

## КОРРЕКТИРОВКА РЕЗУЛЬТАТОВ РАСЧЕТА НАПРЯЖЕНИЙ ПО МКЭ МЕТОДОМ HSS

Проанализовано застосування методу Hot Spot Stress (HSS) у постановці лінійної поверхневої екстраполяції (LSE) для коректування результатів розрахунку, отриманих методом скінченних елементів (МСЕ) у випадку сингулярності напружень. Наведені приклади конструкцій й тестові приклади були розраховані за допомогою проектно-обчислювального комплексу SCAD for Windows (версія 11.3).

*Ключові слова:* метод скінченних елементів, сингулярність, збіжність результатів

Проанализировано применение метода Hot Spot Stress (HSS) в постановке линейной поверхностной экстраполяции (LSE) для корректировки результатов расчета, полученных методом конечных элементов (МКЭ) в случае сингулярности напряжений. Приведенные примеры конструкций и тестовые примеры были рассчитаны с помощью проектно-вычислительного комплекса SCAD for Windows (версия 11.3).

*Ключевые слова:* метод конечных элементов, сингулярность, сходимость результатов

The usage of the Hot Spot Stress (HSS) method by means of linear surface extrapolation (LSE) approach was analyzed for the correction of results of the Finite-Element Method (FEM) in case of singularity of stresses. The given examples of structures and testing examples were computed on the base of design-and-computation software SCAD for Windows (version 11.3).

*Keywords:* finite-element method, singularity, convergence of results

### Введение

В последние десятилетия в практике инженерной деятельности широчайшее распространение получил один из численных методов строительной механики – метод конечных элементов (МКЭ). Его аббревиатура уже стала одним из обязательных элементов различных научных работ и технических отчетов, анализирующих работу самых разнообразных видов инженерных конструкций, как строительных, так и машиностроительных.

Такая популярность МКЭ связана с несколькими причинами. Во-первых, большой интерес представляет оценка работы конструкции как единой пространственной системы, а не поэлементно, как это выполнялось ранее. При этом традиционные аналитические методы механики твердого тела, во многом, не позволяют с приемлемой точностью проанализировать подобные сложные объекты.

Во-вторых, имеется достаточно большое количество как теоретических (см., например, работы [1 – 5]), так и практических работ (см., например, [6 – 11]), посвященных применению МКЭ для расчета самых разнообразных видов конструкций.

В-третьих, и наверное самое главное, МКЭ, представленный в форме метода перемещений может быть достаточно просто формализован, что позволило создавать на основе этого доста-

точно мощные многозадачные проектно-вычислительные комплексы, как, например, описанные в работах [12 – 14].

### Проблема сходимости результатов

Известно, что в практике использования МКЭ одним из основных эмпирических правил, неоднократно приводимых в указанных выше работах, является необходимость сгущения конечно-элементной (КЭ) сетки для получения более точных результатов. Всевозрастающая мощность используемой в последние годы компьютерной техники позволила выполнять очень мелкую и подробную КЭ сетку, создавая и анализируя расчетные модели, количество степеней свободы в которых исчисляется миллионами. При этом, стремясь получить все более и более точные результаты, пользователи различных программных продуктов, реализующих МКЭ, используют все более и более мелкую сетку в зонах с повышенным уровнем, в первую очередь, напряжений. При этом ожидается количественная сходимость величины получаемых результатов, однако этого, к сожалению, зачастую не происходит.

Об этой неприятнейшей особенности МКЭ в форме метода перемещений широко заговорили относительно недавно. Появился даже специальный англоязычный термин Hot Spot и его более поздний русскоязычный аналог «особая

точка» для описания тех областей расчетной модели, в которых при сгущении КЭ сетки напряжения не только не сходятся, но и расходятся со все возрастающей скоростью. Такая ситуация, описываемая как сингулярность по напряжениям, наблюдается в местах сопряжения отдельных элементов конструкции между собой, т.е. фактически в любых участках, где угол сопряжения элементов сколь-нибудь отличен от нуля. При этом наблюдаемая сингулярность по напряжениям никак не связана с сингулярностью по перемещениям, сходимость которых оказывается достаточно хорошей.

Вместе с тем, оценка уровня напряжений в конструкции является одной из важнейших инженерных задач, на решение которой и нацелены, собственно, имеющиеся методы описания работы различных видов конструктивов, в том числе и сам МКЭ. Именно знание величины напряжений в различных участках конструкции и позволяет оценить возможность ее эксплуатации и применения по назначению в целом.

