачі (1.1) – (1.2), якщо існують послідовність $\{(u_k, x_k)\}_{k=1}^\infty \subset \Xi_1$ та елемент $\xi \in \inf_{(u, x) \in \Xi_1}^{\Lambda, \mu} I_\varepsilon(u, x)$ такі, що виконуються умови: $(u_k, x_k) \xrightarrow{\tau} (u^*, x^*)$ в $U \times X$ та $I(u_k, x_k) \xrightarrow{\mu} \xi$ в Z при $k \rightarrow \infty$. Через $\text{GenEff}_{\tau \times \mu}(\Xi_1; I_\varepsilon; \Lambda)$ позначимо множину всіх $(\tau \times \mu)$ -узагальнених розв'язків.

В роботі [3] запропоновано адаптивний алгоритм скаляризації задач векторної оптимізації типу (1.1) - (1.2) для знаходження (Λ, μ) -ефективних розв'язків при фіксованому $\varepsilon > 0$, при залученні якого розв'язується параметризована квадратична задача мінімізації наступного вигляду:

$$F(y) = \|y\|_Y^2 \longrightarrow \inf_{y \in \Delta_{\eta, \zeta, \varepsilon}}, \quad (1.5)$$

$$\Delta_{\eta, \zeta, \varepsilon} = \{y \in Y : P_1(y) \in \Xi_1, I_\varepsilon(P_1(y)) \leq_\Lambda \eta + P_2(y)\zeta, P_2(y) + s \leq \|y\|_Y^2\}, \quad (1.6)$$

де $\eta, \zeta \in Z$ - задані елементи, Y - банахів простір, $P_1: Y \rightarrow U \times X$, $P_2: Y \rightarrow R$ - задані оператори. Всюди далі будемо вважати, що виконуються припущення:

а) елементи $\eta, \zeta \in Z$ обрані так, що існує хоча б один елемент $(u, x) \in \Xi_1$, який задовольняє умові $I(u, x) \leq_\Lambda \eta + \zeta$;

б) оператори $P_1: Y \rightarrow U \times X$ та $P_2: Y \rightarrow R$ є лінійними та такими, що для кожного $c > 0$ існує елемент $y \in Y$ такий, що: $P_1 y = (u, x)$, $\|y\|_Y \geq c$.

В роботі [3] отримано результат, який встановлює відповідність між (Λ, μ) - ефективними розв'язками задачі (1.1)-(1.2) та розв'язками задачі (1.5)-(1.6).

Теорема 1. Нехай Ξ_1 - τ -компактна підмножина простору $U \times X$, відображення $I: U \times X \rightarrow Z$ є локально обмеженим та ері-напівнеперервним знизу на Ξ_1 , $\beta: U \times X \rightarrow Z$ є секвенційно напівнеперервним знизу відносно топологій τ та μ в просторах $U \times X$ та Z відповідно, Y - простір, що є дуальним до деякого сепарабельного банахового простору, наділений *-слабкою топологією σ . Відображення P_1 та P_2 є неперервними в наступному сенсі: $P_1 y_k \xrightarrow{\tau} P_1 y$ в $U \times X$ та $P_2 y_k \rightarrow P_2 y$ в R як тільки $y_k \xrightarrow{\sigma} y$ в Y . Тоді існує константа $s > 0$ така, що $y_0 \in \Delta_{\eta, \zeta}$ - єдиний розв'язок задачі (1.5)-(1.6) і при цьому: якщо $P_1 y_0 = u_0, x_0 \in \text{GenEff}_{\tau \times \mu} \Xi_1; I; \Lambda$.

Алгоритм побудови регуляризаторів. Зафіксуємо значення параметру штрафу ε . Розглянемо властивості множин $\Delta_{\eta, \zeta, \varepsilon}$.

Твердження 1. Множина $\Delta_{\eta, \zeta, \varepsilon}$ є замкнутою.