### Метод HSS

Для обхода данной проблемы был разработан и начал использоваться специальный метод – Hot Spot Stress. По своей сути это скорее не метод, а технология, позволяющая скорректировать результаты расчета напряжений, получаемые с помощью МКЭ. Его суть достаточно подробно описана во многих работах (см., например, [15 – 18]) и может быть наглядно проиллюстрирована графически на рис. 1, позаимствованном из работы [18].

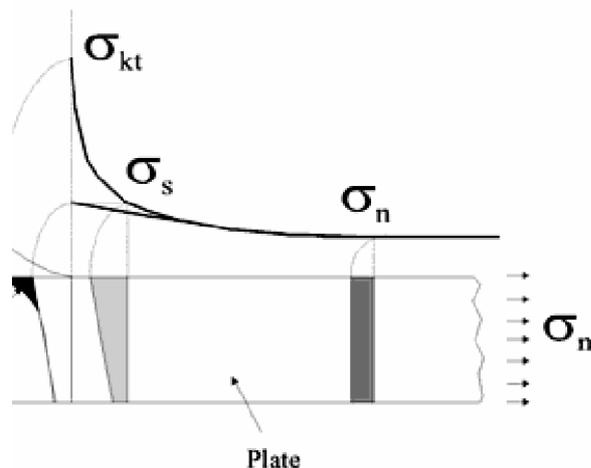


Рис. 1. Сущность применения метода HSS

Верхняя линия показывает уровень напряжений, получаемый при расчете МКЭ в угловой зоне сопряжения двух взаимно перпенди-

кулярных элементов. Она имеет вид резко возрастающей кривой по мере приближения к углу, и напряжения принимают очень высокие значения ( $\sigma_{kt}$ ). Однако на определенном удалении от угла градиент напряжений оказывается довольно низким ( $\sigma_n$ ). Этот факт и используется в одной из разновидностей метода HSS, основанной на выполнении линейной поверхностной экстраполяции (linear surface extrapolation – LSE). Напряжения МКЭ определяются на расстоянии половины ( $0,5 \cdot t$ ) и полутора ( $1,5 \cdot t$ ) толщин соединяемых листов. Затем выполняется линейная экстраполяция на угловую точку. Получаются некие условные напряжения ( $\sigma_s$ ), которые и принимают за окончательные в данной области. При этом размер КЭ должен составлять не более половины толщины  $t$ .

В связи с этим авторам данной публикации представляется необходимым обратить внимание на следующие особенности такого подхода. Во-первых, в специальной литературе четко не оговаривается, толщину какого из соединяемых элементов следует принимать в качестве параметра  $t$ , особенно в случае, если пересекаются, например, три взаимно перпендикулярные пластинчатые элементы (см. рис. 2). И, во-вторых, на каком из элементов в подобном случае следует выполнять отступление на указанные расстояния.

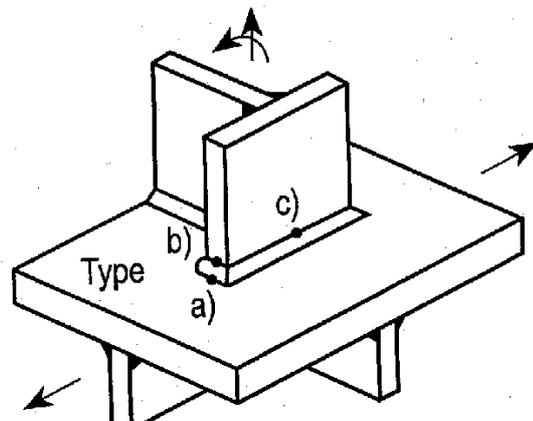


Рис. 2. Типичное угловое соединение элементов

Как указывается в работах [15 – 18] применение метода HSS в разновидности LSE позволяет получить вполне приемлемые результаты и таким образом решить проблему сходимости напряжений в угловой зоне. Попробуем использовать данную технологию на примере одного из широко известных отечественных программных продуктов, реализующих МКЭ – SCAD for Windows [13]. Для работы была выбрана одна из последних версий комплекса – версия 11.3.

Таким образом, *целью данной работы* является оценка возможности применения технологии метода HSS в разновидности LSE для расчета конструкций на примере проектно-вычислительного комплекса SCAD for Windows.

### Материалы и результаты исследований

Для оценки сходимости напряжений без и с учетом применения технологии метода HSS был выбран тестовый пример в виде горизонтальной консольной балки, прикрепленной к вертикальной пластине. Такой выбор был связан с тем, что в практике проектирования значительное число узлов и элементов конструкций напоминает по своей сути работу консольных элементов.

Так, например, на рис. 3 приведена КЭ модель несущего кронштейна. Модель была построена в проектно-вычислительном комплексе SCAD for Windows в виде пластинчатой схемы. Она представляет собой систему вертикальных ребер жесткости, соединенных с неподвижно закрепленным верхним горизонтальным основанием. Нагрузка прикладывается в нижней части кронштейна в горизонтальном направлении. Таким образом, кронштейн, выражаясь языком строительной механики, работает по консольной схеме.

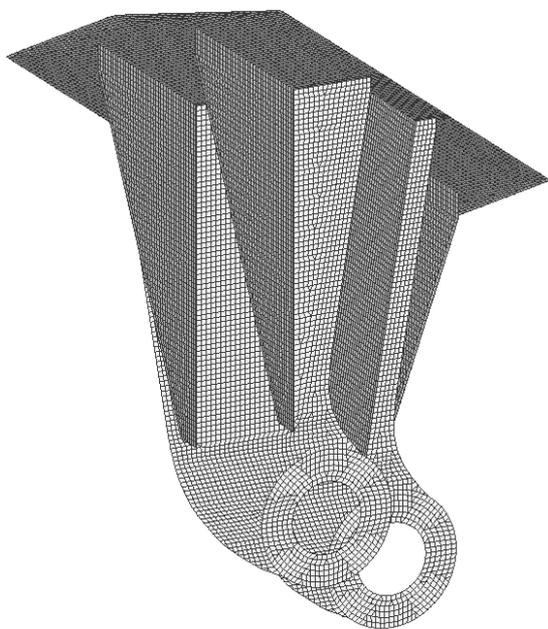


Рис. 3. КЭ модель несущего кронштейна

Выполненный расчет напряжений МКЭ позволил получить довольно неравномерную картину их распределения с явно выраженной

концентрацией в верхней зоне стыковки ребер с горизонтальным основанием. Она приведена на рис. 4, где более темным цветовым оттенкам соответствует более высокий уровень напряжений. Зона концентрации носит явно выраженный локальный характер и представлена на рисунке в виде небольших пятен.

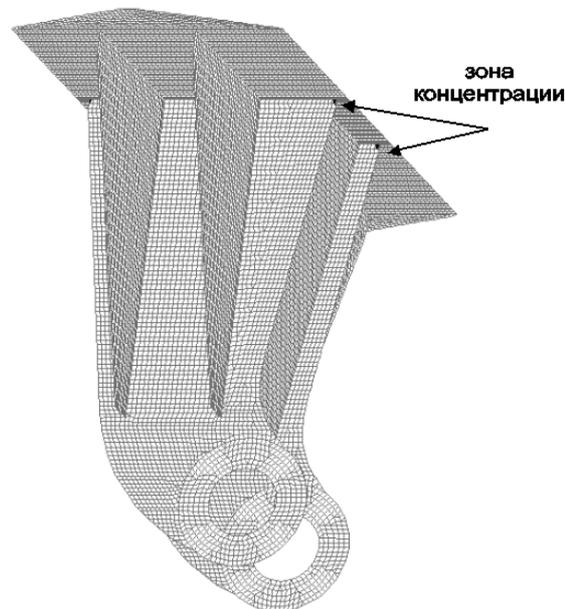


Рис. 4. Зона концентрации напряжений в модели несущего кронштейна

Казалось бы, что достаточно логичным был бы отказ от рассмотрения напряжений в данной зоне и анализ их в другом месте конструкции. Во многих случаях так и поступают, считая, что при этом справедливой оказывается теория приспособляемости материала, а локальные напряжения в целом являются неопасными. Тогда возникает иной вопрос, а в каком же месте необходимо рассматривать напряжения и какие из них считать критерийными?

Применение метода HSS фактически уже дает ответ на эти вопросы – анализировать напряжения нужно именно в зоне их максимума, получаемого с помощью расчетов по МКЭ. Все иные участки конструкции дают заведомо лучшую картину.

Заметим, также, что приведенные на рис. 4 участки концентрации напряжений являются наиболее нагруженными участками конструкции кронштейна, как и предполагает консольная схема. При этом полученный характер изменения напряжений в данной зоне качественно соответствует приведенному на рис. 1.