Нехай $y_k \in \Delta_{\eta, \zeta, \varepsilon}$ - довільна послідовність така, що $y_k \rightarrow y^*$ в Y при $k \rightarrow \infty$. Тоді, враховуючи властивості неперервності оператора P_1 та τ -компактності множини Ξ_1 , маємо: $P_1 y_k \xrightarrow{\tau} P_1 y^* \in \Xi_1$. Внаслідок ері-напівнеперервності знизу відображення $I_\varepsilon u, x$ та неперервності операторів P_1 та P_2 , маємо:

$$I_\varepsilon P_1 y^* \leq_\Lambda \liminf_{k \rightarrow \infty} I_\varepsilon P_1 y_k \leq_\Lambda \lim_{k \rightarrow \infty} (\eta + P_2 y_k \zeta) = \eta + P_2 y^* \zeta,$$

$$P_2(y^*) + s = \lim_{k \rightarrow \infty} P_2(y_k) + s \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \|y_k\|^2 = \|y^*\|^2.$$

Отже, $y^* \in \Delta_{\eta, \zeta, \varepsilon}$, що підтверджує замкненість множини $\Delta_{\eta, \zeta, \varepsilon}$ та справедливості твердження 1.

Твердження 2. Множина $\Delta_{\eta, \zeta, \varepsilon}$ є опуклою.

Нехай y_1 та y_2 - довільні елементи множини $\Delta_{\eta, \zeta, \varepsilon}$. Для доведення твердження необхідно показати, що виконується включення: $\lambda y_1 + 1 - \lambda y_2 \in \Delta_{\eta, \zeta, \varepsilon}$ для будь-якого $\lambda \in [0, 1]$. Внаслідок опуклості множини Ξ_1 та лінійності відображення P_1 , маємо:

$P_1 \lambda y_1 + 1 - \lambda y_2 = \lambda P_1 y_1 + 1 - \lambda P_1 y_2 \in \Xi_1$. Враховуючи властивості опуклості відображення $I_\varepsilon u, x$ та лінійності відображення P_2 , маємо:

$$I_\varepsilon \lambda P_1 y_1 + 1 - \lambda P_1 y_2 \leq_\Lambda \lambda I_\varepsilon P_1 y_1 + 1 - \lambda I_\varepsilon P_1 y_2 \leq_\Lambda$$

$$\lambda \eta + 1 - \lambda \eta + \lambda P_2 y_1 + 1 - \lambda P_2 y_2 \zeta = \eta + P_2 \lambda y_1 + 1 - \lambda y_2 \zeta;$$

$$P_2 \lambda y_1 + 1 - \lambda y_2 + s = \lambda s + 1 - \lambda s + \lambda P_2 y_1 + 1 - \lambda P_2 y_2 \leq$$

$$\leq \lambda \|y_1\|_Y^2 + 1 - \lambda \|y_1\|_Y^2 \leq \|\lambda y_1 + 1 - \lambda y_2\|_Y^2.$$

Отже, $\lambda y_1 + 1 - \lambda y_2 \in \Delta_{\eta, \zeta, \varepsilon}$, що підтверджує опуклість множини $\Delta_{\eta, \zeta, \varepsilon}$ та справедливості твердження 2.

Твердження 3. Нехай $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{R}_+$ такі, що $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2$. Тоді $\Delta_{\eta, \zeta, \varepsilon_2} \subseteq \Delta_{\eta, \zeta, \varepsilon_1}$.

Доведення. Нехай $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2$. Тоді $\varepsilon_2^{-1} \beta P_1 y \leq_\Lambda \varepsilon_1^{-1} \beta P_1 y$ для всіх $P_1 y \in \Xi_1$. Отже, маємо: $I_{\varepsilon_1} P_1 y \leq_\Lambda I_{\varepsilon_2} P_1 y \leq_\Lambda \eta + P_2 y \zeta \forall P_1 y \in \Xi_1$. Наслідком цієї нерівності є вкладення $\Delta_{\eta, \zeta, \varepsilon_2} \subseteq \Delta_{\eta, \zeta, \varepsilon_1}$.

Позначимо через $\Delta_{\eta, \zeta}$ множину, елементами якої є σ -граничні точки (при $\varepsilon \rightarrow 0$) послідовностей $y_\varepsilon \in \Delta_{\eta, \zeta, \varepsilon}$, які задовольняють умові $y_\varepsilon \in \Delta_{\eta, \zeta, \varepsilon}$. Існування таких послідовностей пояснюється існуванням мінімізаторів у відповідних задачах $\inf_{y \in \Delta_{\eta, \zeta, \varepsilon}} \|y\|_Y^2$, що диктується умовами теореми 1.