Сгущение КЭ сетки в рассматриваемой модели приводит к расходимости напряжений по

закону, близкому к логарифмическому, что наглядно видно из графика, представленного на рис. 5. По горизонтальной оси на графике от-

ложен размер КЭ в мм, по вертикальной оси – величина напряжений в МПа.

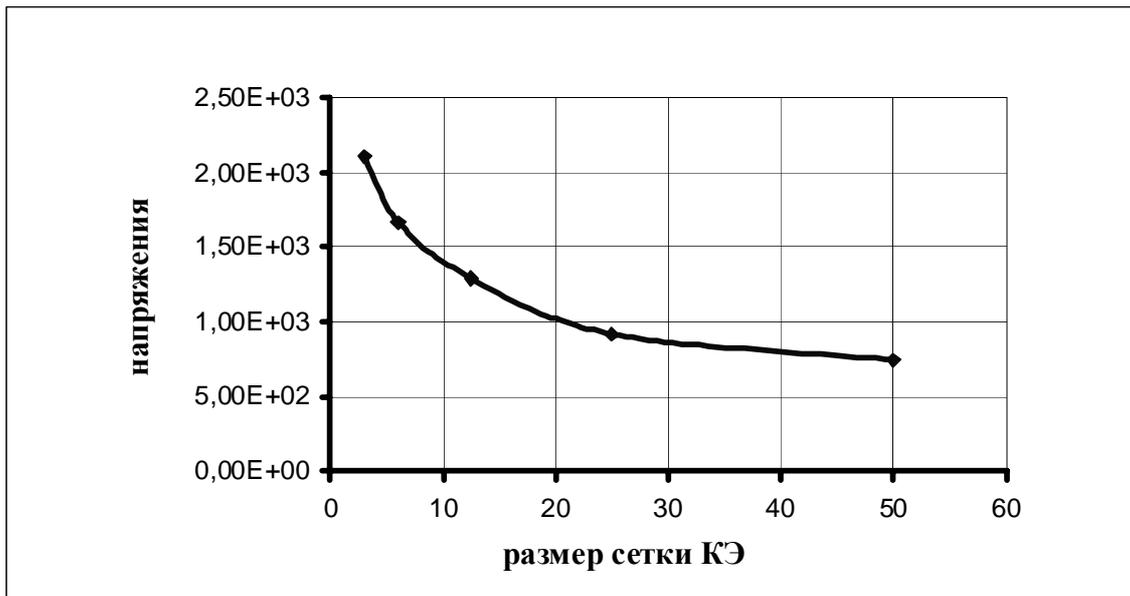


Рис. 5. Сходимость напряжений в зоне концентрации для модели несущего кронштейна

На основании проанализированного характера работы несущего кронштейна была выбрана тестовая модель в виде консольной балки, прикрепленной к вертикальной пластине (рис. 6). Модель представляет собой пластинчатую систему, составленную из изопараметрических оболочечных КЭ типа № 44.

Закрепления принимались по верхней и нижней кромкам опорной пластины. Нагружение задавалось в виде сосредоточенной силы величиной 1000 кг, приложенной на консоли балки.

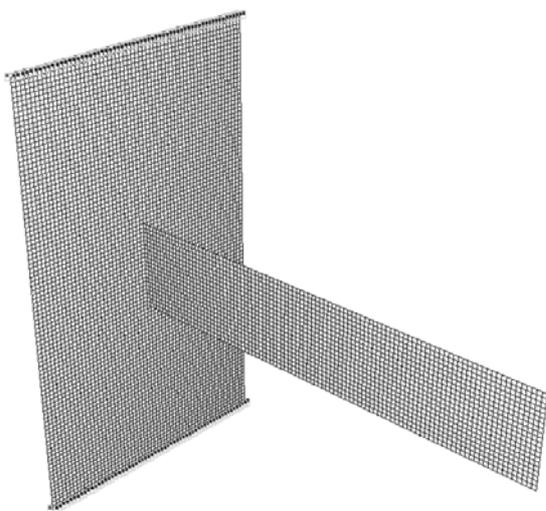


Рис. 6. Тестовая КЭ модель консольной балки

Высота поперечного сечения консольной балки принималась 100 мм и оставалась неизменной во всех сериях вычислительных экспериментов. Толщина поперечного сечения изменялась и принималась равной 10 и 20 мм. Вылет консоли составил 500 мм.