Теорема 2. Нехай $y_\varepsilon \in \Delta_{\eta, \zeta, \varepsilon}$ є послідовністю розв'язків задачі (1.5)-(1.6) та ε є малим параметром, який утворює спадну послідовність додатних чисел. Тоді ця послідовність σ -збігається до елементу $y^* \in \Delta_{\eta, \zeta}$, образ якого $P_1 y^* = u^*, x^*$ є ефективним (Λ, μ) -регуляризатором множини Ξ_2 .

Доведення. Внаслідок теореми 1, маємо: при всіх $\varepsilon > 0$ існує константа $s > 0$ та єдиний мінімізатор в задачі (1.5)-(1.6) $y_\varepsilon \in \Delta_{\eta, \zeta, \varepsilon}$ такий, що

$$P_1 y_\varepsilon = u_\varepsilon, x_\varepsilon \in \text{GenEff}_{\tau \times \mu} \Xi_1; I_\varepsilon; \Lambda. \quad (2.1)$$

Отже, наслідком існування мінімізаторів $y_\varepsilon \in \Delta_{\eta, \zeta, \varepsilon}$ при кожному $\varepsilon > 0$ є обмеженість послідовності $y_\varepsilon \in \Delta_{\eta, \zeta, \varepsilon}$. Залучаючи теорему Банаха-Алаоглу, маємо:

мо: $y_\varepsilon \xrightarrow{\sigma} y^*$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Розглянемо послідовність пар $P y_\varepsilon = u_\varepsilon, x_\varepsilon$ $\varepsilon > 0$. Внаслідок τ -компактності множини Ξ_1 з цієї послідовності можна вилучити підпослідовність $u_\varepsilon, x_\varepsilon$ $\varepsilon > 0$ таку, що $u_\varepsilon, x_\varepsilon \xrightarrow{\tau} u^*, x^* \in \Xi_1$. Доведемо, що $u^*, x^* \in \Omega$. Припустимо, що це не так. Отже, існує така пара $v, y \in \Omega$, що $\beta v, y = \theta$. Таким чином, $I_\varepsilon u_\varepsilon, x_\varepsilon \not\leq_\Lambda I_\varepsilon v, y \equiv I v, y \quad \forall \varepsilon > 0$. З цього випливає:

$$\beta u_\varepsilon, x_\varepsilon \leq C\varepsilon, \quad (2.2)$$

де $C \in Z$ - константа в просторі Z . Переходячи до границі у співвідношенні (2.2) при $\varepsilon \rightarrow 0$ та враховуючи напівнеперервність знизу відображення β , маємо: $\beta u^*, x^* = 0$, що еквівалентно умові $u^*, x^* \in \Omega$. Отже, множина $\Delta_{\eta, \zeta}$ має вигляд: $\Delta_{\eta, \zeta, \varepsilon} = \{y \in Y : P_1(y) \in \Omega, I(P_1(y)) \leq_\Lambda \eta + P_2(y)\zeta, P_2(y) + s \leq \|y\|_Y^2\}$.

Перевіримо наступну умову $y^* \in \Delta_{\eta, \zeta}$. Враховуючи властивості неперервності оператора P_1 та τ -компактності множини Ξ_1 , маємо: $P_1 y_\varepsilon \xrightarrow{\tau} P_1 y^* \in \Xi_1$. Внаслідок ері-напівнеперервності знизу відображення $I_\varepsilon P_1 y$, неперервності операторів P_1 та P_2 та умови $P_1 y^* \in \Omega$, маємо:

$$I P_1 y^* = I_\varepsilon P_1 y^* \leq_\Lambda \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} I_\varepsilon P_1 y_\varepsilon \leq_\Lambda \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\eta + P_2 y_\varepsilon \zeta) = \eta + P_2 y^* \zeta.$$