Размеры вертикальной пластины принимались 500 × 300 мм. Толщина варьировалась в ходе проведения серии расчетов и принималась 10, 20, 40 и 70 мм. Также отдельно рассматривался случай отсутствия вертикальной пластины, когда консольная балка была защемлена в основании. Это теоретически соответствует случаю бесконечно большой толщины вертикальной пластины.

Расчеты выполнялись в две серии. Для серии № 1 толщина консольной балки принималась  $t = 10$  мм, для серии № 2 –  $t = 20$  мм. Для обеих серий расчеты выполнялись с последовательным двукратным сгущением сетки КЭ – 5, 2,5 и 1,25 мм. Задача решалась в линейной постановке.

Полученные результаты расчетов для серии № 1 приведены в табл. 1 – 6.

В табл. 1 – 5 приведены значения максимальных эквивалентных напряжений (в МПа) по верхней кромке консольной балки в угловой точке  $(0 \cdot t)$ , а также в точках на расстоянии  $0,5 \cdot t$  и  $1,5 \cdot t$ . В качестве параметра  $t$  принималась толщина поперечного сечения консольной балки. Также, в таблицах приведено значение на-

пряжений, рассчитанное с помощью LSE-подхода.

Таблица 1

**Эквивалентные напряжения (серия № 1)  
для модели консольной балки (10 мм)**

Размер КЭ, мм	1,5·t	0,5·t	0·t	LSE
5	585	1253	1783	1587
2,5	570	1194	2238	1506
1,25	568	1158	2687	1453

Таблица 2

**Эквивалентные напряжения (серия № 1)  
для модели консольной балки (20 мм)**

Размер КЭ, мм	1,5·t	0,5·t	0·t	LSE
5	356	524	655	608
2,5	354	495	775	566
1,25	354	485	913	551

Таблица 3

**Эквивалентные напряжения (серия № 1)  
для модели консольной балки (40 мм)**

Размер КЭ, мм	1,5·t	0,5·t	0·t	LSE
5	287	349	405	380
2,5	287	329	469	350
1,25	287	323	549	341

Таблица 4

**Эквивалентные напряжения (серия № 1)  
для модели консольной балки (70 мм)**

Размер КЭ, мм	1,5·t	0,5·t	0·t	LSE
5	278	325	372	349
2,5	278	307	429	322
1,25	278	302	498	314

Таблица 5

**Эквивалентные напряжения (серия № 1)  
для модели консольной балки (заделка)**

Размер КЭ, мм	1,5·t	0,5·t	0·t	LSE
5	275	320	366	343
2,5	275	302	422	316
1,25	275	296	494	307

В табл. 6 приведены значения максимальных вертикальных прогибов для всех рассчитанных случаев (в мм). Значение прогиба принималось по средней линии консольной балки.

Таблица 6

**Прогибы (серия № 1)  
для модели консольной балки**

Размер КЭ, мм	5	2,5	1,25
10 мм	18,4	18,5	18,5
20 мм	4,6	4,6	4,6
40 мм	2,7	2,7	2,7
70 мм	2,5	2,5	2,5
заделка	2,5	2,5	2,5

Полученные результаты расчетов для серии № 2 приведены в табл. 7 – 12.

В табл. 7 – 11 приведены значения максимальных эквивалентных напряжений (в МПа) по верхней кромке консольной балки в угловой точке (0·t), а также в точках на расстоянии 0,5·t и 1,5·t. В качестве параметра t, как и в серии тестовых задач № 1, принималась толщина консольной балки. Также, в таблицах приведено значение напряжений, рассчитанное с помощью LSE-подхода.

Таблица 7

**Эквивалентные напряжения (серия № 2)  
для модели консольной балки (10 мм)**

Размер КЭ, мм	1,5·t	0,5·t	0·t	LSE
5	183	515	1237	681
2,5	182	488	1601	641
1,25	182	482	1938	632

Таблица 8

**Эквивалентные напряжения (серия № 2)  
для модели консольной балки (20 мм)**

Размер КЭ, мм	1,5·t	0,5·t	0·t	LSE
5	154	252	436	301
2,5	155	246	521	292
1,25	155	245	615	290

Таблица 9

**Эквивалентные напряжения (серия № 2)  
для модели консольной балки (40 мм)**

Размер КЭ, мм	1,5·t	0,5·t	0·t	LSE
5	139	160	220	171
2,5	139	158	256	168
1,25	139	158	300	168

Таблица 10

**Эквивалентные напряжения (серия № 2)  
для модели консольной балки (70 мм)**

Размер КЭ, мм	1,5·t	0,5·t	0·t	LSE
5	136	145	189	150
2,5	136	144	218	148
1,25	136	144	259	148

Таблица 11

**Эквивалентные напряжения (серия № 2)  
для модели консольной балки (заделка)**

Размер КЭ, мм	1,5·t	0,5·t	0·t	LSE
5	135	141	183	144
2,5	135	140	211	143
1,25	135	140	247	143

В табл. 12 приведены значения максимальных вертикальных прогибов для всех рассчитанных случаев (в мм). Значение прогиба, как и в серии тестовых задач № 1, принималось по средней линии консольной балки.

Таблица 12

**Прогибы (серия № 2)  
для модели консольной балки**

Размер КЭ, мм	5	2,5	1,25
10 мм	16,7	16,8	16,9
20 мм	3,3	3,3	3,4
40 мм	1,5	1,5	1,5
70 мм	1,3	1,3	1,3
заделка	1,2	1,2	1,2

Картина напряженного состояния оставалась качественно одинаковой во всех рассмотренных случаях (рис. 7). Зона концентрации напряжений выделена более темным цветом.

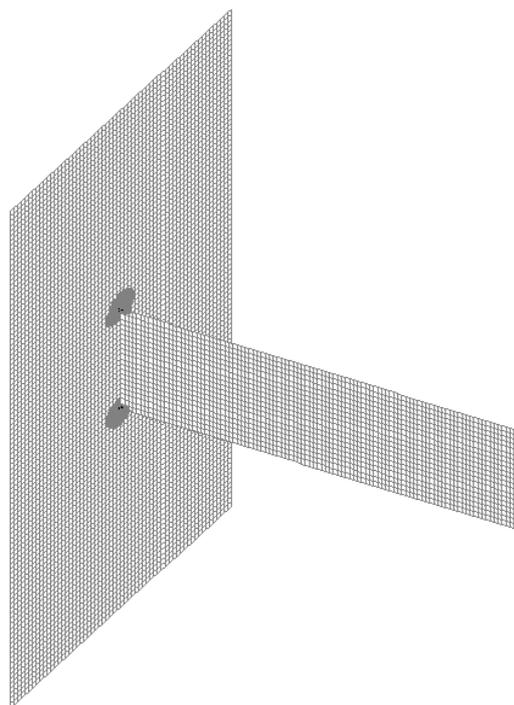


Рис. 7. Напряженное состояние  
тестовой модели консольной балки

Как видно из полученных результатов, при сгущении КЭ сетки сходимость напряжений для угловой точки для всех рассмотренных вариантов, рассчитанных с помощью МКЭ, отсутствует. Однако, на определенном удалении от угловой точки (в частности, уже на расстоянии 0,5·t) наблюдается достаточно устойчивая сходимость. В свою очередь, применение технологии LSE также позволяет получить сходимость напряжений и в угловой точке, причем наблюдается так называемая сходимость «сверху».

Так, для серии № 1 при толщине вертикальной пластины 10 мм откорректированное значение эквивалентных напряжений по технологии LSE для угловой точки составляет примерно 1400 МПа, при толщине 20 мм – 520 МПа, при толщине 40 мм – 3300 МПа, при толщине 70 мм – 300 МПа и для случая жесткой заделки консольной балки – 300 МПа. Заметим, что теоретическое значение напряжения в угловой точке, вычисленное методами сопромата для случая жестко защемленной консольной балки в данной серии тестовых задач, также составляет величину 300 МПа.

Для серии № 2 при толщине вертикальной пластины 10 мм откорректированное значение эквивалентных напряжений по технологии LSE для угловой точки составляет примерно 620 МПа, при толщине 20 мм – 280 МПа, при толщине 40 мм – 165 МПа, при толщине 70 мм – 145 МПа и для случая жесткой заделки консольной балки – 140 МПа. Заметим, что теоретическое значение напряжения в угловой точке, вычисленное методами сопромата для случая жестко защемленной консольной балки в данной серии тестовых задач, составляет величину 150 МПа.

С величиной перемещений подобных проблем со сходимостью не возникает. Наблюдается достаточно устойчивый результат независимо от крупности КЭ сетки и толщин конструктивных элементов.