Враховуючи опуклість множин $\Delta_{\eta, \zeta, \varepsilon}$ при кожному ε та залучаючи теорему Мазура до послідовності y_ε $\varepsilon > 0$, маємо: існує послідовність опуклих комбінацій цієї послідовності $\tilde{y}_\varepsilon$ $\varepsilon > 0$ така, що $\tilde{y}_\varepsilon \rightarrow y^*$ сильно в Y . Отже, мають місце наступні співвідношення:

$$P_2(y^*) + s^* = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} P_2(y_\varepsilon) + s_\varepsilon \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\tilde{y}_\varepsilon\|_Y^2 = \|y^*\|_Y^2.$$

Отже, $y^* \in \Delta_{\eta, \zeta}$. Наступним кроком буде доведення того, що елемент $y^* \in \Delta_{\eta, \zeta}$ є розв'язком задачі $\inf_{y \in \Delta_{\eta, \zeta}} \|y\|_Y^2$. Нехай існує інший елемент $\tilde{y} \in \Delta_{\eta, \zeta}$

такий, що $\|\tilde{y}\|_Y^2 < \|y^*\|_Y^2$. Але враховуючи умови твердження 3, маємо: $\Delta_{\eta, \zeta} \subseteq \Delta_{\eta, \zeta, \varepsilon}$ для всіх $\varepsilon > 0$, що забезпечує виконання нерівності: $\|y_\varepsilon\|_Y^2 < \|\tilde{y}\|_Y^2$, $y_\varepsilon \in \Delta_{\eta, \zeta, \varepsilon}$, $\forall \varepsilon > 0$.

Залучаючи властивості невід'ємності та напівнеперервності норми в просторі Y відносно σ -збіжності та переходячи до границі при $\varepsilon \rightarrow 0$, маємо:

$$0 \leq \|y^*\|^2 \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \|y_\varepsilon\|^2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \inf_{y \in \Delta_{\eta, \zeta, \varepsilon}} \|y\|_Y^2 \leq \|\tilde{y}\|_Y^2.$$

Але це суперечить тому, що $\tilde{y} \in \Delta_{\eta, \zeta}$ є мінімізатором задачі $\inf_{y \in \Delta_{\eta, \zeta}} \|y\|_Y^2$. Вна-

слідок властивості опуклості функціоналу $\|y\|_Y^2$, маємо: $y^* \in \Delta_{\eta, \zeta}$ є єдиним мінімізатором задачі $\inf_{y \in \Delta_{\eta, \zeta}} \|y\|_Y^2$. Залучаючи аргументи теореми 1, приходимо до висновку: $P_1 y^* = u^*, x^* \in \text{GenEff}_{\tau \times \mu} \Omega; I; \Lambda$, тобто пара u^*, x^* є ефективним Λ, μ -регуляризатором множини Ξ_2 .

Висновки. Для задач векторної оптимізації з ері-напівнеперервними знизу цільовими відображеннями та нетілесними упорядковувальними конусами запропоновано новий алгоритм знаходження ефективних Λ, μ -регуляризаторів, проблема побудови яких зводиться до розв'язування послідовності квадратичних задач мінімізації. Це дає можливість залучити більш ефективні обчислювальні методи до побудови таких регуляризаторів в означеному класі задач векторної оптимізації.

Бібліографічні посилання

1. **Богомаз В.М.** Про регуляризацию фазовых обмежений в одном классе задач векторной оптимизации // В.М. Богомаз, И.В. Нечай// Системні технології. – Дніпропетровськ: вид-во НМетАУ. 1(78) 2012. – с. 18-25.
2. **Богомаз В.Н.** О разрешимости одной задачи векторной оптимизации с фазовыми ограничениями // В.Н. Богомаз, П.И. Когут// Проблемы управления и информатики – 2012. – №3. – с. 31-45.
3. **Богомаз В.М.** Про квадратичну скаляризацию одного класса задач векторной оптимизации в банаховых пространствах // В.М. Богомаз, П.И. Когут// Вісник ДНУ, серія: моделювання №8, т.20, вип.4 – 2012. – с. 39-51.
4. **Довженко А.В.** Ері-напівнеперервні знизу відображення та їх властивості // А.В. Довженко, П. І. Когут // – Математичні студії. – 2011. – т.16. – №1. – с.86-96.
5. **Треногин В.А.** Функциональный анализ / В.А. Треногин – М: Наука, 1980. – 496с.

Надійшла до редколегії: 22.03.13.