Единственным вопросом, остающимся открытым в данной ситуации, является вопрос об адекватности полученных значений напряжений, в особенности для случаев тонкостенных конструкций. Даже для толщины 20 мм уровень напряжений намного превышает величину допускаемых напряжений сталей, из которых чаще всего изготавливаются большинство строительных и машиностроительных конструкций (230...260 МПа). Принимая во внимание, что толщина используемых в реальных конструкциях стальных листов во многих случаях составляет 8...16 мм, получаемый уровень напряжений следует считать достаточно высоким.

Возвращаясь к примеру несущего кронштейна (см. рис. 3), отметим, что применив для этого случая технологию метода HSS с использованием LSE, можно получить напряжение в угловой точке порядка 1000 МПа. Однако данный кронштейн с аналогичной конструкцией успешно эксплуатируется в одной из тяговых машин отечественного железнодорожного парка уже на протяжении около 10 лет. Поэтому полученный результат требует более тщательной проверки.

Рассмотрим еще один пример строительной конструкции – бункер для угля. Его КЭ модель приведена на рис. 8 (в силу симметрии конструкции смоделирована ее четверть). Картина напряженного состояния, полученная по результатам расчета МКЭ, приведена на рис. 9. Одной из зон концентрации напряжений является зона стыковки горизонтальных ребер жесткости со стенкой (на рис. 9 отмечено стрелками).

Применив технологию метода HSS с использованием LSE, можно получить напряжение в этой зоне порядка 550 МПа. Однако, как и в случае с несущим кронштейном, бункерные емкости аналогичной конструкции эксплуатируются на различных предприятиях в течение десятков лет, испытывая при этом не только статические, но и динамические воздействия. Такие факты вызывают больше вопросов, чем дают ответов.

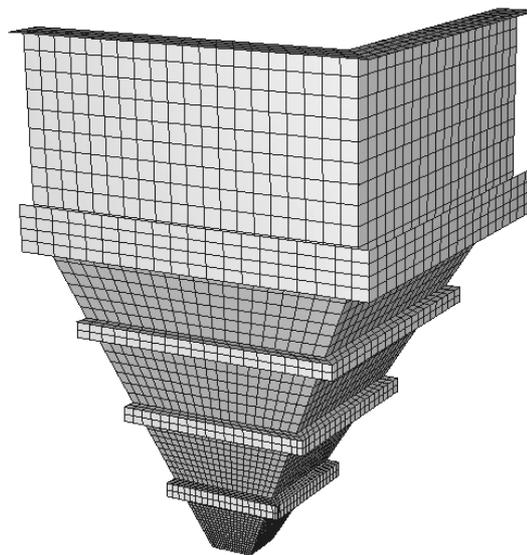


Рис. 8. КЭ модель бункера для угля

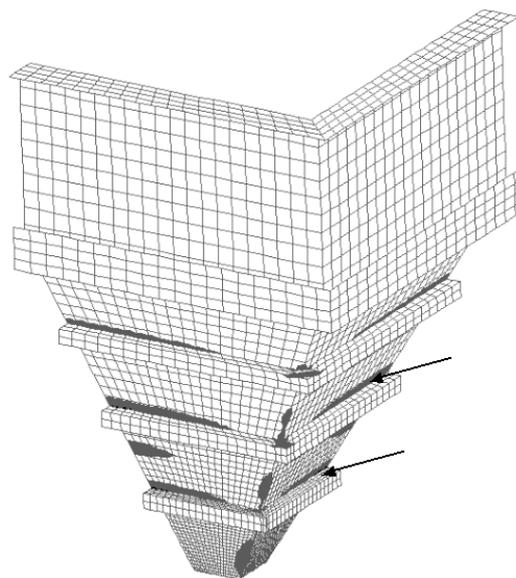


Рис. 9. Напряженное состояние модели бункера для угля

Таким образом, применение технологии метода HSS для корректировки результатов расчета МКЭ требует более детального анализа и, возможно, постановки и проведения специальных экспериментальных исследований.

## Выводы

На основе проведенных исследований возможно констатировать следующее.

1. В зоне стыковки пластинчатых КЭ под любым углом, отличным от нуля, имеет место сингулярность по напряжениям, а сама зона является «особой точкой», в которой простое считывание результатов МКЭ является необоснованным.

2. Технология корректировки результатов расчета напряжений МКЭ с помощью HSS метода на основе LSE позволяет получить их количественную сходимость для «особых точек» независимо от густоты КЭ сетки.

3. Уровень откорректированных напряжений существенно возрастает с уменьшением толщины элементов конструкции и в отдельных случаях многократно превышает ожидаемый теоретический уровень, что недостаточно хорошо увязывается с накопленным опытом проектирования аналогичных конструкций.

4. По всей видимости, требуется экспериментальное изучение данного вопроса с целью установления окончательной возможности использования технологии метода HSS для корректировки результатов МКЭ.

5. Возможно, одним из путей, позволяющих разрешить проблему с сингулярностью напряжений в МКЭ, был бы отказ от использования формы метода перемещений и переход к форме метода сил, а возможно и к комбинированной форме.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Зенкевич, О. Метод конечных элементов в технике [Текст] / О. Зенкевич : [пер. с англ.]. – М.: Мир, 1975. – 542 с.
2. Стренг, Г. Теория метода конечных элементов [Текст] / Г. Стренг, Дж. Фикс : [пер. с англ.]. – М.: Мир, 1977. – 350 с.
3. Розин, Л. А. Основы метода конечных элементов в теории упругости [Текст] / Л. А. Розин. – Л.: ЛПИ, 1972. – 77 с.
4. Бате, К. Численные методы анализа и метод конечных элементов [Текст] / К. Бате, Е. Вилсон : [пер. с англ.]. – М.: Стройиздат, 1982. – 200 с.
5. Основы метода конечных элементов [Текст] / В. И. Большаков [и др.]. – Д.: ПГАСА, 2000. – 255 с.
6. Розин, Л. А. Метод конечных элементов. Расчет гидротехнических сооружений на ЭВМ [Текст] / Л. А. Розин. – Л.: Энергия, 1971. – 214 с.

7. Бурман, З. И. Расчет тонкостенных подкрепленных оболочек методом конечных элементов с применением ЭЦВМ [Текст] / З. И. Бурман, В. И. Лукашенко, М. Т. Тимофеев. – Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1973. – 570 с.
8. Постнов, В. А. Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций [Текст] / В. А. Постнов, В. С. Калинин, Д. М. Ростовцев. – Л.: Судостроение, 1974. – 342 с.
9. Немчинов, Ю. И. Расчет пространственных конструкций (методом конечных элементов) [Текст] / Ю. И. Немчинов. – К.: Будівельник, 1980. – 230 с.
10. Метод конечных элементов в проектировании транспортных сооружений [Текст] / А. С. Городецкий [и др.]. – М.: Транспорт, 1981. – 143 с.
11. Перельмутер, А. В. Расчетные модели сооружений и возможность их анализа [Текст] / А. В. Перельмутер, В. И. Сливкер. – К.: ВПП «Компас», 2001. – 448 с.
12. Алямовский, А. А. Solid Works / COSMOS Works. Инженерный анализ методом конечных элементов [Текст] / А. А. Алямовский. – М.: ДМК Пресс, 2004. – 432 с.
13. SCAD для пользователя [Текст] / В. С. Карпиловский [и др.]. – К.: ВВП Компас, 2000. – 332 с.
14. Басов, К. А. ANSYS в примерах и задачах [Текст] / К. А. Басов; под общ. ред. Д. Г. Красковского. – М.: КомпьютерПресс, 2002. – 224 с.
15. Fricke, W. Recommended Hot-Spot Analysis Procedure for Structural Details of Ships and FPSOs Based on Round-Robin FE Analysis [Electron. resource] / W. Fricke // Int'l J. of Offshore and Polar Engineering. – 2002. – Vol. 12, No 1. – CD-R.
16. Maddox, C. J. Hot-Spot Stress Design Curves for Fatigue Assessment of Welded Structures [Electron. resource] / C. J. Maddox // Int'l J. of Offshore and Polar Engineering. – 2002. – Vol. 12, No 2. – CD-R.
17. Nazari, A. Application of the Hot Spot Stress Method to the Fatigue Assessment of Hollow Section Shiploader Boom Connections [Electron. resource] / A. Nazari, J. Durack // Proc. of 5<sup>th</sup> Australasian Congr. on Appl. Mechanics ACAM-2007. – Brisbane, 2007. – CD-R.
18. Bard, W. T. Fatigue Assessment of Aluminum Ship Details by Hot-Spot Stress Approach [Text] / W. T. Bard, W. Xiaozhi, B. Stig // ABS Technical Papers, 2007. – P. 255-271.

Поступила в редколлегию 16.05.2011.

Принята к печати 25.05.2011.